

ENCICLOPEDIA
METÓDICA
LAROUSSE

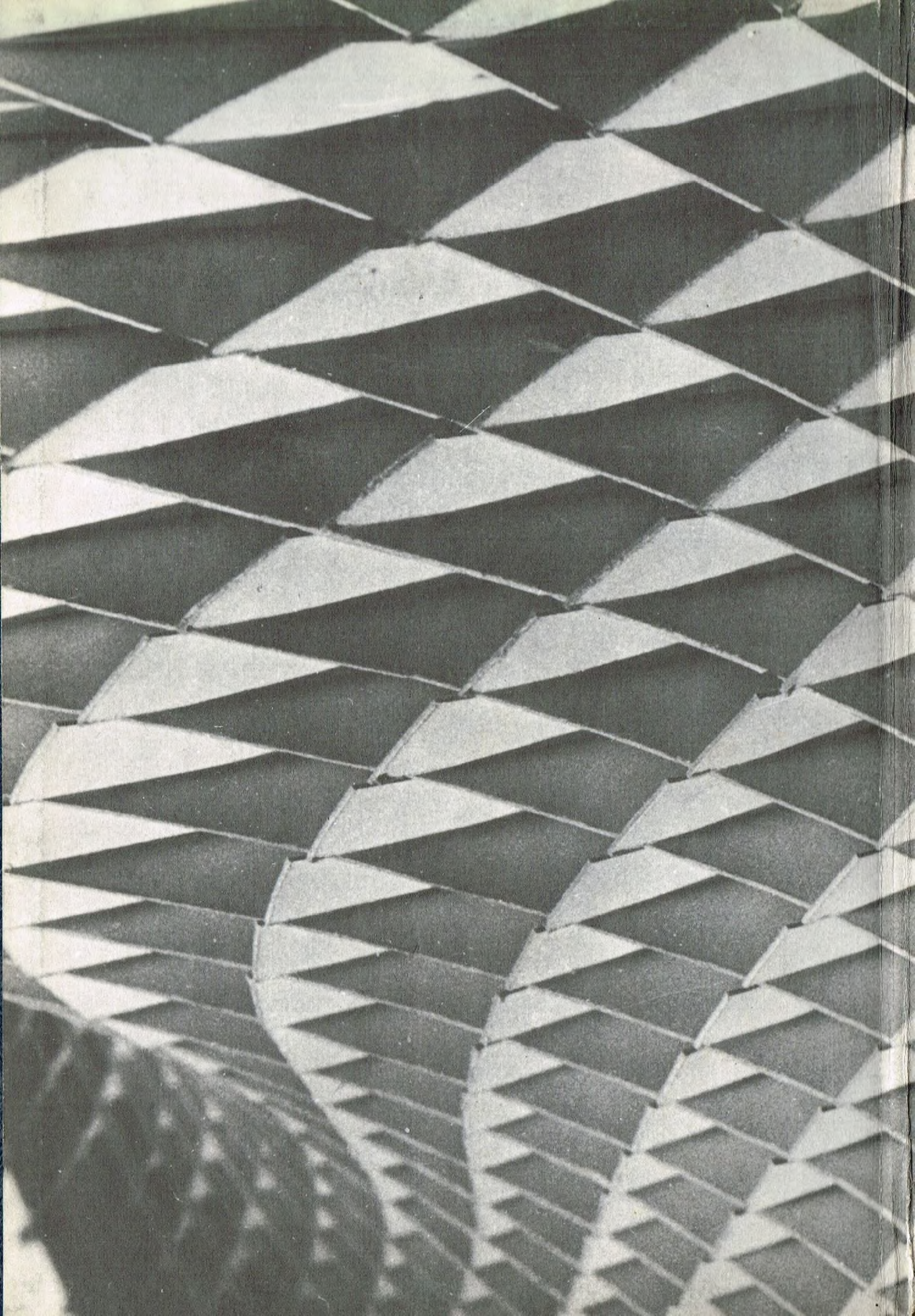
5

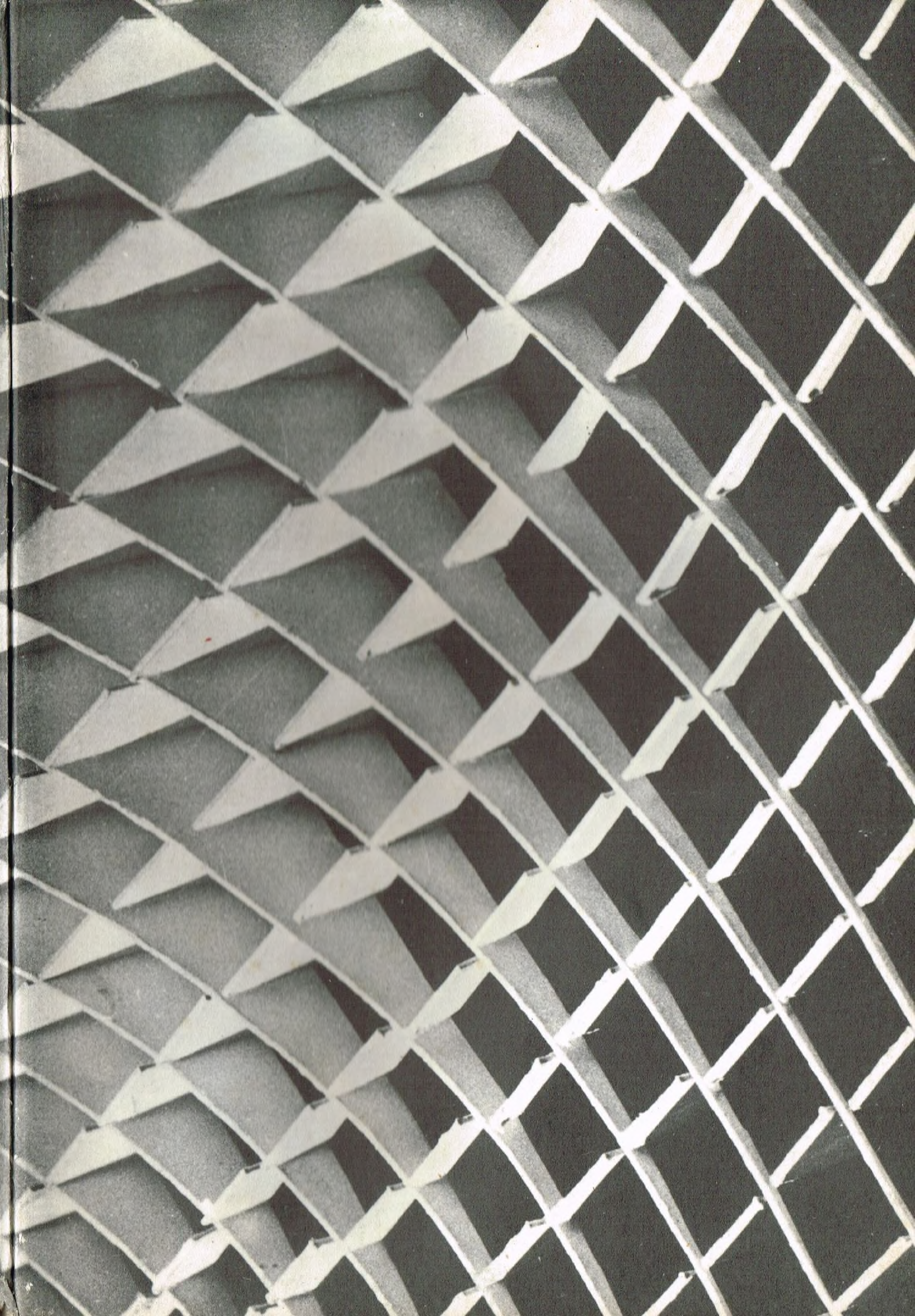












ENCICLOPEDIA

EDITORIAL LAROUSSE, 17, RUE DU MONTPARNASSE, PARÍS - VI

adaptación hispanoamericana del
GRAND MÉMENTO
dirigido por
Paul AUGÉ

METÓDICA LAROUSSE

5

en seis volúmenes

publicada bajo la dirección de Ramón GARCÍA-PELAYO y GROSS
miembro correspondiente de la Academia de San Dionisio de Ciencias, Artes y Letras, de la Academia Boliviana de la Historia, del Instituto Gonzalo Fernández de Oviedo del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, de la Real Academia de Bellas Artes de San Telmo, de la Real Academia Hispanoamericana, y del Seminario de Estudios Americanistas

VALENTÍN GÓMEZ, 3530, BUENOS AIRES R. 13
MARSELLA 53, ESQ. NÁPOLES, MÉXICO 6, D.F.



El presente volumen corresponde a la *última edición* (revisada y corregida) de esta obra. La fecha del *copyright* más abajo mencionada no concierne sino al depósito, en Washington, de la primera edición.

ÍNDICE GENERAL

matemáticas

ciencias naturales

LÁMINAS FUERA DE TEXTO

AUTORES

ACQUARONI (José Luis).

ALVAJAR (César).

ARANGUREN (José Luis L.), doctor en Filosofía, catedrático de Ética de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Madrid.

ARGÚAS (Margarita), juez de la Cámara Nacional de Apelaciones en lo Civil de la Capital Federal, profesora adjunta a cargo de la cátedra titular de Derecho Internacional Privado de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

AUBOYER (Jeannine), conservador del museo Guimet, de París.

BABELON (Jean), doctor en Letras, profesor de la Escuela del Louvre, ex miembro del Instituto de Altos Estudios Hispánicos de París.

BAHON (Jean), catedrático de Geografía e Historia, profesor en el Instituto Louis-le-Grand, de París.

BALLESTEROS GAIBROIS (Manuel), doctor en Filosofía y Letras, doctor en Etnología, Antropología y Lingüística americanas, catedrático de Historia de América Prehispánica en la Universidad de Madrid, director del Seminario de Estudios Americanistas, correspondiente de la Real Academia de la Historia de Madrid, miembro de honor de las Academias de Geografía e Historia de La Paz, Lima y Buenos Aires.

BARBAGELATA (Hugo D.), miembro correspondiente del Instituto Histórico y Geográfico del Uruguay, miembro de la Academia Nacional de Letras del Uruguay, delegado permanente del Uruguay en la U. N. E. S. C. O.

BARDY (canónigo Gustave), doctor en Teología y doctor en Letras.

BARÓN CASTRO (Rodolfo), miembro numerario de la Academia Salvadoreña de la Historia, correspondiente de la Real Academia de la Historia de Madrid, miembro numerario de la Academia Salvadoreña de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española, vicepresidente del Consejo Ejecutivo de la U. N. E. S. C. O.

BARRERA (Isaac J.), director de la Academia Ecuatoriana de la Lengua, titular de la Sección de Historia de la Casa de la Cultura Ecuatoriana, correspondiente de la Real Academia Española, de la Real Academia de la Historia de Madrid y de las Academias de la Historia de Buenos Aires, Venezuela y Chile.

BARY (P), ingeniero E. P. C.

BAUDRILLART (André), ex miembro de la Escuela Francesa de Roma, catedrático de Letras.

BERNARD (Roger), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior, profesor de la Escuela Nacional de Lenguas Orientales de París.

BERTIN (Léon), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior de París, catedrático de Ciencias Naturales, doctor en Ciencias, profesor en el Museo de Historia Natural de París.

BIELSA (Rafael), profesor titular de Derecho Administrativo de la Universidad Nacional de Buenos Aires, doctor *honoris causa* de la Universidad de París, miembro del Instituto Internacional de Derecho Público, de París, y del Instituto Internacional de Ciencias Administrativas, de Bruselas.

BONNAULT (Claude de), licenciado en Letras y en Derecho, consejero histórico de la prov. de Quebec.

BOST (pastor Ch.).

BOUCAU (Henri), catedrático de Historia y Geografía, ex Inspector de Instrucción Pública.

BOUCHENY (Gaston), profesor honorario del colegio Sainte-Barbe.

BOULANGER (Françoise), doctora en Ciencias Físicas, profesora auxiliar en la Facultad de Ciencias de la Universidad de París.

BOULGAKOFF (arcipreste Sergio), ex profesor de la Universidad de Moscú, profesor del Instituto Ruso de Teología Ortodoxa.

BRÉHIER (Émile), miembro del Instituto de Francia.

BRONARSKI (J.), profesor de la Universidad de Friburgo (Suiza).

CABALLERO BONALD (J. M.), ex profesor de Literatura Española e Hispanoamericana en la Universidad Nacional de Colombia.

CABRAL (Julio E.), jefe de Asuntos Administrativos de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, vocal de la Comisión del Código de la Edificación, jefe de Trabajos Prácticos de Derecho Administrativo de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

CABRAL (Luis Carlos), juez de la Cámara de Apelaciones en lo Criminal de Buenos Aires, profesor titular de Derecho Penal de la Universidad Católica de Buenos Aires, profesor adjunto de Derecho Penal de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

CABRERO FERNÁNDEZ (Leoncio), profesor de la Universidad de Madrid, subdirector del Seminario de Estudios Americanistas de Madrid, miembro del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

CÁCERES LARA (Víctor), socio activo de la Sociedad de Geografía e Historia de Honduras, académico de número de la Academia Hondureña de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española, catedrático de Historia Nacional en el Curso de Ciencias Básicas de la Universidad Autónoma de Honduras.

CARVALHO (Carlos Delgado de), catedrático de Geografía en el Colegio Pedro II, profesor de Historia en la Facultad Nacional de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad del Brasil.

CASTRO (Therezinha de).

CENTURIÓN (Carlos R.), doctor en Derecho y Ciencias Sociales en la Universidad de Asunción, presidente del Instituto Paraguayo de Letras, miembro de la Academia Paraguaya de la Lengua Española, correspondiente de la Real Academia Española y de las Reales Academias de la Historia y de Ciencias Morales y Políticas de Madrid.

CLERC (Charly), profesor de Literatura Francesa en la Escuela Politécnica Federal de Zürich.

COISCOU HENRÍQUEZ (Máximo), profesor de Metodología y Crítica Históricas, y de Historia Nacional Dominicana en la Universidad de Santo Domingo.

COLOMBIER (Pierre du), crítico de arte.

COQUELIN (Louis).

CORAL-RÉMUSAT (condessa *de*), del Museo Guimet de París.

CORTÁZAR (Roberto), doctor en Filosofía y Letras, ex catedrático de Lenguas Latina y Griega, ex presidente de la Academia Colombiana de la Historia.

COTO CONDE (José Luis), miembro de la Academia Costarricense de la Historia, correspondiente de varias Academias de la Historia hispanoamericanas.

CRUZ HERNÁNDEZ (Miguel), doctor en Filosofía, catedrático de la Universidad de Salamanca.

CUVILLIER (Armand), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior, catedrático de Filosofía.

CUZACQ (René), catedrático de Historia y Geografía, profesor en el Instituto de Bayona.

CHAPOT (Victor), doctor en Letras, miembro de la Escuela Francesa de Atenas.

CHEBATAROFF (Jorge), profesor de las facultades de Humanidades y Ciencias, de Ciencias Económicas y Administración, y del Instituto de Profesores de Montevideo.

DALBANNE (Jacques), diplomado de la Escuela Superior de Electricidad de París, ingeniero de la Escuela Central de París.

DAVID (Pierre).

DEFFONTAINES (Pierre), director del Instituto Francés de Barcelona, profesor de la Universidad Laval (Quebec).

DEHÉRAIN (Henri), conservador honorario de la Biblioteca del Instituto de Francia.

DELAPORTE (Louis), del Museo del Louvre, profesor del Instituto Católico de París.

DENY (Jean), administrador honorario de la Escuela Nacional de Lenguas Orientales de París.

DEVEALI (Mario L.), profesor de Derecho del Trabajo de la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina).

DÍAZ MACHICAO (Porfirio), presidente de la Academia Boliviana de la Historia, secretario perpetuo de la Academia Boliviana de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española.

DIEHL (Charles), miembro del Instituto de Francia.

DONTOT (René), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior de París, catedrático de Matemáticas.

DORESSE (Jean), egiptólogo.

DORESSE (Marianne), egiptóloga.

DUBOIS (Claude), secretario general de la Redacción de los Diccionarios Larousse.

DUFOURCQ (Albert), profesor honorario de la Facultad de Letras de la Universidad de Burdeos.

DUHAMEL (Michel), ingeniero geógrafo, antiguo alumno de la Escuela Politécnica de París.

DUMONT-WILDEN (Louis), miembro de la Real Academia de Bélgica.

ELGUERA (Alberto), director general de Asuntos Legales de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

ESTEVA FABREGAT (Claudio), doctor en Historia, maestro en Etnología de la Escuela Nacional de Antropología e Historia de México, profesor de Antropología y Etnología de América y de Historia de las Religiones Primitivas de América en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Madrid.

FERIA HARDISSON (Luis), colaborador literario de revistas y periódicos españoles e hispanoamericanos.

FERRATER MORA (José), profesor de Filosofía en Bryn Mawr College (Estados Unidos).

FERREIRA GUBETICH (Hugo), profesor de Geografía en el Colegio Nacional de Asunción.

FIALLOS GIL (Mariano), rector de la Universidad Nacional de León (Nicaragua), vocal del Comité Ejecutivo de la Unión de Universidades de América Latina, ex presidente del Consejo Superior Universitario Centroamericano.

FONTANARROSA (Rodolfo O.), doctor en Jurisprudencia, profesor titular de Derecho Comercial en la Escuela de Derecho de Rosario (Universidad Nacional del Litoral), ex juez de la Corte Suprema de la Provincia de Santa Fe (Argentina).

FORERO (Manuel José), miembro de la Sociedad Geográfica de Colombia, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, bibliotecario de la Academia Colombiana de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española, miembro de la Academia de la Historia de Bogotá.

FOSCA (François), crítico de arte.

FRANCK (Roger), catedrático de Matemáticas, ex profesor en el liceo Michelet, de París.

FRANCO DE MARÍAS (Dolores), licenciada en Filosofía y Letras.

FRÍAS VALENZUELA (Francisco), miembro de la Sociedad Chilena de Historia y Geografía, ex profesor de la Facultad de Filosofía y Educación de la Universidad de Chile.

GACHOT (François), director del Centro de Estudios Franceses de Bonn.

GAGNAIRE (Joseph), catedrático de Universidad, ex profesor del Instituto Francés de Praga.

GÁLLEGO (Julián), crítico de arte.

GANDÍA (Enrique de), miembro de la Academia Nacional de Ciencias Morales y Políticas y de la Academia Nacional de Historia de la Argentina.

GARCÍA-HERRERA (Ernesto), diplomado de la Escuela de Periodismo de Madrid.

GAUDEFROY-DEMOMBYNES (Maurice), miembro del Instituto de Francia, profesor en la Escuela de Lenguas Orientales de París.

GAUTHIER (Maximilien), crítico de arte.

GHIANO (Juan Carlos), profesor titular de Literatura Argentina y Literatura Iberoamericana de la Universidad Nacional de La Plata.

GILI GAYA (Samuel), miembro de la Real Academia Española de la Lengua.

GLANDARD (Jacques), ingeniero agrónomo.

GONZÁLEZ (Luis), investigador de El Colegio de México, profesor en la Escuela de Ciencias Políticas de la Universidad Nacional de México.

GORTER (S. de).

GOUARD (Christiane), catedrática de Matemáticas en el liceo femenino Montgrand, de Marsella.

GRELOU (Georges), catedrático de Universidad.

GROUSSET (René), de la Academia Francesa.

GUILLEMONAT (André), catedrático de Universidad y profesor en la Facultad de Ciencias de Marsella.

GUIRAND (Félix), catedrático de Letras.

HATEAU (G.).

HERBERT (Jean), *privat docent* de la Universidad de Ginebra.

HONTI (François), redactor jefe del *Monde Diplomatique*.

HUNGRÍA MORELL (José Joaquín), director del Instituto Cartográfico Universitario de Santo Domingo.

INCHÁUSTEGUI CABRAL (J. Marino), presidente de la Academia Dominicana de la Historia.

JAREÑO (Ernesto), licenciado en Letras, lector de Universidad, profesor de la Escuela de H. E. C. de París.

JARRY (E.), profesor de Historia Medieval en el Instituto Católico de París.

JOLIOT-CURIE (Frédéric), profesor del Colegio de Francia, miembro de la Academia de Ciencias y de la Academia de Medicina de París, premio Nóbel.

JOLIOT-CURIE (Irène), profesor de la Facultad de Ciencias de París, premio Nóbel.

JORDAN (Edouard), miembro del Instituto de Francia, profesor en la Facultad de Letras de la Universidad de París.

JOUCLA-RUAU (André), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior de París, catedrático en la Universidad de Aix-en-Provence.

LABANDE (L. H.), miembro del Instituto de Francia.

LAMBERT (Élie), miembro del Instituto de Francia, profesor de la Sorbona.

LAFUE (Pierre).

LAPORTE (Marcel), catedrático de Ciencias Físicas, doctor en Ciencias.

LAROCK (V.), profesor en la Escuela de Altos Estudios de Gante.

LA VALLÉE POUSSIN (Louis de), profesor de la Facultad de Letras de la Universidad de Bruselas.

LEJEALLE (Léon), catedrático de Letras, profesor en el liceo Voltaire de París.

LÉONARD (Émile G.), jefe de estudios de la Escuela Práctica de Altos Estudios de París.

LESPINASSE (Pierre), crítico de arte.

LIBER (Maurice), gran rabino, director de la Escuela Rabínica de Francia.

LOBO DE NORIEGA (Ángel), coronel de Caballería, profesor de Matemáticas del Colegio de Huérfanos de Oficiales del Ejército, de Madrid.

LOBO GARCÍA (Luis), capitán de Caballería, diplomado de Estado Mayor.

LÓPEZ MARTÍNEZ (Héctor), subsecretario del Instituto Riva-Agüero, Escuela de Altos Estudios de la Pontificia Universidad Católica de Lima.

LÓPEZ OLACIREGUI (José María), profesor titular de Derecho Civil de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

LUQUET (Georges-H.), doctor en Letras, catedrático de Filosofía.

MACHADO (José Manuel), profesor de Derecho y rector de la Universidad de Santo Domingo, miembro de la Academia Dominicana de la Historia y del Ateneo Dominicano.

MARÇAIS (Georges), miembro del Instituto de Francia.

MARCHESSEAU (Denise), licenciada en Letras.

MARÍAS (Julián), doctor en Filosofía, miembro del Institut International de Philosophie y de la Hispanic Society of America.

MARQUARDT (Eduardo H.), profesor titular de Derecho Penal en la Universidad Católica de Buenos Aires, profesor adjunto a cargo de cátedra de la Universidad Nacional de Buenos Aires, procurador fiscal de la Corte Suprema de Justicia.

MARTÍNEZ GARAYGORDÓBIL (Xavier), licenciado en Ciencias Químicas.

MASSÉ (Henri), miembro del Instituto de Francia, administrador de la Escuela Nacional de Lenguas Orientales de París.

MAURY (Lucien), director de la Casa de Suecia en la Ciudad Universitaria de París.

MAYA (Rafael), miembro de la Academia Colombiana de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española, profesor de Literatura de la Universidad de los Andes.

MENEGAUX (A.), catedrático de Ciencias Naturales, doctor en Ciencias.

MESLIN (Michel), catedrático de Historia, profesor en el Instituto de Amiens.

MÉTADIER (Albert), ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

MICHEL (Édouard), crítico de arte.

MIRAMBEL (André), catedrático de Universidad, profesor en la Escuela Nacional de Lenguas Orientales de París.

MONTERDE (Francisco), doctor en Letras, catedrático de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional Autónoma de México.

MORGENSTERN (Laura), del museo Guimet, de París.

MOSCOTE (Rafael E.), miembro de número de la Academia Panameña de la Historia, jefe del Departamento de Historia de la Facultad de Filosofía, Letras y Educación de la Universidad de Panamá.

NUÑEZ MOLINA (Luis N.), director general de Educación Rural de la República Dominicana.

ODERIGO (Mario A.), ex juez de la Cámara Nacional en lo Criminal y Correccional de la Capital Federal, profesor titular de Derecho Procesal de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

PALACIOS (Julio), catedrático de la Universidad de Madrid, miembro de la Real Academia Española, de la Real Academia de Ciencas Exactas, Físicas y Naturales, y de la Real Academia de Medicina, presidente del Comité Español de la Union Internacional de Física Pura y Aplicada, correspondiente de la Academia de Ciencias de Buenos Aires.

PANICO (Robert), doctor en Ciencias Físicas.

PARDO DE LEYGONIER (G. F.).

PENA (Mariano H.), profesor adjunto de la Universidad Nacional de Buenos Aires, juez de la Cámara Nacional en lo Criminal y Correccional de la Capital Federal, miembro titular de la Sociedad Argentina de Criminología, miembro fundador de la sección argentina de la Asociación Internacional de Derecho Penal, miembro del Consejo Nacional del Menor, profesor titular de la Universidad Católica de Buenos Aires.

PEREIRA RODRÍGUEZ (José), vicepresidente de la Academia Nacional de Letras del Uruguay, secretario del Instituto Histórico y Geográfico, miembro correspondiente de la Real Academia Española y de la Real Academia de la Historia de Madrid.

PHAM VAN KY, escritor y crítico literario.

PITROU (Robert), profesor en la Facultad de Letras de Burdeos.

POLANSCAK (Antun), profesor en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Zagreb.

PORTIER (Paul), miembro del Instituto de Francia.

QUIÑONES (Fernando), colaborador en publicaciones españolas, colombianas y argentinas, premio « Sésamo » y « La Nación » de Buenos Aires.

RAY (Jean), catedrático de Filosofía, doctor en Derecho, asesor jurídico de la Embajada del Japón en París.

RÉAU (Louis), miembro del Instituto de Francia, profesor honorario de la Sorbona.

REPARAZ (Gonzalo de), doctor en Letras por la Universidad de Toulouse.

RIGAUDY (Jean).

RODRÍGUEZ CRESPO (Pedro), catedrático de Historia de la Facultad de Filosofía y Letras de la Pontificia Universidad Católica de Lima.

RODRÍGUEZ GALLEGO (José María), licenciado en Derecho.

ROLANDI (Ugo), doctor en Letras, profesor en el liceo de Venecia.

ROUBAULT (M.), director de la Escuela Nacional Superior de Geología de París.

RUIZ MORENO (Isidoro), profesor titular de Derecho Internacional Público en la Universidad Nacional de Buenos Aires, miembro de la Academia Nacional de Derecho.

SALVERDA DE GRAVE (J.-J.).

SAN JUAN (Ricardo), catedrático de la Universidad de Madrid, miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

SARAIVA (Antonio José), doctor en Letras por la Universidad de Lisboa, ex profesor adjunto de la Facultad de Letras de Lisboa.

SILVA CASTRO (Raúl), miembro de la Academia Chilena de la Lengua, correspondiente de la Real Academia Española, profesor de la Universidad de California.

SMERDOU (Luis María), licenciado en Derecho, diplomado del Instituto Europeo de Administración de Empresas.

SOLER (Sebastián), profesor titular de Derecho Penal en la Universidad Nacional de Buenos Aires, presidente de la sección argentina de la Asociación Internacional de Derecho Penal, miembro del Consejo Superior del Comité Internacional de Juristas, ex procurador general de la Nación.

SOMOZA (Javier Enrique), jefe del Instituto Geográfico Militar de Buenos Aires, secretario de la Sociedad Argentina de Estudios Geográficos, profesor de Geografía de la Universidad Católica El Salvador.

SUBIRÁ (José), académico bibliotecario de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, jefe de la Sección de Madrid del Instituto Español de Musicología, miembro correspondiente de la Hispanic Society of America.

TAMAYO (Jorge L.), ingeniero civil, profesor en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de México, secretario de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística.

TEMPLADO (Félix), licenciado en Ciencias Exactas por la Universidad de Madrid.

TERÁN (Francisco), profesor de Geografía en la Universidad Central del Ecuador, miembro de la Sociedad de Estudios Geográficos del Ecuador y de la Sociedad de Estudios Geográficos de la Argentina.

TIBAL (André), ex profesor de la Universidad de Praga.

TOMBECK (Daniel), doctor en Ciencias Físicas, ex secretario honorario de la Facultad de Ciencias de la Universidad de París.

TORO (Miguel de), doctor en Letras, miembro correspondiente de la Academia Española.

TORREALBA LOSSI (Mario), profesor de Literatura Venezolana e Hispanoamericana en el Instituto Pedagógico de Caracas.

TOUREN (Alain), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior de París, catedrático en el liceo de Mequínez.

TOUREN (Raymond), antiguo alumno de la Escuela Normal Superior de París, catedrático de Ciencias Físicas, profesor en el liceo Saint-Louis, de París.

VAL (Juan Antonio del), licenciado en Letras.

VANDIER (Nicole).

VARILLAS MONTENEGRO (Alberto), profesor de Historia Literaria en la Pontificia Universidad Católica de Lima.

VASCONSELLOS (Víctor N.), profesor de Historia del Paraguay en el Colegio Nacional de Asunción, miembro del Consejo de Enseñanza Secundaria, Normal y Comercial.

VILA (Pablo), ex profesor de la Escuela Normal de la Generalidad de Cataluña, ex profesor de la Escuela Normal Superior de Bogotá, ex jefe y profesor del Departamento de Geografía e Historia del Instituto Pedagógico de Caracas.

VILLACORTA C. (J. Antonio), socio fundador de la Sociedad de Geografía e Historia de Guatemala, Palmas Académicas (en oro) del Gobierno Francés.

VILLAT (Louis).

WARNIER (Raymond), director del Instituto Francés de Colonia.

WIET (Gaston), profesor del Colegio de Francia.

ZORRAQUÍN BECÚ (Ricardo), presidente de la Academia Nacional de Historia de la Argentina, profesor titular de Introducción al Derecho en la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Han colaborado en esta obra

redacción
Fernando GARCÍA-PELAYO y GROSS, Jean-Paul VIDAL.

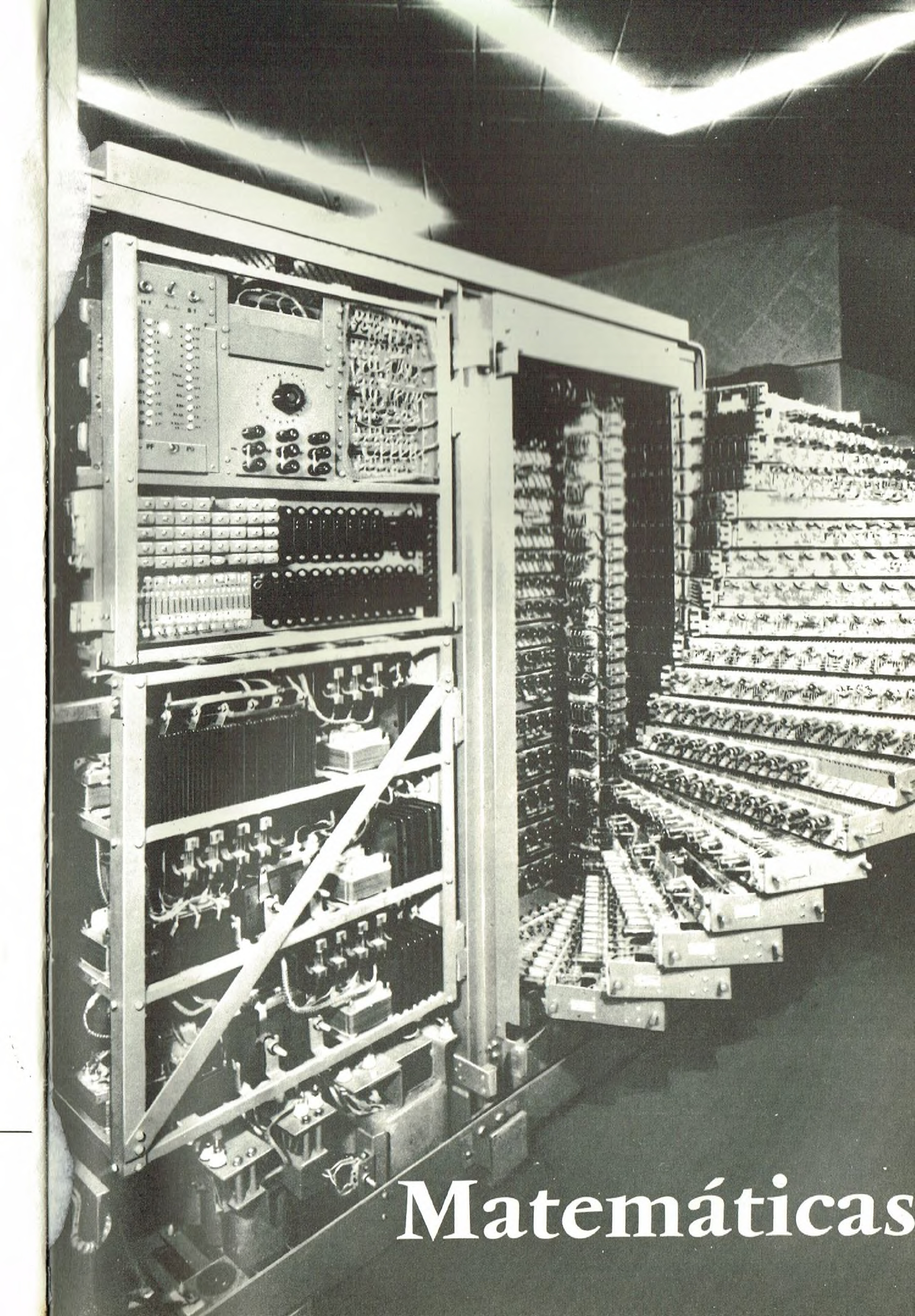
corrección-revisión
Adolphe V. THOMAS, jefe del servicio de corrección.
Amadeo BERNADÓ CALCATÓ, Antonio GARCÍA BIRLÁN, Fernando GÓMEZ PELÁEZ.

cartografía
Jean BARBIER, jefe del servicio de cartografía.

fotografía
André LAPORTE, jefe del servicio de fotografía.
Mariano AGUAYO, Faustino PASTOR.

dibujo
Maurice TAMAGNO, jefe del servicio de dibujo.

maqueta elaborada por Juan COUSIÑO, Henri de MONTROND y Simone PIERRE



Matemáticas

Introducción

La matemática del siglo XX

Definición de la matemática. — Dice **Borel,** en *Les Grands Courants de la Pensée mathématique,* que la **matemática** puede definirse, cada vez con más razón, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos entes abstractos, definidos también de manera abstracta, sin otra condición que su compatibilidad, es decir, la no contradicción entre esas definiciones.

Pero, ¿qué son entes abstractos? Consideremos los dos procesos intelectuales opuestos de abstracción y discriminación. La abstracción consiste en apreciar analogías prescindiendo de las diferencias, mientras que la discriminación, al contrario, consiste en apreciar diferencias prescindiendo de las analogías.

De las relaciones de igualdad o equivalencia, esto es, con los tres caracteres: idéntico —cada objeto es igual a sí mismo—, recíproco —si un objeto es igual a otro, éste lo es a aquél—, y transitivo —dos objetos iguales a un tercero son iguales entre sí—, surge, si se prescinde de las diferencias entre objetos iguales, el substratum común a todos ellos, que es un ente abstracto: el ejemplo más sencillo lo ofrece el número natural o cardinal de una colección finita de objetos, que surge, al prescindir de la naturaleza de dichos objetos, en la coordinación o correspondencia biunívoca de los conjuntos finitos. Este proceso de abstracción es sin duda inconsciente, porque el concepto de número natural es primitivo en el hombre civilizado, y anterior a toda noción matemática.

Del cálculo con números se pasa al cálculo con letras que representen indistintamente cualquier número; este procedimiento, hoy familiar a los alumnos de la instrucción elemental, se consideró entonces como abstracción de abstracciones. La carrera de abstracciones así emprendida ha conducido finalmente a la colosal obra de **N. Bourbaki,** *Éléments des Mathématiques,* que recoge, sistematizados, los últimos resultados de la matemática actual. Se ha llegado así a la unidad de la matemática, con independencia de cualquier escuela filosófica.

Análisis y geometría. — La antigua clasificación en **análisis** y **geometría** conserva todavía, a nuestro juicio, un valor didáctico, además del histórico. El análisis es la ciencia edificada sobre la noción de números, y se clasifica en algebraico y trascendente, según prescinda o no de la operación del paso al límite.

La geometría es, en cambio, según **F. Klein,** el estudio de las propiedades de las figuras o conjuntos de puntos de un espacio que permanecen invariantes en las transformaciones de un grupo, es decir, de las propiedades comunes a una figura y a sus transformadas en un conjunto de operaciones o correspondencias que contengan la operación idéntica, que deja invariante cada figura; la inversa de una operación, es decir, la que hace corresponder a una figura transformada la figura primitiva, y el producto de dos operaciones, o sea la que resulta de aplicarla sucesivamente. Cada grupo de transformaciones define, pues, una igualdad o equivalencia con los tres caracteres, idéntico, recíproco y transitivo, entre cada figura y su transformada; y recíprocamente, cada igualdad o equivalencia define un grupo de operaciones o transformaciones que se obtienen asignando a cada figura una de sus equivalentes. Los invariantes en las transformaciones del grupo son los entes abstractos nacidos de la equivalencia correspondiente, cuyo estudio constituye la geometría basada en dicho grupo.

La noción de espacio. — Pero a la definición anterior de F. Klein le quedaba por precisar la noción de espacio, que posteriormente edificaron axiomáticamente, primero **Pasch,** y después **Veronese, Peano, Hilbert** y **Schur.** Hay que distinguir el espacio real, que es el que perciben nuestros sentidos; el espacio intuitivo, representación mental del anterior, y el espacio abstracto, conjunto de entes abstractos cualesquiera, con ciertas relaciones expresadas por axiomas o postulados exentos de contradicción y mutuamente independientes.

Descartes (1596-1650), al crear la **geometría analítica,** fundió el análisis y la geometría. La aplicación sistemática del cálculo infinitesimal a los problemas geométricos originó la **geometría diferencial,** que permitió a **Minkowski, Lorenz** y **Einstein** la creación del cálculo diferencial absoluto, el cual, a su vez, permitió a este último formular su teoría de la relatividad generalizada, actualmente discutida por **Majorana, Milne, Burniston, Brown, Rapier, Álvarez López, Dingle,** etc., y muy especialmente por **J. Palacios,** que ha desarrollado otra nueva teoría que la substituye. La geometría diferencial estudió sistemáticamente espacios no euclidianos, en particular los de **Lobatchewski** y **Riemann;** espacios, por consiguiente, no intuitivos, aunque todavía formados por puntos con coordenadas numéricas.

Fue **Fréchet** quien, en una brevísima comunicación a la Academia de Ciencias de París, en 1902, y después en su libro *Les espaces abstraits,* creó la teoría de espacios abstractos, es decir, formados por entes cualesquiera que verifiquen las relaciones de compatibilidad a que se refiere la ya mencionada definición de Borel. Las contribuciones posteriores de **Urysohn** y **Haussdorf** son perfeccionamientos de transcendental interés que, como tantas veces sucede en la historia de la matemática, han perpetuado sus nombres, substituyendo al del propio iniciador. La noción de dimensión tenía que ser ampliada a estos espacios; así lo hizo Fréchet en su libro y, posteriormente, **Menger** y **Brouwer,** con mejor fortuna y orientación original totalmente distinta.

Con la creación de los espacios abstractos, el matemático dejó de ser el biógrafo de vidas reales para convertirse en el novelista que crea tipos con su fantasía; pero esta fantasía, inherente a toda creación del espíritu, tiene aquí un restringido límite, impuesto por las relaciones con otras teorías, y todavía más por el fenómeno matemático natural. A pesar de ello, legiones de matemáticos se dedicaron, desde la genial concepción de Fréchet, a crear espacios abstractos a voleo, compensando su mediocridad con un trabajo intenso, y sin otro criterio en la elección de sus condiciones de definición que el cómodo fluir de las demostraciones. Esta fiebre ha desaparecido, y cuando hoy se introduce un nuevo espacio, se cuida el autor de indicar sus aplicaciones.

Precisamente en ese criterio de elección entre la infinitas posibilidades que se le ofrecen al investigador estriba, según **Poincaré,** la clave de la invención. Un ejemplo insuperable de elección afortunada en la definición de un espacio es el de **Banach,** que figura en su obra *Théorie des opérations linéaires* y ha sido reproducido en multitud de memorias, porque en él subsiste gran parte del análisis matemático de siglos anteriores, hoy denominado análisis clásico.

Norma inequívoca para la elección de las condiciones que definen espacios es, según hemos indicado, sus aplicaciones a otras ciencias, especialmente a la física. **Kepler** pudo descubrir las órbitas de los planetas y de los cometas porque, diecinueve siglos antes, los griegos habían hecho un estudio sistemático, aunque puramente teórico, de las secciones de un cono por un plano, las denominadas cónicas; y la creación del cálculo diferencial absoluto, indispensable, como ya hemos dicho, para la expresión de las leyes de la relatividad de Einstein, se apoyó en una parte de la geometría diferencial, que ya estaba ampliamente desarrollada; sin embargo, el proceso ha sido casi siempre el inverso: han sido los matemáticos los que han seguido las huellas de los físicos e introducido el rigor en las teorías por ellos formuladas, aunque nunca rectificándolas. La intuición de los físicos les ha permitido la obtención de resultados verdaderos, con métodos matemáticamente imperfectos.

Un ejemplo típico, en nuestra época, es la pseudofunción δ de **Dirac.** Dirac sabía que no manejaba una función en el sentido que le atribuían los rigoristas matemáticos posteriores a la definición de **Dirichlet,** que también se amoldó a la llamada aritmetización del análisis matemático, iniciada por **Abel** y **Cauchy,** y terminada por **Bolzano** y **Weierstrass;** a pesar de ello, no se equivocó. Después se han hecho muchos ensayos, más o menos afortunados en cuanto a naturalidad y sencillez, para encajar la noción de Dirac en una u otra teoría matemática. La superioridad de la teoría de las distribuciones de **Schwartz,** que amplía y limita la noción de función de Dirichlet, no estriba en su sencillez, sino en su amplitud, que permite aplicarla a otros campos del análisis matemático; por ejemplo, a las ecuaciones hiperbólicas en derivadas parciales de la aerodinámica supersónica. En esta teoría, la función δ de Dirac aparece como derivada de la función de **Heaviside** del cálculo operacional, confiriéndole el puesto que le corresponde dentro del análisis matemático: el de un ejemplo sencillo, importante en física, de una teoría general.

La especialización que hoy impone cada rama de la ciencia no permite, normalmente, que surjan figuras como aquellos sabios antiguos que eran a la vez filósofos, matemáticos y físicos. En compensación, la matemática ha alcanzado su unidad, con independencia, como ya indicamos, de toda teoría filosófica. Esta unidad la ha alcanzado con las estructuras, que tienen su origen en la definición axiomática del número natural mediante las leyes formales de cálculo formuladas por **Hilbert.**

Matemática estructural y matemática clásica. — Se llama actualmente estructura a todo sistema de entes abstractos mutuamente relacionados por ciertas proposiciones o axiomas que, como en la definición de espacio, son compatibles e independientes. En primer lugar, existen tres estructuras madres: las algebraicas, definidas solamente mediante adiciones y substracciones, o multiplicaciones o divisiones, con las propiedades del cálculo aritmético, salvo la conmutativa, que no siempre se cumple (su estudio constituye el *álgebra actual,* que se ha denominado moderna, abstracta, etc., para distinguirla del *álgebra clásica,* que era el estudio de los polinomios con coeficientes numéricos y el cálculo de sus raíces); las de orden, donde se definen los elementos posteriores a otro elemento de modo que se cumpla la propiedad transitiva, y que contienen como casos particulares los números ordinales y transfinitos, los filtros, los conjuntos dirigidos, etc., y las topológicas, en que se definen la vecindad, acumulación o contorno. Estas estructuras se combinan entre sí, obteniéndose así una clasificación armónica, que pudiera llamarse estructural, de la matemática actual.

Éste ha sido el criterio organizador de la citada obra de N. Bourbaki. Conviene, sin embargo, señalar que el profesor **Dieudonnée,** uno de los más destacados impulsores de esta colosal obra, escrita por eminentes matemáticos franceses de la actual generación, en colaboración íntima y anónima, ha tenido que advertir, en el prólogo a una obra sobre la moderna geometría algebraica, que para comprender esta matemática estructural es necesario conocer antes a fondo la matemática clásica, y que prescindir de la misma desde el bachillerato o en los primeros cursos de la Facultad, como pretenden algunos, deslumbrados por las memorias de algebristas y topólogos actuales, es "didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil", para emplear la misma frase del profesor Pascal que el ilustre matemático español J. Rey Pastor cita en una nota del prólogo a su *Análisis algebraico.* Por esto, en la obra de Bourbaki figuran también los principales resultados clásicos, para guía del lector no familiarizado con tan elevados grados de abstracción.

Ricardo SAN JUAN

◀ *Página precedente,* máquina calculadora electrónica Bull (*Phot. X.*).



La Aritmética. Tapiz francés de principios del siglo XVI (Museo de Cluny, París) [*Fot. Larousse*]

Aritmética y Álgebra

Reseña histórica

La **aritmética,** cuyo objeto es el estudio de los números, es sin duda la más antigua de las ciencias: nuestros antepasados debieron reconocer su imperiosa necesidad desde el momento en que empezaron a realizar intercambios.

Los dedos fueron, para nuestros antepasados, los primeros instrumentos de cálculo, como todavía lo continúan siendo para los niños: a este hecho se debe la base decimal de la numeración. Este empleo de los dedos para contar era forzosamente limitado y pronto debió reconocerse la necesidad de emplear signos materiales que dieran permanencia a los resultados obtenidos: utilizaron entonces granos de trigo, nudos hechos en cintas, etc.

Los sistemas de numeración hablada y escrita datan de la más remota antigüedad. En 1845 se encontraron, en los alrededores de Senkerch, dos tablas babilónicas cuyas inscripciones databan de aproximadamente dos mil años antes de nuestra era. En una de ellas figuraba una tabla de los cuadrados de los 60 primeros números: los primeros cuadrados, hasta 8^2, estaban escritos, al parecer, en el sistema decimal, pero no ocurría lo mismo con los siguientes. El 8^2 estaba escrito 1,4; 9^2, 1,21..., lo que parecía indicar $60 + 4$, $60 + 21$ ..., es decir, el empleo de la numeración sexagesimal. En la otra tabla figuraban observaciones astronómicas, con la misma notación.

Los egipcios utilizaron la numeración decimal. Tenían un signo particular para representar cada unidad; una línea vertical para una unidad simple, un círculo abierto para una decena, un signo que recuerda una flor de palmera para una centena, una flor de loto para el millar, un dedo invertido para diez mil, etc. Para escribir un número representaban las unidades de cada grupo repitiendo el signo correspondiente tantas veces como unidades tenía, y para los grandes números empleaban caracteres especiales. Este sistema de notación se encuentra también en la numeración romana, aunque con cierta simplificación.

Los fenicios, los griegos y los hebreos empleaban como signos las letras de sus alfabetos. Los primeros que utilizaron, al parecer, signos con dos valores diferentes en la numeración escrita fueron los indios: estos valores dependían, unos de su forma, otros del orden que ocupaban en el número escrito. La colección Rhind, del Museo Británico de Londres, contiene un papiro egipcio escrito por un sacerdote llamado Ahmes, en el que figura una colección de problemas de aritmética y geometría. Este manuscrito data de más de mil años antes de nuestra era: utiliza corrientemente fracciones que tienen como numerador la unidad, y deja entender que el autor conocía la forma de calcular la suma de los términos de una progresión aritmética.

Los resultados conseguidos por los egipcios pasaron a Grecia, y los más antiguos documentos conocidos muestran que, primitivamente, las fracciones siempre tenían como numerador la unidad, estando cada una de ellas designada simplemente por su denominador, asociado a un signo correspondiente. **Diofanto** (siglo III después de J. C.) fue el primero que resolvió ciertos problemas de aritmética con verdadera elegancia. Los conocimientos matemáticos de los griegos se transmitieron a los árabes, quienes los introdujeron en Europa. Las cifras actuales las debemos a ellos, aunque ya los griegos habían utilizado el cero: Ptolomeo, en particular, empleaba 0, primera letra de la palabra οὐδεν, que significa *nada*. Chasles afirma que eran ya utilizadas por Pitágoras; los árabes las denominaban *cifras indias*.

Pitágoras y los sabios griegos posteriores a él fueron quienes crearon realmente, al parecer, la aritmética de hoy: los pitagóricos conocían las progresiones aritméticas, geométricas, armónicas y musicales, así como las proporciones, los cuadrados de una suma o de una diferen-

cia, etc; a ellos se debe el descubrimiento del número inconmensurable. Entre los griegos, las matemáticas tenían un carácter eminentemente teórico, y las operaciones aritméticas de cálculo propiamente dicho no se consideraban como pertenecientes a un curso de matemáticas con ayuda de ábacos (v. pág. 13).

Los árabes no aportaron nuevas teorías aritméticas, y cuando, hacia el siglo X, las teorías que ellos importaron empezaron a penetrar en el mundo latino, fueron las teorías griegas las que nuestros antepasados conocieron. La regla de *falsa posición* procede, al parecer, de los árabes, pero en todo caso era utilizada en la Edad Media. Aportaciones de árabes españoles en los siglos XIII y XV son los progresos relativos a la armonización del cálculo en ábaco con el cálculo de cifras, reglas para la extracción de raíces cuadradas y cálculo aproximado de raíces.

Desde esta época, la aritmética fue desarrollándose paulatinamente hasta alcanzar su estado actual. Entre los hechos más importantes señalaremos la introducción de los números decimales, o más bien la conversión de las fracciones ordinarias en fracciones decimales; algunos historiadores la atribuyen al astrónomo alemán Johann Muller (1436-1476), más conocido por el nombre de **Regiomontano,** y otros a **Stevin,** matemático holandés (1548-1620), que publicó en 1585, en *La Disme,* las primeras nociones sobre las fracciones decimales. Los logaritmos fueron creados por **John Neper** o **Napier,** barón escocés (1550-1616). En el siglo XVI, son importantes las contribuciones de **Viète** (1540-1603), pero fue **Fermat** (1601-1665) sobre todo quien, con sus geniales concepciones, dio un considerable impulso al estudio de las propiedades de los números. Aritméticos españoles que contribuyeron a mejorar el ambiente matemático de esta época son **Martínez Guijarro, Juan de Ortega, Ciruelo** con su *Aritmética especulativa* y **Gaspar Lax** con su *Tratado de proporciones.* La *Arithmética práctica y especulativa* de **Pérez de Moya** fue recomendada por Stevin.

Fueron los grandes matemáticos **Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Lejeune-Dirichlet, Tchebichev, Hermite,** etc., los creadores de la aritmética actual, es decir, del conjunto de propiedades íntimamente relacionadas por deducción, utilizando los métodos del análisis algebraico e infinitesimal.

En cuanto al **álgebra,** suele situarse su origen en el ya citado Diofanto, de Alejandría, cuya obra se ha perdido en parte y lo que ha llegado hasta nosotros está modificado y alterado. Un tratado de **Bhascara,** matemático indio, que data del siglo XII, indica que el álgebra ya debía conocerse en la India hacía tiempo, de forma que resulta difícil, en realidad, fijar el origen del álgebra en Grecia o en la India.

En la Edad Media, los únicos que estudiaban el álgebra eran los árabes, quienes nos legaron los trabajos que conocían de los griegos y de los indios. La palabra álgebra —que significa *restablecimiento,* para indicar que puede añadirse una misma expresión a los dos miembros de una ecuación— deriva de *Al-gebr,* primera palabra del título de la obra árabe *Al-gebr we l'mukabala,* publicada por el célebre matemático **Alkarismi,** que vivió en el siglo IX; a través de este tratado se introdujo en Occidente, y primeramente en Italia, el sistema de numeración decimal, así como las primeras nociones de aritmética aplicada: operaciones, proporciones, etc.; esta práctica del cálculo se denominó *algoritmo (arte de Alkarismi).*

El primer libro de álgebra que se publicó en Europa *(Summa de arithmética, geometria, proportioni et proportionalitá),* fue obra de **Pacioli,** matemático italiano del siglo XV, editada en Venecia en 1494. Entre las primeras traducciones de álgebra que dieron a conocer esta ciencia en Europa se cuentan también las de los españoles Juan de Luna y Gerardo de Crémona. El álgebra ya se había perfeccionado, y las primeras nociones de Diofanto, de carácter más bien aritmético, se habían enriquecido con la resolución de las ecuaciones de primero y de segundo grado. **Scipione del Ferro,** matemático italiano, resolvió, en 1515, la ecuación de tercer grado, cuya fórmula fue después reconstruida por el matemático, también italiano, **Tartaglia** (hacia 1515-1557), siendo después completada con una discusión de todos sus casos por **Cardano,** que la incluyó en su *Ars Magna* (1545).

Entre los algebristas españoles del siglo XVI descuella el famoso **Pedro Núñez** *(Nonnius),* que expuso por vez primera la idea de rebajar el grado de las ecuaciones por el algoritmo de la división, y cuya obra sirvió de base para la teoría del máximo común divisor de polinomios. **Ludovico Ferrari,** discípulo de Cardano, resolvió genialmente la ecuación de cuarto grado, y **Rafael Bembelli** desarrolló, en 1589, una teoría de las fracciones continuas y de los números imaginarios. Tras este vigoroso impulso del álgebra en el siglo XVI, caracterizado por las aportaciones de los matemáticos italianos, el progreso de esta ciencia llegó a su límite en esta dirección.

El francés **François Viète,** ya aludido, fue el principal sistematizador de todo el período de exuberante inspiración creadora, y su obra *Isagoge in artem analyticum* (Tours, 1591), que es la primera obra sobre el álgebra simbólica, inspiró a los matemáticos del siglo XVII. Viète, es el creador del cálculo formal, y el que introdujo las letras en el cálculo para representar magnitudes cualesquiera, permitiendo así el establecimiento de fórmulas generales y creando lo que hoy llamamos "algoritmo algebraico". En un primer apéndice a su obra, *Logistice speciosa,* trata de la adición, de la multiplicación, etc., y demuestra cómo se eleva un binomio hasta la sexta potencia. En un segundo apéndice, *Zetetica,* explica la resolución de las ecuaciones.

El empleo de los signos $+$ y $-$ se debe a **Riese,** matemático alemán (1492-1559); el símbolo $\sqrt{\ }$, que es una deformación de la letra inicial de *radix* (raíz), fue adoptado, al parecer, por primera vez, por **Rudolf** (matemático alemán del siglo XVI) y Riese; el signo $=$ se debe al matemático inglés **Recorde** (1510-1558) y los signos $>$ y $<$ a **Harriot** (1560-1621); **Oughtred** (1574-1660) introdujo el signo $\times$ y los signos $\pm$ y $\mp$; también se debe a él la introducción de la letra π para representar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

La obra de **René Descartes** dominó el siglo XVII y la primera mitad del XVIII. Su memorable *Traité de géométrie* (1637) es una obra capital en la evolución de las matemáticas; en ella emplea el álgebra en la geometría, completa el simbolismo algebraico e introduce el cálculo algebraico de tangentes, curvatura, etc., mediante la multiplicación de las raíces, reglas de los signos, etc. Es así el creador de la *geometría analítica,* con la introducción de las coordenadas. El siglo XVIII asiste a la creación del *cálculo infinitesimal,* obra gemela de **Newton** —con las fluxiones— y **Leibniz** —con las diferenciales—. Newton hace además importantes aportaciones al álgebra. El italiano **Lagrangia** (Lagrange) trasplantado a París, estudia infructuosamente la resolución de las ecuaciones de grado superior al cuarto, y precisa la noción de derivada. **Ruffini** establece en 1788 el célebre teorema que lleva su nombre. Entre las aportaciones al álgebra del genial matemático alemán **Gauss,** *princeps mathematicorum* (1777-1855), figuran, además de innumerables obras, el descubrimiento de la construcción elemental del eptadecágono, en 1795, la teoría algebraica de la ciclotomía y la primera demostración del teorema fundamental del álgebra, en 1799.

En el siglo XIX, se destacan las aportaciones del matemático noruego **Abel** (1802-1829) y de los franceses **Evariste Galois** (1811-1832) y **Augustin Cauchy** (1789-1857). Abel fue el creador de las ecuaciones hoy llamadas cíclicas y abelianas, y estudió también el problema de las ecuaciones resolubles por radicales. Galois es el padre, entre otras fundamentales aportaciones, del concepto de campo, del teorema que lleva su nombre y de la idea de grupo que caracteriza a cada ecuación y su resolvente total, así como del paralelismo entre grupo y campo.

Los anteriores conceptos de grupo y campo, junto con los de anillo y reticulados, así como los automorfismos, son los elementos básicos del álgebra moderna, en pleno desarrollo.

Entre los matemáticos españoles del siglo XIX y principios del XX merecen ser citados **Echegaray, Rey Heredia,** a quien acredita como pensador original su obra *Teoría trascendental de las cantidades imaginarias* **Torroja** y **Rey Pastor,** conocido investigador que simplifica demostraciones, descubre nuevos aspectos y expone conceptos fundamentales sobre teoría de conjuntos, funciones y grupos. Entre sus obras figuran: *Análisis algebraico, Teoría de las funciones reales* e *Introducción a la matemática superior.* En Hispanoamérica se han dedicado a la investigación matemática, entre otros, **Balanzat, Levi, Pi Calleja, Babini, Durañona, González Domínguez** y **Trejo.**

El número natural

Unidad, pluralidad, correspondencia. Conjuntos coordinables. Conjuntos no coordinables. El número natural: número ordinal y número cardinal. Comparación de los números. La aritmética. Operaciones fundamentales. — **Numeración:** La numeración. Numeración hablada. Órdenes y clases de unidades. Enunciación de un número entero. Numeración escrita. Convención relativa a la numeración escrita. Lectura de un número escrito. Diferentes sistemas de numeración. Cambio de base de un sistema de numeración. Números complejos aritméticos. Cifras romanas

Unidad, pluralidad, correspondencia. — La idea de *unidad* se origina al observar cada ente material; la de *pluralidad* o conjunto, al observar varios, cualquiera que sea su naturaleza u ordenación. Estos conceptos no son absolutos, ya que una unidad cualquiera puede considerarse como la pluralidad de los elementos que la componen, y un conjunto puede, a su vez, considerarse como una unidad de conjuntos de orden superior.

El concepto de *correspondencia* es también, como los dos anteriores, un concepto primario y no susceptible de definición: aclarémoslo con un ejemplo, comparando los dos grupos de letras de que constan las palabras Berlín y Madrid. Si se van suprimiendo, simultánea y sucesivamente, una letra de cada palabra, llegará un momento en que las dos palabras desaparecerán, también simultáneamente; hemos establecido una correspondencia entre ambas, es decir, a cada una de las letras de la primera palabra corresponde una letra, y sólo una, de la segunda, y recíprocamente.

La correspondencia queda bien determinada cuando se conoce un criterio que permita determinar cuál o cuáles elementos de uno de los conjuntos corresponde a cada elemento del otro.

Conjuntos coordinables. — Una correspondencia como la del caso anterior, en que a un elemento de un conjunto corresponde otro ele-

mento, y sólo uno, del otro conjunto, y recíprocamente, se llama *correspondencia biunívoca.*

DEFINICIÓN. *Se dice que dos conjuntos son* **coordinables** *cuando puede establecerse entre sus elementos una correspondencia biunívoca.*

De la definición resulta inmediatamente:

1º Todo conjunto es coordinable consigo mismo.

2º Si un conjunto A es coordinable con otro B, el conjunto B es coordinable con A.

3º Si un conjunto A es coordinable con B, y B es coordinable con C, el conjunto A es coordinable con el conjunto C.

Estas tres propiedades fundamentales de la coordinación suelen designarse como caracteres *idéntico, recíproco* y *transitivo*, respectivamente.

Conjuntos no coordinables. — Si los conjuntos finitos A y B no son coordinables, necesariamente se da una de estas circunstancias:

A es coordinable con parte de B (se indica $A < B$),

o bien, B es coordinable con parte de A (se indica $B < A$).

Es muy fácil probar que se verifica:

Si $A < B$ y $B < C$ (o B es coordinable con C) es también $A < C$.

El número natural: número ordinal y número cardinal. — Al considerar los objetos naturales, desde el punto de vista matemático, se prescinde de todas sus cualidades físicas, químicas, etc. Todos los seres reales y abstractos son equivalentes. Por lo tanto, si dos conjuntos son coordinables, podrá sustituirse cada elemento de ellos por su homólogo del otro, y ambos conjuntos son, desde el punto de vista matemático, equivalentes.

Para poder comparar por coordinación todos los conjuntos finitos, se puede elegir un conjunto fijo que sirva de módulo de comparación de todos los demás. Este conjunto de referencia es el formado por entes abstractos, creados por nuestra mente, y denominados **números naturales;** los números naturales están representados por ciertos signos y por ciertas palabras, que en nuestro idioma son 1, 2, 3 ..., ó 1º 2º 3º, etc.

No se crea, sin embargo, que los números naturales se van creando uno tras otro sucesivamente, ya que existen en la naturaleza conjuntos, tales como los átomos de un cuerpo cualquiera, las estrellas, etc., para los cuales serían insuficientes: responden a un principio general que permite engendrar una sucesión de símbolos de los cuales se deduce, por abstracción de su naturaleza, su sucesión lógicamente definida por determinados postulados.

Dado, pues, un conjunto finito perfectamente ordenado, puede coordinarse con el conjunto de los números naturales, asignando al elemento M, por ejemplo, el número 1, al elemento H el número 2, etc., operación que se llama contar; el número correspondiente al último elemento se llama *número cardinal* del conjunto.

DEFINICIÓN. **Número cardinal** *es un ente abstracto, expresado por un símbolo oral y otro escrito, que sirve para representar los conjuntos coordinables entre sí, distinguiéndolos de los no coordinables.*

Todos los conjuntos coordinables tienen el mismo número cardinal. Los no coordinables, números diferentes. A todo conjunto finito corresponde un número cardinal.

El concepto de **número ordinal** aparece cuando se prescinde de la naturaleza de los elementos de un conjunto, atendiendo solamente a su *orden de colocación.*

El número, como símbolo cardinal, no representa un elemento, sino un conjunto, que prescinde de la naturaleza de los elementos que lo componen y de su orden; en cambio, el número ordinal representa sólo un elemento dentro de un conjunto ordenado.

Comparación de los números. — Si A y B son dos conjuntos finitos, entre ellos se verificará una de estas tres posibilidades:

$A < B$ A es coordinable con B $B < A$.

Si *a* y *b* son los numeros cardinales que les corresponden, diremos en el primer caso que a *es menor que* b; en el segundo caso, que a *es el mismo número que* b; y en el tercer caso, que b *es menor que* a, o que a *es mayor que* b. Todo lo cual se expresará así:

$a < b$ o $b > a$ (primer caso) , $a = b$ o $b = a$ (segundo caso) , $b < a$ o $a > b$ (tercer caso).

Las expresiones correspondientes a los casos primero y tercero se llaman *desigualdades*, y las correspondientes al segundo, *igualdades.* En todas ellas se denomina *primer miembro* al que figura a la izquierda del signo (<, = o >) y *segundo miembro* al que está a la derecha del mismo.

La aritmética: operaciones fundamentales. — La aritmética, que es la parte más abstracta de la matemática, es la ciencia que estudia las propiedades de los números, es decir, las propiedades de todos los conjuntos coordinables.

Se desarrolla completamente y con todo rigor sobre el concepto de número natural, sin necesidad de observaciones empíricas, a pesar de lo cual inspira sus definiciones en el mundo real; así, sus operaciones serán la expresión abstracta de las operaciones de la naturaleza y de tales interpretaciones concretas se derivan sus aplicaciones a la vida práctica.

La *reproducción* y la *yuxtaposición*, las dos operaciones fundamentales de la naturaleza, o sea la composición y la agregación de conjuntos, dan origen, por abstracción, a las dos operaciones fundamentales de la aritmética: la **multiplicación** y la **adición** de números, con sus inversas: la **división** y la **sustracción.**

Se llama **algoritmo** *a toda combinación de operaciones fundamentales efectuadas con números cualesquiera que dan origen a un nuevo número.*

Numeración

La numeración. — No es posible representar los números naturales, que son infinitos, por cifras o signos diferentes, por lo que desde muy antiguo se han imaginado ciertos artificios que permiten designarlos con combinaciones de varias cifras, y con palabras compuestas de otras varias. *A este conjunto de combinaciones y reglas que nos permiten representar todos los números mediante varios signos o palabras se llama* **numeración,** pudiendo distinguirse la *numeración hablada* y la *numeración escrita.*

Numeración hablada. — *El objeto de la* **numeración hablada** *es designar los números con un número limitado de palabras, de forma que al enunciado de un número cualquiera pueda asignársele el orden que le corresponde en la sucesión natural de los números enteros.*

Los primeros números de la serie natural de los números enteros han recibido los siguientes nombres:

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve; se les ha llamado *unidades simples.*

El número siguiente se ha llamado **diez,** o una *decena.* Agrupando las decenas, se obtienen colecciones sucesivas designadas en la forma siguiente:

Dos decenas, o **veinte;** tres decenas, o **treinta;** cuatro decenas, o **cuarenta;** cinco decenas, o **cincuenta;** seis decenas, o **sesenta;** siete decenas, o **setenta;** ocho decenas, u **ochenta;** nueve decenas, o **noventa.** La agrupación de diez decenas se llama **cien** o una *centena.*

Las sucesivas colecciones que se obtienen agrupando las centenas se llaman: dos centenas, o **doscientos;** tres centenas, o **trescientos;** etc.

La colección de diez centenas se llama **mil** o un *millar*, y las sucesivas colecciones que se obtienen agrupando los millares; **dos mil; tres mil; ... diez mil.** Análogamente: dos decenas de millar, o **veinte mil;** tres decenas de millar, o **treinta mil;** etc...; una centena de millar, o **cien mil;** dos centenas de millares, o **doscientos mil;** etc.; la colección de diez centenas de millares se llama **millón.** Los grupos de millones se enuncian en la misma forma que los de millares, llamándose **billón** a la colección de un millón de millones, **trillón** a la de un millón de billones, etc.

Órdenes y clases de unidades. — El número diez desempeña, como se ha visto, una función capital en nuestro sistema de numeración, y se le llama **unidad de segundo orden;** al número cien, **unidad de tercer orden,** etc.

Agrupando los órdenes sucesivos de tres en tres, a partir del primero, se obtienen las **clases de unidades;** por ejemplo:

La *clase de las unidades* comprende las unidades simples, las decenas y las centenas;

La *clase de los millares* comprende las unidades, decenas y centenas de millar;

Vienen después la *clase de los millones, de los billones, de los trillones,* etc.

Mil unidades de cada clase forman una unidad de la clase inmediatamente superior.

Enunciación de un número entero. — Para enunciar el número que corresponde, por ejemplo, al total de bolas que hay en un saco, se empezará por formar grupos de diez bolas hasta que no quede más que un número de bolas menor que diez; si el número de decenas así formadas es mayor que diez, se reunirán estas decenas en grupos de diez, hasta que sólo quede un número de decenas inferior a diez; se continuarán formando nuevos grupos, en forma análoga, con lo que se llegará a dividir el número que hay que enunciar en *unidades de diferente orden*, de forma que cada grupo contenga un número de unidades menor que diez. Si el número es menor que mil, se enunciarán sucesivamente las centenas, las decenas y las unidades. Si el número es mayor que mil, se agruparán los órdenes de unidades en clases y después se enunciará, a partir de la clase más alta, cada clase, como si fuera la única (es decir, como un número menor que mil), seguida del nombre de la clase correspondiente.

Por ejemplo: un número que contenga cinco millares de millón, cuatro centenas de millón, ocho decenas de millones, seis millones, tres centenas de millares, siete decenas de millares, nueve millares, dos centenas, siete decenas y cinco unidades, se enunciará cinco mil cuatrocientos ochenta y seis **millones,** trescientos setenta y nueve **mil,** doscientos setenta y cinco **unidades.**

Si faltan unidades de un cierto orden, no se expresan. Señalamos también que en la práctica, en lugar de diez y uno, diez y dos, etc., se dice **once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis,** etc.

Numeración escrita. — *La* **numeración escrita** *enseña a escribir los números, o sea a representarlos gráficamente mediante el empleo de un número restringido de caracteres denominados* **cifras.**

Hay diez cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Las nueve primeras representan los nueve primeros números, y se enuncian: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, y se llaman **cifras significativas.** La última se denomina **cero.**

Valor absoluto y valor relativo. Una misma cifra puede tener valores distintos según el lugar que ocupe en un número; este valor de la cifra, que depende del lugar que ocupa en el número, se llama *valor relativo*, mientras que *valor absoluto* es el que le corresponde prescindiendo de su colocación en el número, es decir, por el lugar que ocupa entre los símbolos de la serie natural.

Convención relativa a la numeración escrita. — La numeración escrita está basada en el siguiente convenio:

Toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades de orden inmediatamente superior al de esta última.

Así, en un número escrito, la primera cifra de la derecha representa unidades simples, la anterior las decenas, la colocada a la izquierda de esta última las centenas, y así sucesivamente. Si se conoce el orden de una cifra a partir de la derecha, se deduce inmediatamente el nombre de las unidades que representa.

Ya se ha indicado que un número cualquiera puede descomponerse en grupos de unidades de diferentes órdenes, de forma que el número de unidades de cada grupo sea menor que diez. Por consiguiente, podrá representarse cualquier número por medio de diez cifras, *sirviendo el cero para señalar la posición del orden de unidades que falte en el número considerado.* Por ejemplo, el número cuarenta y un mil setenta y dos se escribirá: 41 072.

Lectura de un número escrito. — Si el número no tiene más de tres cifras se enuncian sucesivamente las cifras a partir de la izquierda, indicando para cada una de ellas el nombre de las unidades que representa.

EJEMPLO: El número 527 se lee: quinientos veintisiete.

Si el número tiene más de tres cifras, se divide, imaginativamente, en grupos de tres cifras a partir de la derecha. Cada grupo representa una clase de unidades, enunciándose sucesivamente cada grupo como si estuviera solo e indicando el nombre de la clase que representa.

EJEMPLO: El número 427 035 789 se descompone así:

millones	millares	unidades
427	035	789

que se enuncia: cuatrocientos veintisiete millones, treinta y cinco mil, setecientos ochenta y nueve.

Diferentes sistemas de numeración. — Nuestro sistema de numeración se llama **decimal** porque los órdenes sucesivos de unidades aumentan o disminuyen de diez en diez. El número diez es la **base** de este sistema.

También pueden concebirse otros sistemas cuya base sea diferente de diez, doce por ejemplo.

a)

b)

c)

d)

Variantes:

e)

f)

Origen de nuestras cifras: *a*, cifras indias; *b*, cifras de los árabes de Oriente; *c*, cifras de los árabes de Occidente (Gobar); *d*, *ápices* de Boecio (s. VI); *e*, cifras del siglo XIII; *f*, cifras del siglo XVI

En un sistema de base doce, o sistema **duodecimal,** doce unidades de un orden determinado forman una unidad de orden inmediatamente superior. En este sistema hay once cifras significativas; puede conservarse la notación del sistema decimal para las nueve primeras cifras, representando la décima por α y la undécima por β.

En general, se llama **base de un sistema de numeración** al número de unidades de un orden determinado que hay que agrupar para formar una unidad de orden inmediatamente superior.

Cambio de la base de un sistema de numeración. —

1° *Dado el número 4 955, escrito en el sistema decimal, ¿cómo se escribiría con el sistema duodecimal, conservando la misma convención para la numeración escrita?*

En el sistema duodecimal las unidades de los diferentes órdenes son doce veces mayores o menores.

Si se divide 4 955 por 12, se obtendrá 412 como cociente y 11 como resto. Así 4 955 unidades representan 412 unidades de segundo orden y 11 del primero.

Análogamente:

412 unidades de segundo orden representan 34 unidades de tercer orden y 4 del segundo; 34 unidades de tercer orden representan 2 unidades de cuarto orden y 10 del tercero.

Si representamos el número 10 por α y el número 11 por β, el número propuesto se escribirá, en el sistema duodecimal $2\alpha4\beta$.

2° *Dado el número $2\alpha4\beta$, escrito en el sistema duodecimal, escribirlo en el sistema decimal (α representa el número 10 y β el número 11).*

Convirtamos sucesivamente las unidades de diferentes órdenes en números del sistema decimal.

β	unidades de primer	orden valen	. . . .	11	unid.
4	" " segundo	" "	. . . . $12 \times 4 =$	48	"
α	" " tercer	" "	. . . . . $12 \times 12 \times \alpha =$	1 440	"
2	" " cuarto	" "	. . . $12 \times 12 \times 12 \times 2 =$	3 456	"
			Suma total	4 955	unid.

El número propuesto, $2\alpha4\beta$, es, en el sistema decimal, 4 955.

3° *Escribir en el sistema duodecimal el número 5 363, escrito en el sistema de base 7.*

Se empezará escribiento el número en el sistema decimal y después se escribirá este último en el sistema de base 12, en la forma antes indicada (1°). En el sistema decimal, el número se escribe 1 907, y en el sistema duodecimal 112β, designado por β el número 11.

Números complejos aritméticos. — Los números complejos son números concretos compuestos de varios grupos de unidades; el número de unidades que componen cada grupo sigue la numeración decimal, pero las unidades de los diferentes grupos están ligadas entre sí por una relación no decimal. Ejemplo: 15 años, 8 meses, 25 días; 18 horas, 54 minutos, 42 segundos.

Cifras romanas. — Las cifras romanas, representadas por letras, son siete:

Cifras romanas . .	I	V	X	L	C	D	M
Sus valores	1	5	10	50	100	500	1 000

El sistema de escritura en cifras romanas se basa en los principios siguientes:

1° Si a la *derecha* de una cifra se escribe otra *igual* o *menor*, el valor de la primera cifra queda aumentado en el valor de la segunda, y el número escrito se obtiene haciendo la suma de los valores de todas las letras que lo componen.

EJEMPLO: VIII = 5 + 3, ó 8; XX = 10 + 10 ó 20;
LVII = 50 + 5 + 2 = 57;

2° Si a la *izquierda* de una cifra se escribe otra *menor*, el valor de la primera cifra queda disminuido en el valor de la segunda.

EJEMPLO: IV = 5 — 1, ó 4; IX = 10 — 1, ó 9; XL = 50 — 10, ó 40;
CMLIX = (1 000 — 100) + 50 + (10 — 1) = 959.

3° El valor de una cifra queda multiplicado por 1 000 si se coloca sobre ella un trazo horizontal, y por un millón si se colocan dos.

EJEMPLO: $\overline{\text{X}}$ = 10 000; $\overline{\text{XV}}$CLXI = 15 161.

Las cifras romanas y la correspondiente numeración escrita siguen todavía utilizándose actualmente para ciertas inscripciones: las horas de los relojes, los años (el siglo XII...), los capítulos de un libro, la paginación de un prefacio, etc.

Operaciones aritméticas elementales

Suma de números naturales: Casos de la adición. Números pares. Números impares. Prueba de la adición. Suma. Propiedades fundamentales de la suma. — **Sustracción de números naturales:** Propiedad fundamental. Casos de la sustracción. Prueba de la sustracción. Observaciones sobre la sustracción y la adición. Polinomio aritmético. Empleo del paréntesis. — **Multiplicación de números naturales:** Teoría de la multiplicación de los números naturales. Número de cifras de un producto. Prueba de la multiplicación. Productos de factores. Consecuencias del teorema anterior. Aplicación al cálculo rápido. Productos de sumas y de diferencias. Aplicación al cálculo rápido. — **División de números naturales:** Número de cifras del cociente. Casos de la división. Prueba de la división. Propiedades de las divisiones exactas. Aplicación al cálculo rápido. Propiedades de las divisiones con resto. — **Aparatos y máquinas de calcular:** Ábaco o contador de bolas. El ábaco y las varillas chinas. Bastones o tablillas de Neper

Las cuatro operaciones elementales que se efectúan con los números naturales son la **adición** o suma, la **sustracción,** resta o diferencia, la **multiplicación** y la **división.**

Estas cuatro operaciones constituyen lo que se denomina generalmente **cálculo elemental.**

La palabra **cálculo** procede de la voz latina *calculus*, guijarro, que los romanos utilizaban para realizar las operaciones más sencillas, así como para efectuar sus cuentas en los juegos, en las votaciones verificadas en la plaza pública, etc.

Suma de números naturales

DEFINICIÓN. *Se denomina* **suma** *o* **adición** *de números naturales la operación que tiene por objeto reunir en un solo número los valores de otros varios.* El resultado de la operación se denomina **suma** o **total** y los números que se suman se denominan *sumandos* o *términos de la adición.*

Los dos conjuntos de la figura 1 contienen, respectivamente, 8 y 5 unidades; todo el grupo constituye un conjunto que representa su *suma*. Se indica la operación por medio del signo + (que se lee *más*); se escribe 8 + 5.

primer conjunto { ● ● ● ● / ● ● ● ● }

segundo conjunto { ● ● ● / ● ● }

Fig. 1

Con varios conjuntos, se escribirá, por ejemplo:

3 412 + 718 + 4 537.

Casos de la adición. — Primer caso. *Suma de dos números menores que 10.*

Se añadirán sucesivamente a uno de estos números todas las unidades que contiene el otro. Para la rapidez del cálculo es indispensable conocer de memoria los resultados de las adiciones de los 9 primeros números enteros tomados dos a dos. Estos resultados se indican en una tabla denominada **tabla de sumar.** La simple observación de la tabla indica inmediatamente cómo se ha formado.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla de sumar

Para hallar la suma de dos números menores que 10, 7 y 8, por ejemplo, bastará tomar el número que se encuentra en la intersección de la columna 8 y de la fila 7, o de la fila 7 y de la columna 8.

Segundo caso. *Suma de un número cualquiera y de otro menor que 10.* Sea la suma 537 + 5. El número 537 está formado de 53 decenas y 7 unidades; la suma constará, pues, de 53 decenas y 12 unidades o de 54 decenas y 2 unidades, o sea, 542 unidades.

Números pares. Números impares. — Se denominan *números pares* los que se obtienen contando de dos en dos a partir de cero o sea 0, 2, 4, 6, 8, ...

Se denominan *números impares* los que se obtienen contando de dos en dos a partir de uno, o sea, 1, 3, 5, 7, ...

Tercer caso. *Suma de varios números cualesquiera.*

La regla que enunciamos a continuación no necesita demostración.

Regla. *Para sumar varios números naturales se escriben uno debajo de otro, de forma que se correspondan en la misma columna las unidades del mismo orden, y se suman las unidades contenidas en cada columna, empezando por la de la derecha, que es la de las unidades simples. Si la suma es menor que 10, se escribe la cifra hallada; si la suma es mayor que 9, se escribe únicamente la cifra de las unidades, añadiendo la cifra de las decenas a la columna siguiente; cada una de las cifras escritas se coloca en la columna correspondiente. Se continúa operando de la misma manera hasta llegar a la última columna de la izquierda, en donde se escribe la suma tal como se ha obtenido.*

Ejemplo: Números que hay que sumar { 4 534 / 307 / 2 748 }

Suma 7 589

Prueba de la adición. — *Se denomina,* en general, **prueba de una operación** *una segunda operación que tiene por objeto verificar la exactitud de la primera.*

La prueba de una operación no garantiza evidentemente la exactitud de la misma, ya que puede ocurrir que la operación se haya efectuado correctamente y se haya cometido un error en la prueba; o también que la operación tenga errores y en la prueba se hayan cometido otros que compensen los primeros.

1º Puede hacerse la prueba de la adición cambiando el orden en que se han sumado los números, debiéndose obtener el mismo resultado: se puede, por ejemplo, volver a empezar la operación sumando los números de abajo arriba.

2º Puede efectuarse también la llamada *prueba del 9* (v. p. 17).

Suma. — La suma es una expresión de la forma

5 + 2 + 3 + 7 + 6.

Por definición, se obtiene el resultado sumando los dos primeros números, sumando después el tercero al resultado obtenido, y así sucesivamente. Los diferentes números que forman la suma se llaman **términos** de la suma.

Propiedades fundamentales de la suma. — 1º *La suma de varios números no depende del orden de los sumandos.*

Así, por ejemplo: 12 + 15 + 27 = 15 + 27 + 12; se dice que la suma goza de la propiedad *conmutativa.*

2º *La suma de varios números no se altera cuando se sustituyen dos o varios de ellos por el resultado de su suma.*

Así, por ejemplo: 7 + 8 + 12 + 17 = 7 + 20 + 17.

Recíprocamente, se puede sustituir uno de los términos por una suma equivalente; se dice entonces que la suma es una operación que goza de la propiedad *asociativa.*

Aplicaciones. Estos procedimientos tienen su aplicación en los siguientes casos.

1º Cuando se suman varios números, se procede generalmente por sumas parciales.

Ejemplo: 18 + 15 + 12 + 5 = 30 + 20 = 50.

2º La operación de la adición está teóricamente basada en esas propiedades.

Sustracción de números naturales

Definición. *Se denomina* **sustracción** *o* **resta** *a la operación que tiene por objeto, dados dos números naturales A y B, hallar un tercer número C que sumado a B nos dé A.* La operación sólo es posible cuando $B < A$.

Si $B = A, A - B = 0.$

El resultado de la operación se denomina **resto, exceso** o **diferencia.**

La sustracción de dos números se indica por medio del signo —, que se lee *menos*, y los números se denominan *minuendo* y *sustraendo.*

La sustracción permite, *conociendo la suma de dos números y uno de ellos, hallar el otro.* Es la operación inversa de la adición.

Propiedad fundamental. — Si los dos términos de una sustracción se aumentan o disminuyen un mismo número de unidades, el resultado no se altera. Sean los dos números A y B, cuya diferencia es A — B (*fig. 2*). Si se añade a cada uno de ellos el número *n*, se convertirán respectivamente en A + n y B + n. Su diferencia será A — B (v. *fig. 3*).

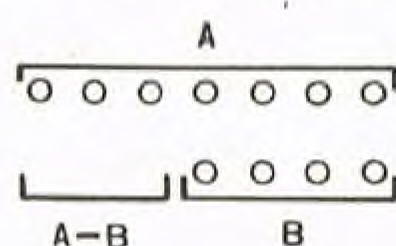


Fig. 2

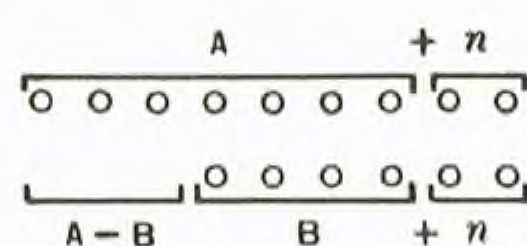


Fig. 3

Casos de la sustracción. — Primer caso. *El sustraendo y el resto son ambos menores que 10.*

El resto se obtendrá inmediatamente, ya que figurará en la tabla de sumar.

Segundo caso. *El minuendo y el sustraendo constan de varias cifras, pero las cifras del minuendo son mayores que sus correspondientes del mismo orden en el sustraendo.*

En este caso, se escribirá el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de igual orden y se procederá a continuación a efectuar las sustracciones parciales para cada orden de unidades.

Tercer caso. *El minuendo y el sustraendo son números cualesquiera.*

Sean los números

7 359 = 7 millares + 3 centenas + 5 decenas + 9 unidades,
3 475 = 3 millares + 4 centenas + 7 decenas + 5 unidades.

Se observará que en este caso algunas de las cifras del sustraendo son mayores que las del mismo orden que les corresponden en el minuendo. Teniendo en cuenta la propiedad fundamental anteriormente enunciada sumaremos, en este caso particular, 10 decenas al minuendo y una centena al sustraendo, 10 centenas al minuendo y un millar al sustraendo; es decir, que al sumar una misma cantidad al minuendo y al sustraendo la diferencia no se altera. Los dos números se escribirán entonces

7 millares + 13 centenas + 15 decenas + 9 unidades,
4 millares + 5 centenas + 7 decenas + 5 unidades.

De esta forma, se han hecho posibles las sustracciones parciales, y se obtendrá como resto 3 884. De aquí la siguiente regla.

Regla. *Para restar dos números de varias cifras se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden, y se traza una línea horizontal debajo del sustraendo. De cada una de las cifras del minuendo se restan, empezando por la derecha, las cifras del mismo orden del sustraendo, escribiendo las*

diferencias obtenidas debajo de la raya horizontal; cuando alguna de las cifras del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo se le suman 10 unidades del mismo orden, a fin de que sea posible la sustracción, y se aumenta en una unidad la cifra del sustraendo de la sustracción parcial siguiente.

Prueba de la sustracción. — 1° De la definición de la sustracción se deduce que la prueba lógica de esta operación será sumar el sustraendo con el resto y ver si el resultado es igual al minuendo.

2° Puede hacerse igualmente la prueba denominada *prueba del 9* (v. p. 17).

OBSERVACIONES. — 1° En toda sustracción, la suma del sustraendo y del resto es igual al minuendo.

También puede decirse:

El sustraendo es la diferencia entre el minuendo y el resto.

2° *El número cero.* El signo cero, como hemos visto, sirve para indicar los órdenes de unidades que faltan en un número entero escrito, pero también puede considerársele como un número, un *número nulo.* Así, cuando se resten dos números iguales, el resto será nulo, por lo que podrá escribirse, por ejemplo:

$$17 - 17 = 0.$$

Observaciones sobre la sustracción y la adición. — 1° Cuando en una adición se suma o se resta a uno de los términos un número dado, la suma aumenta o disminuye en dicho número.

2° Si en una sustracción se suma o se resta al minuendo un número dado, la diferencia aumenta o disminuye en dicho número.

3° Si en una sustracción se suma o se resta al sustraendo un número dado, la diferencia disminuye o aumenta en dicho número.

Polinomio aritmético. — *Se denomina* **polinomio** *la expresión que consta de varios números separados por los signos + o —.*

Por ejemplo, $7 + 8 - 2 + 3 - 5 - 4$ es un *polinomio aritmético.*

Esta expresión indica el resultado que se obtiene efectuando sucesivamente, de izquierda a derecha, las operaciones indicadas por los signos. Se supone, naturalmente, que dichas operaciones son posibles. Los números que figuran en la expresión se denominan *términos del polinomio.*

El valor de un polinomio aritmético es igual a la diferencia entre la suma de los términos precedidos del signo + y la suma de los términos precedidos del signo — .

EJEMPLO: $8 - 2 + 4 - 5 - 1 = (8 + 4) - (2 + 5 + 1)$.

También puede cambiarse el orden de los términos o sustituir varios de ellos por el resultado de su operación.

Empleo del paréntesis. — Cuando ciertos números, con los cuales hay que efectuar operaciones de suma o resta, están colocados entre paréntesis, puede considerárseles como si constituyeran un solo número, precisamente el que se obtendría efectuando las operaciones indicadas entre paréntesis.

Así: $7 + (8 - 3) = 7 + 5;$
$7 - (15 - 12) = 7 - 3.$

OBSERVACIONES. 1° *Para restar de un número una suma, se restan sucesivamente de dicho número cada uno de los sumandos.*

Por ejemplo: $a - (b + c + d) = a - b - c - d;$
$15 - (2 + 3 + 7) = 15 - 2 - 3 - 7.$

2° *Para restar de una suma un número, se le resta de uno de los sumandos.*

Por ejemplo: $(15 + 17) - 7 = 15 + (17 - 7) = 15 + 10.$

3° *Para restar de una suma uno de sus sumandos, basta con suprimirlo.*

Por ejemplo: $(14 + 3 + 8) - 3 = 14 + 8.$

TEOREMA. *Para restar de un número una diferencia, se le suma el sustraendo y al resultado se le resta el minuendo.*

Sea, por ejemplo, el número a y la diferencia $b - c$; su diferencia será: $a - (b - c)$, y tendremos: $a - (b - c) = a + c - b.$

En efecto, si a los dos términos a y $b - c$ de la sustracción se les suma el número c, la diferencia no se altera y sus dos términos se convertirán en $a + c$ y b (v. PROPIEDAD FUNDAMENTAL, p. 7).

PROBLEMA. *Hallar dos números conociendo su suma S y su diferencia D.*

Sean a y b los dos números, $a > b$.

Tendremos

$$S + D = 2a, \text{ de donde } a = \frac{S + D}{2}$$

y

$$S - D = 2b, \text{ de donde } b = \frac{S - D}{2}$$

Aplicación numérica. Si S = 30 y D = 6, se tendrá

$$a = \frac{30 + 6}{2} = 18 \text{ y } b = \frac{30 - 6}{2} = 12.$$

Multiplicación de números naturales

DEFINICIÓN. *La multiplicación de los números naturales es una operación que tiene por objeto, dados dos números denominados respectivamente* **multiplicando** *y* **multiplicador,** *hallar un tercero, denominado* **producto,** *que sea la suma de tantos números iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador.*

El multiplicando y el multiplicador se denominan *factores* del producto.

La multiplicación se indica por medio del signo ×, que se lee *multiplicado por.*

El producto del multiplicando 15 por el multiplicador 8 se indica 15×8; con arreglo a la definición, será la suma de 8 números iguales a 15.

La multiplicación de los números naturales es una suma de números iguales.

Si uno de los factores es 1, el producto es igual al otro factor.

Si uno de los factores es 0, el producto es igual a cero.

Teoría de la multiplicación de los números naturales. — Si nos atenemos a la definición, la multiplicación podría efectuarse mediante una adición, pero cuando el multiplicador es un número elevado esta adición sería cada vez más complicada; por este motivo se recurre, para efectuar una multiplicación, a un procedimiento relativamente sencillo.

PRIMER CASO. *El multiplicando y el multiplicador son menores que 10.*

Todos los productos correspondientes figuran previamente en una tabla llamada **Tabla de Pitágoras.** Para la rapidez de los cálculos es necesario saber de memoria los resultados obtenidos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabla de Pitágoras

Para formar esta tabla, se escriben en la primera fila los nueve primeros números.

Después se suma cada uno de los nueve primeros números con él mismo; formaremos así una segunda fila en la que figuran los productos de los números de la primera fila por 2.

Se suma a continuación cada uno de los números de la segunda fila al número correspondiente de la primera, formándose así una tercera fila en la que figuran los productos de los números de la primera por 3.

De la misma manera se forma la cuarta fila y las filas siguientes, sumando cada uno de los números de la última fila formada al número correspondiente de la primera. En cada una de las filas así formadas figuran los productos de los números de la primera fila por 4, 5, ... 9.

Una vez formada la tabla en esta forma, el producto de los dos números 5 y 9, por ejemplo, se encuentra en la intersección de la columna 5 y de la fila 9, es decir, 45.

SEGUNDO CASO. *El multiplicando es un número cualquiera, y el multiplicador tiene sólo una cifra.*

Sea el producto $4\,675 \times 3$. Según la definición de la multiplicación, multiplicar 4 675 por 3 equivale a sumar tres números iguales a 4 675.

```
 4 6 7 5
 4 6 7 5
 4 6 7 5
--------
1 4 0 2 5
```

Efectuemos en primer lugar la suma de 3 números iguales a 5 unidades, es decir, $5 \times 3 = 15$ unidades (primer caso), después la suma de 3 números iguales a 7 decenas, con lo que obtenemos $7 \times 3 = 21$ decenas, y así sucesivamente.

Se obtiene la siguiente regla.

REGLA. *Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola cifra se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, y después se multiplican sucesivamente, comenzando por la derecha, cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador; si el producto obtenido es mayor que 10, se escribe solamente la cifra de las unidades y se añaden las decenas al producto parcial siguiente. El último producto parcial se escribe con todas sus cifras.*

```
Multiplicando ... ... ...    4 6 7 5
Multiplicador ... ... ...          3
                          ----------
Producto ... ... ... ...   1 4 0 2 5
```

TERCER CASO. *El multiplicando es un número cualquiera, y el multiplicador un número formado por la unidad seguida de ceros.*

Sea el producto $745 \times 1\,000$.

El producto es igual a la suma de 1 000 números iguales a 745.

Esta suma es igual a la de 745 números iguales a 1 000.
Lo demostraremos fácilmente.



Fig. 4

Consideremos 1 000 grupos de números (*fig.* 4), figurando en cada grupo 745 unidades. La suma será el producto 745 × 1 000.

Tomemos una unidad de cada grupo. Todas estas unidades agrupadas forman el número 1 000, y podremos recomenzar una segunda vez, una tercera, ... hasta 745 veces. Constituiremos así 745 grupos de números, comprendiendo cada uno 1 000 unidades, es decir, 745 mil ó 745 000 (*fig.* 5).

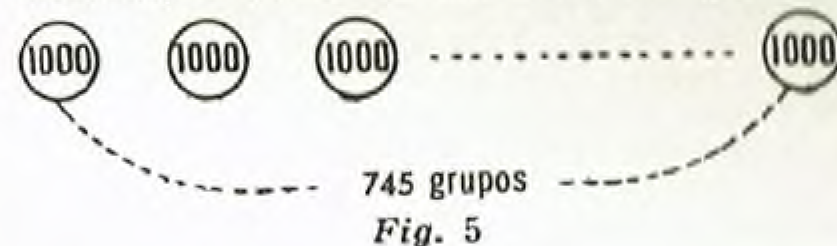


Fig. 5

Como no hemos alterado la suma total, se deduce que el producto 745 × 1 000 es igual a 745 000, de donde se obtiene la regla siguiente.

REGLA. *Para multiplicar un número de varias cifras por otro formado de la unidad seguida de ceros, basta escribir a la derecha del multiplicando tantos ceros como tiene el multiplicador.*

CUARTO CASO. *El multiplicando es un número cualquiera, y el multiplicador está formado por una cifra significativa seguida de ceros.*

Sea el producto de 541 × 300.

541
541 } 541 × 3 = 1 623.
541
541
.....
.....

Este producto es igual a la suma de 300 números iguales a 541. Ahora bien, podremos descomponer esta suma en 100 sumas parciales integradas cada una por 3 números iguales a 541.

La suma de 3 números iguales a 541 es 541 × 3 = 1 623 (segundo caso).

El producto buscado es 1 623 × 100 = 162 300 (tercer caso), de donde se deduce la regla siguiente.

REGLA. *Para multiplicar un número cualquiera por otro formado de una cifra seguida de ceros se multiplica el multiplicando por la cifra significativa y a la derecha del producto obtenido se escriben tantos ceros como tiene el multiplicador.*

QUINTO CASO. *El multiplicando y el multiplicador son dos números cualesquiera.*

Sea el producto 728 × 457.

El producto buscado será la suma de 457 números iguales a 728. Para obtenerlo, podremos calcular primeramente la suma de 7 números iguales a 728, después la suma de 50 números iguales a 728, y finalmente la suma de 400 números iguales a 728, y sumar los resultados obtenidos.

Tendremos:

728 × 7 = 5 096 (segundo caso)
728 × 50 = 36 400 (cuarto caso)
728 × 400 = 291 200 (cuarto caso)

728 × 457 = 332 696,

de donde se deduce la regla siguiente.

REGLA. *Para multiplicar dos números cualesquiera, después de escribir el multiplicador debajo del multiplicando y trazar una línea horizontal, se multiplicará este segundo factor por cada una de las cifras del multiplicador, escribiendo los productos parciales de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno esté situada debajo de la correspondiente cifra del multiplicador; sumando luego estos productos sucesivos, se obtendrá el producto total.*

OBSERVACIÓN. Si el multiplicando y el multiplicador acaban en ceros, se efectuará la operación sin tener en cuenta dichos ceros, pero se escribirán a continuación, a la derecha del producto obtenido, tantos ceros como figuran a la derecha del multiplicando y del multiplicador.

Número de cifras de un producto. — *El número de cifras de un producto de dos factores no puede exceder de la suma de los números de cifras de estos dos factores, ni ser inferior a dicha suma disminuida en una unidad.*

Sean los números 345 y 84.

Tendremos:

$$100 < 345 < 1\,000$$
$$10 < 84 < 100$$
$$100 \times 10 < 345 \times 84 < 1\,000 \times 100$$

o bien:

$$1\,000 < 345 \times 84 < 100\,000.$$

Ahora bien, cualquier número natural mayor que 1 000 contiene por lo menos cuatro cifras, y cualquier número natural menor que 100 000 contiene, como máximo, cinco cifras.

Por consiguiente, el producto 345 × 84 constará de 5 cifras como máximo y 4 como mínimo, es decir, tantas como contienen ambos factores en el primer caso, o dicho número disminuido en una unidad, en el segundo.

Prueba de la multiplicación. — Para efectuar la prueba de una multiplicación:

1º Puede efectuarse de nuevo la operación después de haber invertido el orden de los factores; el producto no debe variar;

2º Puede dividirse el producto por uno de los factores; deberá obtenerse entonces en el cociente el otro factor (lo que se deduce de la definición de la división, pág. 10);

3º Puede hacerse la *prueba del 9* (v. pág. 17).

OBSERVACIÓN. Cuando los dos factores de un producto se representan por las letras *a* y *b*, el producto puede representarse, como ya hemos indicado, *a* × *b*. También puede escribirse *a* · *b*, o sencillamente *ab*.

Aunque la multiplicación de un número por cero no tiene sentido, admitiremos que el producto de un número por cero es cero.

Productos de factores. — DEFINICIÓN. *Producto de varios factores considerados en un orden determinado es el producto que se obtiene multiplicando el primer factor por el segundo, el producto obtenido por el tercero, y así sucesivamente.*

El producto de los factores 3, 4, 7, 6, se indica de la forma siguiente:

$$3 \times 4 \times 7 \times 6.$$

Por definición, esta notación indica el producto de 3 por 4, que es 12, después el de 12 por 7, que es 84, y por último el de 84 por 6, que da 504.

TEOREMA FUNDAMENTAL. *El orden de los factores no altera el producto.*

Puede demostrarse el teorema en la forma siguiente:

En un producto de dos factores, puede invertirse su orden sin que se altere el producto.

Se dice que **la multiplicación es una operación conmutativa.** (Esta operación se ha demostrado antes, *figs.* 4 y 5).

En un producto de tres factores, puede invertirse el orden de los dos últimos sin que se altere el valor del producto.

Demostraremos que

$$5 \times 3 \times 4 = 5 \times 4 \times 3.$$

5	5	5
5	5	5
5	5	5
5	5	5

Formemos una tabla en la que figure el número 5 escrito 3 veces en la misma fila y 4 filas iguales.

Sumemos los números que figuran en la tabla. Cualquiera que sea el orden en que efectuemos dicha suma, siempre que se sumen todos y cada uno una sola vez, la suma será siempre la misma.

En cada fila horizontal figuran

$$5 + 5 + 5 \text{ ó } (5 \times 3) \text{ unidades.}$$

(Cualquier producto de factores que figura entre paréntesis se supone efectuado.)

La suma total será, por consiguiente, puesto que existen 4 filas idénticas:

$$5 \times 3 \times 4.$$

Efectuemos la suma en forma diferente.

En cada columna figuran

$$5 + 5 + 5 + 5 \text{ ó } (5 \times 4) \text{ unidades.}$$

Como hay tres columnas iguales, la suma total será

$$(5 \times 4) \times 3.$$

Este último producto podremos escribirlo 5 × 4 × 3, según la definición del producto de factores.

Como la suma obtenida será la misma en ambos casos, tendremos

$$5 \times 3 \times 4 = 5 \times 4 \times 3.$$

En un producto de varios factores, puede invertirse el orden de los dos últimos sin que se altere el valor del producto.

Demostremos, por ejemplo, que

$$5 \times 2 \times 7 \times 8 \times 4 = 5 \times 2 \times 7 \times 4 \times 8.$$

Observemos que 5 × 2 × 7 = 70, y si nos atenemos a la definición del producto de factores, veremos que el primer producto es igual a 70 × 8 × 4 y el segundo a 70 × 4 × 8.

Ahora bien, 70 × 8 × 4 = 70 × 4 × 8, con arreglo al principio precedente.

En un producto de varios factores, puede invertirse el orden de dos factores consecutivos sin que se altere el valor del producto.

Demostremos, por ejemplo, que

$$8 \times 9 \times 5 \times 2 \times 7 = 8 \times 5 \times 9 \times 2 \times 7.$$

Según el principio anterior:

$$8 \times 9 \times 5 = 8 \times 5 \times 9.$$

Multipliquemos primeramente los dos productos por 2, después los resultados obtenidos, que son iguales, por 7: los últimos productos seguirán siendo iguales y por consiguiente:

$$8 \times 9 \times 5 \times 2 \times 7 = 8 \times 5 \times 9 \times 2 \times 7.$$

CASO GENERAL. Demostremos, por ejemplo, que

$$3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 9 = 2 \times 5 \times 3 \times 9 \times 7.$$

Puesto que en un producto de factores puede invertirse el orden de dos consecutivos, podrá colocarse cualquier factor del producto en cualquier lugar; por consiguiente, tendremos sucesivamente, con arreglo al principio anterior:

$$3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 9 = 3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 9$$
$$= 3 \times 2 \times 5 \times 7 \times 9 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$$
$$= 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = 2 \times 5 \times 3 \times 9 \times 7.$$

Consecuencias del teorema anterior. — 1º *En un producto de varios factores, puede reemplazarse cualquier número de ellos por su producto efectuado.*

Demostremos, por ejemplo, que

$$7 \times 5 \times 4 \times 9 = 63 \times 5 \times 4.$$

Según el teorema anterior:

$$7 \times 5 \times 4 \times 9 = 7 \times 9 \times 5 \times 4,$$

y este último producto, según la definición del producto de factores, podrá escribirse

$$63 \times 5 \times 4.$$

Aplicación al cálculo rápido. — *Calcular rápidamente el producto* $7 \times 4 \times 3 \times 25$.

$$7 \times 4 \times 3 \times 25 = 7 \times 3 \times 100 = 2\,100.$$

2º *En un producto de varios factores, puede reemplazarse uno de ellos por otros cualesquiera cuyo producto sea igual al factor considerado.*

Este teorema es el recíproco del anterior.

Demostremos, por ejemplo, que

$$7 \times 24 \times 3 = 7 \times 4 \times 6 \times 3.$$

El producto podrá escribirse $24 \times 7 \times 3$, ó, según la definición del producto de factores:

$$4 \times 6 \times 7 \times 3$$

o también $7 \times 4 \times 6 \times 3$.

Aplicación al cálculo rápido. — *Calcular rápidamente* 8×35.

Se tiene $8 \times 35 = 8 \times 5 \times 7 = 40 \times 7 = 280$.

3º *Para multiplicar un producto de varios factores por un número, basta formar un producto único con todos los factores, o bien multiplicar por este número uno cualquiera de los factores del producto.*

Multipliquemos por 4 el producto $8 \times 9 \times 12$.

Para indicar que el producto se supone efectuado, escribámoslo entre paréntesis y demostremos que

$$(8 \times 9 \times 12) \times 4 = 8 \times 36 \times 12.$$

El producto $(8 \times 9 \times 12) \times 4$ puede escribirse $8 \times 9 \times 12 \times 4$; esto se deduce de la definición del producto de factores.

Ahora bien, con arreglo a un teorema demostrado anteriormente, tendremos que $8 \times 9 \times 12 \times 4 = 8 \times 36 \times 12$.

Aplicación al cálculo rápido. — *Calcular el producto de* $(7 \times 2 \times 75)$ *por 4.*

Observemos que $75 \times 4 = 300$.

El producto es igual a $300 \times 7 \times 2 = 100 \times 3 \times 7 \times 2 = 4\,200$.

Observación. Para multiplicar un número por un producto de factores, se seguirá, evidentemente, la misma regla que para multiplicar un producto de factores por un número. En efecto, el producto

$4 \times (5 \times 7 \times 6)$ podrá escribrse $(5 \times 7 \times 6) \times 4$.

Teorema. *El producto de varios productos de factores es igual al producto de factores formados por todos los factores que figuran en los productos dados.*

Sean los productos 3×4, $7 \times 5 \times 6$, $12 \times 2 \times 11$, que escribiremos

$$(3 \times 4) \times (7 \times 5 \times 6) \times (12 \times 2 \times 11).$$

Tenemos aquí un producto de 3 factores; ahora bien, podemos reemplazar cualquiera de ellos por otros factores cuyo producto sea igual al factor considerado. Podremos, pues, escribir el producto.

$$3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 6 \times 12 \times 2 \times 11.$$

Aplicación al cálculo rápido. — *Efectuar el producto*

$$(4 \times 12)\ (25 \times 5)\ (3 \times 8).$$

Se agrupan los factores cuyos productos son sencillos.

El producto se escribirá

$$4 \times 25 \times 8 \times 5 \times 12 \times 3 = 100 \times 40 \times 36 = 144\,000.$$

Productos de sumas y diferencias. — Teorema. *Para multiplicar una suma de varios números por otro número, se multiplica dicho número por cada uno de los sumandos y se suman los productos obtenidos.*

Sea, por ejemplo, la multiplicación $(4 + 9)\ 5$. Tendremos $(4 + 9)\ 5 = 5\ (4 + 9)$.

O sea, $5\ (4 + 9) = 5 \times 4 + 5 \times 9$.

Por consiguiente, podremos escribir $(4 + 9)\ 5 = 4 \times 5 + 9 \times 5$.

La demostración es análoga, cualquiera que sea el número de sumandos de la suma.

Por ejemplo, sean a, b, c, d, α números cualesquiera:

$$(a + b + c + d)\ \alpha = a\alpha + b\alpha + c\alpha + d\alpha.$$

Aplicación al cálculo rápido. — *Multiplicación de un número por 11.*

Multipliquemos 72×11.

Se tiene $72 \times 11 = 72\ (10 + 1) = 720 + 72 = 792$.

De donde se deduce la regla para multiplicar un número por 11.

Fácilmente se establecen los siguientes teoremas:

Teorema. *Para multiplicar una suma de varios números por otra suma, se multiplican sucesivamente los diferentes sumandos de una de las sumas por cada uno de los sumandos de la otra y se suman los productos obtenidos.*

Ejemplo: $(a + b + c)\ (a' + b') = aa' + ba' + ca' + ab' + bb' + cb'$.

Teorema. *Para multiplicar un número por una diferencia, se multiplican respectivamente el minuendo y el sustraendo por dicho número y se restan ambos productos.*

Ejemplo: $(15 - 4)\ 6 = 15 \times 6 - 4 \times 6$.

Aplicación al cálculo rápido:

$$38 \times 15 = (40 - 2)\ 15 = 40 \times 15 - 2 \times 15 = 570.$$

Observación. Teniendo en cuenta los teoremas anteriores podremos escribir:

$$ac + bc = (a + b)\ c.$$

Esta transformación se denomina *sacar c factor común.*

Aplicación al cálculo rápido:

$$28 \times 4 + 28 \times 2 + 28 \times 5 = (4 + 2 + 5)\ 28 = 11 \times 28 = 308.$$

División de números naturales

Definición. *La* **división entera** *es una operación que tiene por objeto, dados dos números, denominados* **dividendo** *y* **divisor,** *hallar el mayor número que multiplicado por el divisor pueda restarse del dividendo.* Este tercer número se denomina **cociente.**

Sea, por ejemplo, la división de 28 por 9.

Se indica la operación colocando entre los dos números (siendo el primero de ellos el dividendo) el signo : que se lee *dividido por.*

Tendremos, pues, la notación $28 : 9$.

La operación de la división puede efectuarse por una *serie de sustracciones;* se resta primeramente 9 de 28, quedando 19; después 9 de 19, y quedará 10; después 9 de 10, que nos da finalmente 1.

El número de veces que ha podido restarse 9 de 28, es decir, 3, es el **cociente** de la división. El resto de la última sustracción, es decir, 1, es el **resto** de la división. Se habría obtenido evidentemente el mismo resto si de 28 hubiésemos restado el producto de 9×3.

Se denomina **resto de la división** la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente.

Cuando el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, el resto es igual a cero; se dice entonces que la división es **exacta.**

Cuando la división es exacta, puede definirse como la operación cuyo objeto es, *dado un producto de dos factores y uno de ellos, hallar el otro.* La división es la operación inversa de la multiplicación.

Si llamamos D al dividendo, d al divisor, Q al cociente y R al resto de una división, podrá establecerse de una manera general la relación

$$D = d \cdot Q + R,$$

con la condición $R < d$.

Recíprocamente, si entre cuatro números D, d, Q y R puede establecerse la relación

$$D = d \cdot Q + R,$$

con la condición $R < d$, puede decirse que al dividir D por d se obtiene un cociente Q y un resto R.

Puede demostrarse fácilmente. Supongamos que exista otro cociente Q′ y otro resto R′; en este caso se tendría

$$D = d \cdot Q' + R', \text{ con la condición } R' < Q'.$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades, suponiendo por ejemplo $Q > Q'$, tendremos

$$0 = d\ (Q - Q') + R - R'.$$

La diferencia $Q - Q'$ sería por lo menos igual a 1 y su producto por d sería por lo menos igual a d; ahora bien, $d + R - R'$ no puede ser nulo, puesto que R y R′ son menores que d. Por consiguiente, $Q = Q'$, luego $R = R'$.

Este resultado se expresa diciendo que las relaciones

$$D = d \cdot Q + R, \text{ con } R < d$$

son características de la división de D por d, siendo Q el cociente y R el resto.

También puede decirse que dividir un número D por otro d es hallar un número Q tal que se verifique la doble desigualdad siguiente:

$$d \cdot Q \leqq D < d\ (Q + 1).$$

El número Q se llama también **cociente aproximado** *por defecto en una unidad.*

$Q + 1$ es el **cociente aproximado** *por exceso en una unidad.*

Número de cifras del cociente. — *El número máximo de cifras del cociente es igual al número de ceros que hay que escribir a la derecha del divisor para obtener un número mayor que el dividendo.*

Sea, por ejemplo, la división de 345 872 por 2 961.

Tendremos $296\,100 < 345\,872 < 2\,961\,000$

o bien $2\,961 \times 100 < 345\,872 < 2\,961 \times 1\,000$.

Por estar comprendido entre 100 y 1 000, el cociente constará de tres cifras.

Casos de la división. — Primer caso. *El divisor y el cociente constan de una sola cifra.*

Sea, por ejemplo, la división de 48 por 9.

Según la tabla de la multiplicación, se tendrá:

$$9 \times 5 < 48 < 9 \times 6.$$

El cociente buscado es 5.

El resto será $48 - (9 \times 5) = 3$.

No es necesario escribir esta operación. Basta con efectuarla mentalmente.

Segundo caso. *El divisor es un número cualquiera y el cociente consta de una sola cifra.*

Sea la división de 3 472 por 835.

Tendremos: $835 \times 1 < 3\,472 < 835 \times 10$.

El cociente sólo tiene una cifra.

Tendremos pues: $3\,472 = 835 \times \text{cociente} + \text{resto}$.

El producto de 835 por el cociente es igual a la suma de los tres productos parciales siguientes:

El producto del cociente por las 8 centenas, por las 3 decenas y por las 5 unidades.

Ahora bien, el producto de 8 centenas por el cociente es un número exacto de centenas, las cuales sólo pueden estar contenidas en las 34 centenas del dividendo.

Al dividir 34 por 8, tendremos la cifra del cociente o una cifra demasiado elevada.

El cociente de 34 por 8 es 4. Verifiquemos esta cifra.

El producto de 835 por 4 es 3 340, número inferior al dividendo.

4 es el cociente buscado. El resto será $3\,472 - 3\,340 = 132$

De aquí la regla siguiente:

Regla. *Para dividir un número de varias cifras por otro también de varias, cuando el cociente conste de una sola cifra, se divide por la primera cifra del divisor el número de las unidades del mismo orden del dividendo, obteniéndose así la cifra del cociente, o una cifra mayor. Para comprobarla, se multiplicará dicha cifra por el divisor, y si el producto puede restarse del dividendo, la cifra será la verdadera; en caso contrario, se rebajará dicha cifra en una unidad y se procederá a la misma comprobación, continuando los tanteos hasta llegar a una cifra cuyo producto por el divisor sea menor que el dividendo.*

```
3 4'7 2 | 8'3 5
3 3 4 0 |-------
------- | 4
  1 3 2
```

El resto es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente.

Observación. En la práctica no se escribe el producto del divisor por el cociente, sino que se le resta inmediatamente del dividendo a medida que se va multiplicando.

```
3 4 7 2 | 8 3 5
  1 3 2 |-------
        | 4
```

Tercer caso. *El divisor y el cociente son números cualesquiera.*

Sea la división 83 795 por 342.

Tendremos: $342 \times 100 < 83\,795 < 342 \times 1\,000$.

El cociente tendrá tres cifras, por estar comprendido entre 100 y 1 000.

Se tendrá $83\,795 = 342 \times \text{cociente} + \text{resto}$.

El producto de 342 por el cociente es igual a la suma de los productos parciales siguientes:

1º el producto de 342 por las centenas del cociente;

2º el producto de 342 por las decenas del cociente;

3º el producto de 342 por las unidades del cociente.

Ahora bien, el producto de 342 por las centenas del cociente es un número exacto de centenas, las cuales deben figurar en las 837 centenas del dividendo *(primer dividendo parcial)*. Vamos a demostrar que dividiendo 837 por 342 se obtiene la cifra de las centenas del cociente.

```
8 3 7'9 5 | 3 4 2
6 8 4 0 0 |-------
--------- | 2
1 5 3 9 5
```

Sea a el cociente de 837 por 342; tendremos

$$342 \times a \leqq 837 < 342 \; (a + 1).$$

Multipliquemos los tres miembros de la doble desigualdad por 100 y obtendremos

$$342 \times 100\,a \leqq 83\,700 < 342 \times 100\,(a + 1).$$

Podrá añadirse 95 al número intermedio sin cambiar el sentido de las desigualdades, ya que la primera aumentará y la segunda no cambiará de sentido, puesto que los números 837 y $342\,(a + 1)$ difieren por lo menos en una unidad, y por lo tanto

$$83\,700 \text{ y } 342 \times 100\,(a + 1)$$

diferirán por lo menos en una centena. Por consiguiente, podremos escribir

$$342 \times 100\,a < 83\,795 < 342 \times 100\,(a + 1).$$

a representa la cifra de las centenas del cociente, que será igual a 2, por estar comprendido entre 200 y 300.

Ahora bien, $342 \times 200 = 68\,400$.

Restemos este producto del dividendo y quedará 15 395.

Este resto representa la suma:

1º del producto de 342 por las decenas del cociente;

2º del producto de 342 por las unidades del cociente;

3º del resto de la división propuesta.

Pero el producto de 342 por las decenas del cociente es un número exacto de decenas que sólo podrá figurar en las 1 539 decenas del nuevo dividendo *(segundo dividendo parcial)*. Dividiendo 1 539 por 342 tendremos la cifra de las decenas del cociente. Podría obtenerse como se ha hecho precedentemente para la cifra de las centenas. El cociente de 1 539 por 342 es 4.

```
1 5 3 9 5 | 3 4 2
1 3 6 8 0 |-------
  1 7 1 5 | 4
```

La cifra de las decenas del cociente es 4.

Ahora bien, $342 \times 40 = 13\,680$ unidades.

Restemos este producto del dividendo considerado, y quedará 1 715 *(tercer dividendo parcial)*.

```
1 7 1 5 | 3 4 2
1 7 1 0 |-------
------- | 5
      5
```

Este resto representa el producto de 342 por las unidades del cociente y el resto de la división propuesta.

Ahora bien, $1\,715 = 342 \times 5 + 5$.

La cifra de las unidades del cociente es 5.

El cociente de la división propuesta es 245 y el resto 5.

De aquí la siguiente regla.

Regla. *Para efectuar la división de dos números cuando el cociente tiene varias cifras, se escribe el divisor a la derecha del dividendo, separando de la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias para formar un número mayor que el divisor (sin que llegue a ser diez veces mayor). Así se obtiene el primer dividendo parcial, cuya división por el divisor da la primera cifra del cociente. Esta cifra se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial; a la derecha del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo, obteniéndose así el segundo dividendo parcial, que dividido por el divisor da la segunda cifra del cociente. Se continúa del mismo modo hasta la última cifra del dividendo, obteniéndose así la última cifra del cociente.*

```
8 3 7 9 5 | 3 4 2
1 5 3 9   |-------
  1 7 1 5 | 2 4 5
    0 0 5
```

El cociente de la última división parcial es la cifra de las unidades del cociente y el resto de esta división es el resto de la operación.

Observaciones. 1º En la práctica, no se escriben los productos parciales; se restan, a medida que se van obteniendo, de los dividendos parciales considerados.

2º Si uno de los dividendos parciales es menor que el divisor, se añade un cero al cociente y se continúa la operación, escribiendo a la derecha del dividendo parcial la cifra siguiente del dividendo.

```
1 3 0 1 2 2 | 4 2 8
  . 1 7 2 2 |-------
----------- | 3 0 4
      . 1 0
```

3º Si el divisor acaba en ceros, éstos pueden suprimirse, al mismo tiempo que igual número de cifras en la derecha del dividendo.

Así, por ejemplo, el cociente de 784 379 por 98 700 es el mismo que el de 7 843 por 987.

En efecto, si el cociente de los dos últimos números es Q, se tendrá

$$987 \times Q \leqq 7\,843 < 987 \times (Q + 1).$$

Multipliquemos los tres miembros por 100, y obtendremos

$$98\,700 \times Q \leqq 784\,300 < 98\,700\;(Q + 1).$$

Puede añadirse 79 al número intermedio; en efecto, la primera desigualdad sigue verificándose, y también la segunda, ya que 7 843 y $987 \times (Q + 1)$ difieren por lo menos en una unidad, en virtud de las primeras desigualdades; por lo tanto, $7\,843 \times 100$ y $987 \times 100 \times (Q + 1)$ difieren por lo menos en una centena. Podremos escribir

$$98\,700 \times Q < 784\,379 < 98\,700\;(Q + 1),$$

y por consiguiente, Q es el cociente de 784 379 por 98 700.

Observemos sin embargo que el resto de la división se obtendrá colocando 79 a la derecha del resto dado por la división abreviada.

4º Si el dividendo y el divisor acaban en ceros, se puede suprimir en la derecha de ambos el *mismo número* de ellos, sin que se altere el cociente, pero habrá que añadir a la derecha del resto obtenido tantos ceros como se hayan suprimido en cada uno de los dos números.

Prueba de la división. — 1º Se multiplica el divisor por el cociente y se añade a este producto el resto de la división: debe obtenerse el dividendo, en virtud de la definición.

2º También puede efectuarse la *prueba del 9* (v. p. 17).

Propiedades de las divisiones exactas. — Definición. Se dice que **un número es divisible por otro cuando al dividirlo por este número el resto es nulo.** Por ejemplo, 35 es divisible por 7.

Cuando un número A es divisible por otro número a, se dice que a es un **divisor** de A o que a **divide** A.

Se denomina **múltiplo de un número entero** el producto de dicho número entero por otro entero.

28 es múltiplo de 4, puesto que $28 = 4 \times 7$.

Si, recíprocamente, A es un múltiplo de a, A es divisible por a.

Teorema. *Si los términos de una suma son divisibles por un mismo número, la suma es divisible por dicho número y su cociente será igual a la suma de los cocientes de los términos de la suma por el divisor común.*

Sea la suma $A + B + C$ y supongamos que el número a divide a la vez los números A, B y C. Designando por Q, Q', Q'' los cocientes correspondientes, tendremos

$$A = a{\cdot}Q,$$
$$B = a{\cdot}Q',$$
$$C = a{\cdot}Q''.$$

Sumando miembro a miembro, obtendremos

$$A + B + C = aQ + aQ' + aQ''.$$

Ahora bien; el producto $aQ + aQ' + aQ''$ es el producto de la suma $Q + Q' + Q''$ por el número a (v. p. 9):

$$A + B + C = a(Q + Q' + Q'').$$

Esta igualdad demuestra que $A + B + C$ es divisible por a y que el cociente es precisamente $Q + Q' + Q''$.

Ejemplo: $45 + 35 + 220$, suma cuyos tres términos son divisibles por 5, es divisible por 5, y el cociente será $9 + 7 + 44$.

Observación. **Factor común.** Si escribimos

$$A + B + C = a(Q + Q' + Q''),$$

se dice que a es factor común, o bien que hemos sacado a factor común.

Para sacar factor común en una suma se sustituye por un producto de dos factores: uno, el factor común a los sumandos, y otro, la suma indicada de los cocientes que resultan al dividirlos por dicho factor común. Es una operación muy frecuente.

Sacar 5 factor común en la suma $45 + 35 + 220$, es escribir

$$45 + 35 + 220 = 5(9 + 7 + 44).$$

Teorema. *Si los dos términos de una diferencia son divisibles por un mismo número, la diferencia es divisible por dicho número y el cociente es la diferencia de los cocientes obtenidos al dividir los términos de la diferencia por el divisor común.*

Sea la diferencia $A — B$.

Supongamos que el número a divide los dos números A y B; sean Q y Q' los cocientes; tendremos:

$$A = a \cdot Q,$$
$$B = a \cdot Q'.$$

De donde se deduce $A — B = a \cdot Q — a \cdot Q'$.

Teniendo en cuenta que $aQ — aQ'$ es el producto de la diferencia $Q — Q'$ por a, podremos escribir $A — B = a(Q — Q')$.

Esta igualdad demuestra que $A — B$ es divisible por a y que el cociente es precisamente $Q — Q'$.

Ejemplo: $144 — 60$, diferencia de dos términos divisibles por 12, es también divisible por 12. El cociente es $12 — 5$.

Observación. Cuando se sustituye $A — B$ por $a(Q — Q')$, se dice que a es *factor común* de A y B.

$144 — 60 = 12(12 — 5)$; 12 es factor común de 60 y 144.

GENERALIZACIÓN. *Si todos los términos de un polinomio aritmético son divisibles por un mismo número, el polinomio aritmético es divisible por este número, y el cociente es el polimonio aritmético formado por los cocientes obtenidos al dividir por dicho número los términos del polinomio dado (cada uno con el mismo signo del término correspondiente).*

Sea el polinomio aritmético $A + B - C + D - E$.

Si todos los términos son múltiplos de un mismo número a y A', B', C', D', E' son los cocientes, este polinomio es divisible por a y el cociente será precisamente $A' + B' - C' + D' - E'$.

Si escribimos

$$A + B - C + D - E = a(A' + B' - C' + D' - E'),$$

diremos que a es factor común.

Aplicación al cálculo rápido:

$$\frac{128}{4} = \frac{100 + 28}{4} = 25 + 7 = 32;$$

$$\frac{147}{3} = \frac{150 - 3}{3} = 50 - 1 = 49.$$

TEOREMA. *Un producto de factores es divisible por cualquier producto parcial de dichos factores; el cociente es el producto formado por los restantes factores.*

$a \times b \times c \times d \times e$ es divisible por $a \times c \times d$; el cociente es $b \times e$. La regla de multiplicación de los productos de factores demuestra que en efecto

$$a \times b \times c \times d \times e = (a \times c \times d) \times (b \times e).$$

EJEMPLO: $3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17$ es divisible por 5×13; el cociente es $3 \times 7 \times 17$.

CASO PARTICULAR. *Un producto de factores es divisible por cada uno de sus factores, y para dividir dicho producto por cualquiera de ellos, basta con suprimirlo en dicho producto.*

$$(7 \times 8 \times 15) : 8 = 7 \times 15.$$

TEOREMA. *Para dividir un producto de factores por un número, basta, si ello es posible, dividir uno de los factores del producto por dicho número.*

Sea por ejemplo la operación $(4 \times 15 \times 9) : 5$.

Substituyendo 15 por 5×3, lo cual es posible, se tiene entonces la división de $4 \times 5 \times 3 \times 9$ por 5. Según lo anterior, el cociente será $4 \times 3 \times 9$.

OBSERVACIÓN. Si varios factores son divisibles por el divisor considerado, no es necesario dividir más que uno de ellos: $4 \times 15 \times 9$ es divisible por 3; el cociente será $4 \times 5 \times 9$, ó $4 \times 15 \times 3$.

TEOREMA. *Para dividir un número por un producto, si las divisiones sucesivas son exactas, se puede dividir el número por uno de los factores de dicho producto, después el cociente obtenido por el segundo y así sucesivamente hasta haber utilizado todos los factores; el último cociente es el buscado.*

Sea la división de A por el producto $a \cdot b \cdot c$. Supongamos que las divisiones sucesivas se efectúen sin resto, y designemos por Q, Q', Q'' los cocientes obtenidos; tendremos

$$A = a \cdot Q,$$
$$Q = b \cdot Q',$$
$$Q' = c \cdot Q''.$$

Multiplicando las igualdades miembro a miembro obtendremos

$$A \cdot Q \cdot Q' = a \cdot b \cdot c \cdot Q \cdot Q' \cdot Q''$$

o, simplificando, $A = (a \cdot b \cdot c \cdot) Q''$.

Por consiguiente, el cociente de A por el producto es evidentemente Q''.

Aplicación al cálculo rápido:

$$\frac{735}{15} = \frac{735}{3 \times 5}.$$ Ahora bien, $$\frac{735}{3} = 245$$ y $$\frac{245}{5} = 49.$$

Por consiguiente: $$\frac{735}{15} = 49.$$

TEOREMA. *Todo divisor de un divisor de un número divide este número.*

Sea el número A, a un divisor de A y b un divisor de a; vamos a demostrar que b es un divisor de A.

En efecto, si a divide A, existirá un número Q tal que $A = a \cdot Q$.

Si b divide a, existirá un número q_1 tal que

$$a = b\, q_1.$$

Reemplazando a por su valor, obtendremos

$$A = b \cdot q_1 \cdot Q.$$

Esta igualdad demuestra que b divide A y que el cociente de A por b es precisamente el producto $q_1 \cdot Q$ de los dos cocientes.

TEOREMA. *Si se multiplican el dividendo y el divisor de una división exacta por un mismo número, el cociente no varía. Si se dividen el dividendo y el divisor por un divisor común, el cociente no varía.*

Sean D, d y Q el dividendo, el divisor y el cociente, respectivamente; tendremos

$$D = d \cdot Q.$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad por el número a, y obtendremos

$$D \cdot a = d \cdot a \cdot Q.$$

Q será por consiguiente el cociente de $D \cdot a$ por $d \cdot a$.

Supongamos después que el dividendo y el divisor sean múltiplos de un número a; podremos representarlos por Ma y ma, y, llamando Q al cociente, tendremos

$$Ma = ma \cdot Q.$$

De donde se deduce que $M = m \cdot Q$, lo que demuestra el teorema.

Propiedades de las divisiones con resto. — TEOREMA. *Todo número que divide el divisor y el resto de una división divide el dividendo.*

Sea D el dividendo de una división, d el divisor, Q el cociente y R el resto. Tendremos $D = d \cdot Q + R$.

Si un número divide d y R, por dividir d, dividirá $d \cdot Q$, que es múltiplo de d; al dividir $d \cdot Q$ y R, dividirá su suma D.

Se demuestra de la misma forma que *si un número divide el cociente y el resto de una división divide el dividendo.*

TEOREMA. *Si un número divide el dividendo y el divisor de una división, divide el resto.*

Sean D, d, Q y R, el dividendo, el divisor, el cociente y el resto, respectivamente, de una división; tendremos

$$D = d \cdot Q + R.$$

Supongamos que un número divide D y d; por dividir d, divide su múltiplo $d \cdot Q$, y por dividir D y $d \cdot Q$ divide su diferencia R.

De la misma forma se demuestra que *si un número divide el dividendo y el cociente de una división, divide el resto.*

TEOREMA. *Cuando se multiplican o dividen el dividendo y el divisor de una división por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado o dividido por dicho número.*

Supongamos que en la división se obtiene un resto R; tendremos

$$D = d \cdot Q + R, \text{ siendo } R < d.$$

Multipliquemos los dos miembros de la igualdad por el número a; obtendremos

$$Da = da \cdot Q + Ra.$$

Ahora bien, se tiene $Ra < da$, puesto que $R < d$.

La igualdad precedente es, en estas condiciones, característica de la división de Da por da; el cociente es Q y el resto Ra.

Consideremos ahora una división cuyo dividendo y divisor sean divisibles por un mismo número a; sabemos que el resto es también divisible por a, y podremos indicar el dividendo por Ma, el divisor por ma, el resto por pa y el cociente por Q. Tendremos las relaciones

$$Ma = ma \cdot Q + pa, \text{ siendo } pa < ma.$$

Simplificando:

$$M = m \cdot Q + p, \text{ siendo } p < m,$$

relaciones características de la división de M por m. Q es el cociente, p el resto y el teorema queda demostrado.

TEOREMA. *Para dividir un número por un producto puede dividírsele por el primer factor, el cociente obtenido por el segundo factor, y así sucesivamente hasta que todos los factores sean utilizados; el último cociente es el buscado.*

Hemos demostrado este teorema para el caso en que todas las divisiones se efectúen sin resto. Vamos a demostrar que se sigue verificando cuando las divisiones tienen resto.

Sea A el número que se quiere dividir por el producto abc.

Dividámosle por a, y el cociente obtenido por b; tendremos

$$A = aq + r \qquad r \leqq a - 1,$$
$$q = bq_1 + r_1 \qquad r_1 \leqq b - 1,$$
$$q_1 = cq_2 + r_2 \qquad r_2 \leqq c - 1,$$

Reemplazando q y q_1 por su valor, se tendrá

$$A = abcq_2 + abr_2 + ar_1 + r.$$

El teorema quedará demostrado si

$$abr_2 + ar_1 + r \leqq abc.$$

Los valores mayores que pueden tomar r, r_1, r_2 son $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$; el valor máximo de $abr_2 + ar_1 + r$ será por lo tanto

$$ab\,(c - 1) + a\,(b - 1) + a - 1 = abc - 1,$$

que es menor que abc; por consiguiente, el teorema queda demostrado.

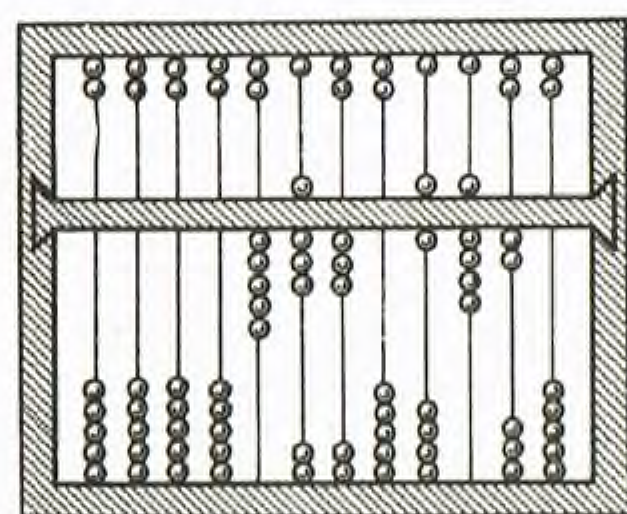
EJEMPLO. *Calcular el cociente de 1 757 por 42.* Como 42 es igual al producto $2 \times 3 \times 7$, se efectúan sucesivamente las divisiones por 2, 3, 7. El cociente por defecto de dividir 1 757 por 2 es 878. El de 878 por 3 es 292. El de 292 por 7 es 41. El cociente buscado es 41, por defecto.

Aparatos y máquinas de calcular

Desde la bandeja de cálculo de los chinos hasta la actual regla y los modernos aparatos, las máquinas de calcular han ido evolucionando progresivamente desde la más remota antigüedad hasta nuestros días. La *bandeja de cálculo* es el más antiguo de estos aparatos, todavía muy extendido en China, Japón y Asia Central, y sirve para efectuar las operaciones corrientes; en la Edad Media fue introducido en Rusia por los mongoles. Entre los romanos, el *ábaco* (del latín *abacus*, que significa tablilla) fue también empleado durante la Edad Media.

Estos ábacos o *contadores de bolas* son los que se utilizaban en nuestras escuelas a principios del siglo XIX; dichos instrumentos constituían un medio verdaderamente práctico de enseñar a los niños la numeración y los elementos del cálculo; su mayor inconveniente reside en que cualquier operación que con ellos se efectúe no se presta a ninguna verificación.

La primera máquina de calcular diferente del ábaco se debe a Pascal (1642), que la inventó cuando tenía 19 años. Esta máquina fue perfeccionada por Lépine (1752) y después por Boistissandau (1730). Citemos igualmente la máquina de Leibniz (1673), que efectuaba las cuatro operaciones; las máquinas de Jordans (1797); la sumadora de Roth; el aritmómetro de Thomas (1820) y finalmente las recientes máquinas de Maurel y Jayet, de Babbage, de Tchebichev, muy perfeccionadas con respecto a las anteriores; las reglillas de Genaille y Lucas, la máquina de Bollée, los aparatos Remington, etc.


5 8 3 0 6 9 2 0
Fig. 6

Por otra parte, los cálculos que se efectúan en la actualidad ya no se limitan a las cuatro operaciones, y las máquinas utilizadas son cada vez más numerosas: planímetros, intégrafos, reglas, círculos, hélices de calcular, máquinas algebraicas (de Torres Quevedo, de Couffignal), etc.

Describiremos aquí únicamente el *contador de bolas*, dejando para un capítulo posterior la descripción de la regla de cálculo.

Abaco o contador de bolas. — El ábaco (*fig* 6) se compone de una bandeja o de una caja lisa de madera de forma rectangular cuyos bordes opuestos están unidos por una traviesa de madera paralela a los otros bordes. A esta traviesa, por una parte, y a los bordes, por la otra, se fijan por sus extremidades barras paralelas a los lados menores de la caja y por las cuales pueden resbalar bolas: 2 por cada uno de los alambres que están en un compartimento y 5 por cada uno del otro. El número de estas barras de alambre varía según los aparatos.

Las bolas situadas en una misma barra representan unidades del mismo orden.

En cada barra corta, una bola representa 5 unidades de la barra más larga situada en su prolongación. Cada unidad representada por una barra es 10 veces mayor que la representada por la barra situada inmediatamente a la derecha de aquélla.

Para representar un número, deslizaremos hacia la barra mediana las bolas que, en su totalidad, dan un número igual al número que se considera.

El aparato permite efectuar las cuatro operaciones de un modo relativamente sencillo.

Adición. — Supongamos que al número indicado en el ábaco quiere añadirse 3 275 (número marcado, por ejemplo, sobre otro ábaco). En el primer ábaco se añadirán sucesivamente 5 unidades, luego 7 decenas, etc. Si en una barra figura un número superior a 10, se llevan hacia arriba las dos bolas de la barra pequeña, y después se aproxima a la barra mediana una bola de la barra grande que se encuentre inmediatamente a la izquierda de la línea que corresponde a la barra pequeña considerada.

Sustracción. — Se operará en forma inversa. Se restará cada cifra del número menor de la cifra del mismo orden de unidades del mayor. Si la sustracción es posible, no hay ninguna dificultad; supongamos que no ocurra así, y que tengan que restarse 8 decenas de 2 decenas; se restará entonces una centena y se sumarán 2 decenas.

La operación se efectuará muy fácilmente comenzando por la izquierda.

Multiplicación. — Habrá que descomponer la operación en multiplicaciones de una sola cifra, lo que es evidentemente más complejo. Si tienen que añadirse $7 \times 6 = 42$, se añadirá 42; si tienen que añadirse 34×47 tendremos

$$34 \times 47 = (3 \times 4) \text{ centenas} + (3 \times 7) \text{ decenas} + (4 \times 4) \text{ decenas} + (4 \times 7) \text{ unidades}.$$

Se suman sucesivamente las centenas, las decenas y las unidades. Será evidentemente necesario conocer la tabla de multiplicar.

División. — Habrá que operar por sustracciones sucesivas, lo que requerirá tanto más tiempo cuanto más elevado sea el cociente.

El ábaco y las varillas chinas. — En realidad, el contador de bolas que acabamos de describir sólo data de la Edad Media; anteriormente, en China se utilizaban pequeñas varillas de bambú o incluso de marfil que se reunían de forma diferente para representar las nueve primeras cifras (*fig.* 7). Estas cifras se escribían también en otras posiciones, y la forma de colocarlas al lado de otras daba valores posicionales diferentes sobre los cuales no insistiremos.



Fig. 7

Bastones o tablillas de Neper. — Así se denomina un conjunto de tablillas inventadas por Neper en 1617 y que fueron utilizadas durante mucho tiempo. Se empleaban para efectuar las cuatro operaciones (*fig.* 8).

Sobre cada tablilla figura uno de los números 1, 2, 3... 9, y debajo los productos de estos números por 1, 2, 3... 9; en realidad, cada tablilla representa una columna vertical de la tabla de Pitágoras, figurando cada producto en una casilla donde se halla trazada una diagonal, la cifra de las unidades del producto en el triángulo de la derecha y las cifras de las decenas en el triángulo de la izquierda. Indicaremos, por ejemplo, cómo se efectúa una multiplicación.

Sea la multiplicación 5 978 por 937.

Como indica la figura 8, se colocan, una a continuación de otra, las reglas 5, 9, 7 y 8, y a la izquierda, la regla índice 1, destinada a indicar en qué línea horizontal hay que buscar el producto.

Para formar el producto parcial por 7, se parte de la línea correspondiente, la 7, y se escribe aparte el 6, que ocupa el triángulo de la derecha de la última de estas casillas; se suma a continuación el 5 del triángulo de la izquierda de esta misma casilla con el 9 de la casilla precedente, lo que da 14: se coloca el 4 a la izquierda del 6 ya escrito, y se lleva 1. Este 1, sumado al 4 de la misma casilla y al 3 de la casilla precedente, dan 8, que se pone a la izquierda del 4. Sumando entonces el 6 de la misma casilla al 5 de la casilla precedente, se obtiene 11. Se pone 1 a la izquierda del 8, y se lleva 1, que, sumado al 3 de la misma casilla, nos da 4, que se escribe a la izquierda del 1. Todas las cifras escritas una al dado de otra forman de este modo el producto parcial: 41 846. Pasando a la segunda cifra 3 del multiplicador, se opera de la misma manera, hallándose el segundo producto parcial: 17 934. Por último, para la tercera cifra 9 del multiplicador, la novena línea da el tercer producto parcial: 53 802, es decir, el de todas las cifras del multiplicando por la cifra de las centenas del multiplicador. Para tener el producto total, sólo queda disponer los tres productos parciales como se hace habitualmente y sumarlos:

6
1/2
1/8
2/4
3/0
3/6
4/2
4/8
5/4

1	5	9	7	8
2	1/0	1/8	1/4	1/6
3	1/5	2/7	2/1	2/4
4	2/0	3/6	2/8	3/2
5	2/5	4/5	3/5	4/0
6	3/0	5/4	4/2	4/8
7	3/5	6/3	4/9	5/6
8	4/0	7/2	5/6	6/4
9	4/5	8/1	6/3	7/2

Fig. 8

```
  41846
 17934
53802
-------
5601386
```

De esta forma se obtiene el producto buscado.

Potenciación y radicación de números naturales

Potenciación: Potencia de un número. Producto de potencias de igual base. Cociente de potencias de igual base. Potencia de un producto. Potencia de un cociente. Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números. Producto de la suma de dos números por su diferencia. Cubo de la suma y de la diferencia de dos números. — **Radicación:** Raíz exacta y raíz entera de un número natural. Extracción de la raíz cuadrada entera de un número natural. Extracción de la raíz cúbica entera de un número natural. *Problemas*

Potenciación

Potencia de un número. — *Se llama* **potencia de un número** *el producto de factores iguales a este número.*

Sea a dicho número y n el número de factores del producto.

$$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots = P,$$

que se representa más brevemente por $a^n = P$.

El primer miembro de esta igualdad se lee: *a elevado a* n.

El número a se llama **base**, y n, **grado** o **exponente.**

La potencia de segundo grado de un número se llama *cuadrado* de dicho número; la potencia de tercer grado de un número se llama *cubo* de dicho número.

Así, a^2 es el cuadrado de a y a^3 el cubo de a. Para generalizar, se llama primera potencia de un número al mismo número, siendo entonces el exponente igual a la unidad, y se conviene en designar por la unidad la potencia exponente 0 de cualquier número. Es decir,

$$A^0 = 1 \text{ (cualquiera que sea A)}.$$

Producto de potencias de igual base. — Por definición:

$$a^m \cdot a^n \ldots a^r = \overset{m}{(a \cdot a \ldots a)}\ \overset{n}{(a \cdot a \ldots a)} \ldots \overset{r}{(a \cdot a \ldots a)} = \overset{(m+n+r)}{= a \cdot a \ldots\ldots\ldots\ldots a} = a^{m+n+r}.$$

TEOREMA. *El producto de varias potencias de igual base es otra potencia de la misma base y tiene por exponente la suma de los exponentes de los factores.*

En particular, si todos los exponentes son iguales,

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \overset{(n \text{ veces})}{\ldots\ldots\ldots\ldots} a^m = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

De donde, *para elevar el exponente* n *una potencia de exponente* m *se multiplican ambos exponentes.*

Cociente de potencias de igual base. — TEOREMA. *El cociente de dos potencias de igual base es una potencia de la misma base y su exponente es igual al exponente del dividendo disminuido en el del divisor.*

El cociente de

$$a^m : a^n \text{ es } a^{m-n},$$

porque

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Potencia de un producto. — *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.*

En efecto, en virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, se tendrá:

$$(a \cdot b \cdot c \ldots d)^n = \overbrace{(a \cdot b \cdot c \ldots d)\,(a \cdot b \cdot c \ldots d) \ldots (a \cdot b \cdot c \ldots d)}^{n} =$$
$$= a \cdot b \cdot c \ldots d \ldots a \cdot b \cdot c \ldots d \cdot a \cdot b \cdot c \ldots d =$$
$$= \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n} \cdot \overbrace{b \cdot b \ldots b}^{n} \cdot \overbrace{c \cdot c \ldots c}^{n} \cdot \overbrace{d \cdot d \ldots d}^{n} = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n.$$

Si consideramos la igualdad anterior en orden inverso, obtendremos la siguiente regla:

Para multiplicar varias potencias del mismo exponente, se multiplican las bases, conservando el mismo exponente.

Potencia de un cociente. — *La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.*

En efecto:

$$\frac{a}{b} = c;\ a = bc;\ a^n = b^n \cdot c^n;\ \frac{a^n}{b^n} = c^n,$$

de donde

$$c^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n.$$

Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números. — TEOREMA. *El cuadrado de la suma indicada de dos números es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.*

Sea $N = a + b;\ N^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = $
$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

TEOREMA. *El cuadrado de la diferencia indicada de dos números es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble del producto del primero por el segundo:*

$N^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 + b^2 - ba - ab.$
$N^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$

Producto de la suma de dos números por su diferencia. — TEOREMA. *La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos números.*

$$(a + b)(a - b) = (a + b)\,a - (a + b)\,b =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

COROLARIO. *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor más* 1.

Sean los números n y $n + 1$; se tendrá

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Cubo de la suma y de la diferencia de dos números. — TEOREMA. *El cubo de la suma indicada de dos números es igual al cubo del primero más el triplo del cuadrado del primero por el segundo más el triplo del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.*

Se tendrá, evidentemente:

$$N^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2 (a + b) =$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

TEOREMA. *El cubo de la diferencia indicada de dos números es igual al cubo del primero menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo más el triplo del primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo.*

$$n^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^2 (a - b) =$$
$$= (a^2 + b^2 - 2ab)(a - b) =$$
$$= a^3 + ab^2 - 2a^2b - a^2b - b^3 + 2ab^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Radicación

Raíz exacta y raíz entera de un número natural. — *Raíz de orden* m *o* m^esima^ *de un número dado es el número cuya potencia de orden* m *es igual al número considerado.*

Es decir, si A es el número dado y se verifica que $a^m = A$, a es la raíz m^{esima} de A, y se dice entonces que A es potencia m^esima^ perfecta.

La operación de hallar dicho número a, cuando existe, conocidos m y A, se llama **extracción de la raíz** m^{esima} **exacta** de A, y se designa simbólicamente por

$$\sqrt[m]{A} = a.$$

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical;* A, *radicando* o *cantidad subradical*, y m, *índice*. Cuando $m = 2$, la raíz se llama *cuadrada*, y en este caso suele suprimirse el índice. Cuando $m = 3$, la raíz se llama *cúbica*.

La raíz m^{esima} exacta sólo existe en casos particulares, cuando el radicando es una potencia m^{esima} perfecta, pero siempre es posible hallar la mayor potencia m^{esima} contenida como sumando en el número dado. Esta operación, que generaliza la extracción de la raíz exacta —análogamente a como la división entera generaliza la división exacta, cuando el dividendo no es múltiplo del divisor— se llama **radicación**.

Es decir, que siempre se tendrá:

$$a^m \leqq A < (a + 1)^m,$$

llamándose entonces a los números a^m y $(a + 1)^m$ *raíz* m^esima^ *por defecto* y *raíz* m^esima^ *por exceso*, respectivamente, del número dado A. *Suele designarse por raíz entera la raíz* m^esima^ *por defecto.*

Los números

$$r = A - a^m \qquad r' = (a + 1)^m - A$$

se llaman, respectivamente, *resto por defecto* y *resto por exceso* de la raíz m^{esima} de A.

Extracción de la raíz cuadrada entera de un número natural. — Cuando el número dado no es cuadrado perfecto, el mayor número entero cuyo cuadrado esté contenido en el número dado se llama, como ya hemos dicho, *raíz cuadrada entera.*

Distinguiremos dos casos, según que el radicando sea menor o mayor que cien.

1^er^ CASO. *El número dado es menor que 100.*

Bastará conocer de memoria los cuadrados de los nueve primeros números. Así, por ejemplo:

$$\sqrt{64} = 8; \quad 7 < \sqrt{50} < 8; \quad 50 = 7^2 + 1.$$

2º CASO. *El número dado es mayor que 100.*

Sea el número 7 854, cuya raíz cuadrada queremos extraer. Como este número es mayor que cien, su raíz será mayor que diez, y constará de dos cifras, la cifra de las decenas y la de las unidades.

7 854	88
1 454	168 × 8
110	

Si llamamos a a la raíz y R al resto, se tendrá

$$7\,854 = a^2 + R.$$

El número dado podrá considerarse, pues, como la suma de las cuatro partes siguientes:

1º El cuadrado de las decenas de la raíz.
2º El doble producto de las decenas de la raíz por las unidades.
3º El cuadrado de las unidades.
4º El resto de la operación.

Las centenas que se obtengan al elevar al cuadrado las decenas de la raíz deberán estar contenidas en las 78 centenas del número.

Demostraremos que la cifra de las decenas del número buscado se obtiene extrayendo la raíz de 78.

Sea a la raíz cuadrada entera por defecto de 78; se tendrá:

$$a^2 < 78 < (a + 1)^2.$$

Multipliquemos los tres miembros de la doble desigualdad anterior por cien; se tendrá:

$$(a \cdot 10)^2 < 7\,800 < [(a + 1) \cdot 10]^2.$$

La doble desigualdad no se altera si se añade 54 al número intermedio; en efecto, la desigualdad de la izquierda seguirá subsistiendo, puesto que se añade una cantidad al número mayor; en cuanto a la desigualdad de la derecha, también seguirá verificándose, puesto que si los dos números, 78 y $(a + 1)^2$, difieren en una unidad como mínimo, sus productos por cien diferirán por lo menos en una centena, y, por consiguiente, su orden de magnitud no variará al añadir 54 al menor de los dos productos. Se podrá escribir:

$$(a \cdot 10)^2 < 7\,854 < [(a + 1)\,10]^2.$$

a será, por lo tanto, el número de decenas de la raíz cuadrada.

La raíz de 78 es 8, que es la cifra de dichas decenas.

El cuadrado de 8 decenas es 64 centenas. Si se resta este número del número dado, la diferencia es 1 454, que representa:

1º El doble del producto de las decenas por las unidades.
2º El cuadrado de las unidades.
3º El resto de la operación.

El doble producto de las decenas por las unidades da decenas, y dividiendo las 145 decenas del resto por $8 \times 2 = 16$, se obtendrá la cifra de las unidades o una cifra demasiado elevada, porque el cuadrado de las unidades puede también dar decenas.

El cociente de esta división es 8; ensayaremos esta cifra para ver si es demasiado elevada. Para ello, escribiremos el 8 al lado de 16, y multiplicaremos el número obtenido,168, por 8, con lo que formaremos simultáneamente el doble del producto de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades; si el producto que se obtenga puede restarse de 1 454, la cifra 8 será válida y será la cifra de las unidades. En nuestro caso, la sustracción puede efectuarse, dando como resto 110, que es el resto de la operación. En el caso contrario, 8 habría resultado una cifra demasiado alta, y entonces habríamos ensayado el 7 ó el 6, etc., hasta que la sustracción fuera posible, y la cifra correspondiente habría sido la de las unidades.

La raíz buscada es 88, y el resto de la operación 110.

De lo que acabamos de exponer se deduce la siguiente

REGLA GENERAL. *Para extraer la raíz cuadrada entera de un número natural:*

Se divide dicho número en secciones o períodos de dos cifras empezando por la derecha, pudiendo constar el primer período de la izquierda de una sola cifra; se halla la raíz cuadrada entera de dicho primer período, que será la primera cifra de la raíz.

Se eleva al cuadrado esta cifra y se resta del primer período de la izquierda. Al lado del resto obtenido se escribe el siguiente período; las decenas del número así formado se dividen por el duplo de la raíz hallada, debiéndose comprobar la cifra que se obtenga como cociente entero, que será igual o mayor que la segunda cifra de la raíz. Para ello, se escribe dicha cifra a la derecha del duplo de la raíz hallada, se

multiplica el número constituido por dicha cifra, y si el producto formado se puede restar del primer resto seguido del segundo período, la cifra será válida; de lo contrario, se va disminuyendo de unidad en unidad, hasta que la sustracción sea posible.

Se escribe el tercer período al lado del nuevo resto; la tercera cifra se obtendrá procediendo análogamente, y así sucesivamente hasta agotar los períodos. Si el último resto es cero, la raíz cuadrada es exacta.

Ejemplo:

Extraer la raíz cuadrada de 119 055. La operación se dispondrá así:

11'90'55	345	
2 9'0		
345'5	64 × 4	
3 0	685 × 5	La raíz es 345 y el resto 30.

Observaciones. 1° Podrá resultar que alguna de las cifras ensayadas sea demasiado baja, lo que se advertiría porque el resto obtenido sería superior al duplo de la raíz ya hallada.

2° En las divisiones sucesivas que se efectúan para obtener las diferentes cifras de la raíz, podrá ocurrir que el cociente sea mayor que 9; entonces se ensayará el 9, que será la cifra buscada si la sustracción del producto indicado es posible; si no es posible, se ensayará el 8, ó incluso el 7, si el 8 fuera una cifra demasiado alta.

3° Cuando alguno de los cocientes enteros de las divisiones auxiliares sea cero, será también cero la cifra correspondiente de la raíz, y se escribirá a la derecha del resto el período siguiente.

4° El número de cifras de la raíz será igual al de secciones o períodos en que se ha dividido el número; como cada período da una cifra de la raíz, el número de cifras de ésta será la mitad del número de cifras del número dado, o una más, si el número de cifras es impar.

Prueba de la operación. Se comprobará que el número dado es igual a la suma del cuadrado de la raíz hallada y del resto de la operación.

En el ejemplo de la página anterior, se tendrá

$$88^2 = 7\,744 \text{ y } \quad 7\,744 + 110 = 7\,854.$$

Prueba por 9. Sea N el número dado, a su raíz y R el resto de la operación. Se tendrá

$$N = a^2 + R.$$

Sean r y r' los restos de dividir a y R por 9:

$$a = \text{m. de } 9 + r,$$
$$R = \text{m. de } 9 + r',$$

de donde

$$N = (\text{m. de } 9 + r)^2 + \text{m. de } 9 + r',$$
$$N = \text{m. de } 9 + r^2 + r'.$$

El resto de la división de N por 9 es el mismo que el de la división de $r^2 + r'$ por 9.

Regla. *Se elevará al cuadrado el resto de dividir por 9 la raíz hallada, y se tomará el resto de dividir por 9 el producto obtenido; el resto de dividir por 9 el de la operación se sumará al resto de la división. El número obtenido debe ser igual al resto de la división del número dado por 9.*

Extracción de la raíz cúbica entera de un número natural. — Se llama *raíz cúbica entera* de un número que no sea cubo perfecto el mayor número entero cuyo cubo esté contenido en dicho número.

Distinguiremos dos casos, según que el radicando sea menor o mayor que mil.

1er caso. *El número es menor que mil.* En este caso bastará con saber de memoria los cubos de los nueve primeros números. Así, por ejemplo,

$$125 = 5^3;$$

2° caso. *El número es mayor que mil.* Se procederá en este caso con arreglo a la siguiente

Regla general. *Para extraer la raíz cúbica de un número natural se descompone el número en secciones o períodos de tres cifras a partir de la derecha, pudiendo constar el primer período de la izquierda de una o dos cifras; se halla la raíz cúbica entera de dicho primer período de la izquierda, con lo que se obtiene la primera cifra de la raíz.*

Se eleva al cubo esta cifra y se resta del primer período de la izquierda, escribiendo al lado del resto que se obtenga el siguiente período; las centenas del número así formado se dividen por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente entero que se obtenga será igual o mayor que la segunda cifra de la raíz. Para comprobarlo, se forma una suma de tres sumandos: triple del producto de 100 por el cuadrado de la primera cifra hallada para la raíz, triple del producto de esta primera cifra por la segunda y por diez, y cuadrado de la segunda cifra; se multiplica esta suma por la segunda cifra de la raíz que se ensaya, y si el resultado puede restarse del primer resto seguido del segundo período, la cifra será válida, rebajándola una unidad en caso contrario y sometiéndola al mismo ensayo.

Al lado del segundo resto se escribe el tercer período, cuyas centenas se dividen por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, obteniéndose la tercera cifra de la raíz, y así sucesivamente hasta agotar todos los períodos. Si el último resto es cero, la raíz cúbica es exacta.

Ejemplo. Sea el número 32 497 573, cuya raíz cúbica queremos extraer:

32.497.573	319	
27	$3 \times 3^2 \times 100 = 2\,700$	$3 \times 31^2 \times 100 = 288\,300$
5 4.97	$3 \times 3 \times 10 \times 1 = 90$	$3 \times 31 \times 10 \times 9 = 8\,370$
2 7 91	$1^2 = 1$	$9^2 = 81$
2 7 06 5.73	2 791	296 751
2 6 70 75 9	× 1	× 9
35 81 4	2 791	2 670 759

Observaciones. 1° En las divisiones sucesivas que se efectúan para obtener las diferentes cifras de la raíz, podrá ocurrir que el cociente sea mayor que 9; entonces se ensayará el 9, que será la cifra buscada si la sustracción es posible, o demasiado alta si no lo es; se ensayará entonces el 8, o incluso el 7, si el 8 fuera una cifra demasiado alta.

2° El número de cifras de la raíz es igual al número de secciones o períodos en que se ha dividido el número, es decir, puesto que cada período consta de tres cifras, será igual al tercio del número de cifras del radicando, o a una más, cuando dicho número de cifras no sea múltiplo de tres.

3° Si algún cociente entero de las divisiones auxiliares es cero, será también cero la cifra correspondiente de la raíz, y se escribirá el período siguiente a la derecha del resto.

4° Podrá suceder que la cifra ensayada sea demasiado baja; entonces el resto parcial será mayor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada más el triplo de la raíz más uno.

Prueba de la operación. Se comprobará que el número propuesto es la suma del cubo de la raíz hallada y el resto de la operación.

En el ejemplo anterior, se tendrá

$$319^3 = 32\,461\,759 \quad \text{y} \quad 32\,461\,759 + 35\,814 = 32\,497\,573.$$

Prueba por 9. Sea N el número considerado, a su raíz y R el resto de la operación. Se tendrá

$$N = a^3 + R.$$

Sean r y r' los restos de las divisiones de a y de R por 9:

$$a = \text{m. de } 9 + r;$$
$$R = \text{m. de } 9 + r';$$

de donde

$$N = (\text{m. de } 9 + r)^3 + \text{m. de } 9 + r';$$
$$N = \text{m. de } 9 + r^3 + r'.$$

El resto de dividir N por 9 será, por consiguiente, el mismo que el resto de dividir $r^3 + r'$ por 9.

Regla. *Se elevará al cubo el resto de dividir por 9 la raíz hallada y se tomará el resto de la división por 9 del producto que se obtenga; se le sumará el resto de dividir por 9 el resto de la operación. El número obtenido debe ser igual al resto de dividir por 9 el número dado.*

PROBLEMAS

1° *Sabiendo que la suma de los nueve primeros números es 45, hallar la suma de los números que figuran en la tabla de Pitágoras. Generalizar.*

La suma de los números de la primera fila es 45.

Los números de la segunda fila se han obtenido sumando consigo mismo cada número de la primera; la suma de los números que componen esta fila será 45 × 2.

La suma de los números de la tercera fila será 45 × 3.

......

La suma total de los números de la tabla será

$$45 + 45 \times 2 + 45 \times 3 + \ldots + 45 \times 9 = 45\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 9)$$
$$= 45 \times 45 = 45^2 \text{ ó } 2\,025.$$

Si se formara una tabla de Pitágoras con los n primeros números enteros tendremos, si llamamos N a la suma de los n primeros números enteros:

Suma de los números de la tabla $= N^2$.

Podríamos calcular esta suma en función de n, puesto que

$$N = \frac{n\,(n + 1)}{2}.$$

2° *Cualquier número de cualquier fila o columna de la tabla de Pitágoras es la semisuma del que le precede y el que le sigue.*

Consideremos tres números consecutivos de una columna que empieza por el número n.

Si el número considerado vale np, el anterior vale $n\,(p - 1)$ y el siguiente $n\,(p + 1)$.

Tendremos

$$n\,(p - 1) + n\,(p + 1) = 2\,np.$$

De donde

$$np = \frac{n\,(p - 1) + n\,(p + 1)}{2}$$

El razonamiento es el mismo para tres números consecutivos de una misma fila.

3° *En la tabla de Pitágoras la suma de los cuatro números situados en los vértices de un cuadrado es igual a cuatro veces el número que figura en el centro de dicho cuadrado.*

Sea α el número colocado en el centro de un cuadrado en cuyos vértices están situados los números a, b, c y d (*fig.* 9). El número que le precede en la misma fila es α_1 y el que le sigue α_2.

Según el problema anterior,

$$a + c = 2\alpha_1, \quad \text{y} \quad b + d = 2\alpha_2.$$

Por consiguiente:

$$a + b + c + d = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \quad \text{ó} \quad 2\,(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Ahora bien,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha.$$

Por lo tanto,

$$a + b + c + d = 4\alpha.$$

4º *En la tabla de Pitágoras, la suma de los ocho números que encuadran a un número dado es igual a ocho veces dicho número.*

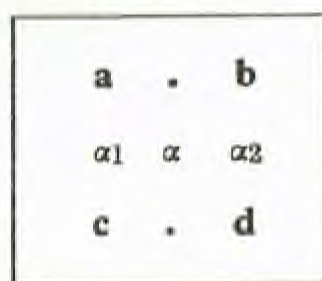


Fig. 9

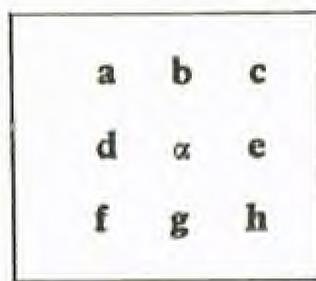


Fig. 10

Sea α el número situado en el centro de un cuadrado formado por los números a, b, c, d, e, f, g, h (fig. 10).

En virtud del problema anterior,

$$a + c + f + h = 4\,\alpha.$$

Por otra parte,

$$d + e = 2\,\alpha,$$

y también

$$b + g = 2\,\alpha.$$

Luego,

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 8\,\alpha.$$

Divisibilidad

Criterios de divisibilidad: Divisibilidad por 2 y por 5. Divisibilidad por 4 y por 25. Divisibilidad por 8 y por 125. Divisibilidad por 9. Divisibilidad por 3. Divisibilidad por 11. — **Prueba del 9 en las operaciones:** Prueba de la suma. Prueba de la sustracción. Prueba de la multiplicación. Prueba de la división. *Problemas.* — **Máximo común divisor y mínimo común múltiplo:** *Máximo común divisor.* Obtención del máximo común divisor de dos números por el método de divisiones sucesivas. Obtención del máximo común divisor de tres o más números por el método de divisiones sucesivas. — *Números primos entre sí.* — *Mínimo común múltiplo*: Mínimo común múltiplo de dos números. Mínimo común múltiplo de varios números. — **Números primos absolutos:** Formación de una tabla de números primos. Criba de Eratóstenes. Forma de reconocer si un número es primo. Propiedades de los números primos. Descomposición de un número en factores primos. Divisores de un número. Número de divisores de un número. Obtención del máximo común divisor de varios números mediante su descomposición en factores primos. Obtención del mínimo común múltiplo de varios números mediante su descomposición en factores primos. — **Congruencias:** Propiedad de las congruencias del mismo módulo. Ejemplos de aplicación de las congruencias

Criterios de divisibilidad

Se llama **criterio de divisibilidad** *la condición que debe satisfacer un número para que sea divisible por otro número determinado.*

Es evidente que, en virtud de la definición de la división, dicha condición se reducirá siempre a que el resto de la división del número propuesto por el divisor dado sea cero, pero el objeto de la teoría de la divisibilidad es poder establecer dichos criterios en forma de propiedades numéricas, sin que haya necesidad de efectuar en cada caso la división. Admitiremos que 0 es divisible por todos los números, puesto que el cociente correspondiente es siempre cero, y demostraremos a continuación el siguiente teorema, que sirve de base al establecimiento de todos los criterios de divisibilidad.

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos números dados A y B den el mismo resto cuando se los divide por un mismo número a, es que su diferencia, A — B, sea divisible por a.*

1º *La condición es necesaria.* Llamemos Q y Q' a los respectivos cocientes de A y B por a. Si las divisiones dan el mismo resto r, tendremos:

$$A = a \times Q + r,$$
$$B = a \times Q' + r,$$

de donde

$$A - B = a\,(Q - Q').$$

La diferencia es, pues, divisible por a.

2º *La condición es suficiente.* Llamemos Q, Q' y R, R' a los cocientes y restos, respectivamente, de dividir A y B por a, y supongamos que A — B es divisible por a. Tendremos:

$$A = a \times Q + R, \text{ siendo } R < a,$$
$$B = a \times Q' + R', \text{ siendo } R' < a.$$

A y B son diferentes; como A — B es múltiplo de a, Q y Q' son desiguales, puesto que R y R' son ambos menores que a, y si Q fuese igual a Q', A — B no podría ser múltiplo de a. Supongamos $Q > Q'$, y restemos miembro a miembro las dos igualdades anteriores, la segunda de la primera. Tendremos:

$$A - B = a\,(Q - Q') + R - R'.$$

Como, por hipótesis, A — B es divisible por a, el resto de la división es cero, es decir, $R - R' = 0$, o sea $R = R'$.

Por consiguiente, los restos de dividir A y B por a son iguales.

Divisibilidad por 2 y por 5. — TEOREMA. *El resto de la división de un número por 2 ó por 5 es el mismo que el de dividir por 2 ó por 5 la cifra de sus unidades.*

Consideremos un número N, y sea d el número de sus decenas, y u el de sus unidades; tendremos:

$$N = 10 \times d + u = m. \text{ de } 10 + u.$$

La diferencia entre N y u es un múltiplo de 2 y un múltiplo de 5; N y u tienen el mismo resto cuando se los divide por 2 ó por 5.

COROLARIOS. 1º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 2 es que la cifra de sus unidades sea un número par.*

2º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 5 es que la cifra de sus unidades sea 0 ó 5.*

EJEMPLO: 186 es divisible por 2; 324 no es divisible por 5 (el resto de la división es 4).

Divisibilidad por 4 y por 25. — TEOREMA. *El resto de la división de un número por 4 ó por 25 es el mismo que el resto obtenido al dividir por 4 ó por 25 el número formado por las dos últimas cifras de la derecha del número considerado.*

Este teorema se demuestra como el precedente. Sea N el número considerado, c la cifra de sus centenas, y Q el número formado por las dos últimas cifras de la derecha del número N. Tendremos:

$$N = 100 \times c + Q.$$

$100 \times c$ es un múltiplo de 100, y por lo tanto de 4 y de 25. Por consiguiente, los restos de las divisiones de N y de Q por 4 son iguales, y lo mismo para el 25.

COROLARIOS. 1º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 4 es que sus dos últimas cifras de la derecha sean ceros, o formen un número divisible por 4.*

2º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 25 es que sus dos últimas cifras de la derecha sean ceros o formen un número divisible por 25.*

EJEMPLO: 4 875 es divisible por 25; 927 no es divisible por 4 (su resto es 3).

Divisibilidad por 8 y por 125. — TEOREMA. *El resto de la división de un número por 8 ó por 125 es el mismo que el resto obtenido al dividir por 8 ó por 125 el número formado por las tres últimas cifras de la derecha del número considerado.*

La demostración es análoga a las precedentes, ya que cualquier número puede descomponerse en la suma de sus millares, que es un múltiplo de 8 y de 125, y del número formado por sus tres últimas cifras de la derecha. Por consiguiente, la diferencia entre un número cualquiera y el formado por sus tres últimas cifras de la derecha es divisible por 8 y por 125.

COROLARIOS. 1º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 8 es que sus tres últimas cifras de la derecha formen un número divisible por 8.*

2º *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 125 es que sus tres últimas cifras de la derecha formen un número divisible por 125.*

EJEMPLO: 7 062 es divisible por 8; 4 784 no es divisible por 125 (su resto es 34).

OBSERVACIÓN. El método que acabamos de exponer para establecer los criterios de divisibilidad de un número por 2 y por 5, por 4 y por 25, por 8 y por 125, se basa en el hecho de que $2 \times 5 = 10$, $4 \times 25 = 100 = 10^2$, $8 \times 125 = 1\,000 = 10^3$. Se puede generalizar y establecer los criterios de divisibilidad por 16 y por 625, si se observa que $16 \times 625 = 10\,000 = 10^4$, etc.

En resumen, *para hallar el resto de la división de un número por 2^n o por 5^n, puede reemplazarse el número considerado por el que forman las n últimas cifras de la derecha de dicho número.*

Divisibilidad por 9. — TEOREMA. *El resto de la división de un número por 9 es el mismo que el resto obtenido al dividir por 9 el número que se obtiene sumando los valores absolutos de las cifras del número considerado.*

La demostración de este teorema se basa en los tres teoremas siguientes:

1º *Cualquier potencia de 10 es un múltiplo de 9 más 1.*

Se tiene, en efecto:

$$10 = m. \text{ de } 9 + 1.$$

Multiplicando por 10 ambos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$100 = m. \text{ de } 9 + 10,$$

y reemplazando 10 por su valor anterior,

$$100 = m. \text{ de } 9 + (m. \text{ de } 9 + 1) = m. \text{ de } 9 + 1, \text{ etc.};$$

2º *Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 9 más el valor absoluto de dicha cifra significativa.*

Consideremos, por ejemplo, el número 400; se tiene: $400 = 100 \times 4$.

Ahora bien,

$$100 = m. \text{ de } 9 + 1.$$

Por consiguiente,

$$400 = m. \text{ de } 9 + 4;$$

3º *Todo número es igual a un múltiplo de 9 más la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

Sea el número 3 875, que escribiremos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} 5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 5, \\ 70 &= \text{m. de } 9 + 7, \\ 800 &= \text{m. de } 9 + 8, \\ 3\,000 &= \text{m. de } 9 + 3. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene

$$3\,875 = \text{m. de } 9 + (5 + 7 + 8 + 3).$$

De estos tres teoremas se deduce, por consiguiente, que la diferencia entre un número cualquiera y la suma de los valores absolutos de sus cifras es un múltiplo de 9; luego los restos que se obtengan al dividirlos por 9 son iguales.

COROLARIO. *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 9 es que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea divisible por 9.*

EJEMPLO: 7 218 es divisible por 9. No lo es el número 47 234 (su resto es 2).

Divisibilidad por 3. — Como todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3, se aplica al 3 el mismo criterio de divisibilidad que al 9.

COROLARIO. *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 3 es que lo sea la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

EJEMPLO: 73 893 es divisible por 3. No lo es el número 48 125 (su resto es 2).

OBSERVACIÓN. Cuando se efectúa la suma de los valores absolutos de las cifras de un número para hallar el resto de su división por 9, se puede, para simplificar, restar 9 de una suma parcial, cada vez que ello sea posible, así como despreciar los 9 que pudieran formar parte del número considerado, ya que el resto de la división no se altera (v. p. 16). Así, para el número 738 925 diremos: 7 y 3 suman 10, y el resto es 1; 1 y 8 suman 9, y el resto es 0; 2 y 5 suman 7. El resto es 7.

La misma observación es válida para la divisibilidad por 3.

Divisibilidad por 11. — TEOREMA. *El resto que se obtiene al dividir un número por 11 es el mismo que el obtenido al dividir por 11 la diferencia entre la suma de las cifras de orden par y la suma de las cifras de orden impar, contadas desde la derecha.*

1º *Toda potencia de 10 es un múltiplo de 11 aumentado o disminuido en una unidad, según que el exponente de la potencia sea, respectivamente, par o impar.*

Se tiene:

$$10 = \text{m. de } 11 - 1.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por 10, se tendrá:

$$100 = \text{m. de } 11 - 10$$

o también

$$100 = \text{m. de } 11 + 1.$$

Prosiguiendo en la misma forma,

$$1\,000 = \text{m. de } 11 + 10 = \text{m. de } 11 - 1, \text{ etc.}$$

2º *Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 11 aumentado o disminuido en una unidad, según que el número de ceros sea, respectivamente, par o impar.*

Se tiene, por ejemplo:

$$300 = \text{m. de } 11 + 3.$$

En efecto, según lo anterior:

$$100 = \text{m. de } 11 + 1.$$

Multiplicando por 3,

$$300 = \text{m. de } 11 + 3.$$

Análogamente,

$$500\,000 = \text{m. de } 11 - 5,$$

puesto que

$$100\,000 = \text{m. de } 11 - 1,$$

y multiplicando ambos miembros por 5, se obtendrá

$$500\,000 = \text{m. de } 11 - 5.$$

3º *Todo número es un múltiplo de 11 más la diferencia entre las sumas de los valores absolutos de las cifras de orden impar y de orden par del número considerado, contadas desde la derecha.*

Sea el número 37 958, que escribiremos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} 8 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 8, \\ 50 &= \text{m. de } 11 - 5, \\ 900 &= \text{m. de } 11 + 9, \\ 7\,000 &= \text{m. de } 11 - 7, \\ 30\,000 &= \text{m. de } 11 + 3. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro,

$$37\,958 = \text{m. de } 11 + [(8 + 9 + 3) - (5 + 7)].$$

La diferencia entre 37 958 y $(8 + 9 + 3) - (5 + 7)$ es un múltiplo de 11, luego (v. p. 16) los restos que se obtengan al dividirlos por 11 son iguales.

COROLARIO. *La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 11 es que la diferencia entre las sumas de los valores absolutos de sus cifras de orden impar y de orden par, contadas desde la derecha, sea 11 ó un múltiplo de 11.*

EJEMPLO: 723 459 es divisible por 11. No lo es 7 825 (su resto es 4).

OBSERVACIÓN. En caso de que, al aplicar el criterio de divisibilidad por 11, fuera imposible efectuar la sustracción indicada, se sumará, al menor de los números, 11 ó el múltiplo de 11 necesario para hacerla posible.

Por ejemplo:

$$954\,034 = 4 \text{ m. de } 11 + [(4 + 5) - (3 + 4 + 9)].$$

Se escribirá entonces

$$954\,034 = \text{m. de } 11 - [(4 + 5 + 11) - (3 + 4 + 9)].$$

El resto de esta división es 4.

Prueba del nueve en las operaciones

Prueba de la suma. — Se suman los restos que se obtienen al dividir por 9 cada sumando (v. p. 16), y se divide también por 9 esta suma; el resto debe ser el mismo que el obtenido al dividir por 9 la suma inicial.

EJEMPLO:

Números dados	34 540	Restos	7
	4 731		6
	87 032		2
Suma	126 303		15

El método se justifica fácilmente; en efecto:

$$\begin{aligned} 34\,540 &= \text{m. de } 9 + 7 \\ 4\,731 &= \text{m. de } 9 + 6 \\ 87\,032 &= \text{m. de } 9 + 2 \\ \hline 126\,303 &= \text{m. de } 9 + 15 \end{aligned}$$

En virtud del teorema ya demostrado (p. 16), el resto de la división del número 126 303 por 9 es el mismo que el de la divisón de 15 por 9.

Prueba de la sustracción. — Se emplea un método análogo.

EJEMPLO:

Números dados	78 054	Restos	6
	39 871		1
Diferencia	38 183		5

Si la sustracción de los restos fuera imposible, se añade 9 ó un múltiplo de 9 al primer resto, de forma que sea posible.

El método se demuestra como en el caso de la suma.

Prueba de la multiplicación. — Se multiplican los restos de las divisiones por 9 del multiplicando y del multiplicador; el resto de la división por 9 del número obtenido debe ser igual al resto de la división por 9 del producto hallado.

EJEMPLO:

Multiplicando	4378	Restos	4
Multiplicador	542		2
	8756		8
	17512		
	21890		
Producto	2372876		

Esta regla se justifica fácilmente; se tiene

$$\begin{aligned} 4\,378 &= \text{m. de } 9 + 4 \\ 542 &= \quad - \quad + 2 \\ \hline 2\,372\,876 &= \text{m. de } 9 + 8. \end{aligned}$$

Según el teorema ya enunciado (p. 16), el resto de la división de 2 372 876 por 9 es igual que el resto de la división de 8 por 9.

Prueba de la división. — Se toma el resto de la división por 9 del divisor y del cociente; se efectúa el producto de los dos restos, añadiendo a este producto el resto de la división por 9 del resto de la operación que hay que verificar; el resto de la división por 9 del número obtenido debe ser el mismo que el resto de la división por 9 del dividendo.

EJEMPLO:

34721	472	Restos por 9	Divisor	4
1681	73		Cociente	1
265			Resto	4
			Dividendo	8

Esta regla se demuestra inmediatamente:

$$\begin{aligned} 472 &= \text{m. de } 9 + 4 \\ 73 &= \text{m. de } 9 + 1 \\ 265 &= \text{m. de } 9 + 4 \end{aligned}$$

$$34\,721 = 472 \times 73 + 265 = \text{m. de } 9 + 4 \times 1 + 4.$$

Con arreglo al teorema ya enunciado (p. 16), el resto de la división por 9 de 34 721 es el mismo que el resto de la división por 9 de $4 \times 1 + 4$.

OBSERVACIÓN. — Se puede evidentemente hacer la prueba de las operaciones, de igual manera, por 3, 4, 5, etc., en general, por un número cuyo carácter de divisibilidad sea sencillo. La prueba por 9 es preferible porque con este número se verifican todas las cifras; ocurriría lo mismo si se efectuase la prueba por 11, pero el carácter de divisibilidad es un poco más complicado que el de la divisibilidad por 9.

Digamos una vez más que la prueba del 9 de una operación, como las pruebas ya indicadas anteriormente, no dan la seguridad de que no se hayan cometido errores al efectuar la operación.

PROBLEMAS

La suma y la diferencia de dos números pares es siempre un número par.

Sean $2n$ y $2n'$ dos números pares cualesquiera, tales como $n > n'$.

Su suma es

$$2n + 2n' = 2\,(n + n') = \text{m. de } 2.$$

Su diferencia,

$$2n - 2n' = 2\,(n - n') = \text{m. de } 2.$$

De dos números pares consecutivos, uno de ellos es siempre divisible por 4.

Dos números pares consecutivos pueden escribirse $2n$ y $2n + 2$, o bien $2n$ y $2\,(n + 1)$.

Siendo n y $n + 1$ dos números enteros consecutivos, uno de ellos será divisible por 2, y, por consiguiente, uno de los dos productos $2n$ ó $2\,(n + 1)$ será divisible por 4.

Un número es divisbile por 4 cuando la suma de la cifra de las unidades y del doble de la cifra de las decenas es divisible por 4.

Un número cualquiera puede considerarse como la suma de otros dos: un número exacto de centenas y el número formado por las decenas y las unidades. El número de las centenas es un múltiplo de 4. Por consiguiente, si A es un número cualquiera cuya cifra de las decenas es d y la de las unidades u, se tendrá

$$\begin{aligned} A &= \text{m. de } 4 + 10\,d + u \\ &= \text{m. de } 4 + \ 8\,d + 2\,d + u \\ &= \text{m. de } 4 + \ 2\,d + u. \end{aligned}$$

Si la suma $2\,d + u$ es divisible por 4, el número A será divisible por 4.

Cuando se verifique la prueba por 9 de una multiplicación, siendo el producto inexacto, el error cometido en la multiplicación será necesariamente un múltiplo de 9.

Sean a y b dos números cuyo producto es $P = ab$. La división de P por 9 da como resultado $P = 9\,n + R$, con la condición $R < 9$.

Supongamos un producto inexacto P', cuya división por 9 dé el mismo resto R.

Tendremos: $P' = 9\,n' + R$.

Si $P > P'$, el error cometido será

$$\begin{aligned} P - P' &= (9\,n + R) - (9\,n' + R) = \\ &= 9\,n - 9\,n' = 9\,(n - n'), \text{ o múltiplo de } 9. \end{aligned}$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor

Definiciones y Observaciones. Recordemos que se dice que *un número* a *es* **divisor** *de* b *cuando la división de* b *por* a *es exacta.*

Un número puede tener varios divisores, pero el número de estos divisores, por ser inferiores al número dado, es finito.

Si un número a es divisor de un número A, todo divisor de a es evidentemente divisor de A.

Análogamente, si un número A es múltiplo de un número a, todos los múltiplos de A son múltiplos de a.

Cuando varios números son divisibles por otro, de este último se dice que es su **divisor común.**

Por ejemplo, 8 es el divisor común de 32, 72 y 88.

Si varios números tienen divisores comunes, el número de éstos es finito; *el mayor de todos estos divisores comunes se denomina* **máximo común divisor** *de dichos números.*

Así, 18, 24 y 36 tienen por divisores comunes 2, 3, 6; su máximo común divisor es 6.

Obtención del máximo común divisor de dos números por el método de divisiones sucesivas. — El método de las divisiones sucesivas se funda en dos teoremas anteriormente establecidos:

1° *Todo número que divide el dividendo y el divisor de una división divide el resto* (véase p. 12);

2° *Todo número que divide el divisor y el resto de una división divide el dividendo* (v. p. 12);

Tratemos de obtener el máximo común divisor de los números 1 534 y 403.

Si 1 534 fuera exactamente divisible por 403, 403 sería el máximo común divisor buscado; en este caso no lo es. Al efectuar la división, se obtiene 3 como cociente y 325 como resto. Con arreglo a los teoremas anteriormente demostrados, cualquier divisor de 1 534 y de 403 es un divisor de 403 y 325 y, recíprocamente, todo divisor común de 403 y de 325 es divisor común de 1 534 y 403. Los dos grupos de números 1 534 y 403, 403 y 325 admiten los mismos divisores; por consiguiente, el máximo común divisor de 1 534 y 403 es el mismo que el de 403 y 325. Obtengamos pues el máximo común divisor de 403 y 325. Repitiendo el mismo razonamiento, nos veremos obligados a buscar el máximo común divisor de 325 y 78, y después de 78 y 13; siendo 13 el máximo común divisor de 78 y 13, será el máximo común divisor buscado.

	3	1	4	6
1 534	403	325	78	**13**
325	78	13	0	

Regla. *Para hallar el máximo común divisor de dos números, se efectúa la división del mayor por el menor; si se obtiene un resto, se divide el menor por dicho resto, después este resto por el segundo resto que se obtenga, y así sucesivamente hasta que se obtenga un resto nulo.*

El último divisor será el máximo común divisor.

Observaciones. De lo establecido anteriormente se deduce que:

1° *Los divisores comunes a dos números son los divisores de su máximo común divisor,* puesto que todo número que divide dos números dados divide el resto de su división (v. p. 12);

2° Recíprocamente, *todo número que divide el máximo común divisor de otros dos números dados divide estos dos números,* puesto que éstos son múltiplos de su máximo común divisor;

3° *Si se multiplican o se dividen exactamente dos números por un tercer número, su máximo común divisor queda multiplicado o dividido por dicho tercer número,* puesto que si se multiplican o se dividen exactamente el dividendo y el divisor de una división por un número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado o dividido por dicho número (v. p. 12);

4° *Si se dividen dos números por su máximo común divisor, el máximo común divisor de los cocientes obtenidos es la unidad; se dice entonces que dichos dos números son primos entre sí.*

Sean A y B los dos números y D su máximo común divisor.

Los dos números $\dfrac{A}{D}$ y $\dfrac{B}{D}$ tienen como máximo común divisor $\dfrac{D}{D}$, es decir, la unidad.

Recíprocamente. *Si los cocientes de dividir dos números* A *y* B *por un tercer número* a *son primos entre sí,* a *es el máximo común divisor de* A *y* B.

Siendo Q y Q' los cocientes de dividir A y B por a, Q y Q' son primos entre sí y su máximo común divisor, por consiguiente, es 1. El máximo común divisor de los productos aQ y aQ' es a; por lo tanto, $aQ = A$ y $aQ = B$.

Obtención del máximo común divisor de tres o más números por el método de divisiones sucesivas. — Tratemos de obtener el máximo común divisor de 4 números A, B, C y D (*fig.* 11).

Sea E el máximo común divisor de A y B. Todo divisor de A y B divide E, y, recíprocamente, todo número que divide A divide A y B. Entonces, los dos grupos de números, A, B, C, D, por una parte, y E, C, D, por otra, admitirán los mismos divisores comunes; por consiguiente, para hallar el máximo común divisor buscado, se reducirá a obtener el máximo común divisor de E, C y D.

Se tomará el máximo común divisor, F, de E y C, y se demostrará, como anteriormente, que el máximo común divisor de E, C y D es el mismo que el de F y D; este máximo común divisor, G, es el número buscado.

Regla. *Para hallar el máximo común divisor de varios números, se obtendrá (según la regla ya citada): 1° el máximo común divisor entre el primero y el segundo número; 2° el máximo común divisor entre el máximo común divisor hallado y el tercer número; 3° el máximo común divisor entre el máximo común divisor hallado y el cuarto..., y así sucesivamente. El último máximo común divisor obtenido será el máximo común divisor de los números dados.*

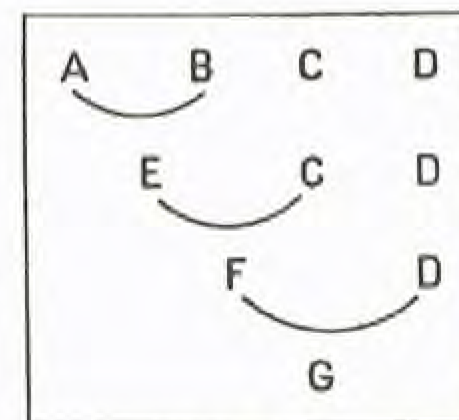


Fig. 11

Observaciones. 1° Dados varios números, si uno de ellos divide todos los restantes, este número será evidentemente el m. c. d. de dichos números.

Por ejemplo, 36 es el m. c. d. de 108, 72 y 36.

Cuando los números dados son sencillos, se obtiene generalmente su m. c. d. sin efectuar operaciones.

Por ejemplo, tratemos de hallar el m. c. d. de 24, 36 y 60.

El m. c. d. no es 24, pero es un divisor de 24; se observa inmediatamente que el m. c. d. es 12.

2° Teniendo en cuenta las teorías expuestas en el caso de dos números, puede decirse que:

a) *Los divisores comunes de varios números dividen su máximo común divisor, y recíprocamente;*

b) *Si varios números se multiplican o dividen por un mismo número, su máximo común divisor queda multiplicado o dividido por dicho número.*

Números primos entre sí

Definición. *Se dice que dos números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.*

Por ejemplo, 16 y 25 son primos entre sí.

Dos números consecutivos son primos entre sí, ya que todo número que los divida tendrá que dividir su diferencia, que es la unidad.

Todo número primo que no divide otro número entero es, evidentemente, primo con él.

Teorema. *Todo número que divide un producto de dos factores y es primo con uno de ellos divide el otro factor.*

En efecto; sea a un número que divide el producto bc; si a y b son primos, su máximo común divisor será 1; por consiguiente, el máximo común divisor de ac y de bc será c; ahora bien, como a divide ac, divide también bc, por hipótesis; luego divide su máximo común divisor c.

Corolario. *Si un número es divisible por varios números primos entre sí dos a dos, es divisible por su producto.*

Sea el número N, divisible por los números a, b y c, primos entre sí dos a dos; N es divisible por el producto abc.

En efecto, sea q el cociente de N por a.

Tendremos,

$$N = aq.$$

b divide N por hipótesis; por lo tanto, b dividirá aq, pero por ser primo con a dividirá q, y si q' es el cociente obtenido, tendremos $q = bq'$. Análogamente, c divide N, y, por consiguiente, aq es primo con a, por lo que dividirá q, y, a su vez, bq'; ahora bien, por ser primo con b, dividirá q', y si llamamos q'' al cociente obtenido, tendremos $q' = cq''$.

Reemplazando miembro a miembro, tendremos

$$N = abcq''.$$

En consecuencia, N será divisible por el producto abc.

Aplicación a los caracteres de divisibilidad. El anterior corolario permite *ampliar los caracteres de divisibilidad*. Por ejemplo: *la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 12 es que sea divisible por 3 y por 4, que son primos entre sí.* La condición es suficiente; por otra parte, es necesaria, ya que si el número es divisible por 12 es forzosamente divisible por 3 y por 4, que son divisores de 12.

Análogamente, *la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 18 es que sea divisible por 2 y por 9.*

Mínimo común múltiplo

Mínimo común múltiplo de dos números. — Definición. *Se denomina* **mínimo común múltiplo de varios números** *el menor de sus múltiplos comunes.* El número de múltiplos comunes de varios números es, evidentemente, infinito.

Teorema. *El mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de ambos dividido por su máximo común divisor.*

Sean dos números enteros cualesquiera A y B, M uno de sus múltiplos comunes y D su máximo común divisor.

Si q y q' son los cocientes de dividir M por A y por B, y a y b los cocientes de dividir A y B por su máximo común divisor, tendremos

$$M = Aq = Bq'; \qquad A = Da,\ B = Db.$$

De lo que se deduce

$$M = Daq = Dbq',$$

y, por lo tanto,

$$aq = bq'.$$

b divide aq, y por ser primo con a, divide q; si el cociente correspondiente es α, tendremos $q = b\,\alpha$, y por consiguiente $M = Ab\alpha$.

Todo múltiplo común de dos números A y B es, pues, de la forma $Ab\alpha$, en donde α es un número entero; el menor corresponderá a $\alpha = 1$, y entonces

$$M = Ab = \frac{A \cdot B}{D}.$$

Observaciones: 1° *Todo múltiplo común de dos números es múltiplo de su mínimo común múltiplo;*

2° *Si se multiplican o se dividen exactamente dos números por un tercer número, su mínimo común múltiplo queda multiplicado o dividido por dicho tercer número;*

3° *Si dos números son primos entre sí,* $D = 1$ *y su mínimo común múltiplo es su producto.*

Mínimo común múltiplo de varios números. — Haciendo una demostración análoga a la efectuada para el máximo común divisor de varios números (v. p. 18), se establecerá fácilmente la siguiente proposición:

Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números, se obtendrá el mínimo común múltiplo de dos de ellos, después el mínimo común múltiplo del número obtenido y de un tercer número, etc. El último mínimo común múltiplo obtenido será el mínimo común múltiplo buscado.

De aquí se deducen las siguientes proposiciones:

1° *Todo múltiplo común de varios números es múltiplo de su mínimo común múltiplo;*

2° *Si se multiplican o se dividen exactamente varios números por un tercer número, su mínimo común múltiplo queda multiplicado o dividido por dicho número.*

Esta proposición permite simplificar, en ciertos casos, la obtención del mínimo común múltiplo de varios números.

Así, por ejemplo, para obtener el m. c. m. de 4 800, 1 600 y 7 200, se tomará el m. c. m. de 48, 16 y 72, y se multiplicará por 100.

El m. c. m. de los números 48, 16 y 72 es el mismo que el de 48 y 72 ya que 48 es múltiplo de 16; será 144. El m. c. m. buscado será 14 400.

Números primos absolutos

Recordemos que *un número primo absoluto es aquel que no tiene más divisores que él mismo y la unidad.*

Por ejemplo, 5, 11 y 17 son números primos absolutos.

Dos números primos entre sí no son forzosamente primos absolutos: 15 y 22 son primos entre sí sin que ninguno de ellos sea primo absoluto.

Dos números primos absolutos son, evidentemente, primos entre sí.

Teorema. *Todo número que no es primo admite al menos un divisor primo.*

En efecto, si A no es un número primo, llamemos a al menor de sus divisores; a es primo, puesto que de no serlo admitiría un divisor menor que él, y A resultaría también dividido.

Teorema. *La serie de números primos es ilimitada.*

Sea N un número primo cualquiera; siempre existirá un número primo mayor que N.

En efecto, consideremos el número

$$P = 1.\ 2.\ 3.\ 5.\ 7 \ldots N + 1.$$

Si $N + 1$ es primo, el teorema queda demostrado; si no lo es, admitirá un divisor primo distinto de 1, que no podrá ser inferior a N, puesto que entonces figuraría como factor en el producto 1. 2. 3. 5. 7...N, y entonces dividiría a la vez P y este último producto, y por lo tanto 1, que es su diferencia. Este divisor primo sería, en consecuencia, mayor que N.

Formación de una tabla de números primos. Criba de Eratóstenes. — Tratemos de formar la tabla de los números primos entre 1 y 100. Escribamos la sucesión de los números enteros de 1 a 100.

Tachemos los múltiplos de 2 a partir de 2^2, ó 4; después, los múltiplos de 3 a partir de 3^2, ó 9, porque 3×2 ya lo hemos tachado por ser múltiplo de 2; y así sucesivamente. Los múltiplos de 4 han sido suprimidos, por ser múltiplos de 2. Suprimamos los múltiplos de 5, etc. Supongamos, de manera general, que se llegue a un número primo p y tratemos de borrar todos sus múltiplos; el primer número que habrá que suprimir será p^2, puesto que todos los precedentes ya han sido eliminados como múltiplos de números menores que p y, por otra parte, suprimidos todos los múltiplos de p, el primer número no suprimido después de él será primo, ya que si no lo fuera admitiría un divisor primo menor que él, lo que es imposible.

En la tabla que consideramos, una vez suprimidos todos los múltiplos de 7, los números que quedan serán primos, ya que el primer número que habrá que suprimir a continuación, como múltiplo de 11, sería 11^2 ó 121, superior a 100.

En general, para formar una tabla de números primos comprendidos entre 1 y A, se operará en forma análoga y sucesivamente hasta llegar a suprimir los múltiplos de un número primo cuyo cuadrado sea mayor que A.

Forma de reconocer si un número es primo. — Sabemos que todo número que no es primo admite por lo menos un divisor primo. Por consiguiente, para saber si un número es primo tendremos que buscar si admite un divisor primo.

Sea el número 691, y tratemos de averiguar si es o no primo. Este número no es divisible por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7. etc. (Se aplicarán los criterios de divisibilidad anteriormente indicados; en el caso de números para los que no se hayan establecido criterios de divisibilidad, se efectuará la división); llegaremos así a 23, y después a 29, que tampoco son divisores. Ahora bien, 29^2 es mayor que 691. Diremos entonces que 691 es primo. En efecto; por no tener un divisor primo menor que 29, puesto que se han ensayado todas las divisiones, diremos que no tiene ningún otro divisor mayor que 29, ya que si lo tuviera, este número, que llamaremos a, mayor que 29, daría un cociente, al dividir 691 por a, que sería un número menor que 29. Por consiguiente, sería un divisor del número y debería habérsele obtenido más rápidamente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225

Criba de Eratóstenes

Regla. *Para saber si un número es primo, se dividirá sucesivamente por los números primos tomados en orden creciente, hasta llegar a una división cuyo cociente sea menor que el divisor.*

Tabla de los números primos absolutos entre 1 y 1 000

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Propiedades de los números primos. — Teorema. *Todo número primo que divide un producto de varios factores divide por lo menos uno de ellos.*

Sea a un número primo que divide el producto A. B. C. Este producto podremos escribirlo A. (B. C), considerando B. C como un producto efectuado.

a divide un producto de dos factores; si divide A, el teorema queda demostrado; si no lo divide, será necesariamente primo con él, puesto que es un número primo, y al dividir un producto de dos factores y ser primo con uno de ellos, dividirá el otro, es decir, B. C. Si divide B, el teorema queda demostrado; si no lo divide, será primo con él, y, por consiguiente, dividirá C.

COROLARIOS. 1º *Todo número primo que divide la potencia de un número divide dicho número;*

2º *Todo número primo que divide un producto de factores primos es igual a uno de los factores;*

3º *Si dos números son primos entre sí, sus potencias de cualquier orden son primas entre sí.*

En caso contrario, admitirían un divisor común primo que, en virtud del primer corolario, dividiría los dos números, lo que es imposible.

Descomposición de un número en factores primos. — TEOREMA. *Todo número que no es primo puede descomponerse en un producto de factores primos.*

Si N es un número no primo, admite por lo menos un divisor primo (v. p. 19); sea a este divisor; tendremos $N = a \cdot q$.

Si q es primo, el teorema queda demostrado. De lo contrario, q admitiría un divisor primo b, por lo que tendremos

$$q = bq';$$

por consiguiente,

$$N = abq'.$$

Se puede continuar razonando análogamente; si q' es primo, el teorema queda demostrado; si no es primo, admitirá un divisor primo c, y tendremos

$$q' = cq'';$$

de donde

$$N = abcq''.$$

Los cocientes q, q', q'', etc., son cada vez menores: su número será limitado, y después de un cierto número de divisiones se llegará a un cociente primo.

EJEMPLO: Descompongamos 360 en factores primos.

Se tiene sucesivamente

$$360 = 2 \times 180,$$
$$180 = 2 \times 90,$$
$$90 = 2 \times 45,$$
$$45 = 3 \times 15,$$
$$15 = 3 \times 5.$$

Sustituyendo, por grados, tendremos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

TEOREMA. *La descomposición de un número en factores primos es única.*

Es decir, cualquiera que sea la forma de obtener la descomposición, el resultado es siempre el mismo.

Supongamos el número N descompuesto en factores primos.

$$N = 2^3 \times 5^2 \times 7^4.$$

Operando en forma diferente para obtener esta descomposición, se llegará forzosamente al mismo resultado; en efecto:

1º Las dos descomposiciones contienen los mismos factores. Así, en la segunda descomposición, sólo pueden figurar como factores los números 2, 5 y 7, ya que todo factor primo que figure en la descomposición divide N, y en consecuencia el producto de los factores $2^3 \times 5^2 \times 7^4$; por consiguiente, será necesariamente igual a uno de los factores 2, 5 ó 7.

La descomposición obtenida es de la forma $2^\alpha \times 5^\beta \times 7^\gamma$; y se tendrá, por lo tanto, $2^3 \times 5^2 \times 7^4 = 2^\alpha \times 5^\beta \times 7^\gamma$;

2º Los mismos factores primos que figuran en las dos descomposiciones están afectados de los mismos exponentes.

$\alpha = 3$, ya que, si fuera mayor que 3, por ejemplo, dividiendo los dos miembros de la igualdad por 2^3, el factor 2 desaparecería del primer miembro y permanecería en el segundo, lo que es imposible, ya que este número primo, que divide el primer miembro, dividiría uno de sus factores y, por consiguiente, sería igual a uno de ellos.

Análogamente se demostraría que α no puede ser menor que 3. Por tanto, $\alpha = 3$; análogamente $\beta = 2$ y $\gamma = 4$.

Las dos descomposiciones son, pues, idénticas.

Método práctico para descomponer un número en sus factores primos. — Sea el número 23 595, que vamos a descomponer en factores primos; se ensayarán sucesivamente los números primos de la serie natural, comenzando por los menores:

23 595	3
7 865	5
1 573	11
143	11
13	13
1	

$$23\,595 = 3 \times 7\,865,$$
$$7\,865 = 5 \times 1\,573,$$
$$1\,573 = 11 \times 143,$$
$$143 = 11 \times 13.$$

Podremos escribir $23\,595 = 3 \times 5 \times 11^2 \times 13.$

La operación se dispone en la forma indicada a la izquierda.

Divisores de un número. — TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un número A sea exactamente divisible por un número B es que A contenga todos los factores primos de B, elevados respectivamente a potencias cuyo grado sea por lo menos igual al que tienen en B.*

La condición es necesaria, ya que si A es divisible por B, tendremos $A = B \times Q$, siendo Q el cociente de la división. Si se descomponen los números que figuran en ambos miembros de la igualdad en sus factores primos, las descomposiciones son idénticas en los dos miembros, y A contendrá necesariamente los factores primos que figuran en B afectados de exponentes por lo menos iguales a los que tienen en B.

Es suficiente, puesto que, si se verifica, podrá encontrarse siempre un factor Q que, multiplicado por B, dará un producto igual a A.

PROBLEMA. *Obtención de todos los divisores de un número.*

Del teorema precedente se deduce que para obtener todos los divisores de un número dado se descompondrá este número en sus factores primos, combinando después estos factores de todas las formas posibles de manera que el exponente de un factor cualquiera sea igual por lo menos al del que figura en la descomposición.

Sea el número 810, cuyos divisores tratemos de obtener.

$$810 = 2 \times 3^4 \times 5; \text{ escribiremos } \begin{cases} 1, 2, \\ 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, \\ 1, 5, \end{cases}$$

multiplicaremos todos los números de la primera fila por cada uno de los de la segunda y después todos los números del cuadro obtenido por cada uno de los números de la tercera fila.

Obtendremos así el siguiente cuadro:

$1, 2, 3, 2 \times 3, 3^2, 2 \times 3^2, 3^3, 2 \times 3^3, 3^4, 2 \times 3^4,$
$5, 2 \times 5, 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 3^2 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5, 3^3 \times 5,$
$2 \times 3^3 \times 5, 3^4 \times 5, 2 \times 3^4 \times 5.$

Demostraremos que en este cuadro figuran todos los divisores de 810.

En primer lugar, cualquier número A que figure en el cuadro será divisor de 810, puesto que 810 contiene todos los factores primos de A, afectados de exponentes al menos iguales a los que tienen en A.

Por otra parte, obtendremos de esta forma todos los divisores de 810, ya que hemos asociado de todas las maneras posibles las diferentes potencias de los factores primos de 810. Así, por ejemplo, $2 \times 3^3 \times 5$ es un divisor de 810, porque en la primera multiplicación hemos tomado necesariamente los factores 2 y 3^3, y en la segunda, el producto 2×3^3 se ha multiplicado necesariamente por 5.

Prácticamente, se puede disponer el cuadro en la siguiente forma:

		1.
810	2	2.
405	3	3. 6.
135	3	9. 18.
45	3	27. 54.
15	3	81. 162.
5	5	5. 10. 15. 30. 45. 90. 135. 270. 405. 810.
1	1	

Se descompone primeramente el número en sus factores primos. Se traza una raya vertical a la derecha de la descomposición, escribiendo la unidad en la parte superior; se forma la segunda línea horizontal multiplicando 1 por el primer factor 2; la tercera línea horizontal, multiplicando los números de las dos primeras por el factor 3; para la cuarta línea, se multiplican solamente los números de la tercera por 3, puesto que los productos de las dos primeras líneas por 3 ya se han obtenido, y así sucesivamente; cuando se obtenga un nuevo factor primo, se multiplicarán todos los divisores ya obtenidos por el nuevo factor, etc.

Todos los números obtenidos son divisores de 810 y, recíprocamente, todo divisor de 810 está contenido en el cuadro.

Número de divisores de un número. — Sea el número A descompuesto en sus factores primos: $A = a^\alpha \times b^\beta \times c^\gamma$, siendo a, b, y c los factores primos.

El número de divisores se obtiene multiplicando, como ya se ha indicado, los números formados en las tres líneas siguientes:

$$1, a, a^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad a^\alpha$$
$$1, b, b^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad b^\beta$$
$$1, c, c^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad c^\gamma$$

La primera contiene $\alpha + 1$ números, la segunda $\beta + 1$, la tercera $\gamma + 1$;

El número de divisores será, pues, $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

Así, pues, el número de divisores de 810 es

$$(1 + 1)(4 + 1)(1 + 1) = 20.$$

OBSERVACIÓN. Si un número es cuadrado perfecto, los exponentes α, β, γ de sus factores primos son pares, y por consiguiente, $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$... serán números impares y su producto $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ será también impar, luego el número de los divisores de un número cuadrado perfecto será, por lo tanto, impar.

Contrariamente, para todo número que no sea cuadrado perfecto, uno al menos de los factores $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$ será par, su producto también lo será y, por consiguiente, el número de los divisores de un número que no sea cuadrado perfecto es par.

Obtención del máximo común divisor de varios números mediante su descomposición en factores primos. — REGLA. *Para obtener el máximo común divisor de varios números se les descompondrá primeramente en sus factores primos y a continuación se efectuará el producto de todos los factores primos comunes a dichos números, afectando cada uno de ellos con el menor de los exponentes con que figura en las descomposiciones.*

Sean los números 686, 2 156, 1 666. Al descomponerlos en sus factores primos, obtendremos

$$686 = 2 \times 7^3,$$
$$2\,156 = 2^2 \times 7^2 \times 11,$$
$$1\,666 = 2 \times 7^2 \times 17.$$

Demostraremos que el máximo común divisor de estos números es $D = 2 \times 7^2$. En primer lugar, D es un *divisor común* de los tres nú-

meros dados, por contener cada uno de ellos todos los divisores de D con exponentes por lo menos iguales a los que tienen en D.

Además, es el *máximo común divisor* de muchos números, ya que cualquier divisor común de los mismos no podrá contener más factores primos que los comunes, es decir, 2 y 7. Si en el producto 2×7^2 se aumentara el exponente de uno de los factores, el producto así obtenido dejaría de dividir uno por lo menos de los números dados.

Obtención del mínimo común múltiplo de varios números mediante su descomposición en factores primos. — Regla. *Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números se les descompone en sus factores primos, efectuando a continuación el producto de todos los diferentes factores primos obtenidos, tomando cada uno de ellos una sola vez y afectado con el mayor de los exponentes con que figura en las descomposiciones.*

Sean los números 700, 210 y 520, cuya descomposición en factores primos será

$$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7,$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$
$$520 = 2^3 \times 5 \times 13.$$

Demostraremos que el mínimo común múltiplo de dichos números es

$$M = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 13 = 54\,600.$$

En primer lugar, M es múltiplo de los números dados, por contener todos los factores primos de cada uno de ellos con un exponente igual o mayor.

Por otra parte, 54 600 es el menor de los múltiplos comunes a los números dados, ya que todo múltiplo común de dichos números debe contener como factores primos 2, 3, 5, 7, 13, y el exponente del factor 2, por ejemplo, en M, no puede rebajarse, puesto que el número correspondiente dejaría de ser múltiplo de 700.

Aplicaciones. *Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números*

$$A = 2^3 \times 3^4 \times 7^2 \times 13,$$
$$B = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^4,$$
$$C = 2^4 \times 3^5 \times 5^5 \times 7^3 \times 11^2.$$

Se tendrá:

$$\text{M. c. d. } (A, B, C) = 2^2 \times 3 \times 7^2.$$
$$\text{M. c. m. } (A, B, C) = 2^4 \times 3^5 \times 5^5 \times 7^4 \times 11^2 \times 13.$$

Congruencias

En los capítulos precedentes hemos empleado el procedimiento clásico de la teoría de la divisibilidad. Demostraremos ahora de nuevo sus principales propiedades utilizando un procedimiento más moderno, que consiste esencialmente en el empleo de un simbolismo que permite obtener las mismas propiedades mediante operaciones que recuerdan las operaciones algebraicas. Debe, no obstante, tenerse en cuenta que al utilizar este simbolismo sólo están permitidas las operaciones cuya legitimidad ha sido establecida.

Definición. *Se dice que dos números* a *y* a' *son* **congruentes módulo b** *cuando los restos de su división por dicho número son iguales.*

Esta propiedad se indica por la escritura simbólica

$$a \equiv a' \text{ (mód. } b),$$

que se lee *a* congruente con *a'* módulo *b*.

Esta relación simbólica se denomina congruencia.

Ejemplo: $26 \equiv 31$ (mód. 5).

En efecto, los restos de dividir 26 y 31 por 5 son, ambos, 1.

Consecuencias. 1º Si *r* es el resto de la división de *a* por *b*, se tendrá la congruencia $a \equiv r$ (mód. *b*).

2.º Si *a* es divisible por *b*, el resto es cero.

Por consiguiente, la divisibilidad de *a* por *b* se escribe

$$a \equiv 0 \text{ (mód. } b).$$

Propiedades de las congruencias del mismo módulo. — Estas propiedades son las consecuencias inmediatas de las igualdades de la división.

1º *Dos números congruentes con un tercero respecto de un mismo módulo son congruentes entre sí respecto de dicho módulo.*

Si $A \equiv A''$ (mód. *d*) y $A' \equiv A''$ (mód. *d*), se deduce que
$$A \equiv A' \text{ (mód. } d).$$

2º *Sumando miembro a miembro dos congruencias respecto del mismo módulo, resulta otra congruencia respecto de ese mismo módulo.*

Si $A \equiv A'$ (mód. *d*) y $B \equiv B'$ (mód. *d*),

$$A + B \equiv A' + B' \text{ (mód. } d).$$

3º *Restando miembro a miembro dos congruencias del mismo módulo, resulta otra congruencia de dicho módulo.*

Si $A \equiv A'$ (mód. d) y $B \equiv B'$ (mód. *d*), se deduce que

$$A - A' \equiv B - B' \text{ (mód. } d).$$

Esta última igualdad supone que las substracciones son posibles.

En las aplicaciones prácticas se añade, si fuera necesario, múltiplos del módulo.

Consecuencia. En una congruencia, puede cambiarse un término de miembro cambiando su signo.

Aplicación. Las dos congruencias $A \equiv B$ (mód. *d*) y $A - B \equiv 0$ (mód. *d*) son consecuencias una de la otra. Encontramos nuevamente, por este sencillo procedimiento, el teorema: "La condición necesaria y suficiente para que dos números A y B den el mismo resto al dividirlos por un mismo número *d*, es que su diferencia sea divisible por *d* (v. p. 16).

La comparación de ambos procedimientos de demostración muestra la ventaja del empleo del simbolismo de las congruencias.

4º *Multiplicando miembro a miembro dos congruencias de un mismo módulo, se obtiene otra congruencia de dicho módulo.*

Si $A \equiv A'$ (mód. *d*) y $B \equiv B'$ (mód. *d*), se deduce que
$$A \cdot B \equiv A' \cdot B' \text{ (mód. } d).$$

Para demostrar esta propiedad, escribiremos las igualdades de las divisiones.

$$A = d \cdot q_A + r_A$$
$$A' = d \cdot q_A' + r_A$$

siendo q_A y q_A' los cocientes respectivos de A y A' por *d*. El resto r_A es el mismo, por definición.

Análogamente

$$B = d \cdot q_B + r_B$$
$$B' = d \cdot q_B' + r_B.$$

Calculemos los dos productos $A \cdot B$ y $A' \cdot B'$:

$$A \cdot B = (d \cdot q_A + r_A)(d \cdot q_B + r_B) = d^2 \cdot q_A \cdot q_B +$$
$$+ d \cdot q_A \cdot r_B + d \cdot q_B \cdot r_A + r_A \cdot r_B.$$

Los tres primeros términos son múltiplos de *d*. Y lo mismo su suma. De ello se deduce que $A \cdot B \equiv r_A \cdot r_B$ (mód. *d*).

Calculando de la misma forma el producto $A' \cdot B'$, se obtendría la congruencia $A' \cdot B' \equiv r_A \cdot r_B$ (mód. *d*).

De donde se deduce finalmente que $A \cdot B \equiv A' \cdot B'$ (mód. *d*).

Observación. La propiedad se extiende al producto de un número finito cualquiera de congruencias del mismo módulo.

Se deduce de ello que, dada una congruencia, si se elevan los dos miembros de ella a la misma potencia resulta otra congruencia del mismo módulo.

Ejemplos de aplicación de las congruencias. — Consideraremos nuevamente, a título de ejemplo, dos teoremas ya demostrados.

1º Si en un producto de varios factores uno de ellos es divisible por un número, su producto también lo es.

Sea el producto A. B. C en donde B es, por hipótesis, divisible por *d*. Podemos escribir

$$A \equiv A \text{ (mód. } d) \quad B \equiv 0 \text{ (mód. } d) \quad C \equiv C \text{ (mód. } d).$$

Multiplicando miembro a miembro estas tres congruencias se obtiene $A.\ B.\ C \equiv A.\ 0.\ B$ (mód. *d*), de donde $A.\ B.\ C \equiv 0$ (mód. *d*).

Lo que demuestra que el producto A. B. C es divisible por *d*.

2º Consideremos nuevamente la divisibilidad por 9 y hagamos el razonamiento sobre el mismo ejemplo, 3 875.

Sabemos que $10 \equiv 1$ (mód. 9).

Elevando esta congruencia a la potencia *n*, tendremos

$$10^n \equiv 1 \text{ (mód. 9)}.$$

Si *a* es una cifra cualquiera diferente de 0 y de 9, tendremos $a \equiv a$ (mód. 9), de donde multiplicando $a \cdot 10^n \equiv a$ (mód. 9).

Teniendo en cuenta que $3\,875 = 3\,000 + 800 + 70 + 5$, y que acabamos de demostrar que

$$3\,000 \equiv 3 \text{ (mód. 9)}, \quad 800 \equiv 8 \text{ (mód. 9)},$$

$$70 \equiv 7 \text{ (mód. 9)}, \quad 5 \equiv 5 \text{ (mod. 9)},$$

si sumamos miembro a miembro estas congruencias, resultará,

$$3\,875 \equiv 3 + 8 + 7 + 5 \text{ (mód. 9)}.$$

El número dado tiene el mismo resto, al dividirlo por 9, que la suma de sus cifras. La comparación de ambas demostraciones pone de manifiesto las ventajas que representa el empleo de las congruencias.

El número racional

El número negativo. Medida de un segmento de recta. Números fraccionarios positivos y negativos. El número racional. Igualdad de fracciones. Transformación y simplificación de fracciones. Fracciones irreducibles. Reducción de fracciones a un común denominador. Mínimo denominador común. — Aplicación a la comparación de fracciones. *Problemas.* — **Operaciones con los números fraccionarios:** Adición de fracciones. Sustracción de fracciones. Multiplicación de fracciones. Potencia de una fracción. División de fracciones. Cociente exacto de dos números enteros. — **Números decimales:** Unidades decimales de diversas órdenes. Lectura de un número decimal. Propiedades de los números decimales. Adición de números decimales. Sustracción de números decimales. Multiplicación de números decimales. División de números decimales. Casos particulares de cálculo rápido. Conversión de fracciones ordinarias en fracciones decimales. Valor aproximado de un número fraccionario. Aplicación al cociente aproximado de dos números decimales. Fracciones decimales periódicas. Fracción generatriz de una fracción decimal periódica. Fracción periódica pura. Fracción decimal periódica mixta. Método para conocer a priori el resultado de la conversión de una fracción ordinaria en fracción decimal. — **Potenciación y radicación:** Potencias y raíces de los números fraccionarios. Raíz cuadrada de un número fraccionario. Raíz cuadrada de un número fraccionario en menos de una unidad. Raíz cuadrada de un número entero o fraccionario en menos de $\frac{1}{10^n}$. Raíz cúbica de un número fraccionario. Raíz cúbica de un número fraccionario en menos de una unidad. Raíz cúbica de un número entero o fraccionario en menos de $\frac{1}{10^n}$

El número negativo. — Operación tan sencilla como la sustracción no es posbile efectuarla en el campo de los números naturales si el sustraendo es mayor que el minuendo.

Si se descompone el sustraendo en dos sumandos, uno de ellos igual al minuendo, al efectuar la sustracción quedará por restar el segundo número. Así:

$$5 - 9 = 5 - (5 + 4) = -4$$

Se generaliza entonces el concepto de número llamando número negativo a este segundo número.

De una manera general, si $b = a + c$,

$$a - b = a - (a + c) = -c.$$

Esta primera ampliación del concepto de número permite también resolver otras cuestiones de índole geométrica, física, etc. Por ejemplo:

Sea una recta $x'x$ (fig. 12) en la que se ha fijado un punto O que llamaremos origen. Decir que otro punto A, también situado sobre dicha recta, está a 3 cm de distancia de O, por ejemplo, no bastará para determinarlo, puesto que no sabemos en qué sentido hay que tomar dicha distancia; habrá, pues, que convenir en considerar como *positivas* todas las distancias contadas hacia la derecha de O, y como *negativas* las contadas hacia la izquierda. Diremos entonces que la distancia OA es + 3 cm. y la OB — 2 cm.

Fig. 12

En la escala centígrada de temperaturas no quedará determınada una temperatura diciendo que es de 7 grados; habrá que precisar si estos siete grados están por encima del cero o por debajo de él; es decir, + 7° ó — 7°.

DEFINICIONES. *Se llama* **número positivo** *todo número distinto de cero precedido del signo más* (+).

Se llama **número negativo** *todo número distinto de cero precedido del signo menos* (—).

Todo número positivo es mayor que otro negativo cualquiera.

Todo número negativo es menor que cero.

De dos números negativos es menor el de mayor valor absoluto, siendo éste el valor del número prescindiendo del signo.

Se llaman *números opuestos* los de igual valor absoluto y de signo contrario. Así + 25 y — 25 son números opuestos.

El número natural (o entero positivo) y el número negativo constituyen la nueva clase de los **números enteros.**

Medida de un segmento de recta. Números fraccionarios positivos y negativos. — Consideremos un segmento rectilíneo AB y otro CD, que llamaremos *segmento unidad;* tomemos sobre AB, a partir de A, el segmento AE igual a CD y después, a continuación, EF = FG = ... = CD.

Pueden presentarse tres casos:

1° *Que el segmento unidad* CD *esté contenido en* AB *un número exacto de veces, cuatro, por ejemplo* (fig. 13). Diremos en este caso que *la medida de* AB *es el número natural* 4.

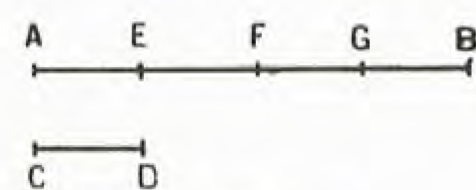


Fig. 13

2° *Que el segmento unidad* CD *no esté contenido en el segmento* AB, *pero una parte alícuota de* CD *esté contenida un número exacto de veces.* Si el segmento CD se ha dividido en tres partes iguales, su parte alícuota CE estará contenida 8 veces en AB (*fig.* 14); serán entonces necesarios dos números para establecer la medida de AB. Diremos entonces que la medida de AB es un **número fraccionario,** *positivo o negativo.*

3° *Que no exista ninguna parte alícuota del segmento unidad que esté contenida exactamente en el segmento considerado.* El número que mide entonces la magnitud considerada es **inconmensurable con la unidad,** y lo llamaremos **número irracional** (Véase página 30).

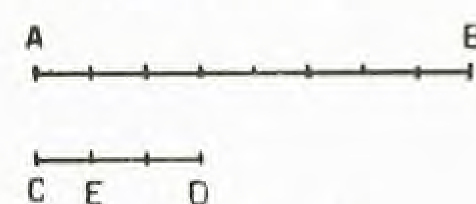


Fig. 14

Por otra parte, la división exacta de dos números naturales es imposible cuando el dividendo no es múltiplo del divisor. Habrá que definir entonces nuevos números, como dos séptimos, trece novenos, ... A/B, que también llamaremos números fraccionarios.

Queda, pues, demostrada la necesidad de la creación de nuevos entes que llamaremos **números fraccionarios.**

DEFINICIÓN. *Una fracción o número fraccionario es el conjunto de dos números enteros, llamados numerador y denominador. El* **denominador** *indica el número de partes en que se ha dividido la unidad, y el* **numerador** *da total del número de partes de las unidades expresadas.*

Numerador y denominador se denominan *términos* de la fracción.

Desde un punto de vista aritmético puro, la fracción es un par de números naturales, el segundo de ellos no nulo, afectado del signo + ó —.

Fracciones inversas son las que tienen sus términos invertidos. Por ejemplo: $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$; $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

El número racional. — *Se llama* **número racional** *el ente abstracto formado por un par de números naturales afectado del signo + ó —, y representado por el símbolo* $\pm \frac{a}{b}$.

Los números enteros positivos o naturales quedan incluidos en los racionales mediante el siguiente convenio:

El número racional representado por la fracción $\pm \frac{a}{1}$ es el número natural a ó el negativo $-a$.

El cero queda incluido en el campo de los números racionales mediante el convenio: $\frac{0}{b} = 0$ (siendo $b \neq 0$).

Igualdad de fracciones. — DEFINICIÓN. *Se dice que dos fracciones son iguales cuando representan una misma cantidad con una misma unidad.*

Si tenemos una fracción $\frac{a}{b}$, considerada como medida de una cantidad, es evidente que si subdividimos cada una de las unidades de especie b en m partes iguales, el número de las que contiene la cantidad dada será am, y como su especie es bm, resultará que la nueva fracción $\frac{am}{bm}$ representará la misma cantidad. Podrá, pues, expresarse el siguiente criterio, que desde el punto de vista aritmético puro es una definición.

I. *La fracción* $\pm \frac{a}{b}$ *es igual a todas las del mismo signo que tienen sus términos equimúltiplos de los suyos.*

Podrán, pues, obtenerse infinitas fracciones iguales a una dada multiplicando sus dos términos por un número natural cualquiera.

Así, el segmento AB de la figura 13 podrá considerarse como los $\frac{8}{3}$ ó los $\frac{16}{6}$ del segmento CD, puesto que ambas fracciones son iguales, ya que la segunda resulta de multiplicar por el mismo número 2 los dos términos de la primera.

También resulta evidente el siguiente criterio:

II. *Dos fracciones de igual denominador son iguales solamente cuando tienen el mismo numerador y signo.*

Sean dos fracciones de diferente denominador $\pm \frac{a}{b}$ y $\pm \frac{a'}{b'}$; una vez reducidas a un mismo denominador, se tendrán las expresiones $\pm \frac{ab'}{bb'}$ y $\pm \frac{a'b}{bb'}$; la condición de igualdad será entonces $ab' = ba'$, y además la igualdad de signo. Podrá entonces expresarse el siguiente criterio de igualdad de fracciones, del cual son casos particulares los dos anteriores:

La condición necesaria y suficiente para que dos fracciones sean iguales es que tengan el mismo signo e iguales productos cruzados.

Transformación y simplificación de fracciones. Fracciones irreducibles. — TEOREMA. *Si se multiplica el numerador de una fracción por un número, sin que varíe el denominador, la fracción queda multiplicada por dicho número, y recíprocamente, si se divide el numerador de una fracción por un número, sin que varíe el denominador, la fracción queda dividida por dicho número.*

Consideremos la fracción $\frac{3}{7}$. La fracción $\frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$ será dos veces *mayor que* $\frac{3}{7}$, puesto que contiene doble número de séptimos.

TEOREMA. *Si se multiplica el denominador de una fracción por un número, sin que varíe el numerador, la fracción queda dividida por dicho número, y recíprocamente, si se divide el denominador de una fracción por un número, sin que varíe el numerador, la fracción queda multiplicada por dicho número.*

Sea la fracción $\frac{3}{5}$. La fracción $\frac{3}{5 \times 4} = \frac{3}{20}$, es cuatro veces *menor que* $\frac{3}{5}$; en efecto, ambas fracciones están compuestas del mismo número de partes, pero en la fracción $\frac{3}{20}$ las partes son cuatro veces más pequeñas que en la fracción $\frac{3}{5}$.

Simplificar una fracción es reemplazarla por otra equivalente, pero cuyos términos sean menores. En virtud del criterio de igualdad antes expresado, para simplificar una fracción se dividen sus dos términos por un mismo divisor.

Se dice que **una fracción es irreducible** cuando sus dos términos son los menores posibles.

La reducción de una fracción a otra irreducible se basa en el siguiente

TEOREMA. *Dada una fracción cuyos términos son primos entre sí, cualquier otra fracción equivalente tendrá sus términos equimúltiplos de los términos de la primera.*

Sea la fracción $\frac{3}{7}$, cuyos términos son primos entre sí, y sea la fracción $\frac{a}{b}$ igual a la primera. Se tendrá $\frac{3}{7} = \frac{a}{b}$, de donde se deducirá

$$\frac{3 \times b}{7 \times b} = \frac{a \times 7}{b \times 7},$$

y, por consiguiente, $3 \times b = a \times 7$. Ahora bien, 3 divide $3 \times b$ y, por lo tanto, $a \times 7$; como es primo con siete, dividirá a y podrá escribirse $a = 3 \times q$, siendo q el cociente de dividir a por 3.

Reemplazando en la igualdad anterior, resulta

$$3 \times b = 3 \times q \times 7, \text{ de donde } b = 7 \times q.$$

Se tendrá, pues,

$$a = 3 \times q$$
$$b = 7 \times q.$$

De este teorema se deduce que *para transformar una fracción en otra irreducible basta dividir ambos términos por su máximo común divisor.*

En efecto, los cocientes obtenidos serán primos entre sí (v. página 18) y la fracción transformada irreducible.

EJEMPLO: Sea la fracción $\frac{48}{72}$. Para convertirla en irreducible, dividiremos ambos términos por su máximo común divisor, que es 24, y se obtendrá la fracción $\frac{2}{3}$, que es irreducible.

Transformación de la fracción mayor que la unidad. Para determinar el número de unidades que contiene una fracción de esta clase, se divide el numerador por el denominador, y al cociente, que las expresa, se añade la fracción que tiene por numerador el resto y el mismo denominador.

Sea $\frac{31}{7}$. El cociente es 4 y el resto 3; se tiene: $\frac{31}{7} = 4 + \frac{3}{7}$.

Esta transformación se llama vulgarmente *sacar los enteros*, y la expresión compuesta del número entero y la fracción se conoce con el nombre de *número mixto*.

Para convertir un entero y una fracción en una sola fracción, se multiplica el entero por el denominador, se suma al producto el numerador, y se pone el mismo denominador de la fracción.

$$8 + \frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 8 + 2}{9} = \frac{74}{9}.$$

Reducción de fracciones a un común denominador. Mínimo denominador común. — *Reducir varias fracciones a un denominador común es transformarlas en otras fracciones respectivamente iguales, pero que tengan todas el mismo denominador.*

Para reducir varias fracciones al mismo denominador puede elegirse como denominador común un múltiplo cualquiera de los denominadores de las fracciones propuestas; después, se le dividirá por cada uno de los denominadores de dichas fracciones y el cociente que se obtenga se multiplicará por los dos términos de cada fracción.

Será siempre ventajoso tomar como denominador común el menor número posible, por lo cual se escogerá el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas, una vez transformadas en irreducibles, y después se efectuarán las operaciones indicadas.

EJEMPLO. Reducir a un común denominador las fracciones

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{5}{9}.$$

$$8 = 2^3; \quad 6 = 2 \times 3; \quad 12 = 2^2 \times 3; \quad 9 = 3^2.$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores será:

$$2^3 \times 3^2 = 72.$$

$$\frac{72}{8} = 9; \text{ de donde } \frac{3}{8} = \frac{3 \times 9}{8 \times 9} = \frac{27}{72}.$$
$$\frac{72}{6} = 12; \quad " \quad " \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 12}{6 \times 12} = \frac{60}{72}.$$
$$\frac{72}{12} = 6; \quad " \quad " \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 6}{12 \times 6} = \frac{42}{72}.$$
$$\frac{72}{9} = 8; \quad " \quad " \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \times 8}{9 \times 8} = \frac{40}{72}.$$

OBSERVACIÓN. Operando en forma análoga, pueden también reducirse varias fracciones a un mismo numerador.

Aplicación a la comparación de fracciones. — La reducción de fracciones a un denominador común o a un mismo numerador permite comparar el orden de magnitud de varias fracciones.

EJERCICIO. Clasificar por orden creciente las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{1}{3}.$$

Las fracciones serán respectivamente iguales a

$$\frac{27}{45}, \frac{25}{45}, \frac{33}{45}, \frac{15}{45}.$$

Clasificadas por orden creciente, las fracciones consideradas serán

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5} \text{ y } \frac{11}{15}.$$

PROBLEMAS

1º *Obtener una fracción equivalente a la fracción irreducible* $\frac{a}{b}$ *y cuyo numerador sea* N.

Como la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible, sólo tendrá como equivalente otra fracción cuyos términos sean equimúltiplos de los suyos.

Si x es el denominador de la fracción buscada, deberá tenerse

$$N = a \cdot n \quad \text{y} \quad x = b \cdot n$$
$$n = \frac{N}{a}, \text{ de donde } x = \frac{b \cdot N}{a}.$$

El problema sólo será posible cuando N sea un múltiplo de a. Esta condición, que es necesaria, es evidentemente suficiente.

2º *Obtener una fracción equivalente a la fracción irreducible* $\frac{a}{b}$ *y cuyo denominador sea* D.

Se obtendría, como anteriormente, para el numerador buscado,

$$x = \frac{a \cdot D}{b}.$$

El problema sólo será posible cuando D sea múltiplo de b.

Operaciones con los números fraccionarios

Adición de fracciones. — DEFINICIÓN. *La* **adición de fracciones** *es la operación que tiene por objeto reunir en un solo número las unidades o partes alícuotas de la unidad contenidas en otros varios.*

Pueden distinguirse dos casos:

PRIMER CASO. *Las fracciones dadas tienen el mismo denominador. Para sumar fracciones de igual denominador, se suman los numeradores y se pone como denominador el denominador común.*

EJEMPLO:

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{10}{12} + \frac{3}{12} = \frac{19}{12}.$$

La demostración se deduce de la definición de fracción.

SEGUNDO CASO. *Fracciones cualesquiera.*

En este caso, se reducen las fracciones a un común denominador y se opera después como en el primer caso.

Sean las fracciones

$$\frac{3}{5},\ \frac{6}{7}\ \text{y}\ \frac{3}{15}.$$

Se reducen las tres fracciones al mínimo denominador común $15 \times 7 = 105$.

Se tendrá:

$$\frac{3}{5}+\frac{6}{7}+\frac{3}{15}=\frac{63}{105}+\frac{90}{105}+\frac{21}{105}$$
$$=\frac{63+90+21}{105}=\frac{174}{105}=\frac{58}{35}.$$

Observaciones. 1º Las reglas enunciadas para la adición de fracciones muestran que en una suma de fracciones puede alterarse de cualquier forma el orden de los términos, y que se pueden reemplazar varias de ellas por el resultado de su suma.

2º Si los números que hay que sumar se componen de números enteros y de fracciones, puede efectuarse la suma de los números enteros y de las fracciones separadamente.

Ejemplo:

$$3\frac{5}{7}+7\frac{3}{8}=10+\frac{5}{7}+\frac{3}{8}=10+\frac{40+21}{56}=$$
$$=10\frac{61}{56}\quad\text{ó}\quad 11\frac{5}{56}.$$

En el caso particular de que sólo se trate de números enteros, se estará en el caso de la suma de números enteros.

Sustracción de fracciones. — Definición. *La* **sustracción de fracciones** *es la operación que tiene por objeto, dada la suma de dos fracciones y una de ellas, hallar la otra.*

Esta operación es la inversa de la adición.

Primer caso. *Las fracciones tienen el mismo denominador.*

Para restar dos fracciones de igual denominador se restan los numeradores y se pone como denominador el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{7}{15}-\frac{3}{15}=\frac{4}{15}.$$

Segundo caso. *Fracciones cualesquiera.*

En este caso, se reducen las fracciones a un común denominador y se opera como en el caso anterior.

Ejemplo: Sea la substracción $\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$.

El mínimo denominador común es 24.

Tendremos

$$\frac{5}{8}-\frac{7}{12}=\frac{15}{24}-\frac{14}{24}=\frac{1}{24}.$$

Observación. Las fracciones que hay que restar pueden estar compuestas de números enteros y fraccionarios.

Ejemplos. 1º *Restar*

$$5\frac{3}{7}\ \text{de}\ 8\frac{7}{9}.$$

Las fracciones, reducidas al mínimo denominador común, son

$$\frac{27}{63}\ \text{y}\ \frac{49}{63}.$$

Tendremos

$$8\frac{7}{9}-5\frac{3}{7}=8\frac{49}{63}-5\frac{27}{63}=3\frac{22}{63}.$$

2º *Restar*

$$4\frac{3}{5}\ \text{de}\ 7\frac{1}{3}.$$

Las fracciones, reducidas a su mínimo denominador común, son

$$\frac{9}{15}\ \text{y}\ \frac{5}{15}$$

Se escribirá

$$7\frac{1}{3}-4\frac{3}{5}=7\frac{5}{15}-4\frac{9}{15}=6\frac{20}{15}-4\frac{9}{15}=2\frac{11}{15}.$$

3º *Uno de los términos de la sustracción puede ser un número entero.* En este caso el número entero se convierte en fracción.

$$3-\frac{2}{5}=\frac{15}{5}-\frac{2}{5}=\frac{13}{5};\qquad \frac{24}{7}-2=\frac{24-14}{7}=\frac{10}{7}.$$

Los principios relativos a la adición y a la sustracción de los números enteros siguen verificándose para los números fraccionarios.

Multiplicación de fracciones. — Definición. *La* **multiplicación de fracciones** *es la operación que tiene por objeto, dados dos números, hallar un tercero, que sea, con respecto al primero, lo que el segundo es con respecto a la unidad.*

Observaciones. Si en la definición anterior se sustituyen los números fraccionarios por números enteros, se estará en el caso de la multiplicación de números enteros.

Primer caso. *Multiplicar una fracción por un número entero.*

Se multiplica el numerador por el entero conservando el denominador, o bien, se divide este término por el entero y se conserva el numerador, cuando el denominador sea divisible por dicho entero.

La demostración es inmediata, ya que multiplicar $\frac{5}{8}$ por 4, por ejemplo, equivale, según la definición, a sumar 4 números iguales a $\frac{5}{8}$, lo que dará como resultado

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5+5+5+5}{8}=\frac{5\times 4}{8}.$$

En definitiva, hay que hacer la fracción 4 veces mayor; como se sabe, puede llegarse a este resultado conservando el numerador y diviendo el denominador de la fracción dada por 4, cuando la operación es posible.

Así:

$$\frac{5}{8}\times 4=\frac{5}{2}.$$

Segundo caso. *Multiplicación de dos fracciones.*

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y se pone como denominador el producto de los denominadores.

Sea la multiplicación

$$\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}.$$

Tendremos

$$\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{7\times 3}=\frac{10}{21}.$$

Observaciones. 1º Es conveniente simplificar las fracciones antes de multiplicarlas.

Sea la operación

$$\frac{15}{32}\times\frac{56}{65}=\frac{15\times 56}{32\times 65}=\frac{3\times 7}{4\times 13}=\frac{21}{52}.$$

2º Si los números que hay que multiplicar se componen de números enteros y de fracciones, se multiplican los enteros y las fracciones del multiplicando por los enteros y las fracciones del multiplicador y se suman los productos obtenidos, o bien se reduce cada uno de los factores a una sola fracción y se opera en la forma indicada.

Potencia de una fracción. — La potencia de una fracción es el producto de varios factores iguales a dicha fracción.

Para elevar una fracción a una potencia se eleva a dicha potencia cada uno de los términos de la fracción.

Así:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4^3}.$$

Ello es consecuencia inmediata de la definición del producto de factores, ya que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3^3}{4^3}.$$

Teorema. *La potencia de una fracción irreducible es también una fracción irreducible.*

Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$ y su potencia enésima $\frac{a^n}{b^n}$.

Como se sabe, si a y b son primos entre sí, también lo son a^n y b^n (v. p. 20).

Del teorema anterior se deduce que *cuando un número entero no es el cuadrado perfecto de otro número entero tampoco es cuadrado perfecto de una fracción*, ya que la fracción considerada puede suponerse irreducible y su cuadrado no puede ser un número entero.

División de fracciones. — Definición. *La* **división de fracciones** *es la operación que tiene por objeto, dadas dos fracciones denominadas respectivamente* **dividendo** *y* **divisor,** *hallar un número entero o fraccionario, denominado* **cociente,** *que multiplicado por la fracción divisor reproduzca la fracción dividendo.*

Observación. En la división de fracciones **el cociente es siempre exacto.**

Primer caso. *División de una fracción por un entero.*

Para dividir una fracción por un entero se multiplica su denominador por el entero conservando el numerador, o se divide el numerador por el entero conservando el denominador, cuando el numerador sea divisible por dicho número.

Sea la división $\frac{8}{15}:4$.

Dividir la fracción $\frac{8}{15}$ por 4 es hallar una fracción que multiplicada por 4 reproduzca $\frac{8}{15}$.

Ahora bien, multiplicar una fracción por 4 es hacerla 4 veces mayor; por consiguiente, la fracción buscada será 4 veces menor que $\frac{8}{15}$.

Se tendrá

$$\frac{8}{15}:4=\frac{8}{15\times 4}=\frac{8}{60}\quad\text{y}\quad\frac{8}{15}:4=\frac{8:4}{15}=\frac{2}{15}.$$

Segundo caso. *División de dos fracciones.*

Para dividir dos fracciones se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Sea la división $\frac{6}{7}$ por $\frac{3}{4}$.

Dividir $\frac{6}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es obtener una fracción que multiplicada por $\frac{3}{4}$ dé como producto $\frac{6}{7}$.

Según la definición, multiplicar una fracción por $\frac{3}{4}$ equivale a tomar los $\frac{3}{4}$ de dicha fracción. Los $\frac{3}{4}$ de la fracción buscada son, por consiguiente, $\frac{6}{7}$, de donde se deduce que la fracción buscada será igual a $\frac{6 \times 4}{7 \times 3}$, ó a $\frac{6}{7} \times \frac{4}{3}$.

Tercer caso. *División de un entero por una fracción.*

Razonando como en el caso anterior se llega a la conclusión de que habrá que multiplicar el entero por la fracción invertida. Es decir:

Para dividir un entero por una fracción se multiplica dicho entero por la inversa de la fracción divisor.

Observaciones. 1º Si el dividendo y el divisor se componen de enteros y de fracciones, se les convierte en fracciones y se multiplica la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

2º Si las dos fracciones tienen el mismo denominador, su cociente es igual al cociente de los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{3}{7} : \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{3}{4}.$$

Cociente exacto de dos números enteros. — Cuando la división de dos números enteros no da resto alguno, se dice que el cociente es **exacto.**

Si la división no es exacta, se denomina **cociente exacto** de los dos números enteros la fracción cuyo numerador es el dividendo de la división y cuyo denominador es el divisor.

El cociente exacto de 24 por 7 es la fracción $\frac{24}{7}$; si se multiplica el divisor por el cociente, volverá a hallarse el dividendo.

Números decimales

Definición. *Se denomina* **fracción decimal** *la fracción ordinaria cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.*

Por ejemplo, $\frac{15}{100}$, $\frac{4}{1\,000}$, son fracciones decimales.

Unidades decimales de diversos órdenes. — Si se considera la serie indefinida de fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, ..., que se denominan, respectivamente, una décima, una centésima, una milésima, etcétera, se observará que representan unidades decimales de diverso orden, y que cada una de ellas es 10 veces inferior que la precedente. Por consiguiente, una fracción decimal cualquiera podrá considerarse como la suma de una parte entera (que puede ser nula) y de unidades decimales de diferentes órdenes.

Así:

$$\frac{384\,345}{10\,000} = \frac{380\,000}{10\,000} + \frac{4\,000}{10\,000} + \frac{300}{10\,000} + \frac{40}{10\,000} + \frac{5}{10\,000},$$

ó

$$\frac{384\,345}{10\,000} = 38 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{5}{10\,000}.$$

Se puede aplicar aquí el convenio establecido para la numeración escrita de los números enteros (v. p. 5), puesto que las unidades decimales de diferentes órdenes, como las unidades enteras de diferentes órdenes, son cada vez 10 veces mayores o menores, y escribir los números decimales como se escriben los enteros.

Para indicar en la numeración escrita la cifra de las unidades se coloca una coma a su derecha. La fracción anterior se escribirá

38,434 5.

De una manera general, *para escribir una fracción decimal se escribirá el numerador separando con una coma, a partir de la derecha, tantas cifras (cifras decimales) como ceros tenga el denominador.*

$$\frac{432}{1\,000} = 0{,}432 \quad ; \quad \frac{24}{10\,000} = 0{,}0024 \quad ; \quad \frac{142}{100} = 1{,}42.$$

Una fracción decimal escrita de esa forma se denomina, generalmente, **número decimal.** Cuando es menor que la unidad, la cifra 0 está colocada delante de la coma.

Lectura de un número decimal. — Se enuncia la parte entera y a continuación la parte decimal como si fuese un número entero, agregando la denominación de las unidades que representa su última cifra, que es análoga a la que tendría la de las unidades simples si todo el número fuese entero.

Así, 34,325 se enunciará 34 unidades 325 milésimas, que puede enunciarse abreviadamente treinta y cuatro, coma, trescientos veinticinco.

Propiedades de los números decimales. — Teorema. *El valor de un número decimal no se altera cuando se añaden o se suprimen a su derecha un número cualquiera de ceros.*

Las dos fracciones 0,30 ó 0,3 son iguales, puesto que equivalen respectivamente a $\frac{30}{100}$ y a $\frac{3}{10}$.

En efecto; el orden de las unidades representadas por una cifra cualquiera sólo depende de su posición respecto de la coma; como las que contiene el número no cambian de lugar y las agregadas carecen de valor, resulta demostrado el teorema.

Teorema. *Si en un número decimal se corre la coma hacia la derecha o hacia la izquierda, uno, dos, tres, etc., lugares, el número queda respectivamente multiplicado o dividido por la unidad seguida de uno, dos tres, etc., ceros.*

En efecto, cada cifra representará entonces unidades 10, 100, 1 000 ... veces mayores o menores, según que la coma se desplace hacia la derecha o hacia la izquierda.

De esta proposición resultan las reglas para multiplicar o dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros.

Así:

$$41{,}254 \times 100 = 4\,125{,}4.$$

Adición de números decimales. — *Para sumar varios números decimales se opera como si se tratara de números enteros, cuidando de colocar los sumandos de forma que se correspondan las comas; efectuada la suma, se colocará la coma en la misma columna en que se encuentran las de los sumandos.*

$$\begin{array}{r} 14{,}285 \\ 3{,}81 \\ 0{,}7234 \\ \hline 18{,}8184 \end{array}$$

Sustracción de números decimales. — *Para restar dos números decimales se escribe el sustraendo debajo del minuendo cuidando de que se correspondan sus comas, a fin de que también se correspondan las unidades del mismo orden, y añadiendo ceros a la derecha del que tenga menos cifras decimales, con objeto de que el minuendo y el sustraendo tengan igual número de dichas cifras; se efectúa la sustracción como si se tratara de números enteros, y se coloca la coma en la misma columna en que se encuentran las de ambos términos.*

Multiplicación de números decimales. — *Para multiplicar dos números decimales se opera como si fuesen enteros, separando después de la derecha del producto tantas cifras decimales como haya en ambos factores.*

$$\begin{array}{r} 28{,}72 \\ 4{,}3 \\ \hline 8616 \\ 11488 \\ \hline 123{,}496 \end{array}$$

División de números decimales. — 1º *División de un decimal por un entero.*

Para dividir un decimal por un entero se efectúa la operación prescindiendo de la coma, separando después de la derecha del cociente tantas cifras decimales como tiene el dividendo.

Ejemplo: $51{,}417 : 14 = 3{,}672 + \frac{9}{14}$.

Despreciando la fracción complementaria, se obtiene el cociente 3,672 por *defecto,* y forzando la unidad, 3,673 por *exceso,* siendo, en ambos casos, el error cometido menor que una milésima.

2º *División de un entero o de un decimal por otro decimal.*

Para dividir un número entero o decimal por otro decimal se prescinde de la coma del divisor, multiplicando el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, aplicando después el procedimiento que corresponde a los nuevos términos obtenidos.

Así: si se trata de dividir el número 3,14159 por 9,86 podrá establecerse la igualdad: 3,14159 : 9,86 = 314,159 : 986, que conduce al caso anterior.

Casos particulares de cálculo rápido.—Multiplicación y división de un número por 0,5; 0,25; 0,125; 0,75; 1,5; ...

1º $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Para multiplicar un número por 0,5, basta tomar la mitad de dicho número.

Para dividir un número por 0,5, basta multiplicarlo por 2.

Ejemplo:

$$12 \times 0{,}5 = \frac{12}{2} = 6. \quad 12 : 0{,}5 = 12 : \frac{1}{2} = 24.$$

2º $0{,}25 = \frac{1}{4}$. Multiplicar un número por 0,25 equivale a dividirlo por 4.

Para dividir un número por 0,25, basta multiplicarlo por 4.

EJEMPLO:

$$20 \times 0,25 = 20 \times \frac{1}{4} = 5. \quad 20 : 0,25 = 20 : \frac{1}{4} = 80.$$

3º $0,125 = \frac{1}{8}$. Multiplicar un número por 0,125 equivale a dividirlo por 8.

Para dividir un número por 0,125, basta multiplicarlo por 8.

EJEMPLO:

$$32 \times 0,125 = 32 \times \frac{1}{8} = 4. \quad 32 : 0,125 = 32 : \frac{1}{8} = 256.$$

4º $0,75 = \frac{3}{4}$. Multiplicar un número por 0,75 equivale a multiplicarlo por 3 y dividirlo por 4.

Para dividir un número por 0,75, basta multiplicarlo por $\frac{4}{3}$.

EJEMPLO:

$$12 \times 0,75 = 12 \times \frac{3}{4} = 9$$

$$12 : 0,75 = 12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = 16.$$

5º $1,5 = \frac{3}{2}$. Multiplicar un número por 1,5 equivale a sumarle su mitad.

Para dividir un número por 1,5, basta multiplicarlo por $\frac{2}{3}$.

EJEMPLO:

$$18 \times 1,5 = 18 + 9 = 27.$$

$$18 : 1,5 = 18 : \frac{3}{2} = 18 \times \frac{2}{3} = 12.$$

Las reglas anteriores se extienden fácilmente a la multiplicación y la división por 0,05, por 2,5, por 12,5, por 7,5, ...

Conversión de fracciones ordinarias en fracciones decimales. — En el cálculo práctico, es preferible reemplazar una fracción ordinaria por la fracción decimal equivalente; esta operación se llama *convertir una fracción ordinaria en una fracción decimal.*

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible se convierta exactamente en una fracción decimal es que su denominador no contenga más factores primos que 2 y 5.*

1º La condición es necesaria. En efecto, si una fracción ordinaria $\frac{a}{b}$, cuyos términos son primos entre sí, es igual a una fracción decimal $\frac{A}{10^n}$, es que 10^n es un múltiplo de b.

2º La condición es suficiente. Si se verifica la condición expresada, podrá siempre encontrarse una fracción decimal igual a la fracción propuesta; así, $\frac{B}{2} \times 5 = B \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{5} = B \times \frac{25}{10}$.

OBSERVACIÓN. Si el denominador de una fracción irreducible no contiene más factores primos que 2 y 5, la fracción decimal a que se reduce exactamente consta de tantas cifras decimales como unidades tenga el mayor de los exponentes de dichos factores.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{2^4 \times 5^2} = \frac{3 \times 5^2}{2^4 \times 5^4} = \frac{75}{10^4} = 0,0075.$$

La fracción decimal tiene cuatro cifras decimales.

Valor aproximado de un número fraccionario. — DEFINICIÓN. *Se llama* **valor aproximado** *por defecto, en menos de* $\frac{1}{n}$, *de un número fraccionario, al número de veces que la fracción considerada contiene a* $\frac{1}{n}$.

TEOREMA. *El valor aproximado por defecto, en menos de una unidad, de un número fraccionario es igual al cociente, aproximado en menos de una unidad, de su numerador por su denominador.*

Sea la fracción $\frac{367}{42}$. Obteniendo sus enteros se tendrá:

$$\frac{367}{42} = 8 + \frac{31}{42}.$$

El valor aproximado por defecto, en menos de una unidad, de $\frac{367}{42}$ es, evidentemente, 8, ya que la fracción es igual a 8 más un número menor que 1.

9 es el valor aproximado por exceso en menos de una unidad.

TEOREMA. *Para obtener el valor aproximado de una fracción en menos de* $\frac{1}{10^n}$, *se multiplica dicha fracción por* 10^n, *calculándose después el valor aproximado del producto en menos de una unidad y dividiendo el resultado obtenido por* 10^n.

Sea calcular la fracción $\frac{a}{b}$ con un error menor que $\frac{1}{10^n}$.

Calcular una fracción $\frac{a}{b}$ con un error menor que $\frac{1}{10^n}$ es buscar una fracción $\frac{}{10^n}$, tal que

$$\frac{x}{10^n} \leqq \frac{a}{b} < \frac{x+1}{10^n}$$

De donde se deduce que

$$x \leqq \frac{a \cdot 10^n}{b} < x + 1.$$

x es el cociente aproximado por defecto en menos de una unidad, y $(x + 1)$ el cociente aproximado por exceso, en menos de una unidad, de $a \times 10^n$ por b. Por consiguiente, $\frac{x}{10^n}$ es el valor aproximado por defecto en menos de $\frac{1}{10^n}$ de $\frac{a}{b}$, y $\frac{x+1}{10^n}$ es el valor aproximado por exceso en menos de $\frac{1}{10^n}$, de $\frac{a}{b}$.

EJEMPLO. *Convertir* $\frac{13}{7}$ *en fracción decimal con un error menor que* $\frac{1}{100}$.

Apliquemos el método anterior; habrá que dividir 1 300 por 7, lo que da 185; la fracción buscada es $\frac{185}{100}$ ó 1,85.

OBSERVACIÓN. Puede generalizarse lo que se acaba de exponer y tratar de calcular el valor aproximado por defecto en menos de $\frac{1}{p}$ de un número fraccionario.

El número buscado será evidentemente igual al número de veces que $\frac{1}{p}$ está contenido en el número considerado.

Si $\frac{a}{b}$ es la fracción considerada, habrá que encontrar un número $\frac{x}{p}$ tal que se tenga

$$\frac{x}{p} \leqq \frac{a}{b} < \frac{x+1}{p},$$

o bien

$$x \leqq \frac{ap}{b} < x + 1.$$

x es el cociente aproximado por defecto, en menos de una unidad, de $\frac{ap}{b}$; $\frac{x}{p}$ es el valor aproximado por defecto, en menos de $\frac{1}{p}$, de $\frac{a}{b}$, y $\frac{x+1}{p}$ el valor aproximado por exceso, en menos de $\frac{1}{p}$, de $\frac{a}{b}$.

De esta forma podrá calcularse el valor aproximado del número fraccionario, con un error menor que $\frac{p}{q}$.

Aplicación al cociente aproximado de dos números decimales. — El cociente exacto de dos números decimales es, como hemos visto, una fracción ordinaria que, en general, no se transforma en fracción decimal. Calculemos este cociente con una aproximación decimal determinada.

Sea la división de 38,72 por 4,327. Se tendrá:

$$\frac{38,72}{4,327} = \frac{3\,872}{100} : \frac{4\,327}{1\,000} = \frac{3\,872}{100} \times \frac{1\,000}{4\,327} = \frac{38\,720}{4\,327}.$$

Calculemos esta fracción con un error de $\frac{1}{100}$. Apliquemos la regla.

38720'00	4327
4104 0	894
209 70	
36 62	

El valor aproximado con un error de $\frac{1}{100}$ por defecto es 8,94.

Obsérvese que las dos cifras decimales de 8,94 corresponden a los dos ceros que se añaden a la derecha de 38 720, y se deducirá la regla siguiente:

REGLA. *Para hallar el cociente aproximado de dos números decimales, se multiplican ambos por una potencia de 10 suficiente para que*

el divisor sea entero. Se divide después la parte entera del dividendo por el divisor, se escribe una coma a la derecha del cociente obtenido y se prosigue la división como si se tratara de números enteros, deteniéndose cuando se haya obtenido en el cociente la cifra decimal que corresponda al grado de aproximación que se desee; si el dividendo no tuviera bastantes cifras decimales para continuar la división hasta ese grado de aproximación, se le añaden los ceros que sean necesarios.

Fracciones decimales periódicas. — Cuando en una fracción decimal de un número ilimitado de cifras se repiten éstas periódicamente y en el mismo orden, a partir de cierto lugar, la fracción se denomina *fracción periódica* y el conjunto de cifras repetidas se llama *período*.

Así: 0,252525 ... 0,41324 324 ...
son fracciones decimales periódicas.

Si el período comienza inmediatamente despues de la coma, se dice que la fracción es periódica *pura;* en el caso contrario, es periódica *mixta,* denominándose *parte no periódica* a la comprendida entre la coma y el primer período.

Cuando una fracción decimal periódica procede de la conversión de una fracción ordinaria en otra decimal, la fracción ordinaria correspondiente se denomina **fracción generatriz** de la fracción decimal periódica.

TEOREMA. *Toda fracción ordinaria que no sea exactamente reducible decimales equivale a una fracción decimal periódica.*

En efecto; si consideramos la fracción $\frac{4}{7}$ observaremos que, al efectuar la división, los restos de las divisiones parciales sucesivas son inferiores a 7; al cabo de seis divisiones parciales, como máximo, volverá a obtenerse un resto ya hallado, y a partir de la división parcial siguiente las cifras se reproducirán periódicamente en el cociente.

```
4   | 7
50  | 0,571428
 10
  30
   20
    60
     4
```

DEFINICIÓN. *Dada una sucesión indefinida de números, se dice que* **A es el límite de dicha sucesión** *cuando, dado un número positivo cualquiera* ϵ *(epsilon) tan pequeño como se quiera, existe en la sucesión un término que difiera de A una cantidad menor que* ϵ.

Cuando los números de una sucesión tienen como límite un número A, se dice igualmente que **dichos números tienden hacia A.**

Ya se ha visto que cuando una fracción ordinaria no se convierte exactamente en otra decimal, al buscar sus valores aproximados en menos de $\frac{1}{10^n}$, se puede proseguir indefinidamente la serie de operaciones, obteniendo de esta forma una sucesión indefinida de números.

```
12  | 7
50  | 1,714285
 10
  30
   20
    60
     40
      5
```

Así, si tomamos los valores sucesivos de la fracción $\frac{12}{7}$ con un error menor que $\frac{1}{10^n}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, se obtendrá 1; 1,7; 1,71; 1,714 ...

Tomando los valores sucesivos de la misma fracción, aproximados por exceso en menos de $\frac{1}{10^n}$, obtendremos

2, 1,8; 1,72; 1,715 ...

Estas dos sucesiones indefinidas tienen las siguientes propiedades:

1º En la primera sucesión, cada número es igual o superior al que le precede, siendo todos menores que $\frac{12}{7}$;

2º En la segunda sucesión, cada número es igual o inferior al que le precede, siendo todos mayores que $\frac{12}{7}$;

3º Cada número de la primera sucesión es menor que el número que ocupa el mismo orden en la segunda y, por consiguiente, que todos los que le siguen; la diferencia entre dos números que tienen el mismo orden en cada una de las sucesiones puede ser menor que cualquier cantidad.

Por último, puede establecerse fácilmente que las mismas sucesiones de valores aproximados en menos de $\frac{1}{10^n}$ sólo proceden de una fracción, ya que de lo contrario las dos fracciones así definidas diferirían en menos de $\frac{1}{10^n}$.

Diremos entonces que la fracción $\frac{12}{7}$ es el límite de cualquiera de las dos sucesiones de valores aproximados así formados.

Si se considera una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ y se forma la sucesión de valores aproximados en menos de $\frac{1}{10^n}$, los números de dicha sucesión tienen por límite $\frac{a}{b}$. En efecto, el valor aproximado, en menos de $\frac{1}{10^n}$, de $\frac{a}{b}$ difiere de $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{10^n}$, y por otra parte puede darse a n un valor suficientemente grande para que $\frac{1}{10^n}$ sea menor que un número ϵ dado tan pequeño como se quiera; el valor aproximado en menos de $\frac{1}{10^n}$ y todos los sucesivos diferirán de $\frac{a}{b}$ en menos de ϵ.

En particular, la sucesión $\frac{1}{10^n}$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$, tiene como límite cero. La sucesión 0,9; 0,99; 0,999 ..., tiene por límite 1.

OBSERVACIÓN. Una fracción decimal periódica tiene, por consiguiente, como límite, una fracción ordinaria; esta fracción ordinaria, que origina la fracción periódica, se denomina *fracción generatriz.*

Fracción generatriz de una fracción decimal periódica. Fracción periódica pura. — TEOREMA. *La fracción ordinaria generatriz de una decimal periódica pura sin parte entera tiene por numerador el período y por denominador un número formado de tantos 9 como cifras tiene el período.*

Así, la fracción periódica 0,185 185 185 ..., es equivalente a la fracción $\frac{185}{999}$.

En efecto; supongamos que esta fracción ordinaria existe, y designémosla por $\frac{a}{b}$.

Si se convierte $\frac{a}{b}$ en fracción decimal, se obtendrá primeramente en el cociente 0,185, y el último resto será $\frac{a}{1\,000}$, ya que de lo contrario no se obtendría en el cociente la sucesión de períodos. Si se divide entonces 1 000 a por b se obtendrá 185 en el cociente y a en el resto, de forma que se tendrá

$$1\,000\, a = b \cdot 185 + a.$$

De donde se deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{185}{999}.$$

Recíprocamente, supongamos que se tenga $\frac{a}{b} = \frac{185}{999}$

Podremos escribir

$$\frac{999 \cdot a}{999 \cdot b} = \frac{185 \cdot b}{999 \cdot b}.$$

De donde se deduce

$$999\, a = 185\, b, \quad \text{ó} \quad 1\,000\, a = b \times 185 + a.$$

Por ser a menor que b, será el resto de la división de 1 000 a por b.

Cuando se buscan los valores aproximados decimales de $\frac{a}{b}$, el período, a partir del cuarto resto a, será 185 y la fracción $\frac{a}{b}$ dará 0,185 185 ...

OBSERVACIÓN. El teorema anterior dejará de verificarse cuando el período sea 9, es decir, para la fracción 0,999.

Análogo razonamiento conduciría a

$$10\, a = b \cdot 9 + a \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} = \frac{9}{9} = 1, \text{ y}$$

partiendo de 1 no podría obtenerse de nuevo la fracción periódica.

Pero, por otra parte, 0,999 ... tiene como límite 1, resultado ya encontrado anteriormente (v. FRACCIONES DECIMALES PERIÓDICAS).

TEOREMA. *La fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal periódica pura con parte entera tiene como numerador la diferencia entre el número formado por la parte entera seguida del primer período y el constituido por dicha parte entera, y por denominador un número compuesto de tantos 9 como cifras tiene el período.*

Sea la fracción 24,573 573 ...

La fracción propuesta será igual a

$$24 + \frac{573}{999}, \quad \text{ó} \quad \frac{24 \times 999 + 573}{999} = \frac{24\,(1\,000 - 1) + 573}{999}$$

o finalmente a

$$\frac{24\,573 - 24}{999}.$$

OBSERVACIONES: 1º Cuando la parte decimal sea 0,999 ..., ésta se reemplazará por 1.

La fracción periódica pura 24,999 ... es igual a 25.

2º La fracción generatriz de una fracción decimal periódica pura tiene como denominador un número compuesto de 9. Esta fracción podrá simplificarse en ciertos casos, pero sea o no irreducible, su denominador no contendrá los factores 2 ni 5, es decir, que su denominador será primo con 10.

Fracción decimal periódica mixta. — TEOREMA. *La fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal periódica mixta sin parte entera tiene por numerador el conjunto de la parte no periódica seguida del período, disminuido en la parte no periódica, y por denominador un número formado de tantos 9 como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Sea la fracción 0,8131313 ..., que es decimal periódica mixta.

Supongamos que tiene una fracción ordinaria generatriz y desígnémosla por $\frac{a}{b}$. Si se convierte $\frac{a}{b}$ en fracción decimal, la fracción obtenida con una aproximación de una décima será 0,8 y con una aproximación de una milésima 0,813. En ambos casos, las cifras que componen los últimos restos serán forzosamente las mismas, ya que de lo contrario no aparecería en el cociente la sucesión de los períodos. Por consiguiente, el cociente de 10 a por b será 8; el de 1 000 a por b será 813 y los dos restos serán los mismos; r, por ejemplo.

Se tendrá

$$10 \cdot a = b \cdot 8 + r,$$
$$1\,000 \cdot a = b \cdot 813 + r.$$

Restando miembro a miembro la primera igualdad de la segunda, se obtendrá

$$990\ a = (813 - 8)\ b.$$

De donde se deduce, dividiendo ambos miembros de la igualdad por 990 · b:

$$\frac{a}{b} = \frac{813-8}{990}.$$

Recíprocamente, supongamos que se tenga

$$\frac{a}{b} = \frac{813-8}{990}.$$

El valor aproximado en menos de $\frac{1}{10}$ es 5,8. En efecto:

$$\frac{10\,a}{b} = \frac{813-8}{99} = \frac{800+13-8}{99} = \frac{8 \times 99 + 13}{99} = 8 + \frac{13}{99}.$$

El valor aproximado por defecto en menos de $\frac{1}{10}$ será, pues, $\frac{8}{10} = 0{,}8.$

Análogamente, el valor aproximado de $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{1\,000}$ es 0,813; en efecto:

$$\frac{1\,000\,a}{b} = \frac{(813-8)\,100}{99} = \frac{81\,300-800}{99} = $$
$$= \frac{813 \times 99 + 813 - 800}{99} = 813 + \frac{13}{99}.$$

El valor aproximado por defecto, en menos de $\frac{1}{1\,000}$, de $\frac{a}{b}$ es $\frac{813}{1\,000} = 0{,}813$, etc.

ESCOLIO. Cuando la fracción decimal propuesta tenga parte entera, se antepondrá ésta a la fracción ordinaria generatriz de su parte decimal, pero puede conservarse unida a esta última y obtenerse, de manera análoga a la anterior, el siguiente resultado:

$$5{,}813\,13\,13 \ldots = \frac{5\,813-58}{990}.$$

EJEMPLO. La fracción generatriz de 6,34817817 ... es

$$\frac{634\,817-634}{99\,900}$$

OBSERVACIONES. 1° La demostración no es válida cuando la parte periódica se componga de 9. Aplicando el teorema a la fracción decimal 0,289 99 ..., se encuentra como fracción generatriz $\frac{289-28}{900}$, que podrá escribirse

$$\frac{28 \times 10 + 9 - 28}{900} = \frac{28 \times 9 + 9}{900} = \frac{28}{100} + \frac{1}{100}.$$

Se trata del número decimal 0,29; no existe fracción generatriz, siendo el número decimal propuesto igual a 0,29.

2° El denominador de la fracción generatriz de una fracción decimal periódica mixta es siempre múltiplo de 10. El numerador, en cambio, puede ser múltiplo de 2 ó de 5, pero nunca de 10, ya que para ello sería necesario que la cifra en que termina el período y la cifra en que termina la parte no periódica fuesen las mismas, lo cual es imposible, puesto que el período comenzaría en ese caso en la cifra anterior.

Esta fracción generatriz puede simplificarse en ciertos casos, pero el denominador contendrá siempre como factores 2 ó 5.

Método para conocer a priori el resultado de la conversión de una fracción ordinaria en fracción decimal.

Sea una fracción ordinaria irreducible:

Si el denominador de la fracción no contiene más factores primos que 2 y 5, la fracción será generatriz de una fracción decimal exacta (v. pág. 26);

Si el denominador de la fracción no contiene el factor 2 ni el factor 5, la fracción será generatriz de una fracción decimal periódica pura;

Si el denominador de la fracción contiene uno de los dos factores 2 ó 5, la fracción será generatriz de una fracción decimal periódica mixta.

OBSERVACIÓN. El número de las cifras decimales de una fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal exacta es igual al mayor de los exponentes de los factores 2 y 5 que contiene su denominador.

EJEMPLOS. 1° $\frac{7}{500}$ engendra una fracción decimal exacta, ya que $500 = 2^2 \times 5^3$.

$$\frac{7}{500} = 0{,}014.$$

2° $\frac{8}{11}$ engendra una fracción decimal periódica pura y el período de dos cifras, porque el menor número n, tal como $10^n - 1$, divisible por 11 es 2.

$$\frac{8}{11} = 0{,}72\ 72\ 72 \ldots$$

Potenciación y radicación

Potencias y raíces de los números fraccionarios. — I. *La potencia m-ésima* de una fracción es un caso particular de la multiplicación, siendo m un número entero:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{aa \ldots a}{bb \ldots b} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Para elevar una fracción a una potencia se elevan sus dos términos a la misma potencia.

La potencia *m-ésima* de una fracción irreducible es otra fracción irreducible.

II. *La raíz m-ésima de una fracción* es la operación inversa de la potenciación. Dada una fracción, potencia *m-ésima* de otra

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{p}{q}\right)^m,$$

su operación inversa es

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q},$$

siendo $\frac{p}{q}$ la raíz *m-ésima* de la fracción dada $\frac{a}{b}$.

Como $\frac{p}{q}$ siempre puede hacerse que sea irreducible, se tendrá

$$\frac{a}{b} = \frac{p^m}{q^m},$$

y por ser p^m y q^m primos entre sí, se tendrá

$a = p^m$, $b = q^m$, y por lo tanto:

para que una fracción tenga una raíz m-ésima exacta es necesario y suficiente que sus términos también la tengan.

Raíz cuadrada de un número fraccionario. — *La raíz cuadrada de una fracción cuyo numerador y denominador sean cuadrados perfectos es igual a la fracción cuyo numerador y denominador sean respectivamente las raíces cuadradas de los términos de la fracción dada.*

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible sea cuadrado perfecto es que sus dos términos también lo sean.*

1° *La condición es necesaria.* Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$; supongamos que sea el cuadrado de otra fracción que podemos suponer igualmente irreducible, y que designaremos por $\frac{c}{d}$. Se tendrá: $\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2}$.

Tendremos entonces dos fracciones irreducibles iguales (v. pág. 23) y, por consiguiente, $a = c^2$ y $b = d^2$.

2° *La condición es suficiente.* Si se verifica, la fracción será, en efecto, cuadrado perfecto. La fracción $\frac{a^2}{b^2}$ es igual a $\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

COROLARIO. *La condición necesaria y suficiente para que una fracción cualquiera sea cuadrado perfecto es que el producto de sus términos también lo sea.*

1° *La condición es necesaria.* Sea $\frac{a}{b}$ una fracción, cuadrado perfecto.

Existirá una fracción irreducible $\frac{c}{d}$ tal que se tenga

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2}.$$

a y b serán entonces equimúltiplos de c^2 y d^2, y se podrá escribir:

$$a = c^2 \cdot m \quad \text{y} \quad b = d^2 \cdot m,$$

de donde se deduce que
$ab = c^2\, d^2\, m^2$; por consiguiente, ab es cuadrado perfecto.

2° *La condición es suficiente.* En efecto, si ab es cuadrado perfecto, también lo será la fracción $\frac{ab}{b^2}$, es decir, $\frac{a}{b}$.

Raíz cuadrada de un número fraccionario en menos de una unidad. — Teorema. *Para extraer la raíz cuadrada de un número fraccionario en menos de una unidad basta extraer la raíz cuadrada de la parte entera.*

Sea, por ejemplo, la expresión fraccionaria $\frac{25\,235}{17}$;

$$\frac{25\,235}{17} = 1\,484 + \frac{3}{17}.$$

Como 38 es la raíz cuadrada por defecto, en menos de una unidad, de 1 484, se tendrá

$$38^2 < 1\,484 < (38 + 1)^2.$$

Podrá sumarse $\frac{3}{17}$ al número intermedio sin que se altere el sentido de la desigualdad. La primera subsistirá, evidentemente, y también la segunda, puesto que, como 1 484 y $(38 + 1)^2$ difieren en menos de una unidad, $1\,484 + \frac{3}{17}$ será forzosamente menor que $(38 + 1)^2$.

Se podrá, pues, escribir

$$38^2 < 1\,484 + \frac{3}{17} < (38 + 1)^2.$$

Por consiguiente, 38 y 39 serán las raíces cuadradas en menos de una unidad por exceso y por defecto de $\frac{25\,235}{17}$.

Raíz cuadrada de un número entero o fraccionario en menos de $\frac{1}{10^n}$. — Definición. *Se llama raíz cuadrada de un número entero o fraccionario con menor error que $\frac{1}{10^n}$ por defecto a la mayor fracción de denominador 10^n cuyo cuadrado esté contenido en dicho número.*

Se llama raíz cuadrada por exceso con error menor que $\frac{1}{10^n}$ a la fracción cuyo numerador es el número inmediatamente superior al de la raíz cuadrada por defecto y que tiene el mismo denominador.

1° Sea 27 el número cuya raíz cuadrada, por defecto, con error menor que $\frac{1}{100}$ queremos extraer. Según la definición, habrá que hallar una fracción decimal $\frac{x}{100}$ tal que se verifique

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 \leq 27 < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2.$$

Multiplicando los tres miembros de la doble desigualdad por 100^2 se tendrá

$$x^2 \leq 27 \times 100^2 < (x + 1)^2.$$

```
2 7'0 0'0 0 | 5 1 9
 .2 0 0     |---------
  .9 9 0 0  | 1 0 1 × 1
    .6 3 9  | 1 0 2 9 × 9
```

Por consiguiente, x será la raíz cuadrada con error menor que una unidad de 27×100^2, o sea de 270 000.

Esta raíz es 519 por defecto y 520 por exceso.

La raíz buscada será $\frac{519}{100}$, o sea 5,19 por defecto y 5,20 por exceso.

```
3'4 1,7 2'8 0'0 0 | 1 8,4 8 5
2 4'1             | 2 8 × 8
  1 7 7'2         | 3 6 4 × 4
    3 1 6 8'0     | 3 6 8 8 × 8
      2 1 7 6 0'0 | 3 6 9 6 5 × 5
          3 2 7 7 5

     8
  7  ×  7
     1
```

2° Sea 341,728 el número cuya raíz cuadrada con un error menor que $\frac{1}{1\,000}$ queremos obtener.

Habrá que hallar una fracción decimal $\frac{x}{1\,000}$ tal que

$$\left(\frac{x}{1\,000}\right)^2 \leq 341{,}728 < \left(\frac{x+1}{1\,000}\right)^2.$$

Como anteriormente, esta doble desigualdad dará

$$x^2 \leq 341{,}728 \times 1\,000^2 < (x + 1)^2;$$

x es la raíz cuadrada aproximada, en menos de una unidad, de $341{,}728 \times 1\,000^2$, o sea de 341 728 000. Efectuemos la operación conservando la indicación de la coma en el número primitivo. Se hallará $x = 18\,485$, y la raíz buscada será 18,485, por defecto, y 18,486 por exceso. Notemos que las tres cifras decimales de 18,485 corresponden a los períodos que forman la parte decimal del número 341,278 000.

Teniendo en cuenta esta observación podrá establecerse la regla siguiente:

Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un número entero con un error menor que $\frac{1}{10^n}$, se extrae la raíz cuadrada aproximada, en menos de una unidad, de dicho número; se continúa la operación escribiendo una coma a la derecha del número hallado y dos ceros a la derecha de cada resto obtenido hasta que se haya encontrado en la raíz la cifra decimal del orden que corresponde al grado de aproximación buscado. Si el número es decimal, se le divide en períodos de dos cifras a partir de la coma, a la derecha y a la izquierda. Se extrae la raíz de la parte entera y se continúa la operación colocando una coma a la derecha del número obtenido y añadiendo ceros que completen los períodos de dos cifras del número dado hasta que se llegue, en la raíz, a la cifra decimal que corresponda al grado de aproximación buscado.*

Observación. Conviene saber de memoria las raíces cuadradas de 2 y 3, de empleo frecuente; son:

$$\sqrt{2} = 1{,}414 \text{ con una aproximación de } \frac{1}{1\,000}, \text{ por defecto,}$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732 \text{ con una aproximación de } \frac{1}{1\,000}, \text{ por defecto.}$$

Raíz cúbica de un número fraccionario. — Las diversas proposiciones y teoremas relativos a la raíz cuadrada de los números fraccionarios pueden aplicarse para la extracción de su raíz cúbica.

Si el numerador y el denominador de una fracción son cubos perfectos, la raíz cúbica de dicha fracción se obtendrá extrayendo la raíz cúbica de cada uno de sus términos:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b}.$$

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible sea cubo perfecto es que sus dos términos también lo sean.*

Raíz cúbica de un número fraccionario en menos de una unidad. — Teorema. *Para extraer la raíz cúbica de un número fraccionario en menos de una unidad basta extraer la raíz cúbica de su parte entera.*

Sea, por ejemplo, la fracción $\frac{2\,093}{5}$;

$$\frac{2\,093}{5} = 418 + \frac{3}{5}.$$

Como 7 es la raíz cúbica de 418 en menos de una unidad, se tendrá

$$7^3 < 418 < (7 + 1)^3.$$

Si sumamos $\frac{3}{5}$ al número intermedio, no se alterará el sentido de las dos anteriores desigualdades; en efecto, la primera seguirá verificándose, y también la segunda, puesto que 418 y $(7 + 1)^3$ difieren por lo menos en una unidad, y, por lo tanto, $418 + \frac{3}{5}$ será forzosamente menor que $(7 + 1)^3$.

Podrá entonces escribirse

$$7^3 < 418 + \frac{3}{5} < (7 + 1)^3.$$

Por consiguiente, las raíces cúbicas en menos de una unidad, de $\frac{2\,093}{5}$, serán, por defecto y por exceso, respectivamente, 7 y 8.

Raíz cúbica de un número entero o fraccionario en menos de $\frac{1}{10^n}$. — Definición. *Se llama raíz cúbica de un número entero o fraccionario con un error menor que $\frac{1}{10^n}$ por defecto la mayor fracción de denominador 10^n cuyo cubo esté contenido en dicho número.*

Se llama raíz cúbica por exceso con error menor que $\frac{1}{10^n}$ la fracción cuyo numerador es el número inmediatamente superior al de la raíz cúbica por defecto y que tiene el mismo denominador.

Para obtener la raíz cúbica de un número con un error menor de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, ... basta multiplicar el número por 10^3, 10^6, 10^9 ... respectivamente, y extraer la raíz cúbica en menos de una unidad del mayor entero contenido en el producto; si el número es entero, esta operación equivale a escribir a su derecha una, dos o tres secciones de tres ceros o, si el número está en forma fraccionaria, a correr la coma tres, seis, nueve... lugares hacia la derecha.

Una vez extraída la raíz cúbica, en menos de una unidad, de la parte entera del número dado, se observará que se tiene la raíz de dicho número en menos de una unidad; escribiendo a la derecha del resto *tres ceros* o las tres primeras cifras decimales del número dado y continuando la operación, se tendrá una raíz con un error menor de $\frac{1}{10}$, etcétera.

REGLA. *Para extraer la raíz cúbica de un número entero con un error menor que* $\frac{1}{10}, \frac{1}{100} \ldots$, *se extrae la raíz cúbica del número en menos de una unidad, colocando después una coma a la derecha del número obtenido y se continúa la operación añadiendo tres ceros a la derecha de cada resto obtenido hasta obtener en la raíz la cifra decimal que corresponde al grado de aproximación.*

Si el número es decimal, se le divide en períodos de tres cifras a partir de la coma, a la izquierda y a la derecha; se extrae la raíz de la parte entera, colocando una coma a la derecha del número hallado, y después se continúa la operación añadiendo ceros para completar los períodos de tres cifras del número considerado, hasta que se llegue, en una raíz, a la cifra decimal que corresponda al grado de aproximación que se desee obtener.

El número irracional

Raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto. Raíz m-ésima de un número irracional. Cálculo de radicales

Hemos estudiado hasta ahora el número entero y positivo, o *número natural*, cuyo concepto se ha obtenido de la consideración de los conjuntos coordinables, y el *número fraccionario* (v. pág. 22), que responde a la necesidad de dar solución al problema de la división cuando el dividendo no es un múltiplo del divisor, y también al de la medida de una magnitud cuando la unidad de medida no está contenida en ella un número exacto. El número entero y el número fraccionario componen el campo de los **números racionales,** primera ampliación del concepto de número.

En el campo de los números racionales, sin embargo, tampoco son posibles todas las operaciones: no es posible, por ejemplo, la radicación, cuando el índice es par y el radicando negativo, puesto que, siendo las potencias de exponente par siempre positivas, no habrá ningún número racional positivo ni negativo cuyo cuadrado sea negativo; tampoco puede resolverse en este campo racional el problema de la medida de una magnitud cuando la magnitud considerada no contiene un número exacto de veces, no ya la unidad de medida, sino tampoco ninguna de sus partes alícuotas. Habrá necesidad en este caso de definir un nuevo número, que llamaremos **número irracional.**

Consideremos, para mayor sencillez, como magnitud, un segmento de recta (*fig.* 15). Sobre una semirrecta Ox puede fácilmente establecerse la existencia de puntos M tales que la medida de la longitud OM no pueda expresarse por un número racional. En otros términos, la longitud considerada no es *conmensurable* con la unidad elegida.

O M x

Fig. 15

A B' B B"

C D

Fig. 16

Sea una longitud AB inconmensurable con la unidad de longitud CD (*fig.* 16). Supongamos que se lleva sobre AB la unidad el mayor número de veces posible, midiéndose así una longitud AB′ menor que AB, que llamaremos a; $a + 1$ medirá una longitud AB″ mayor que AB; a y $a + 1$ son las medidas de AB con una aproximación de una unidad, la primera por defecto y la segunda por exceso. Dividamos la unidad CD en 10 partes iguales, por ejemplo, y tomemos la décima parte de CD como nueva unidad. Si medimos nuevamente con esta unidad, obtendremos las medidas de dos longitudes, una menor que AB y otra mayor; los dos números correspondientes serán la medida de AB con un error de $\frac{1}{10}$, el primero por defecto y el segundo por exceso; estos dos números serán $\frac{a'}{10}$ y $\frac{a'+1}{10}$.

Continuando en la misma forma, se obtendrán dos series de números:

(1) $$a, \frac{a'}{10}, \frac{a''}{100}, \ldots$$

(2) $$a+1, \frac{a'+1}{10}, \frac{a''+1}{100}, \ldots$$

Los números de la sucesión (1) van aumentando, y los de la sucesión (2) disminuyendo; cualquier número de la primera sucesión será menor que un número cualquiera de la segunda. Los números de la sucesión (1) son los valores aproximados por defecto, con un error menor que $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$, de la longitud inconmensurable AB. Análogamente, los números de la sucesión (2) son los valores aproximados por exceso, con un error menor de $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$, de dicha longitud inconmensurable.

Agrupemos en una primera clase E_1 todos los números racionales iguales o menores que uno de los números de la serie $a, \frac{a'}{10}, \frac{a''}{100}$, y en otra segunda clase E_2 los racionales iguales o mayores que uno de los números de la serie $a + 1, \frac{a'+1}{10}, \frac{a''+1}{100}$, etc.; el conjunto de los números racionales queda así distribuido entre estas dos clases, que tendrán las siguientes propiedades:

1.º Todo número de la clase E_1 es menor que cualquiera de la clase E_2;

2º Siempre es posible encontrar dos números, uno de cada clase, tales que su diferencia sea menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea;

3º No existe en la clase E_1 un número mayor que todos los restantes, ni en la clase E_2 un número menor que todos los restantes.

Se dice entonces que las dos clases E_1 y E_2 forman una cortadura, que define el número irracional que mide AB.

COMPARACIÓN. El número irracional así definido es mayor que cualquier número racional que pertenezca a la clase E_1 y menor que cualquier número racional que pertenezca a la clase E_2.

Dos números irracionales son iguales cuando están definidos por la misma cortadura; un número irracional será mayor que otro cuando exista por lo menos un número racional menor que el primero y mayor que el segundo.

OPERACIONES. Sean dos números irracionales a y b, y designemos por $E_{1,a}$ la clase de todos los números racionales menores que a, y por $E_{2,a}$ la clase de todos los números racionales mayores que a.

La cortadura $E_{1,b}$, $E_{2,b}$ definirá análogamente el número b. Si se incluye en una primera clase la suma de cualquier número de $E_{1,a}$ con cualquier número de E_{1b}, y en una segunda clase la suma de cualquier número de $E_{2,a}$ con cualquier número de $E_{2,b}$, se demuestra que así se obtiene una nueva cortadura que define la suma $a + b$.

De igual modo puede definirse el producto de un número irracional por un número entero y el producto de dos números irracionales.

La sustracción y la división se definen, como para los números enteros, como operaciones inversas de la suma y de la multiplicación.

Queda, pues, constituido un nuevo campo, que llamaremos de los **números reales,** y que incluye el campo anterior de los racionales.

Raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto. — $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ son números irracionales que pueden definirse por medio de dos sucesiones y una cortadura; por ejemplo, calculando $\sqrt{2}$ con un error menor de $\frac{1}{10}, \frac{1}{100} \ldots$, por exceso y por defecto, se tendrá

$$\begin{array}{l} 1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots; \\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots; \end{array}$$

El límite común de las dos sucesiones que cumplen las condiciones antes enunciadas es $\sqrt{2}$, y su cuadrado es 2.

Raíz m-ésima de un número irracional. — Como el número irracional está definido por dos sucesiones de números que cumplen las condiciones antes enunciadas, diremos que la raíz m^a de este número es el límite común hacia el cual tienden las raíces m^a de dos sucesiones de números que definen el número irracional. Se demuestra que estas dos sucesiones tienen un límite. y sólo uno.

Cálculo de radicales. — TEOREMA. *La raíz* m^a *de un producto de varios factores es igual al producto de las raíces* m^a *de cada uno de los factores.*

$$\sqrt[m]{A \cdot B \cdot C} = \sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} \cdot \sqrt[m]{C}$$

Para demostrar que los dos miembros son iguales, bastará demostrar que lo son sus potencias m^a.

La potencia m^a de $\sqrt[m]{A \cdot B \cdot C}$ es, por definición, A . B . C.

Por otra parte, $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} \cdot \sqrt[m]{C}$ es un producto de factores; para elevarlo a la potencia m, bastará elevar cada uno de los factores a dicha potencia (v. p. 14), lo que nos dará A . B . C.

OBSERVACIÓN. Supongamos que uno de los números A, B, C, ... sea la potencia m^a de un número racional o que contenga dicha potencia como factor; por ejemplo, sea $A = a^m$.

$$\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = a\sqrt[m]{B}.$$

Si $A = A' \cdot a^m$, $\sqrt[m]{AB} = \sqrt[m]{A'} \cdot \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{B} = a\sqrt[m]{A'B}.$

Esta transformación se llama **extraer un factor de un radical.** La operación contraria, es decir, **introducir un factor bajo el signo radical,** es también posible. Así $a\sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{a^m B}$.

APLICACIONES.

$$\sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5};\ \sqrt{20 \times 50} = 2 \times 5\sqrt{5 \times 2} = 10\sqrt{10}.$$

$$\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}.$$

Inversamente,

$$3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}\ ;\ a\sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

COROLARIO. *Para elevar un radical a la potencia* p, *se eleva a dicha potencia la cantidad subradical.*

Es decir, $(\sqrt[m]{A})^p = \sqrt[m]{A^p}$.

Es una consecuencia inmediata del teorema anterior, puesto que el primer miembro es el producto de p radicales del mismo índice, cada uno de ellos iguales a $\sqrt[m]{A}$.

TEOREMA. *La raíz* mª *del cociente de dos números es el cociente de las raíces* mª *de dichos números.*

Es decir $\sqrt[m]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}$.

Las dos expresiones consideradas son iguales, puesto que si se eleva cada una de ellas a la potencia m, se encontrará el mismo valor $\dfrac{A}{B}$, para la primera expresión, por la definición de la raíz m^a, y para la segunda, por lo establecido en la pág. 30.

OBSERVACIÓN. Si se considera una fracción $\dfrac{A}{\sqrt[m]{B}}$, cuyo denominador, que es raíz m^a de un número B, no es racional, puede reemplazarse por otra fracción cuyo denominador sea racional; para ello basta multiplicar los dos miembros de la fracción por $(\sqrt[m]{B})^{m-1}$ o $\sqrt[m]{B^{m-1}}$, y se obtendrá la fracción igual

$$\frac{A(\sqrt[m]{B})^{m-1}}{\sqrt[m]{B}(\sqrt[m]{B})^{m-1}} = \frac{A\sqrt[m]{B^{m-1}}}{(\sqrt[m]{B})^m} = \frac{A\sqrt[m]{B^{m-1}}}{B}.$$

EJEMPLO:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5};\ \frac{7}{\sqrt[3]{2}} = \frac{7\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Esta transformación presenta una gran ventaja cuando se quieren calcular las expresiones correspondientes con aproximaciones determinadas.

Puede también hacerse una transformación análoga para expresiones de la forma $\dfrac{A}{B+\sqrt{C}}$, $\dfrac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}}$, etc.

Así, para la expresión $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}}$, multiplicaremos los dos términos de la fracción por $2 - \sqrt{3}$, lo que dará

$$\frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3} = 4(2-\sqrt{3}).$$

Para la expresión $\dfrac{}{3-\sqrt{5}}$, se multiplicarán los dos términos de la fracción por $3 + \sqrt{5}$, y se obtendrá $\dfrac{5(3+\sqrt{5})}{4}$.

Para la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, se multiplicarán los dos términos de la fracción por $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; se obtendrá $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$, etc.

Las expresiones por las cuales se multiplican los dos términos de la fracción se llaman **conjugadas** del denominador.

TEOREMA. *La raíz de índice* p *de un radical se obtiene multiplicando el índice del radical por* p.

Es decir,

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[mp]{A}.$$

Para demostrarlo, se elevarán ambas expresiones a la potencia mp, teniendo en cuenta, para la primera expresión, que puede elevarse primeramente a la potencia p y después se elevará el resultado a la potencia m. Obtendremos A para las dos expresiones.

Así:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2}.$$

Inversamente, para el cálculo de las raíces, siempre se podrá considerar únicamente el caso en que los índices sean números primos:

$$\sqrt[15]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}.$$

OBSERVACIÓN. De lo que precede resulta que *puede multiplicarse o dividirse por un mismo número el índice de un radical y el exponente de la cantidad subradical sin que se altere el valor de la raíz.*

Es decir

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[mp]{A^p}.$$

En efecto, ya hemos visto que

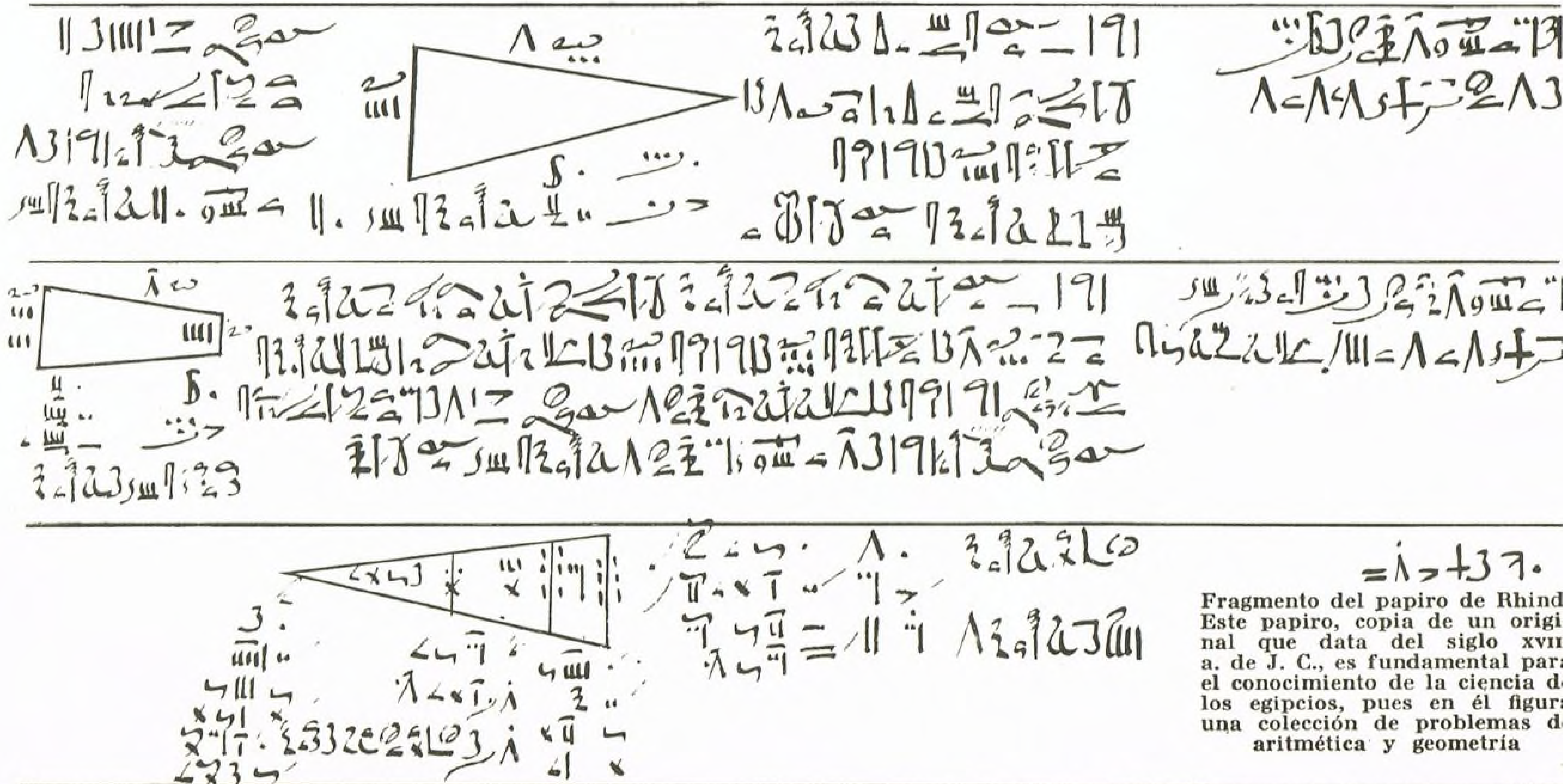
$$\sqrt[mp]{A^p} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{A^p}} = \sqrt[m]{A}.$$

Así

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2}.$$

Inversamente:

$$\sqrt[8]{7^4} = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7}.$$



Fragmento del papiro de Rhind. Este papiro, copia de un original que data del siglo XVIII a. de J. C., es fundamental para el conocimiento de la ciencia de los egipcios, pues en él figura una colección de problemas de aritmética y geometría

Cuadro de los cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas desde 1 hasta... con una aproximación de 0,001

NÚMEROS	CUADRADOS	RAÍCES CUADRADAS	CUBOS	RAÍCES CÚBICAS	NÚMEROS	CUADRADOS	RAÍCES CUADRADAS	CUBOS	RAÍCES CÚBICAS
1	1	1,000	1	1,000	48	2 304	6,928	110 592	3,634
2	4	1,414	8	1,260	49	2 401	7,000	117 649	3,659
3	9	1,732	27	1,442	50	2 500	7,071	125 000	3,684
4	16	2,000	64	1,587	51	2 601	7,141	132 651	3,708
5	25	2,236	125	1,710	52	2 704	7,211	140 608	3,733
6	36	2,449	216	1,817	53	2 809	7,280	148 877	3,756
7	49	2,646	343	1,913	54	2 916	7,348	157 464	3,780
8	64	2,828	512	2,000	55	3 025	7,416	166 375	3,803
9	81	3,000	729	2,080	56	3 136	7,483	175 616	3,826
10	100	3,162	1 000	2,154	57	3 249	7,550	185 193	3,849
11	121	3,317	1 331	2,224	58	3 364	7,616	195 112	3,871
12	144	3,464	1 728	2,289	59	3 481	7,681	205 379	3,893
13	169	3,606	2 197	2,351	60	3 600	7,746	216 000	3,915
14	196	3,742	2 744	2,410	61	3 721	7,810	226 981	3,936
15	225	3,873	3 375	2,466	62	3 844	7,874	238 328	3,958
16	256	4,000	4 096	2,520	63	3 969	7,937	250 047	3,979
17	289	4,123	4 913	2,571	64	4 096	8,000	262 144	4,000
18	324	4,243	5 832	2,621	65	4 225	8,062	274 625	4,021
19	361	4,359	6 859	2,668	66	4 356	8,124	287 496	4,041
20	400	4,472	8 000	2,714	67	4 489	8,185	300 763	4,062
21	441	4,583	9 261	2,759	68	4 624	8,246	314 432	4,082
22	484	4,690	10 648	2,802	69	4 761	8,307	328 509	4,102
23	529	4,796	12 167	2,844	70	4 900	8,367	343 000	4,121
24	576	4,899	13 824	2,885	71	5 041	8,420	357 911	4,141
25	625	5,000	15 625	2,924	72	5 184	8,485	373 248	4,160
26	676	5,099	17 576	2,962	73	5 329	8,544	389 017	4,179
27	729	5,196	19 683	3,000	74	5 476	8,602	405 224	4,198
28	784	5,292	21 952	3,037	75	5 625	8,660	421 875	4,217
29	841	5,385	24 389	3,072	76	5 776	8,718	438 976	4,236
30	900	5,477	27 000	3,107	77	5 929	8,775	456 533	4,254
31	961	5,568	29 791	3,141	78	6 084	8,832	474 552	4,273
32	1 024	5,657	32 768	3,175	79	6 241	8,888	493 039	4,291
33	1 089	5,745	35 937	3,208	80	6 400	8,944	512 000	4,309
34	1 156	5,831	39 304	3,240	81	6 561	9,000	531 441	4,327
35	1 225	5,916	42 875	3,271	82	6 724	9,055	551 368	4,344
36	1 296	6,000	46 656	3,302	83	6 889	9,110	571 787	4,362
37	1 369	6,083	50 653	3,332	84	7 056	9,165	592 704	4,380
38	1 444	6,164	54 872	3,362	85	7 225	9,220	614 125	4,397
39	1 521	6,245	59 319	3,391	86	7 396	9,274	636 056	4,414
40	1 600	6,325	64 000	3,420	87	7 569	9,327	658 503	4,431
41	1 681	6,403	68 921	3,448	88	7 744	9,381	681 472	4,448
42	1 764	6,481	74 088	3,476	89	7 921	9,434	704 969	4,465
43	1 849	6,557	79 507	3,503	90	8 100	9,487	729 000	4,481
44	1 936	6,633	85 184	3,530	91	8 281	9,539	753 571	4,498
45	2 025	6,708	91 125	3,557	92	8 464	9,592	778 688	4,514
46	2 116	6,782	97 336	3,583	93	8 649	9,644	804 357	4,531
47	2 209	6,856	103 823	3,609	94	8 836	9,695	830 584	4,547

CONSECUENCIA. La observación anterior permite reducir varios radicales al mismo índice.

Sean $\sqrt[4]{2}, \sqrt[2]{3}, \sqrt[8]{7}$.

Se puede tomar como índice común un múltiplo de los índices de los radicales considerados; por ejemplo, el mínimo común múltiplo de estos radicales.

Podemos tomar como índice común 8. Escribiremos los radicales

$$\sqrt[8]{2^2}, \quad \sqrt[8]{3^4}, \quad \sqrt[8]{7}.$$

Se utilizará esta transformación para efectuar el producto de varios radicales o el cociente de dos radicales.

Exponentes fraccionarios. — Si A es un número cualquiera y p y q dos números enteros aritméticos que no sean nulos, representaremos $\sqrt[m]{A^n}$ por la expresión $A^{\frac{n}{m}}$ ($\frac{n}{m}$ es un exponente fraccionario del número A). Admitiremos que $\sqrt[1]{A} = A$ y que la notación subsiste siempre si $m = 1$.

Obsérvese que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$, se tendrá $A = A^{\frac{n'}{m'}}$.

En efecto, $A^{\frac{n}{m}} = A^{\frac{nm'}{mm'}}$ y $A^{\frac{n'}{m'}} = A^{\frac{n'm}{mm'}}$.

Ahora bien, $\sqrt[mm']{A^{nm'}} = \sqrt[mm']{A^{n'm}}$, puesto que $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $nm' = mn'$.

La simplificación de un radical se reduce a la de una fracción, y la reducción de varios radicales al mismo índice, a la reducción de varias fracciones al mismo denominador. Además, los números afectados de exponente fraccionario siguen las reglas establecidas para los números afectados de exponentes enteros.

Así, se demostrará fácilmente que

$$A^{\frac{p}{q}} \times A^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}.$$

Análogamente,

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = A^{\frac{pp'}{qq'}}.$$

El número concreto

Definiciones: números concretos, complejos e incomplejos. Reducción de un número incomplejo a otro de orden inferior o superior. Reducción de números incomplejos a complejos, y recíprocamente. Operaciones con números concretos: Adición de complejos. Sustracción de complejos. Multiplicación de un complejo por un número entero. División de un número complejo por un número entero. — *Problemas*

Definiciones: números concretos, complejos e incomplejos. — En los capítulos precedentes se han estudiado los números y las operaciones que con ellos se efectúan, prescindiendo en absoluto de la clase de objetos a que pudieran referirse; sus propiedades y las reglas operatorias alcanzaban así la máxima generalidad.

$$3 \times 5 = 15 \quad ó \quad 7 + 2 = 9,$$

tienen validez universal.

Consideremos ahora números como 7 manzanas, 2 naranjas; en estos números, además de su valor aritmético puro, se hace referencia al objeto o magnitud que representan en concreto; esta clase de números se denominan *números concretos*.

Es evidente que la suma 7 manzanas + 2 naranjas carece de sentido, puesto que son números distintos; para que puedan sumarse los números concretos es necesario que se refieran a objetos de la misma clase.

Se llaman *números homogéneos* los números concretos que se refieren a objetos de la misma clase, y *números heterogéneos* los que se refieren a objetos de clase distinta. La suma 5 naranjas + 2 naranjas = 7 naranjas es entonces posible, puesto que se trata de números homogéneos.

Los números homogéneos, aun refiriéndose a objetos de la misma clase, pueden expresar unidades distintas dentro de dicha clase o una sola unidad. Así, el número concreto 365 días expresa una cantidad de tiempo en una sola unidad, días, mientras que el concreto 11 meses, 4 semanas, 2 días, 23 horas, 60 minutos expresa la misma cantidad de tiempo, pero los números 11, 4, 2, 23 y 60 se refieren a unidades distintas.

DEFINICIONES. **Número complejo** *es el número concreto compuesto de unidades distintas de la misma especie.*

Número incomplejo *es el número concreto que está referido a una sola unidad.*

Reducción de un número incomplejo a otro de orden inferior o superior. — REGLA. *Para reducir un incomplejo a otro de orden inferior o superior se multiplica o divide, respectivamente, por el número que expresa las veces que la unidad de la especie dada contiene o está contenida en aquella a la que se quiere reducir.*

En efecto, si el incomplejo dado es N y la unidad de N contiene la nueva unidad *m veces*, bastará multiplicar N por el número abstracto m, obteniéndose un número que, aún siendo m veces mayor, está referido a una unidad m veces menor.

Análogo razonamiento nos conduce a la operación inversa, es decir, a la obtención de un incomplejo de especie superior, dividiendo el número L por el abstracto m, que indica las veces que la unidad de L está contenida en la nueva unidad.

Si, por ejemplo, se quiere reducir 25 años a meses, se tendrá

N años = N × 12 meses; en este caso 25 años = 25 × 12 = = 300 meses.

Si ambas unidades, la antigua y la nueva, no fueran consecutivas, se haría la reducción pasando por las unidades intermedias para ver las veces que la unidad antigua contiene o está contenida en la dada.

Así, por ejemplo, si se trata de reducir M siglos a días, tendríamos, para calcular m; m = 100 años × 12 meses = (100 × 12) . 30 días = = (100 × 12) × 30 = 36 000 días, es decir,

M siglos = M × 36 000 días.

Reducción de números incomplejos a complejos, y recíprocamente. — 1º Para transformar un incomplejo en complejo, el incomplejo dado tendrá que expresarse en forma fraccionaria, ya que si el incomplejo es entero contendrá siempre un número entero de cualquier orden inferior, y sólo podrá expresarse en forma incompleja. Dado el incomplejo en forma fraccionaria o decimal, la operación que consiste en reducirlo a un complejo de orden superior o inferior se llama *valuación de quebrados.*

Para ello se obtienen los números enteros, si es que los hay, que representarán las unidades enteras de su orden, y la fracción complementaria se expresará en incomplejo del orden inferior; los enteros de este nuevo incomplejo representarán las unidades de este segundo orden, y la fracción complementaria el incomplejo del orden siguiente; se continuará así hasta obtener un cociente exacto o hasta llegar al último orden inferior.

REGLA. *Para transformar un incomplejo en complejo de órdenes inferiores se obtienen los enteros del número dado, que representarán los enteros del orden del incomplejo dado; la fracción complementaria se reducirá a incomplejo del orden inferior, cuyos enteros constituirán las unidades del segundo orden, y así se continuará hasta llegar a un cociente exacto o al último orden.*

Por ejemplo, convertir $\frac{29}{4}$ de día. La operación se dispondrá así

```
29 | 4
 1 |-----------------
×24| 7 días 6 horas
---
24
 0
```

$\frac{29}{4}$ de día = 7 días, 6 horas.

Para reducir un incomplejo a complejo de órdenes superiores se divide por el número de veces que está contenido en la especie inmediatamente superior; el resto representará el número de unidades del orden dado y el cociente las del orden superior; se procede análogamente con el cociente, y se continúa de igual modo hasta llegar al orden deseado.

Por ejemplo, convertir 9 643 segundos en horas, minutos y segundos:

```
9643 s | 60
 364   |--------
  43 s | 160 m | 60
       |  40 m |----
               | 2 h
```

9 643 s valen $\frac{9\,643}{60}$ = 160 m + 43 s.

160 m valen $\frac{160}{60}$ = 2 h + 40 m.

9 643 s = 2 h, 40 m, 43 s.

2º Para convertir un complejo en incomplejo, distinguiremos según éste sea de especie inferior o superior.

REGLA: *Para reducir un complejo a incomplejo de orden inferior se multiplican las unidades de orden superior de aquél por las veces que una de ellas contiene a la inmediata inferior, agregando a este producto las unidades de este orden que haya en el número dado; se hace lo mismo con el número que resulta, prosiguiendo así hasta llegar al orden inferior que determina el incomplejo buscado.*

Si se trata de transformar el complejo en incomplejo de orden superior o intermedio, una vez obtenido el incomplejo de orden inferior, habremos obtenido el incomplejo del orden deseado si lo dividimos por el número de veces que este orden esté contenido en el superior o en el que se quiera; la transformación se reduce en este caso a poner el incomplejo de orden inferior, obtenido por el caso anterior, por denominador tantas veces como este orden esté contenido en el orden superior o en el deseado.

EJEMPLO. *Convertir 8° 42′ 53″ en segundos.*

8° valen 8° × 60′ = 480′ + 42′ = 522′

522′ valen 522′ × 60″ = 31 320″ + 53″ = 31 373″

8° 43′ 53″ = 31 373″.

Cuando se trata de números métricos, las transformaciones anteriores se simplifican notablemente, puesto que los órdenes varían de 10 en 10 para las longitudes, capacidades y pesos, de 100 en 100 para las superficies y de 1 000 en 1 000 para las cúbicas. Las reglas, pues, pueden deducirse fácilmente.

Operaciones con números concretos. — 1º **Adición de complejos.** — *Para sumar números complejos se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades del mismo orden; se traza una línea horizontal y se suman los órdenes inferiores, reservando de cada suma las unidades que resulten de orden superior para sumarlas a las de su especie, y escribiendo sólo las restantes.*

La operación se dispone así. EJEMPLO: *Sea la suma de tres ángulos cuyas medidas son, respectivamente, 60° 42′ 15″, 32° 51′ 28″* y *48° 36′ 40″.*

Se suman las unidades de los diferentes órdenes convirtiendo, cuando sea necesario, los resultados obtenidos en unidades de órdenes superiores.

```
 60°  42′  15″
 32°  51′  28″
 48°  36′  40″
---------------
140° 129′  83″ = 142° 10′ 23″.
```

2º **Sustracción de complejos.** — Análogamente, se tiene la siguiente regla: *Para restar complejos se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de forma que se correspondan las unidades del mismo orden, empezando la resta por el orden inferior. Si de algún orden del minuendo no se puede restar su correspondiente del sustraendo, se toma una unidad del orden superior y se descompone en unidades del orden que falta, teniendo cuidado de añadir una unidad de este orden del sustraendo para que la diferencia no se altere.*

EJEMPLO. *¿Cuánto tiempo ha marchado una persona que ha salido a las 7 h 34 m 21 s y ha llegado a su destino a las 10 h 45 m 52 s?*

```
10 h 45 m 52 s
 7 h 34 m 21 s
--------------
 3 h 11 m 31 s
```

Tiempo = 10 h 45 m 52 s — 7 h 34 m 21 s.

¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde las 8 h 36 m 35 s a las 15 h 25 m 32 s?

```
14 h 84 m 92 s
15 h 25 m 32 s
 8 h 36 m 35 s
--------------
 6 h 48 m 57 s
```

Tiempo transcurrido = 15 h 25 m 32 s — — 8 h 36 m 35 s.

Como no se puede restar 35 s de 32 s ni 36 m de 25 m, se sustrae 1 m del número mayor y se añaden 60 s; después, se sustrae 1 h y se añaden 60 m. El número mayor se convierte, sin cambiar de valor, en 14 h 84 m 92 s, y la substracción puede efectuarse como en el caso anterior.

3.° **Multiplicación de un complejo por un número entero.** — EJEMPLO. *Un reloj atrasa cada día 2 m 49 s. ¿Cuánto se habrá atrasado al cabo de 15 días?*

```
  2 m  49 s
  × 15
-----------
      245
      49
-----------
 30 m 735 s
ó 42 m  15 s
```

Retraso del reloj = 2 m 49 s × 15.

Se multiplican sucesivamente por 15 el número de segundos y el número de minutos.

49 s × 15 = 735 s ó 12 m 15 s;
2 m × 15 = 30 m

El retraso del reloj será:
30 m + 12 m 15 s, o sea 42 m 15 s.

4º **División de un número complejo por un número entero.** — EJEMPLO. *Dividir 38 h 25 m 17,6 s en 12 partes iguales.*

Cada parte valdrá:

$$\frac{38 \text{ h } 25 \text{ m } 17{,}6 \text{ s}}{12}.$$

El procedimiento de división es el que se indica a continuación:

```
38 h   25 m    17,6 s | 12
 2 h ó 120 m          |---------------
                        3 h 12 m 6,4 s
      ----
      145 m
        1 m ó   60 s
               -----
               77,6 s
                5 6
                 8
```

El cociente es 3 h 12 m 6,4 s, con una aproximación de una décima de segundo por defecto. El resto es 0,8 s.

OBSERVACIÓN. El dividendo y el divisor pueden ser dos números complejos; este caso se presenta, por ejemplo, cuando se busca el cociente

de dos arcos. Para obtenerlo, se convertirán los dos números en unidades del orden menos elevado de los dos números, y se efectuará la división de los números obtenidos.

PROBLEMAS

1º *Convertir 28º 34′ 27″ en grados centesimales.*

Convirtamos primeramente el número dado en grados y fracción decimal de grado:

$$28^{\circ}\ 34'\ 27'' = 28^{\circ} + \frac{34}{60} + \frac{27}{3\,600}$$

$$= 28^{\circ} + \frac{2\,067}{3\,600} \text{ de grado sexagesimal}$$

$$= 28^{\circ},\ 57\,416 \text{ con un error de } 0{,}000\,01.$$

Como 9º valen 10 gr, 1º vale $\frac{9}{10}$ de grado centesimal.

El número buscado será $\frac{28^{\circ},57\,416 \times 10}{9} = 31{,}749$ gr.

2º *Convertir 72,482 5 gr en grados, minutos y segundos sexagesimales.*

Convirtamos primeramente el número dado en grados y fracciones decimales de grado sexagesimal:

$$72{,}482\,5 \text{ gr valen } \frac{72{,}482\,5 \times 9}{10} = 65^{\circ},234\,25.$$

Convirtamos 0º,234 25 en minutos y segundos.

Se tendrá

$$0^{\circ},234\,25 = 60' \times 0{,}234\,25 = 14'\,055$$

$$0',055 = 60'' \times 0{,}055 = 33'',3.$$

El número buscado será 65º 14′ 3″,3, con un error de una décima de segundo.

3º *La diferencia de latitud entre dos ciudades M y B es de 2º 11′ 23″, siendo la latitud de M 48º 50′ 49″. ¿Cuál será la latitud de B? ¿Cuál es la distancia, en kilómetros, entre estas dos ciudades, sabiendo que están situadas en el mismo meridiano?*

Latitud de B = 48º 50′ 49″ + 2º 11′ 23″ = 51º 2′ 12″.

Convirtamos 2º 11′ 23″ en fracción decimal de grado sexagesimal.

$2^{\circ}\ 11'\ 23''$ valen $2^{\circ} + \frac{11}{60} + \frac{23}{3\,600} = 2^{\circ},1839$, con un error de 0,0001 por defecto.

Como 360º de meridiano tienen 40 000 km de longitud, se tendrá:

$$\text{Distancia buscada} = \frac{40\,000 \times 2{,}1839}{360} = 242{,}9 \text{ km por defecto.}$$

4º *El meridiano de Greenwich está situado a 2º 20′ 15″ al oeste del meridiano de una ciudad S. ¿Cuál es la diferencia de horas (tiempo medio) entre las dos ciudades?*

2º 20′ 15″ equivalen a 2º,337 5.

$$\text{Diferencia de horas} = \frac{24 \text{ h} \times 2{,}337\,5}{360}, \text{ o sea 9 m 28 s.}$$

Sistema métrico

Reseña histórica. Tabla de los múltiplos y de los submúltiplos decimales. Medidas efectivas y medidas imaginarias. — Medidas de longitud: Unidad principal. Múltiplos y submúltiplos del metro. Numeración de los números que expresan unidades de longitud. Medidas marinas. Otras medidas de longitud. — Medidas de superficie: Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado. Numeración de los números que expresan las unidades de superficie. Medidas de superficie o medidas agrarias. — Medidas de volumen: Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico. Numeración de los números que expresan unidades de volumen. Cubicación de maderas. Numeración de los números que expresan unidades de cubicación. Medidas de capacidad para los líquidos y cereales. Unidad principal. Múltiplos y submúltiplos del litro. Instrumentos de medida. Numeración de los números que expresan unidades de capacidad. — Medidas de ángulos: Submúltiplos del ángulo recto. — Unidades de masa: Múltiplos y submúltiplos del kilogramo y del gramo. Numeración de los números que expresan las unidades de masa. — Unidades de tiempo: Múltiplos del segundo. Otras unidades de tiempo. — Sistemas monetarios: Unidades monetarias actuales. — Sistema inglés de medidas: Medidas de longitud. Medidas de superficie. Medidas cúbicas. Medidas de capacidad. Medidas de peso. Medidas monetarias

El **sistema métrico** o **sistema legal de pesos y medidas** es el conjunto de unidades establecidas por la ley para medir las longitudes, superficies, volúmenes, masas y monedas.

Antes de adoptarse el sistema métrico, las antiguas medidas no eran fijas, sino que variaban según las regiones, y las unidades, que no estaban definidas rigurosamente variaban con el tiempo. No estaban relacionadas de manera simple y uniforme, por lo que los cálculos que había que efectuar con los números correspondientes eran complicados.

El sistema métrico, en cambio, es *estable* y *uniforme;* las unidades de la misma especie se deducen unas de otras según la misma ley. Además es *sencillo,* por ser *decimal.*

Reseña histórica. — El 8 de mayo de 1790, la Asamblea Constituyente francesa aprobó un proyecto de unificación de medidas y encargó a la Academia de Ciencias que buscase un sistema sencillo.

La comisión nombrada por la Academia estaba integrada por Borda, Condorcet, Lagrange, Lavoisier y Tillet, y decidió el empleo de la escala decimal para las nuevas medidas. Una segunda comisión, de la que formaron parte Borda, Condorcet, Lagrange, Laplace y Monge, decidió tomar la unidad de longitud como base del nuevo sistema, debiendo ser esta unidad una fracción simple de la longitud del meridiano terrestre.

El 30 de marzo de 1791, la Asamblea Nacional adoptó las anteriores conclusiones y encargó a la Academia que midiera el arco del meridiano terestre comprendido entre la torre de Dunquerque y el castillo de Montjuich, en Barcelona. Fueron los científicos franceses Delambre y Mechain, a los que se unió el general español Gabriel de Ciscar, los que efectuaron la medida de dicho arco de meridiano. También se midió el grado del meridiano terrestre en el Perú, medida efectuada por los franceses La Condamine y Bouguer, y los españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa.

El 18 de germinal del año III, la Convención francesa decretó la adopción, como unidad de longitud, de la diezmillonésima parte de la longitud del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, y el 4 de mesidor del año VII (22 de junio de 1799) se depositaron en los Archivos de la República Francesa dos patrones; uno era una regla de platino, cuya longitud a 0º C era el metro legal, y la otra un cilindro de platino cuya masa se fijó como unidad legal de masa (kilogramo).

El sistema métrico fue introduciéndose lentamente en las costumbres. El 4 de julio de 1837, una nueva ley promulgó el sistema métrico obligatorio para toda Francia a partir del 1 de enero de 1840. En España se aceptó el sistema métrico decimal en 1837 y fue declarado obligatorio en el año 1860. El patrón del metro se conservó en el archivo de Simancas, y en la actualidad se encuentra en el Instituto Geográfico y Estadístico de Madrid.

En 1870, y después, en 1872, se reunió en París la Comisión Internacional del Metro, integrada por representantes de veinticuatro Estados, y decidió la creación de una Oficina Internacional de Pesos y Medidas, encargada de la fabricación y conservación de los prototipos internacionales de medidas.

El 1 de marzo de 1875 se reunió en París la Conferencia Diplomática del Metro, en la que participaron representantes de veinte Estados. En dicha Conferencia se estableció definitivamente la *convención* que regularía el funcionamiento de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas y se aceptó el ofrecimiento del Gobierno francés, que puso a la disposición de un Comité Internacional el pabellón de Breteuil, situado en Sèvres, a la entrada del parque de Saint-Cloud. La instalación finalizó a finales de 1878. La Oficina Internacional, subvencionada a partes iguales por veinte Estados, está encargada de la conservación, comparaciones y verificaciones de los prototipos del metro y del kilogramo, así como de las comparaciones periódicas de los patrones nacionales con el prototipo internacional, de la graduación y de la comparación de las reglas geodésicas.

En 1881, un congreso científico celebrado en París con objeto de fijar las unidades mecánicas y físicas decidió que se derivaran de las unidades fundamentales del sistema métrico, creándose así el sistema C. G. S. (v. MECÁNICA, p. 217).

El sistema métrico ha sido objeto de ampliaciones posteriores. El sistema M. T. S., cuyas unidades principales son el *metro,* la *tonelada* y el *segundo,* es el que mejor responde a las necesidades de la industria actual, y define todavía legalmente las unidades de medida de ciertas magnitudes no consideradas anteriormente. También se acepta el sistema de J. Giorgi, cuyas unidades son el *metro,* el *kilogramo* y el *segundo,* sistema que se indica abreviadamente por las iniciales M. K. S.

Además de las **unidades principales** utilizadas en las medidas legales para las diferentes magnitudes, se utilizan sus múltiplos y sus submúltiplos decimales, que constituyen las **unidades secundarias.** Estas unidades se designan por medio del nombre de la unidad principal correspondiente y de prefijos, que son los siguientes y que se colocan delante del nombre de la unidad.

Tabla de los múltiplos y submúltiplos decimales

PREFIJOS	SÍMBOLO	FACTOR por el que está multiplicada la unidad		
Mega	M	10^6	ó	1 000 000
Hectokilo	hk	10^5	—	100 000
Miria	M	10^4	—	10 000
Kilo	K	10^3	—	1 000
Hecto	H	10^2	—	100
Deca	D	10^1	—	10
... ...	... ...	... ...	...	... ...
Deci	d	10^{-1}	ó	0,1
Centi	c	10^{-2}	—	0,01
Mili	m	10^{-3}	—	0,001
Decimili	dm	10^{-4}	—	0,000 1
Centimili	cm	10^{-5}	—	0,000 01
Micro	μ	10^{-6}	—	0,000 001

Medidas efectivas y medidas imaginarias. — Se llaman **medidas efectivas** las que existen materialmente, como el metro, el decámetro, el decímetro, el litro, etc. Se llaman **medidas imaginarias** las que no están representadas por un instrumento de medida, como el kilómetro, el metro cuadrado, etc.

Medidas de longitud

Unidad principal. — *La* **unidad principal de longitud** *es el* **metro.** *El metro es la longitud, a 0° centígrados del prototipo internacional de platino iridiado (platino 90, iridio 10) que fue sancionado por la Conferencia General de Pesos y Medidas, celebrada en París en 1889, y que fue depositado en el pabellón de Breteuil, en Sèvres.*

Modernamente, la Conferencia Internacional de Pesos y Medidas, celebrada en París, en 1960, adoptó la siguiente definición del metro, que reemplaza con mayor precisión e invariabilidad la del prototipo de Sèvres: *El metro es igual a 1 650 763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación anaranjada del criptón 86.*

Cuando se estableció el sistema métrico, se decidió, después de las medidas efectuadas por Delambre y Méchain, tomar como longitud del meridiano terrestre 20 522 960 toesas, tomándose como longitud del metro $\frac{20\,522\,960}{40\,000\,000}$ = 0,513 074 toesas (la toesa era la antigua medida de longitud).

Más tarde, merced a mejores instrumentos y a la serie de experiencias hechas en diferentes meridianos de la Tierra, se consiguió una mayor precisión para la medida del meridiano, encontrándose una longitud algo mayor, de forma que el metro patrón ya no correspondía a la 40 000 000ª parte del meridiano. Como era imposible cambiar la longitud del patrón adoptado porque entonces dicha longitud variaría en función del progreso de la ciencia, se fijó de una vez para siempre la longitud del metro patrón, que es sensiblemente igual a la 40 000 000ª parte de la longitud del meridiano; la longitud del metro patrón es inferior en 0,2 mm. a la 40 000 000ª parte del meridiano terrestre, por lo cual el error que se comete tomando como longitud del meridiano 40 000 000 de metros es insensible.

Múltiplos y submúltiplos del metro

	NOMBRES	SÍMBOLO	VALORES
Múltiplos	Megámetro	Mm	1 000 000 m
	Miriámetro	mam	10 000 m
	Kilómetro	Km	1 000 m
	Hectómetro	Hm	100 m
	Decámetro	Dm	10 m
	Metro (1)	m	**Unidad fundamental**
Submúltiplos	Decímetro	dm	10^{-1} ó 0,1 m
	Centímetro (2)	cm	10^{-2} — 0,01 m
	Milímetro	mm	10^{-3} — 0,001 m
	Micrón	μ	10^{-6} — 0,000 001 m
	Milimicrón	mμ	10^{-9} — 0,000 000 001 m
	Angstrœm	A	10^{-10} — 0,000 000 000 1 m

(1) Base del sistema M. T. S.
(2) Base del sistema C. G. S.

Numeración de los números que expresan unidades de longitud. — Las unidades de longitud aumentan o disminuyen de 10 en 10, es decir, que se ajustan a la *numeración decimal;* basta, pues, una cifra para expresar unidades de diferentes órdenes. Los números que expresan longitudes se leen y se escriben como los números enteros y decimales.

Medidas marinas. — En geografía y en la marina se utilizan:

1° La *milla marina*, que es la longitud media del minuto sexagesimal de meridiano, y que vale $\frac{40\,000\,000}{360 \times 60}$, o sea 1 852 m (la milla marina inglesa vale 1 855 m);

2° La *legua antigua* o 25ª parte de un grado de meridiano. Como la longitud de un grado de meridiano es $\frac{40\,000\,000}{360} = 111\,111{,}111$ m, la legua antigua vale, por lo tanto, $\frac{111\,111{,}11 \text{ m}}{25} = 4\,444{,}444$ m;

3° La *legua marina*, o 20ª parte de un grado de meridiano; su longitud es $\frac{111\,111{,}11 \text{ m}}{20} = 5\,555{,}55$ m.;

4° El *nudo marino* (1) que es la $\frac{1}{120}$ de la milla marina. Representa la longitud de medio segundo de meridiano, puesto que la milla marina es la longitud de un minuto, y su valor es $\frac{1\,852}{120} =$ $= 15{,}43$ m;

5° La *braza*, que vale 5 pies ó 1,624 m. La *braza inglesa (fathom)* vale 1 829 m;

6° El *cable de las cartas marítimas*, que vale 12 nudos marinos, o sea 185,2 m. El *cable de 120 brazas* vale 194,88 m.

Otras medidas de longitud. — En física, se emplean:

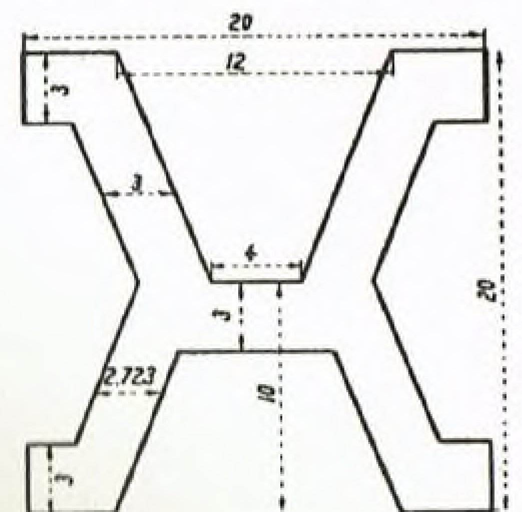
1° El *cuadrante* (cuarto del meridiano terrestre) que vale 10^7 m;

2° El *angstrœm*, que vale una diezmillonésima de milímetro, o sea 10^{-10} metros, y se utiliza para la medida de las longitudes de onda.

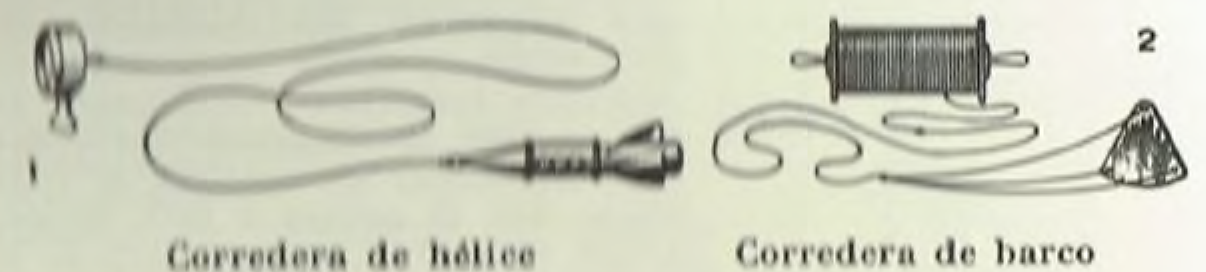
Para las distancias enormes, que aparecen en astronomía, se utilizan en ciertos casos:

1° El *año luz*, que es el trayecto que recorrería la luz durante un año, aproximadamente 9,46 billones de kilómetros;

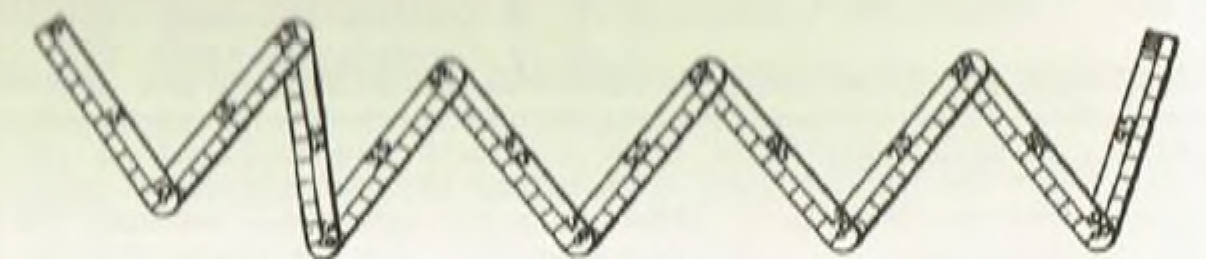
2° El *parsec*, que es la distancia desde la que se vería el radio de la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol bajo un ángulo de un segundo, y que vale 3,26 años luz, aproximadamente, ó $30{,}84 \times 10^{12}$ kilómetros.

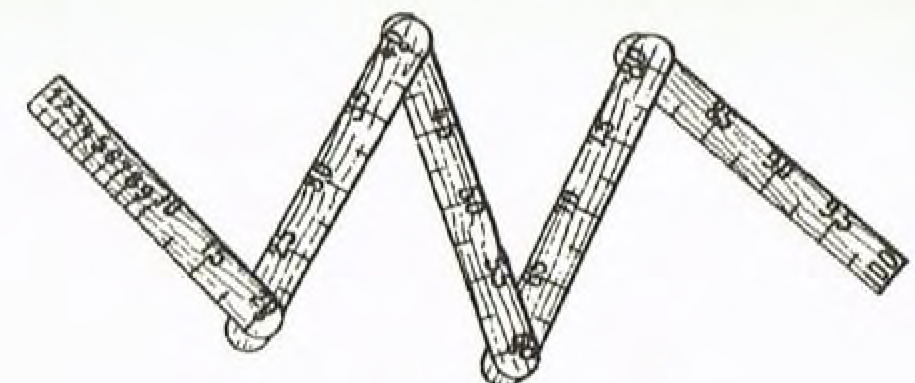


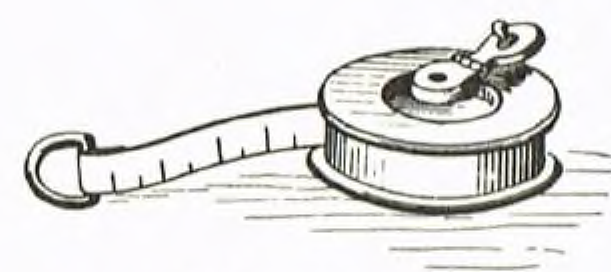
Sección del metro internacional
(*Doc. Oficina Intern. de Pesos y Medidas*)



Corredera de hélice — Corredera de barco


Metro de mecánico


Metro de carpintero


Metro de cinta

Medidas de superficie

La **unidad principal** de superficie es el **metro cuadrado,** que es la superficie de un cuadrado que tiene 1 metro de lado.

---

(1) El *nudo* es la unidad que se utiliza para indicar la velocidad de los navíos y el nombre recuerda la forma en que en otras épocas se medía dicha velocidad con la *corredera.* En efecto, este aparato estaba primitivamente constituido por una línea corredera, en la que se hacían nudos para señalar las distancias, y a cuya extremidad llevaba una pequeña pieza triangular de madera, que arrojada al agua señalaba, aproximadamente, el lugar de caída mientras el barco se alejaba; entonces se contaba el número de nudos que pasaba por la mano del operador durante 30 segundos.
Si en medio minuto pasaba un nudo, en un minuto pasarían dos, y en una hora 120, es decir, una milla marina. No obstante, suele tenerse en cuenta el arrastre de la corredera por la línea. Si se dice que un navío hace 25 nudos, equivale a decir que recorre 25 millas marinas por hora. En realidad, el nudo es una unidad de velocidad.
En la actualidad se utiliza la corredera de hélice, que permite la lectura directa, sobre un cuadrante, del número de millas recorridas, pero la velocidad se estima más frecuentemente por el número de revoluciones de la hélice.

Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado:

	Nombres	Símbolos	Valores
Múltiplos	Kilómetro cuadrado ...	Km^2	1 000 000 m^2
	Hectómetro » ...	Hm^2	**10 000 m^2**
	Decámetro » ...	Dm^2	100 m^2
	Metro » ...	m^2	1 m^2
Sub-múltiplos	Decímetro » ...	dm^2	0,01 m^2
	Centímetro » ...	cm^2	0,000 1 m^2
	Milímetro » ...	mm^2	0,000 001 m^2

Ninguna de estas medidas es efectiva; las longitudes se miden y las superficies se calculan.

Cada unidad de superficie equivale a 100 unidades inmediatamente inferiores.

Por ejemplo, un decámetro cuadrado vale 100 m^2.

En efecto, si se considera un cuadrado que tenga 10 m de lado, se verá inmediatamente que puede dividírsele en 100 m^2; para ello basta dividir los lados en 10 partes iguales y unir por rectas paralelas los puntos de división correspondientes (*fig.* 17).

Fig. 17

Numeración de los números que expresan las unidades de superficie. — Como las unidades de superficie aumentan o disminuyen de 100 en 100, se requieren dos cifras para representar las unidades de cada orden. Así, el número 3 Dm^2, 25 m^2, 4 dm^2, 35 mm^2, se escribe, tomando el metro cuadrado por unidad: 325,040 035 metros cuadrados.

Inversamente, el número 3 005,450 34 m^2 se lee: 30 Dm^2, 5 m^2, 45 dm^2, 3 cm^2, 40 mm^2.

Medidas de superficie o medidas agrarias. — Para evaluar la superficie de los terrenos se designan por nombres especiales ciertas unidades de superficie.

Nombres	Símbolos	Valores
Hectárea	ha	1 Hm^2 ó 100 a
Área	a	1 Dm^2 — 100 m^2
Centiárea	ca	1 m^2 — 0,01 a

Estas unidades aumentan o disminuyen de 100 en 100.

Medidas de volumen

La **unidad principal** de volumen es el **metro cúbico,** que es un cubo cuya arista tiene un metro de longitud.

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico.

	Nombres	Símbolos	Valores
Múltiplo	Kilómetro cúbico	Km^3	1 000 000 000 m^3
	Metro »	m^3	1 m^3
Sub-múltiplos	Decímetro »	dm^3	0,001 m^3
	Centímetro »	cm^3	0,000 001 m^3
	Milímetro »	mm^3	0,000 000 001 m^3

Ninguna de estas medidas es efectiva.

Cada unidad de volumen vale 1 000 veces la unidad inmediatamente inferior.

Por ejemplo, 1 m^3 vale 1 000 dm^3. En efecto, cada cara del metro cúbico vale 1 m^2 ó 100 dm^2. Sobre cada decímetro cuadrado se puede colocar un decímetro cúbico, formándose así una capa de 100 dm^3 y para formar el metro cúbico pueden sobreponerse 10 capas idénticas. Por consiguiente, contendrá 1 000 dm^3 (*fig.* 18).

Numeración de los números que expresan unidades de volumen. — Como las unidades cúbicas aumentan o disminuyen de 1 000 en 1 000, son necesarias tres cifras para expresar el número de las unidades de cada orden.

Así, el número 45 m^3, 24 dm^3, 532 cm^3 se escribe, tomando como unidad el metro cúbico: 45,024 532 m^3.

Inversamente, el número 324,004 028 35 m^3 se lee: 324 m^3, 4 dm^3, 28 cm^3, 350 mm^3.

Cubicación de maderas. — Para la cubicación de maderas se designan con nombres especiales ciertas unidades de volumen.

El *estéreo,* que se emplea en los bosques se compone de un estribo horizontal A y de cuatro montantes verticales C, sostenidos por apoyos o traviesas B, cuyas bases distan un metro de las de los montantes (*fig.* 19). Si los troncos tienen un metro de longitud, bastará con formar un montón de 1 m de altura entre los montantes para obtener un estéreo. Si su longitud es mayor o menor que un metro, podrá calcularse fácilmente la altura que deberá tener un montón para obtener un estéreo. El estéreo se designa por *st.*

Por ejemplo, si la longitud de los troncos es 1,20 se tendrá:
Superficie del montón en la base = 1,20 × 1 = 1,20 m^2.

La altura x será: $x = \dfrac{1}{1,20} = 0,833$ m.

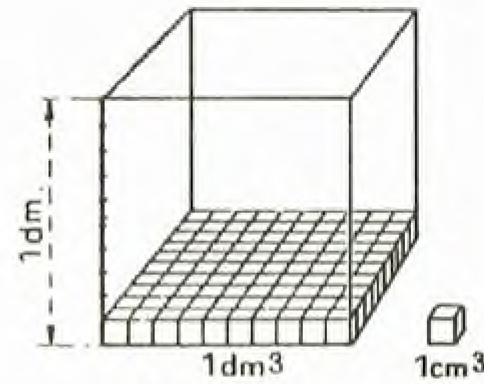


Fig. 18

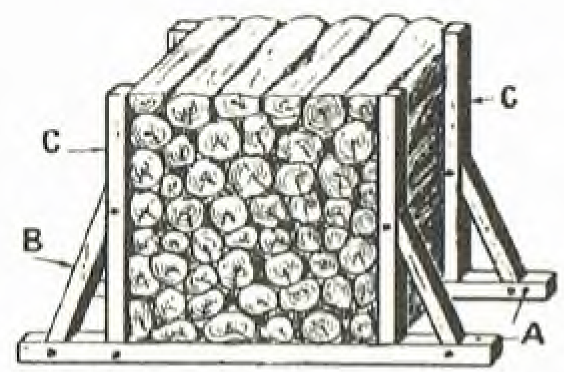


Fig. 19

Numeración de los números que expresan unidades de cubicación. — Las unidades de cubicación aumentan o disminuyen de 10 en 10, por lo que bastará una sola cifra para representar las unidades de cada orden, y los números correspondientes se escribirán como los decimales.

Observación. Se pasa fácilmente de las unidades cúbicas a las de cubicación de maderas, e inversamente. Así, 1 m^3 vale 1 estéreo.

Medidas de capacidad para los líquidos y cereales. Unidad principal. — La **unidad principal** de las medidas de capacidad es el **litro.**

El litro es el volumen que ocupa una masa de agua pura a la densidad de 4° centígrados, a 760 mm. de presión y que pese 1 kg.

El litro equivale exactamente a 1,000 028 dm^3. Antiguamente correspondía exactamente al decímetro cúbico y, por consiguiente, dependía de la longitud del metro.

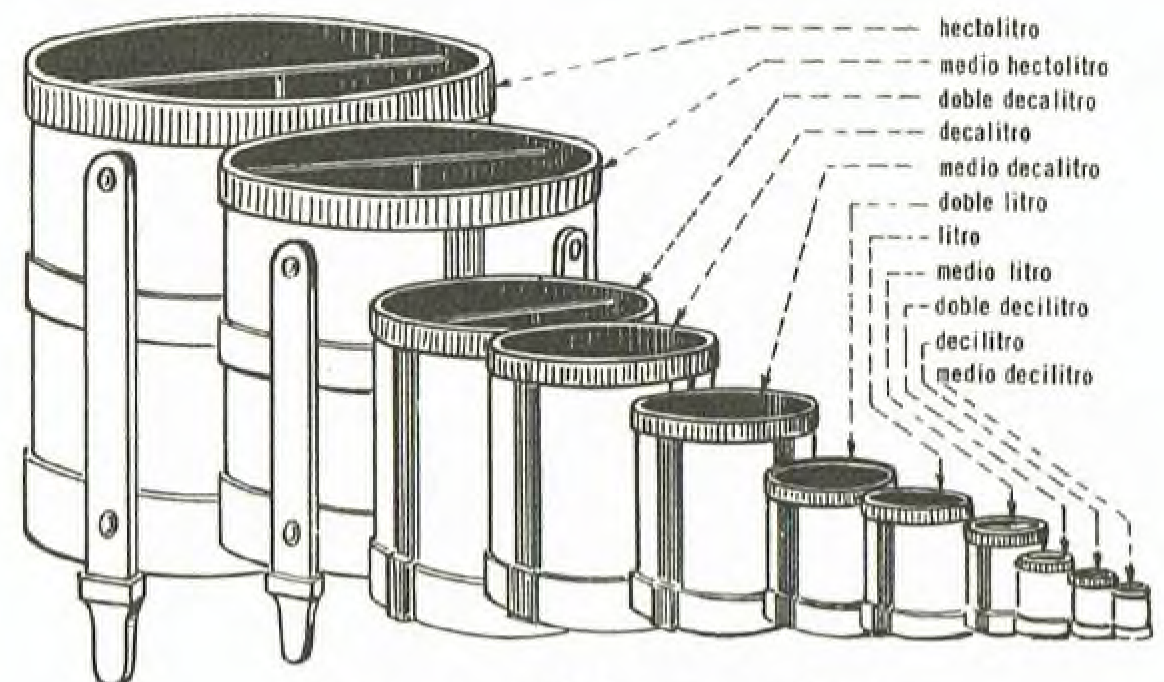


Las ocho medidas de estaño

Múltiplos y submúltiplos del litro

	Nombres	Símbolos	Valores
Múltiplos	Hectolitro	Hl	100 l
	Decalitro	Dl	10 l
	Litro	l	1 l
Sub-múltiplos	Decilitro	dl	0,1 l
	Centilitro	cl	0,01 l
	Mililitro	ml	0,001 l
	Microlitro (des.) ...	λ	0,000 001 l

Instrumentos de medida. — Se han construido en forma cilíndrica todas las medidas de capacidad, desde el centilitro hasta el hectolitro, así como la mitad y el doble de cada una de ellas. Sus formas y la materia de que están formadas difieren según el uso a que se destinen (v. *fig.*).

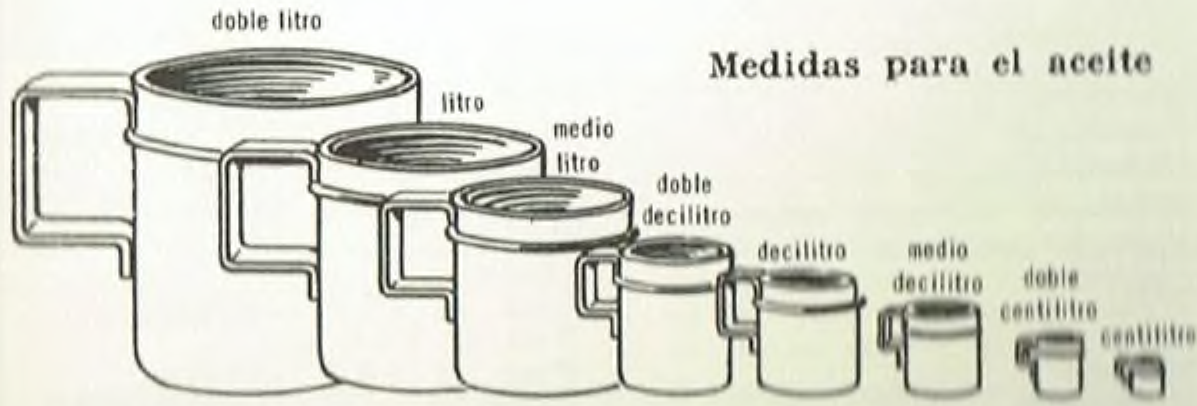


Las once medidas de madera

Numeración de los números que expresan unidades de capacidad. — Las unidades de capacidad aumentan y disminuyen de 10 en 10, y por consiguiente bastará una cifra para expresar las unida-

des de los diferentes órdenes, escribiéndose los números correspondientes como los números decimales.

Observaciones. 1° Se pasa fácilmente de las unidades de capacidad a las de volumen e inversamente.

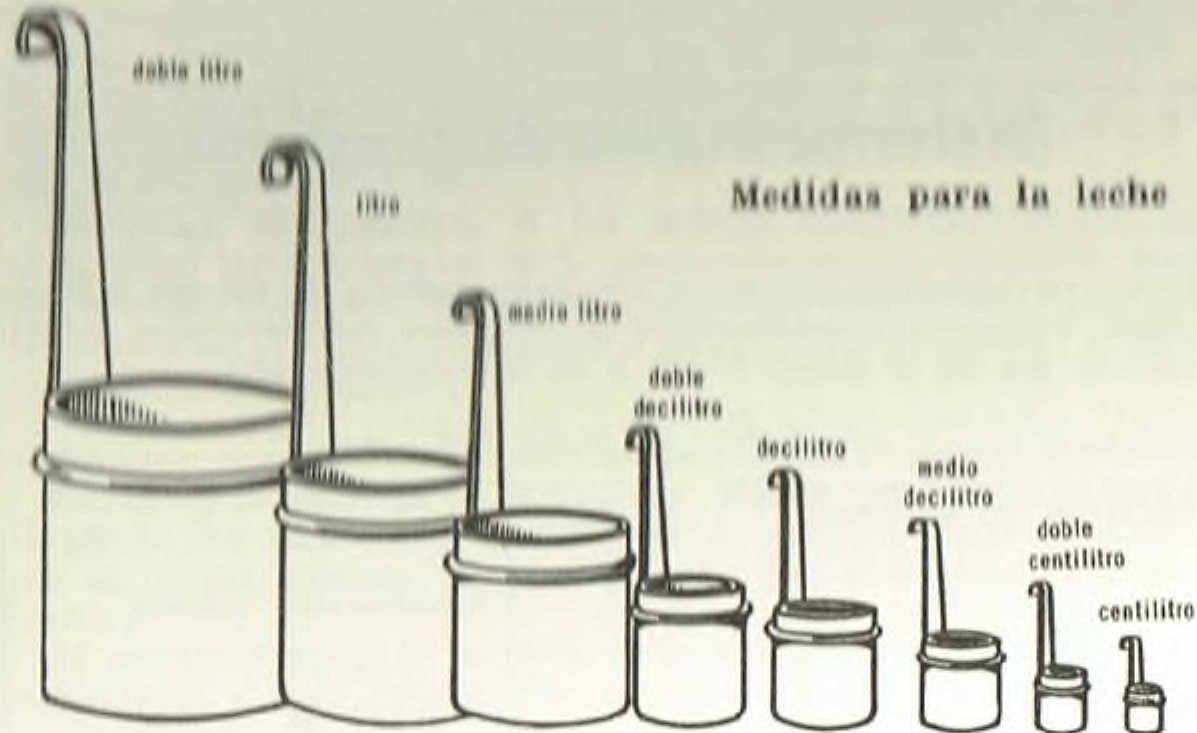


Medidas para el aceite

Así, 1 m³ vale 1 000 dm³ ó 1 000 l ó 10 hl.
1 dl vale 0,1 ó 0,1 dm³ ó 100 cm³.

2° Las diferentes unidades de volumen se corresponden con arreglo al siguiente cuadro:

m³	•	•	dm³	•	•	cm³	•	•	mm³
st	dst								
	Hl	Dl	l	dl	cl	ml			



Medidas para la leche

3° Se utilizan cada vez más aparatos automáticos de medida: por ejemplo, las bombas de gasolina y las de aceite, que son comprobadas por los servicios de verificación de pesos y medidas.

Medidas de ángulos

La **unidad principal** de medida de ángulos es el **ángulo recto** (R), que es el ángulo formado por dos rectas que se cortan según ángulos adyacentes iguales.

Submúltiplos del ángulo recto

Nombres	Símbolos	Valores
Grado	gr	0,01 R
Decígrado	dgr	0,001 R
Centígrado	cgr	0,000 1 R
Miligrado	mgr	0,000 01 R
Grado (1)	o	$\frac{1}{90}$ R
Minuto (de ángulo)	′	$\frac{1}{60}$ o
Segundo (de ángulo)	″	$\frac{1}{60}$ ′

(1) El símbolo o se emplea cuando la naturaleza de la unidad considerada no ofrece dudas, principalmente cuando el ángulo en cuestión contiene también minutos.

Observación. Dado un ángulo cuya medida se ha expresado en grados sexagesimales, por ejemplo, si se quiere expresar esa medida en grados centesimales bastará con recordar que 90° valen 100 g.

Unidades de masa (1)

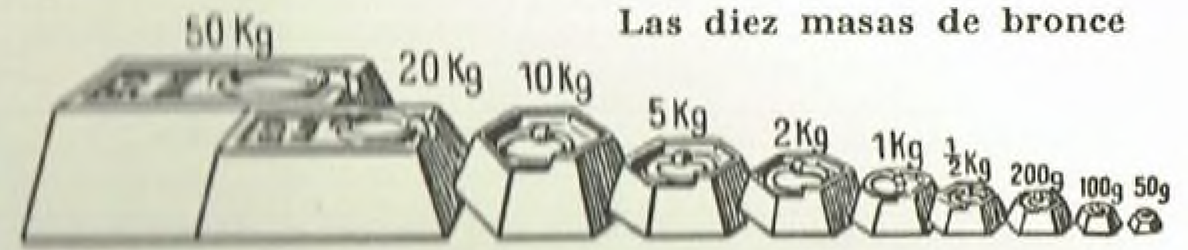
La **unidad principal** de masa es el **kilogramo.**

El kilogramo es la masa del prototipo internacional de platino iridiado que sancionó la Conferencia General de Pesos y Medidas que se celebró en París en 1889 y que fue depositado en el pabellón de Breteuil, en Sèvres. En la práctica, se utilizan *copias verificadas* de este patrón.

El prototipo del kilogramo patrón tiene la forma de un cilindro de altura igual al diámetro.

La masa del kilogramo patrón excede 27 miligramos aproximadamente a la de un decímetro cúbico de agua destilada a la temperatura de 4° C, pesada en el vacío, a la latitud de París y al nivel del mar. Puede, pues, decirse que la masa de un litro de agua tomada a 4° C, que era la antigua unidad de masa, es aproximadamente un kilogramo. La antigua unidad de masa dependía de la longitud del metro, mientras que, así definida, ya no depende de ella.

Las diez masas de bronce



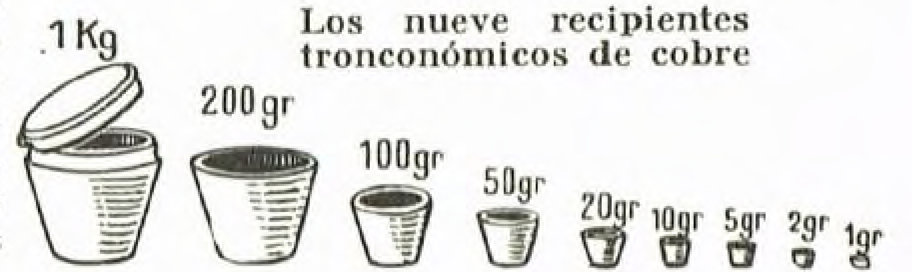
Múltiplos y submúltiplos del kilogramo y del gramo

Nombres	Símbolos	Valores
Tonelada métrica (1)	Tm	1 000 kg
Quintal métrico	Qm	100 kg
Kilogramo	kg	1 000 g o 0,001 t
Hectogramo	Hg	100 g — 0,1 kg
Decagramo	Dg	10 g — 0,01 kg
Gramo (2)	g	1 g — 0,001 kg
Decigramo	dg	0,1 g
Centigramo	cg	0,01 g
Miligramo	mg	0,001 g
Microgramo (desusado) ...	μ y o	0,000 001 g
Quilate (3)	ℨ	2 dg

(1) Base del sistema M. T. S., unidad principal.
(2) Base del sistema C. G. S.
(3) El quilate, unidad de masa para las piedras preciosas tiene un valor que varía según los países. Los diamantes se pesaban por onzas, y cada una valía 29,592 g; esta onza se dividía en 144 quilates, y cada quilate en 4 gramos. El quilate equivale, pues, a 0,205 5 g. Hoy se utiliza el *quilate métrico*, que equivale a 2 dg.

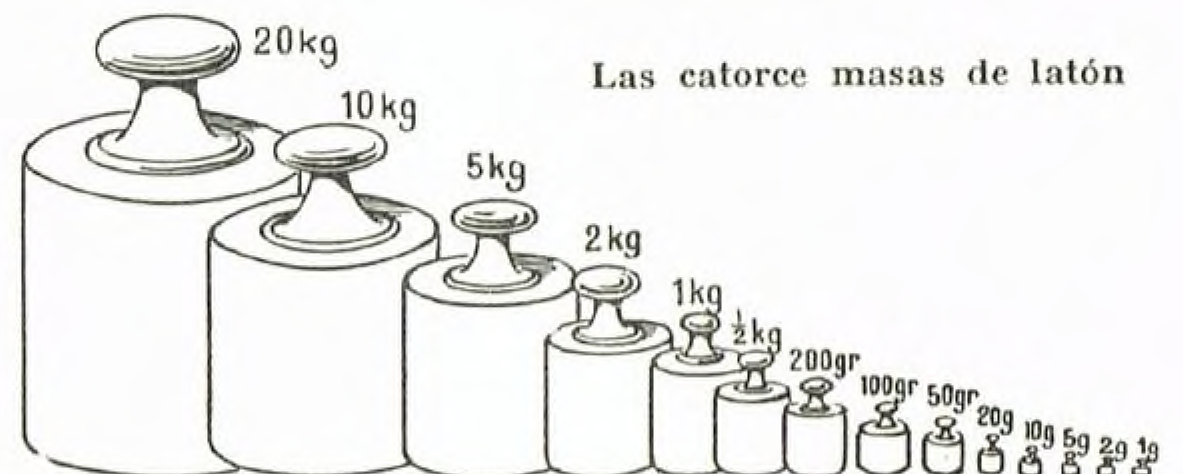
Numeración de los números que expresan las unidades de masa. — Las unidades de masa aumentan o disminuyen de 10 en 10, por lo que basta con una cifra para expresar las unidades de los diferentes órdenes, escribiéndose los números correspondientes como los números enteros o decimales.

Los nueve recipientes tronconómicos de cobre

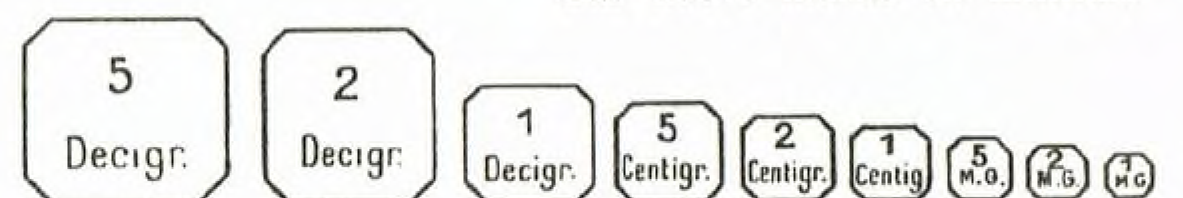


Los pesos se utilizan en las balanzas. En las básculas al $\frac{1}{10}$, la masa que hay que medir es 10 veces mayor que la de los "pesos del platillo". Actualmente se utilizan mucho las balanzas de cuadrante o de cursor, en las que se lee la masa que se pesa.

Las catorce masas de latón



Las nueve masas en láminas



(1) No debe confundirse el *peso* de un cuerpo con su *masa*; la masa de un cuerpo es la cantidad de materia de que está constituido, mientras que el peso es una propiedad de la materia. La masa es una magnitud rigurosamente fija, mientras que el peso varía con la latitud y altura del lugar. La masa de un cuerpo se determina por medio de la balanza (v. Gravedad, t. VI, p. 11).

Unidades de tiempo

La unidad principal de tiempo es el **segundo,** que es la $\frac{1}{86\,400}$ parte del día solar medio (1).

El segundo es la base y la unidad principal en los sistemas M. T. S., C. G. S. y Georgi.

Múltiplos del segundo

NOMBRES	SÍMBOLOS	VALORES
Día	d	86 400 s
Hora	h	3 600 s
Minuto	mn o m	60 s
Segundo	s	1 s

El símbolo m puede emplearse cuando no se preste a ambigüedades; por ejemplo, cuando el tiempo se ha expresado no sólo en minutos, sino también en horas y segundos.

Otras unidades de tiempo. — También se emplean:

1º La *semana*, que dura 7 días;

2º El *mes*, cuya duración se ha fijado según la siguiente tabla:

Enero	31 días	Julio	31 días
Febrero	28 ó 29 d.	Agosto	31 días
Marzo	31 días	Septiembre	30 días
Abril	30 días	Octubre	31 días
Mayo	31 días	Noviembre	30 días
Junio	30 días	Diciembre	31 días

3.º El *año* (2) [*año civil*], cuya duración es de 365 días, que es el tiempo que tarda la tierra, aproximadamente, para efectuar su movimiento de traslación alrededor del sol;

4º El *siglo*, que dura 100 años.

Sistemas monetarios

Se llama **sistema monetario,** en cada país, el conjunto de los diferentes tipos de sus monedas que satisfacen determinadas condiciones de valor, ley, peso, talla, diámetro, etc.

En España la **unidad legal** de moneda es la peseta.

Además de las monedas, también existe el papel moneda, que consiste en billetes emitidos al portador por el Banco que tenga el privilegio exclusivo de esa emisión.

Unidades monetarias actuales

AFGANISTÁN	Afgani = 1 0 0 pul.
ALBANIA	Franco = 1 0 0 quintar.
ALEMANIA	Marco = 1 0 0 pfenig.
ARGENTINA	Peso = 1 0 0 centavos.
AUSTRALIA	Libra (como la inglesa).
AUSTRIA	Schelling = 1 0 0 groschen.
BÉLGICA	Franco = 1 0 0 céntimos.
BOLIVIA	Boliviano = 1 0 0 centavos.
BRASIL	Cruzeiro = 100 centavos.
BULGARIA	Lev = 100 stotinki.
CANADÁ	Dólar = 1 0 0 céntimos.
COLOMBIA	Peso = 1 0 0 centavos.
COSTA RICA	Colón = 1 0 0 céntimos.
CUBA	Peso = 1 0 0 centavos.
CHECOSLOVAQUIA	Corona = 1 0 0 héller.
CHILE	Escudo = 1 0 0 centavos.
CHINA	Dólar = 1 0 0 cents.
DINAMARCA	Corona = 1 0 0 oere.
DOMINICANA	Peso = 1 0 0 centavos.
ECUADOR	Sucre = 1 0 0 centavos.
EGIPTO	Libra egipcia.
EL SALVADOR	Colón = 1 0 0 centavos.
ESPAÑA	Peseta = 1 0 0 céntimos.
ESTADOS UNIDOS	Dólar = 1 0 0 cents.
FILIPINAS	Dólar.
FINLANDIA	Markka = 1 0 0 pennia.
FRANCIA	Franco = 1 0 0 céntimos.
GRAN BRETAÑA	Libra = 2 0 chelines.
GRECIA	Dracma = 1 0 0 lepta.
GUATEMALA	Quetzal = 1 0 0 centavos.
HAITÍ	Gourde = 1 0 0 céntimos.
HOLANDA	Gulden = 1 0 0 cents.
HONDURAS	Lempira = 1 0 0 centavos.
HUNGRÍA	Forint = 1 0 0 filler.
INDIA	Rupia = 1 6 annas.
IRÁN	Rial.
ISRAEL	Libra.
ITALIA	Lira = 1 0 0 céntimos.
JAPÓN	Yen = 1 0 0 sen.
MÉXICO	Peso = 1 0 0 centavos.
NICARAGUA	Córdoba = 1 0 0 centavos.
NORUEGA	Corona = 1 0 0 oere.
PANAMÁ	Balboa = 1 0 0 centavos.
PARAGUAY	Guaraní = 1 0 0 centavos.
PERÚ	Sol = 1 0 0 centavos.
POLONIA	Zloty = 1 0 0 grosz.
PORTUGAL	Escudo = 1 0 0 centavos.
RUMANIA	Leu = 1 0 0 bani.
SUECIA	Corona = 1 0 0 oere.
SUIZA	Franco = 1 0 0 céntimos.
TAILANDIA	Baht = 1 0 0 satany.
TURQUÍA	Libra = 1 0 0 piastras.
U. R. S. S.	Rublo = 1 0 0 kopeks.
URUGUAY	Peso = 1 0 0 centésimos.
VENEZUELA	Bolívar = 1 0 0 céntimos.
YUGOSLAVIA	Dinar = 1 0 0 paras.

Sistema inglés de medidas

Como en Inglaterra no se ha adoptado todavía el sistema métrico decimal, indicamos a continuación las unidades más corrientes actualmente en uso en el Reino Unido y en la Commonwealth.

		Equivalencia métrica
Medidas de longitud.		
1 Inch		2,54 cm
1 Foot		30,48 cm
1 Yard		91,44 cm
1 Pole		5,20 m
1 Furlong		201,16 m
1 Mile		1 609,35 m
1 Nautical mile		1 851,85 m
Medidas de superficie.		
1 Acre		40,47 áreas
1 Square mile		2,59 km²
Medidas cúbicas.		
1 Register ton		2,83 m³.
Medidas de capacidad.		
1 Pint		0,56 l
1 Quart	2 Pints	1,13 l
1 Gallon	4 Quarts	4,54 l
Medidas de peso.		
1 Ounce		28,35 g
1 Pound	16 Oz.	453,59 g
1 Stone	14 lbs.	6,35 kg
1 Short	100 Pounds	45,35 kg
1 Long	112 Pounds	50,80 kg
1 Short ton	2 000 Pounds	907,185 kg
Medidas monetarias		
1 Sovereign o Pound "sterling"	20 shillings	
1 Shilling	12 peniques	
1 Penny		

(1) El día solar verdadero es el tiempo que transcurre entre dos pasos superiores consecutivos del Sol por el meridiano. Como este día no es constante, no se puede emplear como unidad de medida del tiempo y se toma como tal el día solar medio, que es el promedio anual de las duraciones de los días solares verdaderos.

(2) La duración exacta del año es de 365 d, 5 h, 48 m, 47 s 1/10; para compensar el error que se comete tomando el año de 365 d, se añade un día al mes de febrero cada 4 años (*año bisiesto*). Sin embargo, este día añadido cada 4 años sería superior a la duración real, ya que el año no excede de 365 días en más de 6 horas. Lo que se añade de más corresponde sensiblemente a 3 días en 4 siglos y se compensa no considerando como bisiestos, en los años que marcan los siglos, más que aquellos cuya milésima es un múltiplo de 4; así, el año 2000 será bisiesto, pero no lo fueron 1700, 1800 ni 1900.

Proporcionalidad numérica

Comparación de números y de magnitudes. Razón aritmética. Razón geométrica. Proporción aritmética. Proporción geométrica. Serie de razones iguales. — **Magnitudes proporcionales.** — **Regla de tres:** Regla de tres simple. Regla de tres simple directa. Regla de tres simple inversa. Regla de tres compuesta. — **Repartimientos proporcionales.** Regla de compañía. — **Reglas de interés:** Interés simple. Fórmula del interés simple. Cálculo rápido del interés. Cálculo rápido del número de días. — **Descuento:** Descuento comercial. Cálculo del descuento. Cálculo del valor nominal. Cálculo del tanto por ciento del descuento. Cálculo del vencimiento. Descuento racional o matemático. Fórmula del descuento racional. Vencimiento común. Vencimiento medio. — **Regla de aligación (mezclas) y aleaciones:** *Mezclas.* Regla de aligación directa. Regla de aligación inversa. *Aleaciones.* Determinación de la ley de una aleación. Proporción de metales que entran en una aleación. Afinación de una aleación

Comparación de números y de magnitudes. — La comparación cuantitativa de varios números o magnitudes homogéneas se presenta espontáneamente a nuestro entendimiento. Si los números son sólo dos, podemos compararlos o relacionarlos mediante cualquiera de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Consideraremos ahora solamente la comparación por sustracción o división.

Razón aritmética. — DEFINICIÓN. **Razón aritmética** *o* **por diferencia** *de dos números es el resultado de compararlos por sustracción, con objeto de ver el número de veces que uno de ellos contiene al otro.*

La razón aritmética entre dos números no es más, por consiguiente, que la diferencia entre ambos; por ejemplo: 9 — 3 = 6, con la particularidad, en este caso, de que existen infinitos pares de números que se encuentran en la misma relación de diferencia. Así, en este caso, 8 y 2, 10 y 4 ...

Al primer término de la razón aritmética se le llama *antecedente*, al segundo *consecuente* y a su diferencia *razón*. La razón aritmética suele escribirse separando el antecedente y el consecuente, también llamados *primero* y *segundo término*, por un punto (que se escribe en la parte superior para evitar confundirlo con el que se emplea para indicar la operación de multiplicar, que se escribe en el centro) : $9 \,^{\cdot}\, 3$ que se lee, nueve es a tres.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. A las razones aritméticas pueden aplicarse todas las propiedades de la sustracción de dos números; puede, por lo tanto, enunciarse la siguiente propiedad fundamental: *Una razón aritmética no se altera si se suma o resta un mismo número a los dos términos de dicha razón.*

$$a \,^{\cdot}\, b = (a \pm n) \cdot (b \pm n).$$

Razón geométrica. — DEFINICIÓN. **Razón geométrica** *o* **por cociente** *de dos números es el resultado de compararlos por división, o sea un tercer número que multiplicado por el segundo nos da el primero.*

Al primer término de la razón se le llama *antecedente*, al segundo *consecuente* y a su cociente *razón geométrica*. Así, la razón entre 36 y 9 será $\frac{36}{9} = 4$, o también $36 : 9 = 4$. En general, $\frac{a}{b} = c$.

La razón geométrica de dos números no es más que una división generalizada, que ofrece la particularidad de que existen infinitos pares de números que tienen una misma razón. Estos números pueden fácilmente determinarse atendiendo a las propiedades de la división, puesto que una razón geométrica no es más que una división generalizada. Podremos, pues, enunciar la siguiente

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. *Una razón geométrica no se altera cuando se multiplican o se dividen sus dos términos por un mismo número.* Simbólicamente:

$$a : b = (a \,^{\cdot}\, n) : (b \,^{\cdot}\, n).$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Proporción aritmética. — *Se llama* **proporción aritmética** *a la igualdad de dos razones aritméticas.*

Por ejemplo,

$$9 - 3 = 8 - 2,$$

o también

$$9 \,^{\cdot}\, 3 : 8 \,^{\cdot}\, 2.$$

que se lee: nueve es a tres como ocho es a dos.

Toda proporción consta, pues, de cuatro *términos*, llamándose *términos extremos* al antecedente de la primera razón y al consecuente de la segunda, y *términos medios* al consecuente de la primera razón y al antecedente de la segunda. Cuando en una equidiferencia o proporción aritmética los dos términos medios son iguales, la proporción o equidiferencia se llama *continua*.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. *En toda proporción aritmética la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.*

En efecto: a — b = c — d. Si añadimos a los dos miembros de la igualdad b + d, se tendrá:

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

es decir,

$$a + d = c + b.$$

Proporción geométrica. — DEFINICIÓN. *Se llama* **proporción geométrica,** *o simplemente proporción, la igualdad de dos razones geométricas.*

Así, $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$.

La proporción se representa también de la siguiente forma: $3 : 4 \div\!\div 12 : 16$. De una manera general, una proporción cualquiera se representa por la igualdad

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a : b \div\!\div c : d$, que se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

Los cuatro números *a*, *b*, *c*, *d*, son los cuatro *términos* de la proporción; *a* y *d* se denominan *extremos* y *b* y *c* *medios*. El cuarto término de una proporción se llama *cuarta proporcional de los otros tres.*

Se llama *proporción continua* aquella cuyos medios son iguales; el término medio se llama entonces *media proporcional*, y cualquiera de los extremos, *tercera proporcional*.

Así, $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; 6 es la media proporcional entre 4 y 9. De una manera general, la media proporcional entre dos números *a* y *b* es el número *x*, tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. *En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios y, recíprocamente, si cuatro números* a, b, c *y* d, *son tales que* ad = bc, *estos cuatro números forman una proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y multipliquemos los dos términos de la primera razón por *d*, y los dos términos de la segunda por *b*; se tendrá

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}, \text{ es decir } ad = bc.$$

Para demostrar el recíproco, dividamos los dos miembros de la igualdad $ad = bc$ por el producto bd. Se tendrá

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

CONSECUENCIAS. 1º Para verificar si cuatro números forman una proporción, bastará con verificar que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

2º En toda proporción puede alterarse el lugar de sus términos, formando otras proporciones, siempre que en cada una de éstas el producto de los extremos sea igual al producto de los medios.

De la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ podrán, pues, deducirse, otras siete:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d};\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a};\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c};\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b};\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c};\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b};\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

EJERCICIOS. 1º *Calcular la cuarta proporcional a los números 3, 4, 15, tal que* $\frac{3}{4} = \frac{15}{x}$.

Se tendrá inmediatamente: $3x = 15 \times 4$, de donde $x = \frac{15 \times 4}{3} = 20$.

2º *Calcular la media proporcional entre 4 y 9.*

Sea *x* el número buscado; deberá tenerse $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$, de donde $x^2 = 36$ y $x = 6$.

Serie de razones iguales. — *En toda serie de razones iguales, la suma de antecedentes es a la de consecuentes como un antecedente es a su consecuente.*

Consideremos la serie de razones iguales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Sea q el valor común de estas razones; se tendrá

$$a = a'\,q.$$
$$b = b'\,q.$$
$$c = c'\,q.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, se tendrá,

$$a + b + c = (a' + b' + c')\,q,$$

o dividiendo ambos miembros por $a' + b' + c'$:

$$\frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = q.$$

De la misma forma se demostraría que las razones $\frac{a+b-c}{a'+b'-c'}$, $\frac{a-b+c}{a'-b'+c'}$, etc., son iguales a cada una de las razones propuestas.

Magnitudes proporcionales

DEFINICIONES. *Se llama razón entre dos magnitudes homogéneas* A *y* B *al número que expresa la medida de* A *cuando se toma* B *como unidad.*

La razón entre ambas magnitudes se representa por $\frac{A}{B}$. Para calcular esta razón, debe tenerse en cuenta que es igual a la razón de los números que expresan sus medidas, siempre que estas medidas se hayan efectuado con la misma unidad.

Dadas dos magnitudes A y B, entre las cuales existe una relación tal que a cada medida de A corresponde una medida de B, se dice que las *dos magnitudes son directamente proporcionales*, si se verifica que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ ..., siendo a, a' a'' ... una serie de medidas de A y b, b' b'' ... la serie de medidas correspondientes de B.

En las ciencias se encuentran numerosos ejemplos de magnitudes directamente proporcionales; en un mismo círculo o en círculos iguales, los ángulos en el centro y los arcos que ellos interceptan son magnitudes proporcionales; las áreas de dos triángulos de igual base son proporcionales a sus alturas; la masa de una cantidad de agua pura y su volumen también son magnitudes directamente proporcionales, etc.

Se dice que **dos magnitudes variables son inversamente proporcionales** *cuando la relación que existe entre ambas es tal que la razón de dos medidas cualesquiera de la primera es igual a la razón inversa de las dos medidas correspondientes de la segunda.*

Así, a temperatura constante, los volúmenes ocupados por una misma masa gaseosa y las presiones que soporta esta masa son inversamente proporcionales.

OBSERVACIONES. 1° Además de las magnitudes proporcionales que se derivan de las leyes matemáticas o físicas, existen magnitudes cuya proporcionalidad admitida es relativa; por ejemplo:

Se admite que el trabajo que efectúan unos obreros es proporcional a su número; como los obreros no tienen todos la misma destreza, esta proporcionalidad es limitada, ya que, además, para ciertos trabajos, el número de obreros que puede emplearse es limitado; no podrían emplearse 60 obreros simultáneamente para excavar un foso de 2 m de anchura y 4 de longitud, por ejemplo.

Diremos también que el precio de una mercancía es proporcional a su masa, a pesar de que en la práctica dicho precio es mayor cuando se compra al por menor que cuando se compra al por mayor, etc.

2° Una magnitud puede estar relacionada con otras varias. Cuando se dice que es proporcional a una de éstas, se admite que las restantes permanecen invariables.

Así, el área de un rectángulo es proporcional a su longitud y a su anchura, es decir, que el área es proporcional a una cualquiera de estas dos dimensiones, cuando la otra es fija.

3° Una magnitud ligada con otras varias puede ser directamente proporcional a algunas de ellas e inversamente proporcional a las restantes.

Así, el tiempo que tarda un móvil animado de un movimiento uniforme para recorrer un espacio determinado es proporcional a la longitud del trayecto que tiene que recorrer, pero inversamente proporcional a su velocidad.

TEOREMA. *Cuando una magnitud variable es proporcional a otras varias, el número que la mide es proporcional al producto de los números que miden las restantes magnitudes.*

Supongamos, por ejemplo, que el número de obreros necesarios para excavar un foso en un tiempo determinado sea proporcional a la longitud, a la anchura y a la profundidad de dicho pozo.

Sea n el número de obreros necesarios para excavar, en un tiempo determinado, un foso de longitud L, anchura l y profundidad p, y n' el número de obreros que hacen falta para excavar durante el mismo tiempo otro foso de longitud L', anchura l' y profundidad p'. Se trata de demostrar que $\frac{n}{n'} = \frac{L \cdot l \cdot p}{L' \cdot l' \cdot p'}$.

Para pasar de las dimensiones del primer foso a las del segundo, pueden considerarse varios estados intermedios, tales que, al pasar de uno a otro, varíe una sola de las dimensiones.

n obreros en un cierto tiempo excavan un foso de longitud L, anchura l y profundidad p.

n_1 obreros en el mismo tiempo excavan un foso de longitud L', anchura l y profundidad p.

n_2 obreros en el mismo tiempo excavan un foso de longitud L' anchura l' y profundidad p.

n' obreros en el mismo tiempo excavan un foso de longitud L', anchura l' y profundidad p'.

Se tendrá

$$\frac{n}{n_1} = \frac{L}{L'}, \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{l}{l'}, \quad \frac{n_2}{n'} = \frac{p}{p'}.$$

Multipliquemos estas proporciones numéricas miembro a miembro, y se tendrá, después de simplificar:

$$\frac{n}{n'} = \frac{L}{L'} \times \frac{l}{l'} \times \frac{p}{p'}.$$

OBSERVACIÓN. Análogamente se demostraría que:

1° *Si una magnitud variable es inversamente proporcional a otras varias, el número que la mide es proporcional al producto de los inversos de los números que miden las restantes magnitudes.*

2° *Si una magnitud variable es directamente proporcional a ciertas magnitudes e inversamente proporcional a otras, el número que la mide es proporcional al producto de los números que miden las magnitudes proporcionales por las inversas de los que miden las magnitudes inversamente proporcionales.*

Regla de tres

La regla de tres es el procedimiento aritmético general que se emplea para resolver problemas del tipo siguiente:

Dada una magnitud A *directa o inversamente proporcional a otras varias* B, C, D, *y conocidos los valores* a, b, c, d, *de estas magnitudes en un estado determinado, calcular el valor que corresponde a* A *cuando las magnitudes* B, C *y* D *reciben nuevos valores* b', c', d'.

Cuando sólo se trata de dos magnitudes, se dice que la regla de tres es *simple;* en el caso contrario, se llama regla de tres *compuesta.*

Regla de tres simple. — La regla de tres simple puede ser *directa* o *inversa,* según que las magnitudes de que se trate sean directa o inversamente proporcionales.

Sean a y b las medidas de las dos magnitudes A y B en un primer estado; llamemos x y b' a los valores de las dos magnitudes A y B en un segundo estado, siendo x el valor desconocido de la magnitud A.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, tendremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{b}, \text{ de donde } x = \frac{ab'}{b}.$$

Si las magnitudes son inversamente proporcionales, tendremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{b'}, \text{ de donde } x = \frac{ab}{b'}.$$

Regla de tres simple directa. — PROBLEMA. *Con 38 kg de harina se hacen 57 kg de pan. ¿Qué cantidad de harina será necesaria para fabricar 42 kg de pan?*

1ª solución. Sea a el número de kilos de harina necesarios. La masa de harina y la masa de pan correspondiente son dos magnitudes directamente proporcionales; se tendrá, pues:

$$\frac{a}{42} = \frac{38}{57}.$$

De donde se deduce:

$$a = \frac{42 \times 38}{57} = 28 \text{ kg}.$$

También puede emplearse el método llamado de *reducción a la unidad.*

2ª solución.

Para hacer 57 kg de pan se necesitan 38 kg de harina.

— 1 kg — — $\frac{38}{57}$ kg —

— 42 kg — — $\frac{38 \times 42}{57} = 28$ kg de harina.

OBSERVACIÓN. El primer método es el más sencillo. El segundo método conduce además algunas veces a un razonamiento que conviene evitar. Así, por ejemplo, resolvamos el problema siguiente:

Un sombrerero ha comprado 5 sombreros iguales por 900 ptas. ¿Cuántos sombreros podrá comprar con 720 ptas.?

1er método. Sea a el número de sombreros comprados. Este número es directamente proporcional al precio de compra:

$$\frac{a}{720} = \frac{5}{900}, \text{ de donde } a = \frac{5 \times 720}{900} = 4 \text{ sombreros}.$$

2º Método de reducción a la unidad.

Con 900 ptas. el sombrerero compra 5 sombreros.

— 1 pta. — — $\frac{5}{900}$.

— 720 ptas. — $\frac{5 \times 720}{900} = 4$ sombreros.

Hemos encontrado el resultado exacto, pero el segundo razonamiento conduce a un absurdo: con 1 pta., el sombrerero comprará $\frac{5}{900}$ de sombrero.

Regla de tres simple inversa. — PROBLEMA. *Con un barril pueden llenarse 252 botellas de 0,95 litros. ¿Cuántas botellas de 0,70 l podrán llenarse con el mismo barril?*

0,95 l ... ... 252 botellas
0,70 l ... ... x —

1er método. Las magnitudes son inversamente proporcionales:

$$\frac{0{,}95}{0{,}70} = \frac{x}{252}$$

De donde

$$x = \frac{252 \times 0{,}95}{0{,}70} = 342 \text{ botellas.}$$

2º método. Se operará en la forma anterior:
Si de 0,95 l se llenan 252 botellas.
De 1,00 l se llenarían 252 × 0,95 botellas.

$$\text{De } 0{,}70 \text{ l se llenarían } \frac{252 \times 0{,}95}{0{,}70} = 342 \text{ botellas.}$$

Regla de tres compuesta. — Sean:
a, b, c, d, las medidas de las magnitudes A, B, C y D, en un primer estado,
x, b', c', d', las medidas de las magnitudes A, B, C, D, en un segundo estado,
siendo x el número buscado.

Supongamos que A y B sean directamente proporcionales; A y C, A y D inversamente proporcionales.

Si B y C conservaran sus medidas, variando únicamente la medida de D, la medida de A sería a', y a los dos estados corresponderían las medidas:

$$\begin{cases} a, b, c, d, \\ a', b, c, d', \end{cases} \quad \text{y se tendría } \frac{a'}{a} = \frac{d}{d'}.$$

Supongamos ahora que b y d' permanecen constantes, que c se convierte en c' y que a' toma un valor a''. Se tendrán los dos estados:

$$\begin{cases} a', b, c, d', \\ a'', b, c', d', \end{cases} \quad \text{por consiguiente } \frac{a''}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Finalmente, si c' y d' permanecen fijas, y b se convierte en b', a'' tomará el valor x y se tendrá:

$$\frac{x}{a''} = \frac{b'}{b}.$$

Multiplicando miembro a miembro las cuatro razones obtenidas, se tendrá, después de simplificar:

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{b} \times \frac{c}{c'} \times \frac{d}{d'} \quad \text{ó} \quad x = a \times \frac{b'}{b} \times \frac{c}{c'} \times \frac{d}{d'}.$$

Problema. *13 obreros, trabajando 6 horas al día, han construido en 4 días 420 metros de carretera. ¿Cuántos metros construirán 18 obreros trabajando en las mismas condiciones 7 horas al día durante 5 días?*

1er método.

$$\begin{cases} 13 \text{ obreros} & 6 \text{ horas} & 4 \text{ días} & 420 \text{ metros.} \\ 18 \quad — & 7 \quad — & 5 \quad — & x \quad — \end{cases}$$

$$\text{Se tendrán: } x = 420 \times \frac{18}{13} \times \frac{7}{6} \times \frac{5}{4} = 848{,}07 \text{ m por defecto.}$$

2º método. — Reducción a la unidad.

13 obreros que trabajan 6h al día hacen en 4d .... 420 m

1 obrero " trabaje 6h " " hará " 4d .... $\frac{420}{13}$

1 " " " 1h " " " " 4d .... $\frac{420}{13 \times 6}$

1 " " " 1h " " " " 1d ...... $\frac{420}{13 \times 6 \times 4}$

18 obreros " trabajen 1h " " harán " 1d ... $\frac{420 \times 18}{13 \times 6 \times 4}$

18 " " " 7h " " " " 1d ... $\frac{420 \times 18 \times 7}{13 \times 6 \times 4}$

18 " " " 7h " " " " 5d ... $\frac{420 \times 18 \times 7 \times 5}{13 \times 6 \times 4}$ = 848,07 m por defecto.

Repartimientos proporcionales

Definición. *Dividir un número dado* A *en partes proporcionales a otros números* a, b, c, d, *es hallar cuatro números* x, y, z, t, *proporcionales a* a, b, c *y* d, *y cuya suma sea* A.

Se tendrá:

$$x + y + z + t = A$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d}.$$

Estas relaciones permiten calcular inmediatamente x, y, z y t.

Poniendo como numerador la suma de los numeradores o su equivalente, y como denominador la suma de los denominadores, se tendrá:

$$\frac{A}{a + b + c + d},$$

que es igual a cada una de las razones (v. pág. 39); en particular se tendrá:

$$\frac{x}{a} = \frac{A}{a + b + c + d}.$$

De donde se deduce:

$$x = \frac{Aa}{a + b + c + d}.$$

Igualmente se tendría:

$$y = \frac{Ab}{a + b + c + d},$$

$$z = \frac{Ac}{a + b + c + d},$$

$$t = \frac{Ad}{a + b + c + d}.$$

Regla. *Para dividir un número en partes proporcionales a otros dados se divide por la suma de éstos y el cociente se multiplica por cada uno de ellos.*

Problemas. 1º *La construcción de un puente ha costado 4 054 800 ptas., cantidad que han de sufragar tres municipios proporcionalmente al número de sus habitantes. El primer municipio tiene 129, el segundo 216 y el tercero 309. ¿Qué cantidad debe pagar cada municipio?*

Población total de los municipios:

$$129 + 216 + 309 = 654 \text{ habitantes.}$$

$$\text{El 1er municipio pagará } \frac{4\,054\,800 \times 129}{654} = 799\,800 \text{ ptas.}$$

$$\text{El 2º} \quad — \quad \frac{4\,054\,800 \times 216}{654} = 1\,339\,200 \text{ paas.}$$

$$\text{El 3er} \quad — \quad \frac{4\,054\,800 \times 309}{654} = 1\,915\,800 \text{ ptas.}$$

2º *Dividir 6 480 ptas. proporcionalmente a los números* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

Reduciendo las fracciones al común denominador, se tendrá:

$$\frac{8}{12}, \frac{9}{12} \text{ y } \frac{10}{12}.$$

El reparto debe hacerse proporcionalmente a estas fracciones, o, lo que es equivalente, a sus numeradores 8, 9 y 10.

En efecto, si llamamos x, y y z a las tres partes, se tendrá:

$$\frac{x}{\frac{8}{12}} = \frac{y}{\frac{9}{12}} = \frac{z}{\frac{10}{12}}.$$

Simplificando, quedará:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10}.$$

Por consiguiente, se tendrá:

$$1^{a} \text{ parte} = \frac{6\,480 \times 8}{27} = 1\,920 \text{ ptas.}$$

$$2^{a} \text{ parte} = \frac{6\,480 \times 9}{27} = 2\,160 \text{ ptas.}$$

$$3^{a} \text{ parte} = \frac{6\,480 \times 10}{27} = 2\,400 \text{ ptas.}$$

Observación. Igualmente se demostraría que se pueden dividir, sin alterar los resultados, los números dados por un mismo número. Así, para dividir un número proporcionalmente a 20, 30 y 50, bastará dividirlo proporcionalmente a 2, 3 y 5; en efecto, las igualdades $\frac{x}{20} = \frac{y}{30} = \frac{z}{50}$ se convertirán, al multiplicarlas respectivamente por 10, en $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

En resumen:

Al dividir un número en partes proporcionales a otros números dados, pueden multiplicarse o dividirse estos últimos por un mismo número sin que se altere el resultado. En particular, para dividir un número proporcionalmente a varias fracciones dadas, se reducen dichas fracciones al denominador común y se divide el número proporcionalmente a los numeradores de las fracciones obtenidas.

Problema. *Dividir el número 3 535 en partes inversamente proporcionales a 3, 7, 8.*

Esto equivale a dividir 3 535 proporcionalmente a:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \quad \text{ó a} \quad \frac{56}{168}, \frac{24}{168}, \frac{21}{168}.$$

Se dividirá 3 535 proporcionalmente a 56, 24 y 21.

Se tendrá, pues, para las tres partes:

$$\frac{3\,535 \times 56}{101}, \frac{3\,535 \times 24}{101}, \frac{3\,535 \times 21}{101}.$$

Regla de compañía. — La *regla de compañía* indica la forma como hay que *repartir* la ganancia o pérdida de un capital social entre los socios, proporcionalmente a los capitales respectivos y al tiempo que han estado impuestos.

Pueden presentarse varios casos:

1º Si los capitales de los socios son iguales, pero han estado impuestos diferente tiempo, el reparto se hará proporcionalmente al *tiempo;*

2º Si los capitales son distintos, pero han estado impuestos el mismo tiempo, el reparto se hará proporcionalmente a los *capitales;*

3º Si tanto los capitales como los tiempos que han estado impuestos son diferentes para cada socio, es evidente que el reparto deberá hacerse proporcionalmente a los productos de los respectivos capitales por los tiempos correspondientes.

En los dos primeros casos, la regla de compañía se llama *simple*, y en el tercero, *compuesta.*

Es evidente que la regla de compañía no es más que una aplicación del problema anterior de repartimientos proporcionales.

PROBLEMA. *Dos socios fundan una empresa comercial, siendo sus aportaciones respectivas 5 600 000 ptas. y 7 500 000 ptas.; seis meses después, se adhiere un tercer socio con un capital de 1 250 000 ptas. El beneficio obtenido al cabo de un año es de 1 338 750 ptas., que deben repartirse los tres socios. ¿Qué cantidad corresponderá a cada socio?*

La ganancia obtenida deberá repartirse proporcionalmente a los productos de los capitales por los tiempos correspondientes, es decir, a:

$$5\,600\,000 \times 12, \quad 7\,500\,000 \times 12, \quad 1\,250\,000 \times 6,$$

o bien a

$$224,\ 300 \text{ y } 25.$$

$$\text{Parte del primero} = \frac{1\,338\,750 \times 224}{549} = 546\,230 \text{ ptas.}$$

$$\text{Parte del segundo} = \frac{1\,338\,750 \times 300}{549} = 731\,557 \text{ ptas.}$$

$$\text{Parte del tercero} = \frac{1\,338\,750 \times 25}{549} = 60\,963 \text{ ptas.}$$

Total ... ... 1 338 750 ptas.

Reglas de interés

DEFINICIONES. Se da el nombre de *interés* o *rédito* de una cantidad de dinero o capital al beneficio que produce al que lo presta o impone durante cierto tiempo, y se llama *regla de interés* al procedimiento aritmético que se sigue para resolver los problemas con él relacionados.

Se llama *tanto por ciento* al interés que producen 100 unidades monetarias en la unidad de tiempo, que es generalmente el año. El interés que corresponde a un capital cualquiera en ese mismo tiempo, se llama *renta.*

Resolveremos primeramente algunos problemas relativos al tanto por ciento.

1º **Hallar el tanto por ciento de un número determinado.**

PROBLEMA. *En una venta se ha obtenido un beneficio del 20% sobre el precio de compra. Calcular el beneficio total.*

$$\text{Beneficio} = \text{Precio de compra} \times \frac{20}{100}.$$

2º **Cálcular la cantidad conociendo el tanto por ciento.**

PROBLEMA. *¿Qué cantidad de trigo será necesaria para obtener 600 kg de harina, sabiendo que el trigo produce el 80% aproximadamente de su masa en harina?*

La masa de trigo es el $\frac{100}{80}$ de la masa de harina, o sea: $\frac{600 \times 100}{80} =$

$= 750$ kg.

Interés simple. — Si llamamos C al capital, *t* al tiempo durante el cual se ha prestado dicho capital, *r* al tanto por ciento, es decir, a lo que producen 100 unidades monetarias en un año, e *i* al interés o rédito del capital C, el problema general del interés simple consistirá en encontrar una de las cuatro magnitudes C, *t*, *r*, *i*, conociendo las otras tres.

Fórmula del interés simple. — El interés es proporcional al capital impuesto y a la duración de la imposición. Para obtenerlo, se resolverá la siguiente regla de tres compuesta:

Capitales	Réditos	Años
100	r	1
C	i	t

Por consiguiente,

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Esta fórmula general permitirá calcular cualquiera de las cuatro magnitudes conociendo las tres restantes

OBSERVACIÓN. El tiempo *t* se expresa, por lo general, en años. En los cálculos de interés se admite generalmente que el año consta de 360 días, y el mes de 30 días.

Si el tiempo se expresa en un número *m* de meses, $t = \frac{m}{12}$, y la fórmula es: $i = \frac{Crm}{1\,200}$.

Si el tiempo se expresa por el número *d* de días, *t* será igual a $\frac{d}{360}$, y la fórmula será: $i = \frac{Crd}{36\,000}$.

PROBLEMAS. 1º *¿Qué interés producirá un capital de 342 500 pesetas colocadas al 3,25% durante 2 años?*

La fórmula da inmediatamente:

$$i = \frac{342\,500 \times 3{,}25 \times 2}{100} = 22\,262 \text{ ptas.}$$

2º *Un capital de 14 280 ptas. ha producido en 8 meses 285,60 ptas. ¿A qué tanto por ciento se ha colocado?*

De la fórmula $i = \frac{Crm}{1\,200}$, se deducirá: $r = \frac{1\,200i}{Cm}$.

Por consiguiente: $r = \frac{1\,200 \times 285{,}6}{14\,280 \times 8} = 3.$

3º *¿Cuál es el capital que, colocado al 4% durante 4 años y 3 meses, ha producido 217,94 ptas?*

El tiempo de la imposición es de 51 meses.

De la fórmula $i = \frac{Crm}{1\,200}$, se obtendrá $C = \frac{1\,200i}{rm}$.

Se tendrá, pues: $C \frac{1\,200 \times 217{,}94}{4 \times 51} = 1\,282$ ptas.

4º *¿Cuánto tiempo ha estado impuesto, al 3%, un capital de 4 600 pesetas que ha producido un interés de 315,10 ptas?*

De la fórmula: $i = \frac{Crt}{100}$, se obtendrá: $t = \frac{100i}{Cr}$.

Por consiguiente, se tendrá: $t = \frac{100 \times 315{,}10}{4\,600 \times 3} = \frac{31\,510}{13\,800} = 2$ años 3 meses 12 días.

Cálculo rápido del interés. — En la práctica, se calcula el interés por métodos rápidos que expondremos más adelante (v. CONTABILIDAD).

1.º **Método de los números y divisores.**

La fórmula $i = \frac{Crt}{36\,000}$ puede escribirse:

$$i = \frac{Ct}{100} \times \frac{r}{360} = \frac{Ct}{100} : \frac{360}{r}.$$

$\frac{Ct}{100}$ es el *número;* $\frac{360}{r}$ es el *divisor.*

Si $r = 6$, el divisor será: $\frac{360}{6} = 60,$

y la relación $i = \frac{Crt}{36\,000}$ se convertirá en $i = \frac{Ct}{100 \times 60}$ ó $\frac{Ct}{6\,000}$.

Si $r = 5$, el divisor será 72, | Si $r = 3{,}6$ " " 100,
Si $r = 4{,}5$ " " 80, | Si $r = 3$ " " 120,
Si $r = 4$ " " 90, | etc.

Este método se aplica principalmente en la banca, cuando se trata de calcular el interés que producen varias sumas colocadas al mismo tanto por ciento, pero durante tiempos diferentes.

Se calculará para cada suma el número correspondiente, y después se hallará el total de estos números dividiendo la suma obtenida por el *divisor* correspondiente al tanto por ciento dado.

EJEMPLO. *Calcular, el 30 de junio, el interés total producido al 6% por los siguientes capitales: 80 000 ptas. impuestas el 5 de abril; 43 625 ptas. impuestas el 12 de abril; 125 000 ptas. impuestas el 10 de mayo; 74 200 ptas. impuestas el 25 de mayo.*

Los cálculos se disponen de la siguiente forma:

CAPITALES	DÍAS	NÚMEROS
80 000	86	68 800
43 625	79	34 463
125 000	51	63 750
74 200	36	26 712
	Total de números:	193 725

Al 6%, el divisor es 60.

$$\text{Interés} = \frac{193\,725}{60} = 3\,229 \text{ ptas.}$$

OBSERVACIÓN. En el cálculo del número $\frac{Ct}{100}$, se desprecian:

1º Los céntimos del capital C;

2º La parte decimal del número $\frac{Ct}{100}$.

Cálculo rápido del número de días. Para calcular rápidamente el número de días transcurridos entre dos fechas dadas, la banca y las casas de comercio suelen utilizar frecuentemente la siguiente tabla:

1º enero	1º febrero	1º marzo	1º abril	1º mayo	1º junio	1º julio	1º agosto	1º septiembre	1º octubre	1º noviembre	1º diciembre	1º enero
0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365

Aplicación. Calculemos el número de días transcurridos entre el 18 de marzo y el 31 de mayo.

Del 18 de marzo al 18 de mayo, habrá transcurrido el mismo tiempo que del 1 de marzo al 1 de mayo, es decir, con arreglo a la tabla anterior:

$$120\ d - 59\ d = 61 \text{ días.}$$

Del 18 de mayo al 31 de mayo, han transcurrido 13 días.

Por consiguiente, del 18 de marzo al 31 de mayo habrán transcurrido $61\ d + 13\ d = 74$ días.

2º **Método de las partes alícuotas.** El método llamado de las partes alícuotas se funda en la siguiente observación:

Cuando un capital se ha colocado un número de días igual al divisor $\left(\frac{360}{r}\right)$, *el interés es el* $\frac{1}{100}$ *del capital.*

En efecto, $i = \frac{C}{100} \times \frac{rd}{360}$. Si $d = \frac{360}{r}$, se tendrá: $i = \frac{C}{100}$.

Este caso se presentará para $r = 7{,}5$ y $d = 48$; para $r = 6$, $d = 60$; para $r = 5$ y $d = 72$; para $r = 4$ y $d = 90$; para $r = 3$ y $d = 120$, etc.

Aplicación. *Calcular el interés producido por 4 800 ptas. impuestas al 6 % durante 110 días.*

Si $r = 6\%$, el divisor es 60.

Para 60 *d*, el interés será de 48 ptas.
" 30 *d* " " 24 ptas.
" 15 *d* " " 12 ptas.
" 5 *d* " " 4 ptas.

Para 110 *d*, el interés será de 88 ptas.

Descuento

Descuento comercial. — En las operaciones comerciales, las mercancías no se pagan generalmente al contado, sino que suele concederse al comprador un plazo de dos o tres meses. El deudor reconoce su deuda firmando un documento (pagaré, letra de cambio, etc.) en el que figura la cantidad de que se reconoce deudor y la fecha en que se compromete a efectuar el pago.

La suma que figura en el documento se llama *valor nominal*. Una letra de cambio o un pagaré representa para su poseedor un valor que puede hacer efectivo de dos maneras: en primer lugar, puede endosarlo a otra persona firmando al dorso del documento: páguese a la orden del Sr....... y a continuación el nombre del beneficiario; por otra parte, si el poseedor del documento necesita dinero antes de su vencimiento, puede dirigirse a un banco, que puede comprárselo mediante ciertas garantías.

Se llama descuento a la cantidad que se deduce del valor de una letra de cambio o pagaré cuando se percibe su importe antes del día de su vencimiento, que es el día estipulado para el pago.

Ejemplo. El 15 de marzo, el Sr. Lucas, negociante de Barcelona, compra al Sr. Bernal, negociante de Madrid, 200 000 ptas. de mercancía, pagaderas a finales de mayo. El Sr. Bernal dirige al Sr. Lucas el siguiente documento, a la orden del Banco Central:

Madrid, 15 de marzo de 19... V. ptas. = 200 000.

Páguese, el 31 de mayo próximo, contra la presentación de la presente letra de cambio, a la orden del Banco Central, la suma de *doscientas mil pesetas*, valor en mercancías.

Al Sr. Lucas,
en Barcelona.

Sello

Bernal.

El 10 de abril, el Sr. Bernal, que tiene necesidad de dinero, *negocia* en el Banco Central el documento que le ha entregado el Sr. Lucas. El Banco Central no le entrega la cantidad íntegra que figura en el documento, sino que le descuenta:

1º el interés de 200 000 ptas. desde el 10 de abril al 31 de mayo, a un tanto por ciento fijado (tanto por ciento que es el del Banco Central aumentado por lo general en una peseta): éste es el *descuento del documento;*

2º una comisión o corretaje, que oscila entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{20}$ del tanto por ciento en pesetas de la cantidad que figura en el documento;

3º un cambio de plaza, que varía de $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ por ciento, si el documento no es pagadero en otra plaza bancaria.

La cantidad que figura en el documento es su *valor nominal*.

El valor nominal menos el descuento se denomina *valor efectivo* o *actual del documento.*

Observaciones. 1ª En lo que sigue a continuación, no se tendrán en cuenta la comisión ni el cambio, sino solamente el descuento comercial. En ese caso podrá escribirse:

Valor efectivo de un documento
= *valor nominal — descuento comercial.*

2ª El descuento comercial de un documento de comercio es el interés que produce, a un tanto por ciento dado, el valor nominal del documento durante el tiempo que transcurra entre el día de la presentación del documento al banco y la fecha del vencimiento.

En estas condiciones, los problemas de descuento se reducen a problemas de interés.

La fórmula general $i = \frac{Crt}{36\,000}$ es aplicable al cálculo del descuento comercial. C es el valor nominal del documento; *r*, el tanto por ciento del descuento; *t*, el número de días que han de transcurrir, e *i*, el descuento del documento.

En este caso, para determinar *t*, hay que contar los meses por su duración exacta.

Esta fórmula es una relación entre cuatro magnitudes, y permite calcular una de ellas conocidas las otras tres.

Cálculo del descuento.

Problema. *El 19 de marzo, un banco descuenta, al 6%, una letra de 240 000 ptas. que vencía el 31 de mayo. Calcular el descuento y el valor efectivo del documento.*

Del 19 de marzo al 31 de mayo han transcurrido 73 días.

$$\text{Descuento} = \frac{240\,000 \times 6 \times 73}{36\,000} = 2\,920 \text{ ptas.}$$

Valor efectivo del documento = 240 000 — 2 920 = 237 080 ptas.

Cálculo del valor nominal.

Problema. *Un comerciante ha recibido 1 782 000 ptas., importe de una letra que vencía el 25 de julio y que ha presentado al descuento el 14 de mayo. ¿Cuál es el valor nominal del documento si se aplica un descuento del 5%?*

Del 14 de mayo al 25 de julio han transcurrido 72 días.

Si el valor nominal era 100 ptas., el descuento sería $\frac{5 \times 72}{360} = 1$ pta.

Siendo C el valor nominal, se tendrá:

$$C - \frac{C \times 5 \times 72}{36\,000} = 1\,782\,000$$

ó:

$$\frac{35\,640\ C}{36\,000} = 1\,782\,000,$$

y:

$$C = \frac{36\,000 \times 1\,782\,000}{35\,640} = 1\,800\,000 \text{ ptas.}$$

Cálculo del tanto por ciento del descuento.

Problema. *Una letra de 37 000 ptas., a 24 días vista, se ha presentado al descuento, habiendo recibido el comerciante 36 864 ptas. ¿Cuál es el tanto por ciento del descuento?*

Importe del descuento: 37 000 — 36 864 = 136 ptas.

$$\text{Tanto por ciento} = \frac{36\,000 \times 136}{37\,000 \times 24} = 5{,}5.$$

Cálculo del vencimiento.

Problema. *Por un pagaré de 48 000 ptas. de valor nominal, descontado al 5%, se han percibido 47 860 ptas. ¿Al cabo de cuántos días vencía el pagaré?*

$$\text{Número de días} = \frac{36\,000 \times 140}{48\,000 \times 5} = 21\ d.$$

Descuento racional o matemático. — En realidad, la cantidad que debería pagarse al descontar un documento sería la que, colocada al tanto por ciento de dicho descuento durante el tiempo que queda por transcurrir, equivaliera (sumando el capital y el interés), el día del vencimiento, al valor nominal del documento.

El *descuento racional* o *matemático* es la diferencia entre el valor nominal y el valor actual del documento.

Problema. *Calcular el descuento racional, al 5%, de una letra de 120 000 ptas. a 30 días vista.*

Calculemos el valor actual del documento:

Si 100 ptas. producen en 30 días $\frac{5}{12} = 0{,}416$ ptas., 100,416 ptas., pagaderas dentro de 30 días, valen hoy 100 ptas.

120 000 ptas. pagaderas dentro de 30 días valen hoy $\frac{100 \times 120\,000}{100{,}416} =$
= 119 503 ptas., con un error por exceso de 1 pta.

Descuento racional: 120 000 — 119 503 = 497 ptas. con un error por defecto de 1 pta.

Fórmula del descuento racional. — Problema general. *Calcular el descuento racional* d_r *al tanto por ciento* r, *de un documento de crédito cuyo valor nominal es* C *pesetas, que vence al cabo de un tiempo* t *expresado en años o en fracción de año.*

100 ptas. producen, al cabo del tiempo *t*, *rt*.

Un documento de $(100 + rt)$ pesetas que vence al cabo del tiempo *t*, vale hoy 100 ptas.

Un documento de C pesetas. que vence al cabo del tiempo *t*, vale hoy $\frac{100\ C}{100 + rt}$.

El valor actual del documento es $\frac{100\ C}{100 + rt}$.

Si d_r es el descuento racional, se tendrá:

$$d_r = C - \frac{100\ C}{100 + rt} = \frac{Crt}{100 + rt}.$$

Si el tiempo es m (meses) o d (días), se tendrá:

$$d_r = \frac{Crm}{1\,200 + rm} \quad \text{ó} \quad d_r = \frac{Crd}{36\,000 + rd}.$$

OBSERVACIONES. 1° El descuento comercial aplicado al mismo sería $\frac{Crt}{100}$.

De donde se deduce, como podría fácilmente colegirse, que *el descuento racional es menor que el descuento comercial.*

La diferencia entre los dos descuentos es:

$$\frac{Crt}{100} - \frac{Crt}{100 + rt} = \frac{Cr^2t^2}{100\,(100 + rt)} = \frac{Crt}{100 + rt} \times \frac{rt}{100}.$$

Es decir, que *la diferencia entre los dos descuentos es igual al interés del descuento racional;* este resultado es evidente:

Siendo C el valor nominal de un documento, C_0 el valor actual, d_r el descuento racional, se tiene la relación:

$$C = C_0 + d_r,$$

de donde: Interés de C = Interés de C_0 + Interés de d_r.

Teniendo en cuenta que el interés de C es el descuento comercial, o sea d_c, y que el interés C_0 es el descuento racional, o sea d_r, se tendrá:

$$d_c = d_r + \text{Interés de } d_r, \quad \text{ó} \quad d_c - d_r = \text{Interés de } d_r.$$

2° No debe confundirse el descuento que acaba de citarse con el *tanto por ciento, reducción o descuento sobre una factura* que se hace a un comprador que paga al contado. Esta reducción se calcula por una simple regla de tres (v. TANTO POR CIENTO, p. 42).

Los problemas de descuento originan dos operaciones conocidas bajo los nombres de *vencimiento común* y *vencimiento medio.*

Vencimiento común. — El problema denominado *vencimiento común* consiste en lo siguiente:

Una persona debe pagar varias cantidades en diversas fechas y propone sustituirlas por un pago único en una fecha determinada. ¿Qué cantidad tendrá que pagar en dicha fecha?

EJEMPLO. *Un negociante ha suscrito tres letras de cambio que vencen: la primera, de 240 000 ptas., a los tres meses; la segunda, de 160 000 ptas., a los seis meses, y la tercera, de 320 000 ptas., a los doce meses, y desea sustituirlas por una sola letra. ¿Qué cantidad tendrá que pagar, siendo el interés del descuento del 5 por ciento?*

El valor efectivo de la única letra será igual a la suma de los valores efectivos de las otras tres.

Valor efectivo de la primera letra: $240\,000 - \frac{240\,000 \times 5 \times 3}{1\,200}$.

Valor efectivo de la segunda letra: $160\,000 - \frac{160\,000 \times 5 \times 6}{1\,200}$.

Valor efectivo de la tercera letra: $320\,000 - \frac{320\,000 \times 5 \times 12}{1\,200}$.

Valor efectivo de la letra única: $C - \frac{C \times 5 \times 8}{1\,200}$.

Se tendrá, pues,

$$C - \frac{C \times 5 \times 8}{1\,200} = 240\,000 - \frac{240\,000 \times 5 \times 3}{1\,200} + 160\,000 - \frac{160\,000 \times 5 \times 6}{1\,200} + 320\,000 - \frac{320\,000 \times 5 \times 12}{1\,200}$$

ó $\frac{29\,C}{30} = 697.000$, de donde $C = \frac{697\,000 \times 30}{29}$, o sea 721 034 ptas.

Obsérvese que la fecha seleccionada para la equivalencia de las letras es convencional y que habría podido tomarse, por ejemplo, la fecha del vencimiento de la letra única.

Vencimiento medio. — En este caso se conoce el valor nominal de la letra única y lo que se trata de calcular es la fecha del vencimiento.

EJEMPLO. *Un negociante ha suscrito tres letras:*
la primera de 80 000 ptas., que vence a los 40 días,
la segunda de 120 000 " " " " " 70 " y
la tercera de 100 000 " " " " " 90 " ;
desea reemplazarlas por una letra única por un importe equivalente a la suma de las otras tres. ¿Cuál será la fecha del vencimiento, siendo el interés del descuento el 6%?

Como en el caso anterior, *el valor efectivo de la única letra es la suma de los valores efectivos de las otras tres.*

Si llamamos t el tiempo expresado en días, correspondiente a la letra única, se tendrá:

Valor efectivo de la 1ª letra: $80\,000 - 80\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{40}{360}$.

" " " " 2ª " $120\,000 - 120\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}$.

" " " " 3ª " $100\,000 - 100\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}$.

" " " letra única: $300\,000 - 300\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{t}{360}$.

Se tendrá, pues,

$$300\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{t}{360} = 80\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{40}{360} + 120\,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{70}{360} + 100\,000 \times \frac{6}{90} \times \frac{90}{360},$$

o sea $300\,000\,t = 80\,000 \times 40 + 120\,000 \times 70 + 100\,000 \times 90$.

De donde se deducirá: $t = 68\frac{2}{3}$, o sea $t = 69$ días.

OBSERVACIONES. 1° El tiempo buscado es independiente del tanto por ciento y de la fecha escogida para la equivalencia de las letras.

2° El razonamiento anterior puede aplicarse evidentemente al caso en que el valor nominal de la letra única no es la suma de los valores nominales de las letras suscritas.

Cuando el valor nominal de la letra única es la suma de los valores de las otras letras basta, como ya se ha visto, escribir:

Descuento de la letra única = suma de los descuentos de las diferentes letras.

Regla de aligación (mezclas) y aleaciones

DEFINICIONES. Se llama **mezcla** a la unión íntima de dos o más substancias en proporción arbitraria, conservando cada una de ellas su propia naturaleza. Cuando la mezcla se efectúa con dos metales fundidos, recibe el nombre de **aleación.**

Precio de una substancia o de una mezcla es el valor que corresponde a una unidad de ella. *El precio de la mezcla se llama precio medio.*

Valor de una substancia o de una mezcla *es el producto de su precio por el número de sus unidades.*

Se llama **ley de una aleación** *cualquiera al número que indica la relación entre el peso del metal fino que contiene y su peso total,* o, lo que es lo mismo, al número que expresa el peso del metal fino contenido en la unidad de peso. Si se representa por l dicha ley, por p el peso del metal fino y por P el peso de la aleación, se tendrá:

$$l = \frac{p}{P}.$$

Con esta igualdad se puede determinar uno de sus tres elementos, conocidos los otros dos. La ley, que es independiente del peso de la aleación, *se expresa en milésimas,* con arreglo al sistema decimal, de forma que si se toma por unidad el kilogramo, la ley de una aleación será igual a tantas milésimas como gramos de metal fino haya en dicho peso.

La *regla de aligación* tiene por objeto resolver los dos problemas siguientes:

1° *Conociendo las cantidades que entran en una mezcla o aleación y sus precios o leyes respectivos, determinar el precio de dicha mezcla o la ley de la aleación.*

2° *Conocido el precio de una mezcla o la ley de una aleación y los de las substancias que la forman, hallar las cantidades que deben mezclarse o alearse.*

En el primer caso, la regla de aligación se llama *directa;* en el segundo, *inversa.*

Mezclas

Regla de aligación directa. — *Conociendo las cantidades que entran en una mezcla y sus precios respectivos, determinar el precio de dicha mezcla.*

Sean $c, c', c'' \ldots c_n$ las cantidades que se mezclan y $p, p', p'' \ldots p_n$ sus precios respectivos, y llamemos p_m al precio de la mezcla que se desea obtener.

Es evidente que el valor de la mezcla deberá ser igual a la suma de los valores de las cantidades mezcladas, y que, por definición, el valor de una substancia cualquiera es el producto de su precio por la cantidad que contiene. Se tendrá, pues:

$$p_m\,(c + c' + c'' + \ldots + c_n) = p \cdot c + p' \cdot c' + p'' \cdot c'' + \ldots + p_n c_n.$$

De donde resultará:

$$p_m = \frac{p \cdot c + p' \cdot c' + p'' \cdot c'' + \ldots p_n c_n}{c + c' + c'' + \ldots + c_n} = \frac{\Sigma\, p_k c_k}{\Sigma\, c_k}.$$

Considerando las fracciones $\frac{pc}{c}, \frac{p'c'}{c'}, \ldots, \frac{p_n c_n}{c_n}$, se ve que se trata de un precio medio. Si $c = c' = c'' = \ldots = c_n$, se obtendría:

$$p_m = \frac{\Sigma p_k c_k}{n},$$

es decir, la media aritmética de los precios.

Por consiguiente, *para hallar el precio de una mezcla se multiplican las cantidades mezcladas por sus precios respectivos y la suma de estos productos se divide por la suma de dichas cantidades.*

EJEMPLO. *Un comerciante compra 45 kg de café, a 500 ptas. el kg, 36 kg a 600 ptas. el kg y 27 kg a 750 ptas. ¿Cuál será el precio de coste de la mezcla?*

En virtud de la regla anterior se tendrá:

$$\text{Precio de coste del kilo de mezcla} = \frac{\text{precio total de compra}}{\text{cantidad comprada}} =$$

$$= \frac{500 \times 45 + 600 \times 36 + 750 \times 27}{45 + 36 + 27} = 596 \text{ ptas.}$$

Regla de aligación inversa. — *Conocido el precio de una mezcla y los de las substancias que la integran, hallar las cantidades que deben mezclarse.*

Distingamos dos casos, según sean dos o más las substancias que integran la mezcla.

1° *Supongamos que sólo se desea mezclar dos substancias.* Sean p_1 y p_2 sus precios respectivos, p_m el precio medio o precio de la mezcla, c_1 la cantidad de la primera substancia y c_2 la cantidad, por determinar, de la segunda.

Si $p_1 < p_m < p_2$, por cada unidad de c_1, de precio p_1, que se venda al precio p_m, se ganará $p_m - p_1$, mientras que por cada unidad que se venda de c_2, de precio p_2, al precio p_m se perderá $p_2 - p_m$. Para compensar las pérdidas y ganancias se tendrá que verificar:

$$c_1 (p_m - p_1) = c_2 (p_2 - p_m), \text{ o sea } \frac{c_1}{p_2 - p_m} = \frac{c_2}{p_m - p_1}, \text{ luego}$$

$$c_2 = c_1 \frac{p_m - p_1}{p_2 - p_1}.$$

De estas desigualdades se deduce que:

Las cantidades de las dos substancias que se han de mezclar han de ser inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios respectivos y el precio de la mezcla. Los problemas de aligación inversa pueden resolverse utilizando una disposición sencilla llamada de *restos cruzados*, que da inmediatamente las proporciones de la mezcla.

Ejemplos: 1° *Se tienen dos clases de vinos, cuyos precios respectivos son 48 y 60 P el litro. ¿Qué cantidad habrá que tomar de la primera clase para que, mezclada con 210 litros de la segunda, pueda venderse la mezcla a 51 P el litro?*

Si llamamos c al número de litros de vino de 48 P el litro, se tendrá:

$$\frac{c}{210} = \frac{9}{3}; \text{ de donde } c = \frac{210 \times 9}{3} = 630 \text{ litros.}$$

2° *Se tienen dos clases de vino, de 78 y 64 ptas., respectivamente, el litro.* ¿Qué cantidad habrá que tomar de cada una de ellas para que 700 litros de mezcla puedan venderse al precio de 70 ptas. el litro?

Llamando c y c_1 al número de litros a 78 y 64 ptas. el litro, respectivamente, tendremos:

c ⟶ $70 - 64 = 6$ ptas.

c_1 ⟶ $78 - 70 = 8$ ptas.

$$\text{De donde } \frac{c}{c_1} = \frac{6}{8} \text{ y } \frac{c + c_1}{c_1} = \frac{6 + 8}{8}.$$

$$\text{Como } c + c_1 = 700, \text{ tendremos } c_1 = \frac{700 \times 8}{14} = 400,$$

$$\text{y} \qquad c = \frac{400 \times 6}{8} = 300.$$

Cuando se tengan que mezclar más de dos substancias, habrá que resolver el problema tomándolas de dos en dos, de modo que sus precios comprendan el precio medio, repitiéndose esta operación hasta considerarlas todas. Tendremos así una solución para cada par de substancias, y la suma de las cantidades parciales de cada una será la cantidad de ella que ha de entrar en la mezcla.

Aleaciones

Los problemas de las aleaciones se resuelven análogamente, por la misma *regla de aligación,* sin más que sustituir los conceptos de cantidad y precio por el de *peso del lingote* y *ley,* respectivamente.

Daremos a continuación dos ejemplos de problemas, uno del tipo directo, es decir, la determinación de la ley de una aleación, y otro de tipo inverso, o sea de obtención de la proporción de metales que entran en la aleación.

Determinación de la ley de una aleación. — Problema. *Hallar la ley de la aleación obtenida fundiendo tres lingotes de oro que pesan respectivamente 0,800 kg, 0,200 kg y 0,400 kg y cuyas leyes respectivas son 0,750, 0,600 y 0,900.*

Masa de oro puro contenida en el 1er lingote: $0{,}800 \times 0{,}750 = 0{,}600$ kg.
" " 2° lingote: $0{,}200 \times 0{,}600 = 0{,}120$ kg.
" " 3er lingote: $0{,}400 \times 0{,}900 = 0{,}360$ kg.

$$\text{Ley de la aleación} = \frac{0{,}600 + 0{,}120 + 0{,}360}{0{,}800 + 0{,}200 + 0{,}400} = \frac{1{,}080}{1{,}400} = 0{,}771$$

por defecto.

Proporción de metales que entran en una aleación. — Problema. *Dadas dos aleaciones de oro, de leyes respectivas 0,920 y 0,750, hallar la masa que hay que tomar de cada una de ellas para formar un lingote de 680 gramos de peso y 0,840 de ley.*

Utilizando el método de restos cruzados del párrafo anterior se tendrá, llamando c y c_1 a las masas respectivas:

c ⟶ $0{,}840 - 0{,}750 = 0{,}090$

c_1 ⟶ $0{,}920 - 0{,}840 = 0{,}080$, de donde $\frac{c}{c_1} = \frac{9}{8}$;

$$\frac{c + c_1}{c_1} = \frac{17}{8}; \text{ como } c_1 + c_2 = 680, \text{ se tendrá:}$$

$$c_1 = 320 \text{ g}, \quad c = 360 \text{ g}.$$

Afinación de una aleación. — Los problemas de afinación de una aleación, para aumentar su ley, o bien, al contrario, para rebajarla, añadiendo metal fino o metal pobre, respectivamente, se resuelven como casos particulares del problema inverso, teniendo en cuenta que la ley del metal fino es, por definición, la unidad, y la de cualquier otro metal diferente, cero.

Problema. *¿Qué masa de plata habrá que añadir a una aleación de plata y cobre de 990 g de peso y ley 0,805 para aumentar ésta a 0,835?*

1° El problema puede resolverse como el anterior, considerando la plata pura como de ley 1;

2° Se puede operar también de la manera siguiente:

La masa de cobre no varía, y es

$$990 \times 0{,}195 = 193{,}05 \text{ g}.$$

Como la ley de la aleación que se quiere formar es de 0,835, esta masa de cobre representa las $\frac{165}{1\,000}$ del lingote que resulte.

$$\text{Masa del segundo lingote} = \frac{193{,}05 \times 1\,000}{165} = 1\,170 \text{ g}.$$

Habrá, pues, que añadir $1\,170 - 990 = 180$ g de plata pura.

Análisis combinatorio

Variaciones. Permutaciones. Combinaciones. Números combinatorios. — **Probabilidades:** Probabilidad de un suceso. Probabilidad compuesta

Variaciones. — *Se llaman* **variaciones** *de orden* n *de* m *elementos todos los grupos de* n *elementos que pueden formarse de todas las maneras posibles con los* m *elementos dados, de forma que dos grupos cualesquiera difieran en algún elemento o, si constan de los mismos, en su orden de colocación.*

Para calcular el número de variaciones de m elementos diferentes tomados n a n, que se indica por V_m^n, o por $V_{m,n}$, estudiemos la relación que liga $V_{m,n}$ y $V_{m,n-1}$. Supongamos conocidas las variaciones de m elementos tomados $n - 1$ a $n - 1$, o sea $V_{m,n-1}$; una cualquiera de estas variaciones constará de $n - 1$ elementos, escogidos entre los m considerados. Por consiguiente, el número de elementos que no se han utilizado para formar esta variación será: $m - (n - 1) = m - n + 1$. Resultará, pues, que cada una de las variaciones de orden $n - 1$ da lugar a $m - n + 1$ variaciones de orden n, que se obtendrán añadiendo sucesivamente a cada una de las variaciones de orden $n - 1$ los $m - n + 1$ elementos restantes. Por consiguiente:

$$V_{m,n} = (m - n + 1)\, V_{m,n-1}.$$

Utilizando esta fórmula de recurrencia para $n = 2$, $n = 3$, etc., se tendrá sucesivamente

$$V_{m,2} = (m - 1)\, V_{m,1}$$
$$V_{m,3} = (m - 2)\, V_{m,2} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_{m,n-1} = (m - n + 2)\, V_{m,n-2}$$
$$V_{m,n} = (m - n + 1)\, V_{m,n-1}.$$

Multiplicando miembro a miembro todas estas igualdades, y suprimiendo los factores comunes, se tendrá, después de tener en cuenta que $V_{m,1} = m$.

$$V_{m,n} = m\,(m - 1)\,(m - 2) \ldots (m - n + 2)\,(m - n + 1).$$

El número de variaciones de orden n *de* m *elementos es igual al producto de* n *factores consecutivos decrecientes, contados a partir de* m.

Ejercicio. *¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse?* Este número será el número de variaciones que puedan formarse con diez cifras tomadas cinco a cinco. O sea

$$V_{10,5} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240.$$

Permutaciones. — *Se llaman* **permutaciones** *de* m *elementos los grupos de* m *que pueden formarse con dichos elementos, de forma que dos grupos cualesquiera difieran entre sí, por su orden de colocación.*

Designemos por P_m el número de permutaciones que pueden formarse con m letras, por ejemplo.

Con dos letras, a y b, se tendrá, evidentemente: ab y ba. Por consiguiente $P_2 = 2$. Con tres letras, a, b y c, se formarán las permutaciones colocando la letra c en cada uno de los dos grupos anteriores ab y ba de todas las maneras posibles. Se tendrá

$$\begin{matrix} abc, & acb, & cab, \\ bac, & bca, & cba. \end{matrix}$$

En este cuadro figuran todas las permutaciones de las tres letras a, b, c, figurando cada una de ellas una sola vez. En efecto, si en una cualquiera de las permutaciones de las tres letras se suprime la letra c, se obtendrá de nuevo una de las permutaciones de las letras a y b; por ejemplo, bca dará ba. Como hemos partido de esta última, introduciendo c de todas las maneras posibles, el cuadro contendrá todas las permutaciones de las tres letras. Por otra parte, dos permutaciones cualesquiera del cuadro son diferentes; las que están en una misma línea, difieren en el lugar de c, y las que están en líneas diferentes, en el orden de las letras a y b.

En resumen, se tiene: $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

El razonamiento sería análogo para cuatro letras, para cinco, etc., y se tendrá

$$P_m = P_{m-1} \cdot m.$$

Utilizando esta fórmula de recurrencia, se tendrá

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 \cdot 2 \\ P_3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ P_4 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &\dots\dots \\ P_m &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m. \end{aligned}$$

El producto de los m primeros números enteros se llama factorial de m, y se designa por la notación $m!$

Por consiguiente, $P_m = m!$

El número de permutaciones que pueden formarse con m *elementos es igual al producto de los* m *primeros números enteros.*

Por ejemplo, 12 objetos pueden permutarse de 12! maneras diferentes, o sea 479 001 600. Las 25 letras del alfabeto pueden permutarse de 15 511 210 043 330 985 984 000 000 maneras diferentes.

Combinaciones. — *Se llaman* **combinaciones** *de orden* n *de* m *elementos todos los grupos de* n *elementos que pueden formarse con ellos de forma que dos grupos cualesquiera difieran en algún elemento.*

Se deduce de la definición que dos grupos de n elementos no se consideran diferentes si en ellos figuran los mismos elementos dispuestos en forma diferente. Es decir, que en virtud de la definición, si en cada uno de los grupos formados se permutan sus elementos de todas las maneras posibles, se obtendrán las variaciones de orden n de m elementos.

Designemos por $C_{m,\,n}$ el número de combinaciones que pueden formarse con m elementos tomados n a n. Efectuando las permutaciones indicadas, se formará $n!$ para cada grupo y se tendrá por lo tanto

$$C_{m,\,n} \cdot n! = V_{m,\,n},$$

de donde se deduce

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{n!} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\dots\,(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Números combinatorios. — En el análisis combinatorio y en muchas cuestiones de aritmética y de análisis desempeñan un importante papel los números de la forma $\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$, llamados *números combinatorios* que suelen representarse por la notación $\dbinom{m}{n}$, que se lee m sobre n. Por definición:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

I. En virtud de la anterior definición resulta:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n},$$

luego:

Los números combinatorios de igual numerador y órdenes complementarios son iguales. Esto se observa también directamente, si se tiene en cuenta que cada grupo de n elementos elegidos entre los m deja un grupo restante formado por $m - n$ elementos, y recíprocamente; por consiguiente, las combinaciones de ambos órdenes están en correspondencia biunívoca y hay el mismo número de unas que de otras.

II. Clasifiquemos todas las combinaciones n-arias de los m elementos $a_1, a_2, \dots a_m$, según contengan o no al elemento a; cada combinación n-aria que contenga a se obtiene agregando a a_1 un grupo cualquiera de $n-1$ elementos elegidos entre los $a_2, a_3, \dots a_m$; y cada combinación que no lo contenga, eligiendo un grupo de n elementos entre $a_2, a_3, \dots a_m$. Por lo tanto:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}.$$

Esta relación fundamental permite calcular rápidamente los números combinatorios de numerador m, conociendo los de $m - 1$. Suelen escribirse en filas sucesivas en la forma siguiente

$m = 1$	1 1
$m = 2$	1 2 1
$m = 3$	1 3 3 1
$m = 4$	1 4 6 4 1
$m = 5$	1 5 10 10 5 1
$m = 6$	1 6 15 20 15 6 1
....	....

La *ley de formación* de este triángulo aritmético, llamado *triángulo de Tartaglia*, es la siguiente:

Cada elemento es la suma de los dos que tiene encima, una vez escritas las dos oblicuas 1, 1, ... 1.

Probabilidades

Probabilidad de un suceso. — *Se llama* **probabilidad** *de un suceso a la relación entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles (favorables y desfavorables).*

Si una urna contiene 5 bolas blancas y 7 bolas negras, la probabilidad de que salga una bola blanca es $\dfrac{5}{12}$, puesto que de los 12 casos posibles hay 5 favorables al suceso considerado.

Para calcular la probabilidad de un suceso, basta conocer el número total de casos posibles y el de los favorables.

EJEMPLOS. 1º *¿Cuál es la probabilidad de que salga el 5 en una jugada de dados?*

El número de casos posibles es 6, puesto que un dado tiene 6 caras, y el número de casos favorables es sólo 1: por consiguiente la probabilidad será de $\dfrac{1}{6}$.

2.º *¿Cuál es la probabilidad de que 3 cifras diferentes escritas al azar representen un número imaginado?*

El número total de casos posibles es el número de los números de tres cifras que pueden formarse con las diez cifras. Este número es el de variaciones de 10 objetos tomados 3 a 3, o sea

$$V_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Como el número de casos favorables es sólo uno, la probabilidad es de $\dfrac{1}{720}$.

3º *¿Cuál es la probabilidad de que 3 números, tomados al azar entre los 10 primeros, sean tres números imaginados?*

El número total de casos posibles es el de los grupos que pueden formarse con tres números de los diez primeros, de forma que en dos grupos distintos no figuren los mismos números, o sea el de combinaciones de 10 objetos tomados 3 a 3. Sabemos que este número es igual a

$$C_{10,3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$$

Como sólo es favorable uno de los casos, la probabilidad será de $\dfrac{1}{120}$.

Probabilidad compuesta. — *Cuando se trata de una serie de sucesos, la probabilidad se llama* **compuesta.**

Sea $\dfrac{p}{q}$ la probabilidad del primer suceso y $\dfrac{p'}{q'}$ la probabilidad de que se produzca el segundo una vez ocurrido el primero. El número total de casos posibles es $q \cdot q'$ y el de casos favorables $p \cdot p'$. La probabilidad buscada será

$$\frac{p \cdot p'}{q \cdot q'} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'}.$$

La probabilidad compuesta es el producto de las probabilidades simples.

EJEMPLO. *¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar una moneda salga cara dos veces seguidas?*

La probabilidad para cada uno de los casos es $\dfrac{1}{2}$. La probabilidad pedida es

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

En general, la probabilidad de que salga cara m veces seguidas es $\dfrac{1}{2^m}$.

OBSERVACIÓN. Puede determinarse la probabilidad de uno de los sucesos componentes si se conoce la probabilidad de los restantes y la del suceso compuesto.

Si $\dfrac{p}{q}$ es la probabilidad de un primer suceso, $\dfrac{p'}{q'}$ la del segundo, cuando ha sucedido el primero, y $\dfrac{P}{Q}$ la del suceso compuesto, se tendrá:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{P}{Q}; \qquad \text{de donde } \frac{p'}{q'} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{q}{p}.$$

Aplicación. *En cierto lugar se ha observado que, en 219 días, reina viento del sudoeste durante un promedio de 45; también se ha observado que la lluvia coincide con ese viento 9 días de 73. ¿Cuál es la probabilidad de que el viento del sudoeste provoque la lluvia en dicho lugar?*

Con arreglo a las observaciones, la probabilidad de que sople viento del sudoeste es $\frac{p}{q} = \frac{45}{219}$, y la del suceso compuesto (viento del sudoeste y lluvia) $= \frac{9}{73} \frac{P}{Q}$.

La probabilidad pedida será

$$\frac{p'}{q'} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{9}{73} \cdot \frac{219}{45} = \frac{3}{5}.$$

Por consiguiente, de cada cinco días que reina viento del sudoeste llueve tres días por término medio. Como la probabilidad hallada es mayor que $\frac{1}{2}$, puede llegarse a la conclusión de que en ese lugar el viento del sudoeste tiende a provocar la lluvia.

Progresiones

Progresiones aritméticas: Interpolación de medios aritméticos. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada. — **Progresiones geométricas:** *Interpolación de medios geométricos.* Suma de los términos de una progresión geométrica limitada. *Progresión geométrica ilimitada.* Progresión creciente. Progresión decreciente. Problema del juego de ajedrez

Progresiones aritméticas

Definiciones. *Una* **progresión aritmética** *es una sucesión de números tales que cada uno de ellos es igual al anterior, aumentado en una cantidad constante, que se denomina* **razón** *de la progresión.*

Si la razón es positiva, la progresión es *creciente*, y si es negativa, *decreciente.*

Cada uno de los números es un **término** de la progresión.

Los números 2, 5, 8, 11, 14, 17... forman una progresión aritmética creciente de razón 3.

$4, \frac{18}{5}, \frac{16}{5}, \frac{14}{5}, \frac{12}{5}$ ..., forman una progresión aritmética decreciente de razón $-\frac{2}{5}$.

Una progresión aritmética puede ser **limitada** o **ilimitada**, según el número de sus términos sea finito o infinito.

Teorema. *En una progresión aritmética un término cualquiera es igual al primer término más la razón multiplicada por el número de términos que preceden al término considerado.*

Sea una progresión aritmética cualquiera a, b, c, d... de razón r. En virtud de la definición, se tendrá:

$b = a + r$; $c = b + r = a + 2r$; $d = c + r = a + 3r$; etc.

El teorema es válido para los primeros términos; demostremos que si se verifica para un término h de orden p cualquiera, también se verifica para el término i de orden $p + 1$. En efecto, se tiene $h = a + (p - 1)r$, y por consiguiente:

$$i = h + r = a + pr.$$

De una manera general, si l es el término *enésimo*, se tendrá

$$l = a + (n - 1)r.$$

Ejercicio. *Calcular el 11º término de una progresión aritmética de primer término 2 y razón —3.*

El 11º término, l, tiene diez términos que le preceden, y la fórmula anterior da

$$l = 2 + 10\,(-3) = -28.$$

Interpolación de medios aritméticos. — Definición. *Interpolar* n *medios aritméticos entre dos números dados* A *y* B, *es formar una progresión aritmética de* n + 2 *términos cuyo primer término, sea* A *y cuyo último término sea* B.

Si r es la razón de la progresión buscada, se tendrá, en virtud del teorema anterior,

$$B = A + (n + 1)r,$$

de donde se deduce

$$r = \frac{B - A}{n + 1}.$$

Ejemplo. *Interpolar 6 medios aritméticos entre 4 y 25.*

La razón de la progresión buscada será $r = \frac{25 - 4}{6 + 1} = \frac{21}{7} = 3$,

y los términos de la progresión serán los siguientes:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25.

Observaciones. 1º Si se tiene una progresión aritmética y se interpola el mismo número de medios entre los términos consecutivos, las progresiones sucesivas, escritas unas a continuación de otras, forman una misma y única progresión, puesto que en cada progresión la razón es la misma y, además, el último término de cada una de ellas es el primero de la siguiente.

2º Si se interpolan n medios entre los números A y B, la razón de la progresión obtenida es $\frac{B - A}{n + 1}$, que es evidentemente la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión. *Puede interpolarse un número de medios suficientemente grande para que la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión obtenida sea tan pequeña como se quiera.*

Si designamos por ϵ un número tan pequeño como se quiera, podrá determinarse n de forma que se tenga $\left| \frac{B - A}{n + 1} \right| < \epsilon$.

Se tomará $n + 1 > \frac{|B - A|}{\epsilon}$ y $n > \frac{|B - A|}{\epsilon} - 1$.

n será un número entero mayor que $\frac{|B - A|}{\epsilon} - 1$.

Teorema. *En una progresión aritmética limitada, uno cualquiera de sus términos es igual al último término menos la razón multiplicada por el número de términos posteriores al término considerado.*

Sea la progresión aritmética limitada

a, b, c, d, ..., i, h, k, l, que consta de n términos y cuya razón es r.

Si se lee la progresión de derecha a izquierda: l, k, h ..., se tiene una progresión aritmética de razón $-r$, y el término que en la primera progresión va seguido de p términos, será el término $(p + 1)$ésimo de la segunda progresión, que será igual a $l - pr$, lo que demuestra el teorema.

Teorema. *En toda progresión aritmética limitada, la suma de dos términos que equidisten de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos.*

Sea la progresión aritmética limitada, de razón r

$$a, b, c, d, ..., h, k, l.$$

Sea e el término que está precedido de p términos.

Sea f el término que está seguido de p términos;

En virtud del teorema anterior, $e = a + pr$;

$f = l - pr$.

Sumando miembro a miembro estas igualdades, se tendrá

$$e + f = a + l$$

y el teorema queda demostrado.

Observación. En una progresión aritmética limitada de un número impar de términos, el término central es igual a la semisuma de los términos extremos.

Sea la progresión limitada a, b, c, ..., h, k, l, de razón r.

Supongamos que consta de un número impar de términos; en este caso, habrá un término e tal que el número de términos que le preceden será igual al número de términos que le siguen. Si designamos por p este número de términos, se tendrá

$$e = a + pr$$
$$e = l - pr$$

de donde $2e = a + l$ y $e = \frac{a + l}{2}$.

Suma de los términos de una progresión aritmética limitada. — Teorema. *La suma de los términos de una progresión aritmética limitada es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos de la progresión.*

Sea la progresión aritmética

$$a, b, c, d, ..., g, h, k, l,$$

que consta de n términos.

Sea S la suma buscada:

$$S = a + b + c + d + ... + g + h + k + l.$$

que podrá también escribirse, invirtiendo el orden de los términos

$$S = l + k + h + g + ... + d + c + b + a.$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades y agrupando los términos de dos en dos:

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + ...$$

Cada paréntesis es la suma de dos términos equidistantes de los extremos, que es igual a $(a + l)$, y como la progresión consta de n términos, en el segundo miembro de la igualdad habrá n grupos de términos iguales a $(a + l)$. Por lo tanto

$2S = (a + l)n$; y, por consiguiente,

(1) $$S = \frac{(a + l)n}{2}.$$

OBSERVACIÓN. Una progresión aritmética limitada se define frecuentemente por su primer término, su razón y el número de términos. Si se quiere calcular rápidamente la suma de sus términos, habrá que calcular l con arreglo a la fórmula demostrada en la pág. 47.

$$l = a + (n - 1)r.$$

Si en la fórmula (1) se sustituye l por este valor, la suma S quedará expresada en función del primer término a, de la razón r y del número de términos n, obteniéndose

$$(2) \qquad S = \frac{[2a + (n - 1)\, r]\, n}{2}.$$

APLICACIONES. 1º *Suma de los* n *primeros números enteros.*
Los n primeros números enteros 1, 2, 3, 4, 5... n forman una progresión aritmética creciente de razón 1, primer término 1 y último término n. Aplicando la fórmula (1), se obtiene para la suma de los términos el valor

$$S = \frac{1}{2}\, n\, (n + 1).$$

En particular, la suma de los 100 primeros números enteros vale

$$S = \frac{100}{2} \times 101 = 101 \times 50 = 5\,050.$$

2º *Suma de los* n *primeros números pares.*
Los n primeros números pares 2, 4, 6, 8, 10... forman una progresión aritmética de razón 2. Aplicando la fórmula (2), se tendrá

$$S = \frac{[4 + 2\,(n - 1)]n}{2} = \frac{(2 + 2\,n)\, n}{2} = (n + 1)\, n.$$

En particular, la suma de los 100 primeros números pares vale

$$101 \times 100 = 10\,100.$$

3.º *Suma de los* n *primeros números impares.*
Los n primeros números impares 1, 3, 5, 7, 9 11 ... forman una progresión aritmética de razón 2. Aplicando la fórmula (2), se tendrá

$$S = \frac{[2 + 2\,(n - 1)]\, n}{2} = \frac{2\, n.\, n}{2} = n^2.$$

En particular, la suma de los 100 primeros números impares vale

$$100 \times 100 = 10\,000.$$

4º *Suma de los cuadrados de los* n *primeros números enteros.*
Habrá que calcular

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Como ya sabemos

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

En esta identidad, como n es un número cualquiera, se le puede reemplazar sucesivamente por los números enteros sucesivos desde 1 a n.
Se obtienen de esta forma las igualdades siguientes:

$$2^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1;$$
$$3^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1;$$
$$4^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(n + 1)^3 = n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1.$$

Sumando miembro a miembro todas estas igualdades, y designando por S_2 la suma buscada y por S_1 la suma de los n primeros números se obtendrá, después de simplificar:

$$(n + 1)^3 = 1 + 3\, S_2 + 3\, S_1 + n,$$

o sea, reemplazando S_1 por su valor

$$(n + 1)^3 = 1 + 3\, S_2 + \frac{3n\,(n + 1)}{2} + n,$$

de donde

$$3S_2 = (n + 1)^3 - \frac{3n\,(n + 1)}{2} - (n + 1) =$$
$$= \frac{2\,(n + 1)^3 - 3n\,(n + 1) - 2\,(n + 1)}{2} =$$
$$= \frac{(n + 1)\,[2\,(n + 1)^2 - 3n - 2]}{2},$$

y finalmente

$$S_2 = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6}.$$

En particular, la suma de los cuadrados de los 10 primeros números enteros vale

$$S_2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385.$$

Progresiones geométricas

DEFINICIONES. *Una* **progresión geométrica** *es una sucesión de números tales que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante denominada* **razón** *de la progresión.*
Los números 2, 6, 18, 54... forman una progresión geométrica de razón 3. Cada uno de los números que forman la progresión se denomina **término** de la progresión.

Cuando se multiplica un número positivo por otro número mayor que 1, el producto es mayor que el multiplicando, mientras que si el multiplicador es menor que 1 el producto será menor que el multiplicando. Por consiguiente, si la razón de una progresión geométrica, cuyo primer término es positivo, es superior a la unidad, la progresión se llama *creciente*, y en el caso contrario, *decreciente*.

$$3,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{64},\ \frac{3}{256}\ \dots$$

es una progresión geométrica decreciente de razón $\frac{1}{4}$.

Una progresión geométrica puede ser *limitada* o *ilimitada* según que el número de términos sea finito o infinito.

TEOREMA. *En toda progresión geométrica, uno cualquiera de sus términos es igual al primero multiplicado por la razón elevada a una potencia igual al número de términos que le preceden.*
Sea la progresión geométrica $a, b, c, d, \dots, l, \dots$ de razón q.
Por definición, se tendrá:

$$b = aq; \quad c = bq = aq^2; \quad d = cq = aq^3; \text{ etc.}$$

Si l es el término enésimo de la progresión, se tendrá

$$l = aq^{n-1}.$$

EJERCICIO. *Calcular el 12º término de una progresión de razón* $\frac{1}{2}$ *y de primer término 4.*

Si l es el término 12º, $l = 4 \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{4}{2\,048} = \frac{1}{512}$.

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Interpolar n *medios geométricos entre dos números* a *y* b *es formar una progresión geométrica que tenga* n + 2 *términos, de primer término* a *y de último término* b.
Si q es la razón de la progresión buscada, se tendrá, en virtud del teorema anterior: $b = aq^{n+1}$,

de donde $q^{n+1} = \frac{b}{a}$, y $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.

EJEMPLO. *Interpolar 5 medios geométricos entre 3 y 198.*

$$q = \sqrt[6]{\frac{192}{3}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

La sucesión buscada es

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

OBSERVACIONES. 1º Si se interpola un medio entre dos números a y b, este medio será $a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab}$, que es la media geométrica o proporcional.
2º Consideremos una progresión geométrica e interpolemos el mismo número de medios n entre los términos consecutivos. El cociente entre dos términos consecutivos es la razón q de la progresión, y, en virtud de la fórmula anterior, todas las progresiones obtenidas tendrán la misma razón, $\sqrt[n+1]{q}$, y el primer término de una de ellas será el último término de la otra, de forma que se obtiene una progresión única.
3º Cuando se interpola un mismo número n de medios entre los términos consecutivos de una progresión geométrica de razón q, la nueva progresión obtenida tiene como razón $\sqrt[n+1]{q}$.

Se puede tomar n suficientemente grande para que la diferencia entre dos términos consecutivos de la nueva progresión sea menor que cualquier cantidad previamente fijada.

TEOREMA. *En toda progresión geométrica limitada, uno cualquiera de sus términos es igual al último término dividido por la razón elevada a una potencia igual al número de términos que siguen al término considerado.*
Este teorema se demuestra en forma análoga a su correspondiente para las progresiones aritméticas.

TEOREMA. *En una progresión geométrica limitada, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de dichos extremos.*
Sea la progresión geométrica limitada $a, b, c, \dots, h, k, l\dots$, de razón q. Sea e el término que está precedido de p términos, y f el término que está seguido de p términos.
En virtud del teorema sobre las progresiones geométricas,

$$e = aq^{p-1} \qquad f = \frac{l}{q^{p-1}}$$

de donde se deduce

$$ef = al.$$

Suma de los términos de una progresión geométrica limitada.
Sea la progresión geométrica a, b, c, ..., h, k, l, de razón q, y S la suma buscada.

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l.$$

Multiplicando ambos miembros por q:

$$Sq = aq + bq + cq + \ldots + hq + kq + lq.$$

Obsérvese que $aq = b$, $bq = c$, etc., de donde se deduce

$$Sq - S = lq - a, \text{ o } (q - 1)\ S = lq - a$$

Si $q \neq 1$, se deducirá S $\left(\dfrac{lq - a}{q - 1}\right)$.

Si $q = 1$, la suma será evidentemente igual a na.

Ejercicio. *Calcular el último término y la suma de los diez primeros términos de la progresión 2, 4, 8, ...*
Se tiene: décimo término $= 2x2^9 = 2^{10} = 1\,024$

y $$S = \frac{2\,(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2\,046.$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA ILIMITADA

Progresión creciente. — Teorema. *Las potencias enteras y positivas de un número mayor que 1:*
1º *Son mayores que 1;*
2º *Van aumentando a medida que aumenta el exponente;*
3º *Crecen indefinidamente si el exponente crece también indefinidamente.*
Sea $1 + \alpha$, siendo α un número cualquiera mayor que 1.
1º y 2º. Siendo n un número entero positivo cualquiera, se tendrá:
$(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)\,(1 + \alpha)\ldots(1 + \alpha) = 1 + n\alpha +$ términos positivos, y por consiguiente: $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$.
Ahora bien, $1 + n\alpha$ es un número mayor que 1, que aumenta al aumentar n.
3º Si A es un número positivo, previamente dado, tan grande como se quiera, podrá siempre calcularse un número n tal que

$$(1 + \alpha)^n > A.$$

Para ello bastará con determinar n de forma que se tenga

$$1 + n\alpha > A$$

lo que da

$$n > \frac{A - 1}{\alpha}.$$

Consecuencia. Los *términos de una progresión geométrica creciente llegan a exceder de cualquier límite cuando el número de términos es suficientemente grande.*
El término general de la progresión es aq^n, y q^n aumenta, superando cualquier límite, cuando n es suficientemente grande, puesto que q es mayor que 1.
En este caso:
La suma de los términos de una progresión geométrica creciente e ilimitada es infinita.

Progresión decreciente. — Teorema. *Las potencias enteras y positivas de un número positivo menor que 1:*
1º *Son menores que 1;*
2º *Disminuyen cuando aumenta el exponente;*
3º *Tienden hacia 0 cuando el exponente aumenta indefinidamente.*

Todo número positivo menor que 1 puede ponerse en la forma $\dfrac{1}{1 + \alpha}$, donde α es un número positivo.

1º y 2º. Consideremos, siendo n un número entero y positivo, la expresión

$$\left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)^n \quad \text{ó} \quad \frac{1}{(1 + \alpha)^n}.$$

$1 + \alpha$ es mayor que 1; $(1 + \alpha)^n$ será, por consiguiente, un número mayor que 1, que aumenta cuando aumenta el exponente. Por lo tanto $\dfrac{1}{(1 + \alpha)^n}$ es un número positivo menor que 1, que disminuye al aumentar n.

3º Si ϵ es un número positivo tan pequeño como se quiera, podrá siempre encontrarse un número n tal que se tenga

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \epsilon, \quad \text{ó} \quad (1 + \alpha)^n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Bastará satisfacer la desigualdad $1 + n\alpha > \dfrac{1}{\epsilon}$, puesto que $(1 + \alpha)^n$ es, como sabemos, mayor que $1 + n\alpha$.

Ahora bien, la desigualdad $1 + n\alpha > \dfrac{1}{\epsilon}$, queda satisfecha para $n > \dfrac{1 - \epsilon}{\alpha\epsilon}$.

Consecuencia. *La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada, de primer término a y razón q, vale* $\dfrac{a}{1 - q}$.

Consideremos primeramente una progresión geométrica decreciente de razón q, y supongámosla limitada a sus n primeros términos.

$$a,\ b,\ \ldots,\ k,\ l.$$

Si S es la suma de estos términos, se tendrá

$$S = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Y podrá escribirse

$$S = a\left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Como q es menor que 1, q^n tiende hacia cero, y si suponemos que n aumenta indefinidamente, se tendrá, en el límite, $S = \dfrac{a}{1 - q}$.

Ejemplo. *Suma de los términos de la progresión ilimitada*

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

Se tiene

$$S = \frac{a}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Aplicaciones. *Hallar la fracción simple generatriz de la fracción decimal periódica pura* 0,3434...
La fracción podrá escribirse

$$\frac{34}{100} + \frac{34}{100^2} + \frac{34}{100^3} \ldots,$$

que es una progresión geométrica ilimitada de razón $\dfrac{1}{100}$ y de primer término $\dfrac{34}{100}$.

$$S = \frac{\frac{34}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{34}{99}.$$

De aquí se deduce la regla dada en aritmética.

Problema del juego de ajedrez. — Según el autor árabe *Al Sefali*, el rey de Persia quiso recompensar al matemático indio *Sessa* por haber descubierto el juego de ajedrez, prometiéndole que le concedería lo que le pidiera. Sessa pidió entonces un grano de trigo por la primera casilla de su tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta, y así sucesivamente. El rey creyó que podría cumplir fácilmente su promesa, quedando muy sorprendido cuando le dijeron que no había bastante trigo en todo su reino para satisfacer la demanda del matemático. En efecto: el número de granos de trigo necesarios para satisfacer a Sessa es igual a la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 2, primer término 1 y número de términos 64, cuya suma es igual a $2^{64} - 1$, o sea

18 446 744 073 709 551 615.

Si toda la superficie de la Tierra se cultivara de trigo, la cosecha recogida en un año no alcanzaría esta cifra.

Logaritmos

Definición del logaritmo de un número. — **Propiedades de los logaritmos:** Logaritmos decimales o vulgares. Mantisa y característica. Forma de escribir los logaritmos. Cálculos logarítmicos. Suma de varios logaritmos. Sustracción de dos logaritmos. Multiplicación de un logaritmo por un número entero. División de un logaritmo por un número entero. — **Disposición y uso de las tablas de logaritmos:** Obtención del logaritmo de un número. Uso de las tablillas P. P. Hallar un número, conocido su logaritmo. — **La regla de cálculo:** Reseña histórica. Principio de la regla de cálculo. Descripción. Operaciones aritméticas. Operaciones con las líneas trigonométricas. Aplicaciones

Definición del logaritmo de un número. — Dadas dos progresiones, una geométrica de primer término 1 y razón $q > 1$, y otra aritmética de primer término 0 y razón r positiva, hagamos corresponder los términos del mismo orden de ambas progresiones, que prolongaremos después en el sentido decreciente, tomando $\dfrac{1}{q}$ como razón de la progresión geométrica escrita en sentido inverso y $-r$ como razón de la progresión aritmética escrita análogamente. Se obtendrán así las siguientes progresiones:

$$\frac{1}{q^n},\ \ldots,\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,$$
$$-nr \quad -2r \quad -r \quad 0 \quad r \quad 2r \quad \ldots \quad nr.$$

Cada término de la progresión aritmética se denomina **logaritmo** *del término correspondiente de la progresión geométrica.*

Interpolemos entre los términos de ambas progresiones un mismo número m de medios, y obtendremos otras dos progresiones, denominándose también logaritmo de cada uno de los términos de la nueva progresión geométrica obtenida el término correspondiente de la progresión aritmética.

Obsérvese, además, que el número m de medios interpolados puede ser lo suficientemente grande para que la diferencia entre dos términos consecutivos de una cualquiera de las progresiones (v. pp. 47 y 48) sea menor que un número, fijado previamente, tan pequeño como se quiera.

Consideremos ahora un número positivo cualquiera A; este número pertenecerá a la progresión geométrica, en cuyo caso su logaritmo está definido, o bien no pertenece a la misma, y entonces, al clasificarle entre los números de esta sucesión estará situado entre dos términos consecutivos de la progresión geométrica: su logaritmo está, por definición, comprendido entre los dos términos correspondientes de la progresión aritmética, y como la diferencia entre dos términos consecutivos de la progresión aritmética puede hacerse menor que cualquier número fijado previamente, tan pequeño como se quiera, resulta que, tomando como logaritmo de A uno cualquiera de los dos términos de la progresión aritmética, se tendrá un valor del logaritmo de A con la aproximación que se desee.

Recíprocamente: Dado un número a cualquiera, positivo o negativo, existe un número A cuyo logaritmo es a. En efecto, si a pertenece a la progresión aritmética, A es el número correspondiente de la progresión geométrica; si a no pertenece, pues, a la progresión aritmética, podrá clasificarse entre los números de esta sucesión, y estará situado entre dos términos consecutivos de la misma. A está situado, por definición, entre los dos términos correspondientes de la progresión geométrica, y como la diferencia entre los términos consecutivos de la progresión geométrica puede hacerse tan pequeña como se quiera, resulta que, tomando como valor de A uno cualquiera de los dos términos de la progresión geométrica, se tendrá un valor aproximado de A, siendo esta aproximación tan grande como sea necesario.

Se deduce de esta definición que:

1º Todo número positivo tiene logaritmo;

2º Los números negativos no tienen logaritmo;

3º El logaritmo de 1 es 0;

4º Todo número mayor que la unidad tiene un logaritmo positivo, y el logaritmo de infinito es infinito;

5º Todo número positivo menor que la unidad tiene un logaritmo negativo, y el logaritmo de cero es $-\infty$;

6º Todo número positivo es el logaritmo de un número mayor que 1, y todo número negativo es el logaritmo de un número positivo menor que 1;

7.º Existen infinitos sistemas de logaritmos, siempre que q y r verifiquen las condiciones: $q > 1$ y $r > 0$.

El logaritmo de un número A se representa por el símbolo log A, que se lee: logaritmo de A.

Definición. — Base de un sistema de logaritmos *es el número cuyo logaritmo, en el sistema considerado, es la unidad. El sistema queda determinado una vez conocida su base.*

Propiedades de los logaritmos

TEOREMA. *El logaritmo de un producto de varios factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores de dicho producto.*

Sea el producto $a \cdot b \cdot c$, siendo a, b, c tres números positivos.

Si a, b y c son términos de la progresión geométrica, podrá escribirse

$$a = q^n, \quad b = q^{n'}, \quad c = q^{n''},$$

de donde se deduce que

$$abc = q^{n + n' + n''}.$$

El producto abc pertenecerá por lo tanto a la progresión geométrica y se tendrá

$$\log abc = (n + n' + n'')\, r = nr + n'r + n''r = \log a + \log b + \log c.$$

Si a, b y c no son términos de la progresión geométrica estarán comprendidos entre términos de dicha progresión tan próximos como se quiera, y el teorema será válido sustituyendo uno cualquiera de estos términos por el factor correspondiente. Admitiremos que el teorema es cierto para los factores a, b y c.

TEOREMA. *El logaritmo de la potencia de un número es igual al logaritmo de dicho número multiplicado por el exponente de la potencia.*

Es decir, $\log a^n = n \log a$, que es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Por ejemplo $\log 7^4 = 4 \log 7$.

TEOREMA. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea el cociente $\frac{a}{b}$ y hagamos $\frac{a}{b} = c$, de donde $a = bc$, y $\log a = \log b + \log c$. Por consiguiente, $\log c = \log a - \log b$.

Ejemplo:

$$\log \frac{5{,}4}{7{,}32} = \log 5{,}4 - \log 7{,}32.$$

TEOREMA. *El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo de dicho número dividido por el índice del radical.*

Sea $\sqrt[n]{a}$, y hagamos $\sqrt[n]{a} = b$, de donde $a = b^n$, y $\log a = n \log. b$.

Por consiguiente: $\log b = \frac{1}{n} \cdot \log a$.

Ejemplo:

$$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log. 7.$$

OBSERVACIÓN. Acabamos de ver cómo pueden utilizarse los logaritmos. Supongamos una tabla (más adelante veremos que existe) que contenga en una parte los números y en otra sus logaritmos, y tratemos de calcular $x = \sqrt[5]{A}$.

Se tendrá

$$\log x = \frac{1}{5} \log A.$$

Se calculará el segundo miembro, se obtendrá log x, y la tabla nos dará x.

En virtud de los teoremas anteriores, la multiplicación de varios números quedará sustituida por la suma de sus logaritmos; la elevación a potencias, por la multiplicación de un número por su logaritmo, etc.

APLICACIÓN. *Calcular el número* $x = \dfrac{A^3 \sqrt{B}}{C \sqrt[3]{D}}$, *siendo* A, B, C *y* D *números positivos cualesquiera.*

Se escribirá

$$\log x = 3 \log A + \frac{1}{2} \log B - \log C - \frac{1}{3} \log D$$

Se calculará el segundo miembro y se deducirá el valor de x.

Logaritmos decimales o vulgares. — Son los más sencillos y los que se utilizan en la práctica; están definidos por las dos progresiones

$$\frac{1}{10^n}, \ldots, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10}, \quad 1, 10, 10^2, \ldots, 10^n, \ldots;$$

$$-n, \ldots, -2, -1, \quad 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

La base de este sistema es 10. Si se corre la coma en un número, o sea si se multiplica o se divide este número por una potencia de 10, el logaritmo del número dado. y el del número que resulta difieren en un número entero. En efecto, $\log (A \cdot 10^n) = \log A + n \log 10 = \log A + n$.

De donde resulta que el logaritmo de un número cualquiera se deduce del logaritmo de un número comprendido entre 1 y 10, añadiendo a este último un número entero positivo o negativo.

Ejemplo: $\log 2\,482{,}43 = \log 2{,}48243 \times 10^3 = \log 2{,}48243 + 3$;

$$\log 0{,}00345 = \log \frac{3{,}45}{10^3} = \log 3{,}45 - \log 10^3 = \log 3{,}45 - 3.$$

Mantisa y característica. — Todos los números comprendidos entre 1 y 10 tienen su logaritmo comprendido entre 0 y 1, logaritmo que es un número decimal menor que 1. El logaritmo de un número cualquiera puede, por lo tanto, considerarse como formado de una suma de dos partes:

1º Un número decimal comprendido entre 0 y 1;

2.º Un número entero positivo o negativo.

El número decimal, denominado *mantisa*, lo facilitan las tablas llamadas **tablas de logaritmos.** El número entero se llama *característica*, y se determina directamente, con arreglo a lo expresado en el número anterior. Fácilmente se establecen las siguientes reglas:

1º Si el número considerado es mayor que 1, su característica es igual al número de cifras enteras de que consta, menos una;

2º Si el número considerado es menor que 1, su característica es un número negativo, igual en valor absoluto al lugar que ocupa, en dicho número, la primera cifra significativa después de la coma.

EJEMPLO:

$$\log. 24\,315{,}8 = 4 + \log 2{,}43\,158;$$
$$\log 0{,}000438 = -4 + \log 4{,}38.$$

Forma de escribir los logaritmos. — Sea un logaritmo, que consideraremos compuesto de una suma de dos números: un número entero positivo o negativo y un número decimal positivo menor que 1. Los escribiremos, convencionalmente, para mayor sencillez, de la manera siguiente:

$-3 + 0{,}41512$ se escribirá $\overline{3},41512$;
$+4 + 0{,}52818$ se escribirá $4{,}52818$.

Inversamente, si un logaritmo está escrito en la forma $\overline{4},01518$, será igual a $-4 + 0{,}01518$.

Más adelante se verá la ventaja de considerar los logaritmos compuestos de dos partes, de las cuales es positiva la parte decimal.

Cálculos logarítmicos. — En los cálculos que requieren el empleo de logaritmos, se presentan las siguientes operaciones:

Suma de varios logaritmos.

$$\begin{array}{r} 3{,}51312 \\ \overline{1},01532 \\ \overline{4},32874 \\ \hline \overline{2},85718 \end{array}$$

Se sumarán las mantisas, que son todas positivas, y después las características, que son números enteros positivos o negativos, de acuerdo con las reglas de la suma algebraica. La operación es sencilla porque todas las mantisas son positivas.

Sustracción de dos logaritmos.

La sustracción no se efectúa; se sustituye, a fin de simplificar los cálculos, por una suma.

Se llama *cologaritmo* de un número el logaritmo de su recíproco. Por ejemplo, $\log \frac{1}{a} = \operatorname{colog} a.$

Como $\log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = -\log a$, se tendrá

$$-\log a = \operatorname{colog} a,$$

y en lugar de restar el logaritmo de un número, se sumará el cologaritmo del mismo número, cuyo cálculo indicamos a continuación.

Sea el logaritmo de un número A, de característica c y mantisa m; se tendrá

$$-\log A = -c - m.$$

Para poner $-c-m$ en forma de logaritmo, se escribirá:

$$-c - 1 + 1 - m, \text{ y } -\log A = (-c-1) + (1-m) = \operatorname{colog} A$$

$1 - m$ será la mantisa del colog A, y $(-c-1)$ ó $-(c+1)$ su característica, de donde se deduce la siguiente regla:

Para hallar el cologaritmo de un número se añade a la característica de su logaritmo una unidad positiva y se cambia de signo la suma obtenida; después se resta la parte decimal de la unidad, lo que equivale a restar de 9 cada una de las cifras decimales, excepto la última, que se resta de 10.

Ejemplo:

si $\log A = 3{,}14212$, $\quad \operatorname{colog} A = \bar{4}{,}85788$,

si $\log A = \bar{2}{,}41785$, $\quad \operatorname{colog} A = 1{,}58215$.

Multiplicación de un logaritmo por un número entero.

Si la característica del logaritmo es positiva, estaremos en el caso de una multiplicación ordinaria. Si la característica es negativa, se multiplicará el número, separadamente, por cada una de sus partes, y el producto se pondrá en forma de logaritmo.

$$2{,}41317 \times 4 = 9{,}65268,$$
$$\bar{3}{,}72451 \times 3 = \bar{7}{,}17353.$$

División de un logaritmo por un número entero.

Si la característica es positiva, se procede como en una división ordinaria. Supongamos que la característica sea negativa.

1º Si esta característica es exactamente divisible por el número entero, el resultado es inmediato.

$$\frac{\bar{4}{,}7128}{4} = \frac{\bar{4}}{4} + \frac{0{,}7128}{4} = \bar{1}{,}1782.$$

2º Cuando la característica negativa no es divisible por el número entero, se le añadirán tantas unidades negativas como sean necesarias para formar el mayor número entero negativo divisible por el número; se añadirá a la mantisa el mismo número de unidades positivas.

$$\frac{\bar{3}{,}41267}{5} = \frac{-3-2}{5} + \frac{2+0{,}41267}{5} = \bar{1}{,}48253.$$

Disposición y uso de las tablas de logaritmos

El logaritmo de un número que no forma parte de la progresión geométrica que ha servido para definir los logaritmos decimales consta, como hemos visto, de dos partes: 1º la *característica*, número entero positivo o negativo que hemos aprendido a calcular inmediatamente; 2º la *mantisa*, número positivo menor que 1. Las tablas de logaritmos dan las mantisas de todos los números comprendidos entre 0 y un número determinado, con una aproximación conocida. Por ejemplo, una tabla de logaritmos de cinco decimales da inmediatamente las mantisas de los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 000, en unidades decimales de quinto orden. Esta aproximación es, por lo general, suficiente para las aplicaciones prácticas.

En los cálculos logarítmicos se presentan dos problemas:

1º *Dado un número, hallar su logaritmo;*

2º *Dado el logaritmo, hallar el número.*

Utilizaremos, para resolver estos problemas, unas tablas de logaritmos cinco decimales, una de cuyas páginas reproducimos.

N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D
3600	·55630	12	3650	·56229	12	3700	·56820	12	3750	·57403	12
01	642	12	51	241	12	01	832	12	51	415	11
02	654	12	52	253	12	02	844	11	52	426	12
03	666	12	53	265	12	03	855	12	53	438	11
04	678	13	54	277	12	04	867	12	54	449	12
05	·55691	12	55	·56289	12	05	·56879	12	55	·57461	12
06	703	12	56	301	11	06	891	11	56	473	11
07	715	12	57	312	12	07	902	12	57	484	12
08	727	12	58	324	12	08	914	12	58	496	11
09	739	12	59	336	12	09	926	11	59	507	12
3610	·55751	12	3660	·56348	12	3710	·56937	12	3760	·57519	11
11	763	12	61	360	12	11	949	12	61	530	12
12	775	12	62	372	12	12	961	11	62	542	11
13	787	12	63	384	12	13	972	12	63	553	12
14	799	12	64	396	11	14	984	12	64	565	11
15	·55811	12	65	·56407	12	15	·56996	12	65	·57576	12
16	823	12	66	419	12	16	57008	11	66	588	12
17	835	12	67	431	12	17	019	12	67	600	11
18	847	12	68	443	12	18	031	12	68	611	12
19	859	12	69	455	12	19	043	11	69	623	11
3620	·55871	12	3670	·56467	11	3720	·57054	12	3770	·57634	12
21	883	12	71	478	12	21	066	12	71	646	11
22	895	12	72	490	12	22	078	11	72	657	12
23	907	12	73	502	12	23	089	12	73	669	11
24	919	12	74	514	12	24	101	12	74	680	12
25	·55931	12	75	·56526	12	25	·57113	11	75	·57692	11
26	943	12	76	538	11	26	124	12	76	703	12
27	955	12	77	549	12	27	136	12	77	715	11
28	967	12	78	561	12	28	148	11	78	726	12
29	979	12	79	573	12	29	159	12	79	738	11
3630	·55991	12	3680	·56585	12	3730	·57171	12	3780	·57749	12
31	56003	12	81	597	11	31	183	11	81	761	11
32	015	12	82	608	12	32	194	12	82	772	12
33	027	11	83	620	12	33	206	11	83	784	11
34	038	12	84	632	12	34	217	12	84	795	12
35	·56050	12	85	·56644	12	35	·57229	12	85	·57807	11
36	062	12	86	656	11	36	241	11	86	818	12
37	074	12	87	667	12	37	252	12	87	830	11
38	086	12	88	679	12	38	264	12	88	841	11
39	098	12	89	691	12	39	276	11	89	852	12
3640	·56110	12	3690	·56703	11	3740	·57287	12	3790	·57864	11
41	122	12	91	714	12	41	299	11	91	875	12
42	134	12	92	726	12	42	310	12	92	887	11
43	146	12	93	738	12	43	322	12	93	898	12
44	158	12	94	750	11	44	334	11	94	910	11
45	·56170	12	95	·56761	12	45	·57345	12	95	·57921	12
46	182	12	96	773	12	46	357	11	96	933	11
47	194	11	97	785	12	47	368	12	97	944	11
48	205	12	98	797	11	48	380	12	98	955	12
49	217	12	99	808	12	49	392	11	99	967	11
3650	·56229		3700	·56820		3750	·57403		3800	·57978	
N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D

P. P.

	12
·1	1
2	2
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	10
9	11

	11
·1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10

P. P.

Página de unas Tablas de logaritmos de cinco decimales

Obtencion del logaritmo de un número. — Conocemos la forma de obtener la característica. En cuanto a la mantisa, sabemos que es independiente de la posición de la coma en el número; prescindiremos, pues, de ella, pudiendo presentarse entonces dos casos:

1º *El número considerado es, prescindiendo de la coma, menor que 10 000.* En este caso, el número tiene cuatro cifras como máximo; sea, por ejemplo, el número 36,87.

La característica del logaritmo es 1. En cuanto a su mantisa, buscaremos en la tabla el número 3 678 (las dos primeras cifras, 36, no se repiten entre 3 680 y 3 690); la mantisa, que figura en la columna encabezada por *log*, y enfrente de cada número, es 56 667 (las dos primeras cifras, 56, no se repiten). Se tendrá:

$$\log\ 36{,}87 = 1{,}56667,$$
$$\log\ 0{,}3600 = \bar{1}{,}55630,$$
$$\log\ 3{,}600 = 0{,}55630,$$
$$\log\ 3\,600 = 3{,}55630.$$

Para los tres últimos números solo varía la característica; la mantisa es 0,55630, la misma en los tres; es el logaritmo de 3,600.

2º *El número considerado, prescindiendo de la coma, es igual o mayor que 10 000.*

Sea 386,57 el número cuyo logaritmo queremos obtener. La característica del logaritmo es 2.

Para calcular la mantisa, tomaremos primeramente la mantisa de 3 685, que es 0,56644.

Para calcular la parte complementaria, se admite que hay proporcionalidad entre el incremento del número y el incremento del logaritmo, con lo cual se comete un error, pero que no afecta a la quinta cifra decimal de la mantisa. Las mantisas de los números 3 685 y 3 686 son 0,56644 y 0,56656, respectivamente, que sólo se diferencian en 12 unidades de 5º orden. Razonaremos de la siguiente forma:

Si el número aumenta en una unidad, la mantisa aumenta 12 unidades de 5º orden; si el número aumenta 0,7, la mantisa aumenta $12 \times 0{,}7 = 8{,}4$; cuando la parte posterior a la coma es 5 o superior a 5, se aumenta una unidad la última cifra entera, y en el caso contrario se desprecia la parte decimal. El cálculo se dispone de la siguiente forma:

$$\log\ 368{,}57 = 2{,}56652$$

para	368 5	56644	D = 12
para	7	84	

En definitiva, sólo se conservan cinco cifras decimales; si la 6ª cifra es menor que 5, se suprime, y si es igual o mayor que 5, se aumenta una unidad la cifra decimal anterior, es decir, la quinta. D es la diferencia entre las mantisas de los dos números enteros consecutivos,

llamada *diferencia tabular*. Figura, en la tabla, en las columnas encabezadas con una D.

Uso de las tablillas P. P. — En el cálculo que acabamos de efectuar ha habido que multiplicar la diferencia tabular 12 por 0,7. Para evitar esta multiplicación se ha efectuado con anterioridad el producto de 12 por todos los números menores que 10. Los resultados figuran en pequeñas tablas situadas en las columnas encabezadas con P. P. (partes proporcionales). Tomemos, por ejemplo, la tablilla 12; en la columna de la izquierda se encuentran las décimas del número, y en la de la derecha los productos por 12 de cada una de estas décimas. De estos productos sólo se ha conservado una sola cifra, de acuerdo con la regla antes indicada. Por ejemplo:

$12 \times 0{,}1 = 1{,}2$. Se ha conservado una unidad de 5° orden.
$12 \times 0{,}4 = 4{,}8$. Se han conservado cinco unidades de 5° orden.

Ejercicios. 1° *Hallar el logaritmo de 3 782,8.*

log de 3 782,8 = 3,57783

para	3 782	57 773 D = 12
para	8	10

2° *Calcular log 0,036295.*

$\log\ 0{,}036295 = \bar{2}{,}55985$

para	3 629	55 979 D = 12.
para	5	6

Hallar un número, conocido su logaritmo. — Este problema es el recíproco del anterior.

El logaritmo dado consta de característica y mantisa. Si la mantisa se encuentra en las tablas, el número buscado se halla inmediatamente.

Supongamos que el logaritmo dado sea 1,57761; el número que corresponde a la mantisa es 3 781, y el número buscado, 37,81.

Se escribirá

$$1{,}57761 = \log\ 37{,}81.$$

Análogamente

$$\bar{3}{,}56632 = \log\ 0{,}003684.$$

Supongamos que la mantisa dada no figura exactamente en la tabla. Sea el logaritmo 3,57637.

Tomaremos en la tabla la mantisa que más se aproxime, por defecto, a 57 637; encontramos 57 634, a la que corresponde el número 3 770.

Ahora habrá que buscar cuánto aumenta el número al aumentar 3 la mantisa. La diferencia entre 57 634 y la mantisa del número mayor en una unidad que 3 770 es 12. Seguiremos admitiendo la proporcionalidad entre los incrementos del número y de la mantisa.

Cuando la mantisa aumenta 12, el número aumenta 1.

Cuando la mantisa aumenta 1, el número aumenta $\frac{1}{12}$.

Cuando la mantisa aumenta 3, el número aumenta $\frac{3}{12}$.

Como $\frac{3}{12} = 0{,}25$, o sea 0,3, el número buscado será, de acuerdo con lo que hemos dicho, 3 770,3.

Este cálculo se dispondrá en la forma siguiente:

3,57637 = log 3 770,3

para	57634	3 770	D = 12
para	3	.25	

Ejemplo. *Hallar un número* x *tal que log* x = 0,55938.

Se tiene

0,55938 = log 0,36256

para	55931	3 625	D = 12
para	7	.58	

Calculemos x, tal que $\log x = \bar{1}{,}56660$.

La mantisa más aproximada por defecto es 56 656, y el número correspondiente, 3 686; la diferencia tabular es 11, y hará falta encontrar las décimas que aumenta el número cuando la mantisa aumenta 4: la tablilla da inmediatamente 4.

$\bar{1}{,}56660 = \log\ 0{,}36864$

para	56656	3 686
para	4	.4

Aplicación. *Calcular* $\sqrt[3]{3{,}7847}$.

$$\log x = \frac{1}{3} \log 3{,}7847.$$

Calculemos log 3,7847.

log 3,7847 = 0,57803

para 3 784	57795 D= 12.	
para	7	8.4

$$\frac{1}{3} \log 3{,}7847 = \frac{0{,}57803}{3} = 0{,}19268.$$

0,19268 = log 1,5584

para	19 257	1 558 D = 28.
para	11	.4

Se tendrá, por consiguiente, $\sqrt[3]{3{,}7847} = 1{,}5584$, con un error de 0,0001.

La regla de cálculo

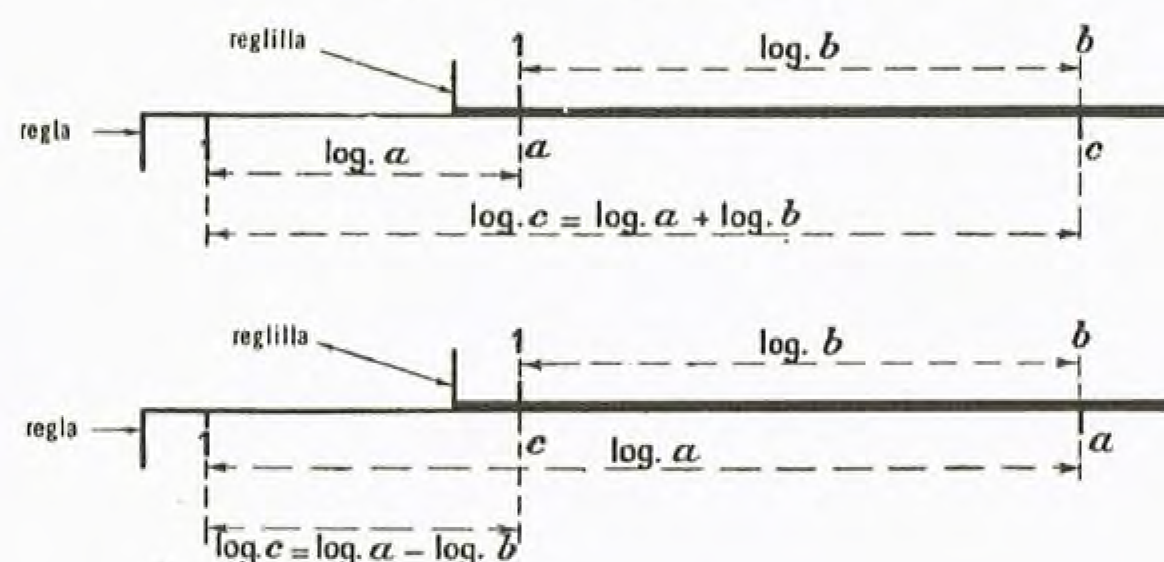
Reseña histórica. — Las máquinas de calcular antes descritas se fundan en el principio de la numeración decimal. Basándose en las propiedades de los logaritmos, se han construido máquinas de calcular más sencillas: las reglas de cálculo. Neper, el descubridor de los logaritmos, fue quien primero tuvo la idea de la regla de cálculo, en el siglo XVI. En el año 1624, Gunter construyó la primera regla con divisiones proporcionales a los logaritmos, y Wingate sugirió que se utilizaran estas reglas para el cálculo. La reglilla se debe a Seth Pastridge (1671). Lenoir-Granet construyó, en 1820, el prototipo de las reglas de cálculo rectilíneas compuestas de una regla provista de una ranura en la que puede deslizar una reglilla. Mannheim perfeccionó, en 1851, la regla de Lenoir: a él se deben el funcionamiento de las escalas y la aplicación del cursor.

Existe gran número de reglas de cálculo, algunas de las cuales se construyen especialmente para ciertas profesiones; unas son cilíndricas; otras, circulares.

Describiremos aquí la regla de cálculo ordinaria, derivada de la regla de Mannheim; con ella pueden efectuarse múltiples operaciones aritméticas, trigonométricas y logarítmicas.

Principio de la regla de cálculo. — La regla de cálculo está basada en las propiedades de los logaritmos, principalmente en la de que el logaritmo de un producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de estos factores.

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b.$$



Figs. 20 y 21

La regla de cálculo se compone esencialmente de dos reglas, una de ellas móvil que puede deslizarse sobre la otra. Ambas reglas llevan graduaciones idénticas, siendo en cada una de ellas la distancia del trazo 1 al trazo b proporcional al logaritmo de b.

Para calcular el producto $a \cdot b$ se desplaza la regla móvil de forma que el trazo 1 caiga sobre el trazo a. Enfrente del trazo b se encontrará el trazo c de la regla. En virtud de la construcción de la graduación, el logaritmo de c es la suma del logaritmo de a y del logaritmo de b; por lo tanto, c es el producto de a por b (fig. 20).

Análogamente, para calcular el cociente $a : b$ se desplaza la regla móvil de forma que el trazo b de la misma caiga frente al trazo a de la regla fija. Frente al trazo 1 de la regla móvil se encuentra el trazo c de la regla fija: en virtud de la construcción de la graduación, el logaritmo de c es la diferencia $\log a - \log b$. Por consiguiente, c es el cociente $\frac{a}{b}$ (*fig.* 21).

La regla de cálculo que vamos a describir es un perfeccionamiento de este sistema. Con ella pueden efectuarse las operaciones más diversas: multiplicación, división, proporciones, cuadrados, raíces cuadradas. También se puede efectuar el cálculo de la superficie del círculo, los cubos, las raíces cúbicas, las potencias de orden superior, las resoluciones de las ecuaciones de 1° y 2° grado, así como de la ecuación bicuadrada y de las ecuaciones de 3°, 4° y 5° grado.

Utilizando las escalas del revés de la regla móvil, pueden calcularse

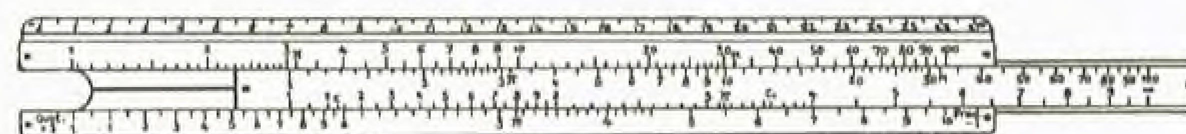


Fig. 22

los logaritmos de los números y todas las líneas trigonométricas.

Descripción. — La regla de cálculo consiste en una doble regla, una de las cuales, llamada *reglilla*, se desliza sobre la otra, denominada regla. En cada una de ellas se han trazado divisiones que representan los logaritmos a una escala determinada por la longitud de la regla. La regla principal tiene dos graduaciones (*fig.* 22): la graduación superior consta de dos partes idénticas con divisiones numeradas de 1 a 10 que son la escala izquierda o primera escala y la escala derecha o segunda escala. Sobre la primera escala se han llevado las longitudes 1 — 2, 1 — 3, 1 — 4, etc., proporcionales a los logaritmos de 2, 3, 4, etc. hasta 10, cuyo logaritmo es la unidad.

Las longitudes 1 — 2, 2 — 3, etc., están a su vez graduadas por el mismo procedimiento y dan, por ejemplo, entre 2 y 3 los logaritmos de números como 21, 22, 23, etc. Podría continuarse así, pero hay que detenerse pronto, porque los trazos así obtenidos acaban por aproximarse demasiado.

Al efectuar los cálculos con la regla, no hay que tomar en cuenta el orden decimal, a causa de las propiedades de los logaritmos. El trazo izquierdo puede representar 1, 10, 100, 1 000 ó 0,1, 0,01.

Un número cualquiera puede leerse sobre la primera escala.

Las divisiones de segundo orden determinan las décimas de los intervalos numerados: entre 20 y 30 puede leerse 21, 22, etc. Las divisiones de tercer orden no existen más que entre 1 y 2, por una parte, y 2 y 5, por la otra. En la región 1-2, una división de tercer orden representa la quinta parte de una de las divisiones de segundo orden; como puede calcularse a simple vista la mitad, puede obtenerse la décima parte de las divisiones de primer orden. Por lo tanto, entre 1 y 2 podrá leerse un número con tres cifras exactas. Entre 2 y 5, las subdivisiones dan $\frac{1}{2}$ ó $\frac{5}{10}$ de las divisiones de segundo orden. Se podrá calcular, aproximadamente, $\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \ldots \frac{4}{5}$ y obtener un número de tres cifras, pero la exactitud de la última cifra será dudosa. Por encima de 5 podrá calcularse un número de tres cifras con una aproximación de 5 unidades.

La graduación de la regla está reproducida exactamente en la parte inferior y superior de la reglilla, en las cuales se leen los números como en la regla.

La parte inferior de la regla contiene una sola escala, que es, por consiguiente, *doble* de la primera escala. Es conveniente utilizarla, así como la escala inferior, siempre que se pueda, porque las aproximaciones que se obtienen son dos veces mayores que con las escalas superiores.

Para mayor facilidad en las operaciones, se utiliza un *cursor* que se desliza sobre los lados de la regla, y que está provisto de una abertura



Fig. 23

también dividida por un trazo perpendicular al eje de la regla. Este trazo permite situar el número que se lee en la regla frente al número que se lee en la reglilla, y hacer que se correspondan los números de la escala inferior con los de la superior, y recíprocamente.

Para leer un número, se enumeran sucesivamente, de izquierda a derecha, las cifras que lo componen, empezando por la primera cifra significativa. Por ejemplo, para indicar el número 1 826 se dirá: uno, ocho, dos, seis, y se observará que su valor es $1{,}826 \times 10^3$.

Análogamente, 0,01826 se leerá: uno, ocho, dos, seis, y tendrá como valor $1{,}826 \times 10^{-2}$.

El revés de la reglilla (*fig.* 23) lleva tres escalas: la escala de uno de los bordes, señalada S, es la *escala de los senos*, y la del otro borde, marcada T, es la *escala de las tangentes*. Entre ambas se encuentra la escala L, que es la *escala de los logaritmos* de los números. Más adelante veremos cómo se utilizan.

Operaciones aritméticas. — *Multiplicación*. Se utilizan las dos escalas inferiores de la regla y de la reglilla.

Supongamos que se quiere multiplicar 2 por 4; deslizaremos la reglilla de forma que el origen de sus divisiones —el número 1— caiga enfrente de la graduación 2 de la regla, que representa el logaritmo de dos (*fig.* 24).
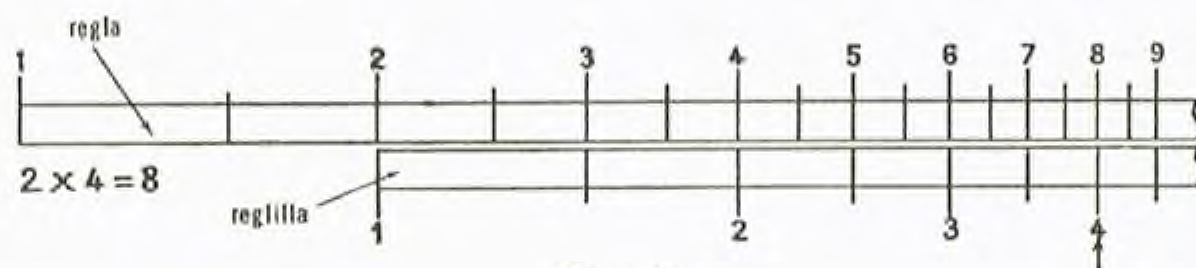


Fig. 24

Enfrente de la graduación 4 de la reglilla se encontrará, sobre la regla, el número 8. En efecto, al colocar el origen de las graduaciones de la reglilla frente a la cifra 2, se añade automáticamente la longitud proporcional al logaritmo de 2 a todas las longitudes proporcionales a los números que figuran en la reglilla:

$$\log 2 + \log 4 = \log 8.$$

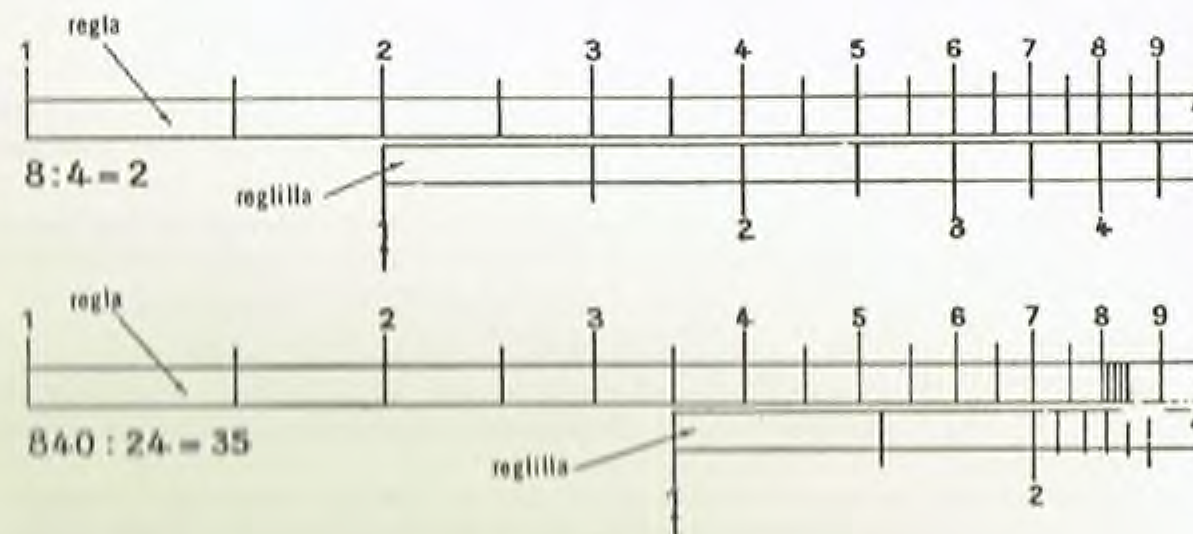


Fig. 25

Supongamos que queremos multiplicar dos números de dos cifras, por ejemplo, 35 por 24 (*fig.* 25): efectuando mentalmente el producto de las últimas cifras de los factores, puede obtenerse la última cifra del producto. Siempre que el producto se encuentre en la primera escala de la regla, el número de cifras del producto será igual a la suma de las cifras de los factores disminuida en una unidad; cuando se encuentre en la segunda escala, el número de cifras del producto será igual a la suma de las cifras de los factores.

Multiplicaciones sucesivas. Bastará con multiplicar el producto de los dos primeros factores por el tercero, el producto obtenido por el cuarto, etc.

División. Es la operación inversa (figs. 26 y 27). Para efectuarla, se lee el dividendo sobre la regla (en la escala izquierda, si la primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor y en la escala derecha si es menor) y se coloca debajo el divisor, que se lee en la escala izquierda de la reglilla. El cociente se lee sobre la regla, encima de uno de los indicadores 1 ó 10 de la reglilla.



Figs. 26 y 27

Si el cociente y el dividendo están en dos escalas diferentes de la regla, el número de cifras enteras del cociente se obtiene restando el número de cifras enteras del divisor del número de cifras enteras del dividendo. Si el dividendo y el cociente están en una misma escala 1 — 10, hay que añadir una unidad a esta diferencia.

Proporciones. Si hay que dividir varios números por un mismo divisor, basta con colocar el indicador 1 de la reglilla debajo del divisor leído sobre la regla: los diversos cocientes se leen sobre la reglilla, debajo de los dividendos leídos en la regla.

Fracciones. Razones. Proporciones. Las fracciones que tengan como numerador un número leído en la regla y por denominador el correspondiente número de la reglilla, tienen todas el mismo valor para una misma posición de la reglilla, y forman una serie de razones iguales. Esta propiedad permite resolver cualquier regla de tres.

Sean, por ejemplo, los precios de venta de artículos diversos los que se quieren calcular, conocidos el precio de compra y el beneficio por 100.

Supongamos que artículos que cuestan 10, 12,50 y 13,75 ptas. se venden con un 25% de beneficio. Lo que se ha comprado a 100 ptas. se venderá a 125 ptas., y, por lo tanto,

$$\frac{100}{125} = \frac{10}{x} = \frac{12{,}50}{y} = \frac{13{,}75}{z}, \text{ etc.}$$

Una vez formada la fracción $\frac{100}{125}$, se leen directamente los precios de venta sobre la reglilla, debajo de los precios de compra leídos sobre la regla.

Elevación a potencias y extracción de raíces cuadradas. Los números de la escala superior de la regla y de la reglilla son los cuadrados de los números de la escala inferior (escala de raíces). Bastará con colocar estos números frente a frente, ya sea por medio del cursor o por medio de los trazos 1 de la reglilla. Cuando el número se lea sobre la escala de la derecha, se multiplicará por 10.

Raíz cuadrada. Inversamente, la graduación inferior da las raíces de los números de la graduación superior de la reglilla, teniendo en cuenta que si después de dividir el número en períodos de dos cifras, el último período de la izquierda sólo consta de una cifra, habrá que leer el número en la escala izquierda de la regla; si consta de dos cifras, se leerá sobre la segunda escala.

La graduación inferior de la regla se denomina con frecuencia *escala de raíces*.

Cubos. Puede formarse el cuadrado del número, y multiplicarlo por dicho número. Es decir, que se lleva el origen de la reglilla sobre el cuadrado del número que se lee en la regla. Algunos tipos de regla tienen una escala en la que figuran directamente los cubos de los números.

Combinación de productos y cocientes. Sea el número

$$N = \frac{27 \times 54 \times 3}{65 \times 12 \times 36}$$

el que se quiere calcular. Se efectúan sucesivamente: el cociente $\frac{27}{65}$, después el cociente de $\frac{27}{65}$ por 12, después el producto de $\frac{27}{65 \times 12}$ por 54, y así se continúa, con el mínimo de movimientos de la reglilla y del cursor.

Operaciones con las líneas trigonométricas. — *Senos*. Una vez colocada la reglilla del revés, se lee en su parte superior una escala S que permite obtener los senos de los ángulos. Esta escala está dividida en grados, desde 0° a 90°.

El intervalo a la izquierda de 1° está dividido en partes de 5′ cada una. El primer trazo contado a la derecha del origen corresponderá, pues, a un ángulo de 35′.

Los intervalos 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 están también divididos en partes de 5′ cada una.

De 5° a 20°, cada grado está dividido en partes de 10′ cada una.
De 20° a 40°, cada grado está dividido en 2 partes de 30′ cada una.
De 40° a 70°, las divisiones van de grado en grado.
De 70° a 80°, las divisiones van de dos en dos grados.

La graduación está hecha de tal forma que cuando coinciden los orígenes de la regla y de la reglilla, las longitudes que se cuenten sobre la regla representan los valores de los senos de los ángulos que corresponden a la escala S de la reglilla.

Los senos comprendidos en la primera escala 1-10 de la reglilla varían entre 0,01 y 0,1; los situados en la segunda escala varían entre 0,1 y 1. También puede obtenerse el seno de un ángulo sin invertir la reglilla; para ello, se lleva el ángulo, leído sobre la escala S de la reglilla, al extremo del instrumento (trazo marcado), que se invierte después, y el seno se lee sobre la reglilla, debajo del indicador recto de la regla.

El problema inverso, hallar el ángulo que corresponde a un seno dado, se deduce con facilidad.

Cosenos. El coseno de un ángulo es el seno de su complemento.

Tangentes. La escala T es la de tangentes, y llega hasta 45°.

Para obtener la tangente de un ángulo mayor que 45°, se halla la tangente de su complemento, y el número buscado será el inverso de este número.

La tangente de un ángulo menor de 45° se obtiene llevando el ángulo al extremo derecho del instrumento, e invirtiéndolo después, como se ha hecho para el seno; la tangente se lee sobre la reglilla, debajo del indicador derecho de la regla.

Si el ángulo es mayor de 45° se utiliza el ángulo complementario, y se lee el inverso de la tangente de este ángulo encima del 1 izquierdo de la reglilla.

Las tangentes leídas sobre la primera escala 1-10 de la reglilla varían entre 0,01 y 0,1; las que se leen sobre la segunda, entre 0,1 y 1.

Las tangentes de los arcos mayores de 45° varían entre 1 y 10, cuando se leen en la primera escala de la regla, y entre 10 y 100, cuando se leen en la segunda. El ángulo que corresponde a una tangente dada se halla con facilidad.

Logaritmos. La reglilla lleva también una escala L, llamada *escala de logaritmos*, que sirve para calcular sobre la escala de raíces las longitudes que representan las mantisas de los logaritmos de los números. Esta escala está dividida en 500 partes iguales numeradas de derecha a izquierda; cada división corresponde a $\frac{2}{1000}$ de la longitud total de la escala.

Para hallar el logaritmo de un número se fija su característica según la regla conocida, colocando el origen 1 de la reglilla sobre el número leído en la escala de raíces; después se invierte el instrumento y se lee sobre la reglilla la parte decimal, sirviendo de índice el extremo de dicho instrumento.

El número que corresponde a un logaritmo dado se obtiene en forma inversa.

Aplicaciones. — Las aplicaciones de la regla de cálculo son innumerables. Con ellas puede obtenerse la escala de un dibujo, el peso de una viga cuadrada, la sección de una viga cuadrada sometida a tracción, el contenido de un depósito cilíndrico, el cálculo del peso de una pieza según un dibujo, el diámetro de un árbol de transmisión de igual elasticidad, el cálculo de una placa de cemento armado, de una columna de fundición, de un pilar de hormigón armado cargado excéntricamente, el cálculo de un transformador, la cubicación de una pieza de fundición, etc.

Puede ser de gran utilidad para los comerciantes (determinación de nuevas tarifas para una serie de artículos, nóminas de pago), para los contratistas de obras, para los carpinteros, ebanistas, compradores de madera; para los contables (intereses), para los banqueros, para los técnicos electricistas (rendimiento de una dinamo, caída de potencial) y, en general, para todos los ingenieros.

Interés compuesto y anualidades

Interés compuesto

Definición. *Se dice que el interés es compuesto cuando el interés simple producido al final de cada año se acumula, produciendo a su vez interés el año siguiente.*

Supongamos que un capital de 100 P (P, pesos, pesetas, etc.) se presta a un interés compuesto del 3% anual; al final del primer año el interés producido será 3 P; por consiguiente, durante el segundo año el capital que se supone prestado será 103 P. Al final de este segundo año se capitalizará el interés de 103 P, y así sucesivamente; al cabo de diez años, por ejemplo, el capital prestado se habrá convertido en la cantidad A y el interés al cabo de diez años será A-100.

Fórmulas del interés compuesto. — Si llamamos c al capital inicial, r al interés de un peso P en un año, n al número de años durante los cuales está impuesto el capital y C al capital acumulado al final de n años, la fórmula del interés compuesto es la relación que liga las cuatro magnitudes c, r, n, y C.

En un año, un P produce r, y cP producirán cr. Por consiguiente, cP se convertirá, al cabo de un año, en $c + cr = c\,(1 + r)$.

Para saber en qué se ha convertido, al cabo de un año, el capital impuesto, basta con multiplicarlo por $(1 + r)$.

Al comienzo del segundo año, el capital impuesto será $c\,(1 + r)$, y, por consiguiente, al final de dicho año, este capital se habrá convertido en

$$c\,(1 + r)\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2.$$

Al final del tercer año, se tendrá

$$c\,(1 + r)^2\,(1 + r) = c\,(1 + r)^3,$$

y así sucesivamente.

Al final del $n^{ésimo}$ año, el capital inicial se habrá convertido en $c\,(1 + r)^n$, de donde

$$\text{(1)} \qquad C = c\,(1 + r)^n$$

que es la fórmula del interés compuesto. Esta fórmula permite calcular una cualquiera de las cuatro magnitudes c, r, n, C, conocidas las otras tres. Los cálculos necesarios se efectúan generalmente con ayuda de una tabla de logaritmos.

Para obtener el interés, habrá que hallar la diferencia C — c.

En la tabla I, se ha calculado, para diferentes intereses, en qué se convierte un P colocado a interés compuesto durante un número determinado de años. Este valor es dado por la fórmula anterior, en la que se ha hecho $c = 1$. En la tabla II, se ha calculado el valor actual de un P, pagadero al final de *n años.*

Caso en que la duración de la imposición no es un número entero de años. — Supongamos que el capital C permanece impuesto a un interés compuesto durante n años y una fracción $\frac{p}{q}$ de año, siendo r el tanto por uno.

Al cabo de n años, el capital inicial se ha convertido en $c\,(1 + r)^n$, siendo este nuevo capital el que permanece impuesto durante el período $\frac{p}{q}$ de año.

Al cabo del tiempo $\frac{p}{q}$, un P se convertirá en $1 + \frac{pr}{q}$, y, por consiguiente, el capital $c\,(1 + r)^n$ se convertirá en

$$\text{(2)} \qquad C = c\,(1 + r)^n \left(1 + \frac{pr}{q}\right).$$

AÑOS	TANTO POR CIENTO DE INTERÉS			
n	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
	P	P	P	P
1	1,045 000	1,050 000	1,055 000	1,060 000
2	1,092 025	1,102 500	1,113 025	1,123 600
3	1,141 166	1,157 625	1,174 241	1,191 016
4	1,192 519	1,215 506	1,238 825	1,262 477
5	1,246 182	1,276 282	1,306 960	1.338 226
6	1,302 260	1,340 096	1,378 843	1,418 519
7	1,360 862	1,407 100	1,454 679	1,503 630
8	1,422 101	1,477 455	1,534 687	1,593 848
9	1,486 095	1,551 328	1,619 094	1,689 479
10	1,552 969	1,628 895	1,708 144	1,790 848
11	1,622 853	1,710 339	1,802 092	1,898 299
12	1,695 881	1,795 856	1,901 207	2,012 196
13	1,772 196	1,885 649	2,005 774	2,132 928
14	1,851 945	1,979 932	2,116 091	2,260 904
15	1.935 282	2,078 928	2,232 476	2,396 558
16	2,022 370	2,182 875	2,355 263	2,540 352
17	2,113 377	2,292 018	2,484 802	2,692 773
18	2,208 479	2,406 619	2,621 466	2,854 339
19	2,307 860	2,526 950	2,765 647	3,025 600
20	2,411 714	2,653 298	2,917 757	3,207 135
21	2.520 241	2,785 963	3,078 234	3,399 564
22	2,633 652	2,925 261	3,247 537	3,603 537
23	2,752 166	3,071 524	3,426 152	3,819 750
24	2,876 013	3,225 100	3,614 590	4,018 935
25	3,005 434	3,386 355	3,813 392	4,291 871
26	3,140 679	3,555 673	4,023 129	4,549 383
27	3,282 010	3,733 456	4,244 401	4.822 346
28	3,429 700	3,920 129	4,477 843	5,111 687
29	3,584 036	4,116 136	4,724 124	5,418 388
30	3,745 318	4,321 942	4,983 951	5,743 491
31	3,913 857	4,538 039	5,258 069	6,088 101
32	4.089 981	4,754 941	5,547 262	6,453 387
33	4,274 030	5,003 189	5,852 362	6,840 590

Tabla I. Valor de un P colocado a interés compuesto, al cabo de *n* años

Indicamos a continuación los cuatro casos que pueden presentarse en los problemas de interés compuesto.

1º **Hallar C.**—*Un capital de 240 000 ptas se ha colocado, durante 12 años y 8 meses, a interés compuesto, siendo $r = 5{,}5\%$. ¿Cuál será el capital producido al final de dicho período?*

Apliquemos la fórmula (1) $C = c\,(1 + r)^n \left(1 + \dfrac{pr}{q}\right)$.

Se tendrá:

$$\log C = \log c + n \log (1 + r) + \log \left(1 + \frac{pr}{q}\right)$$

$$1 + \frac{pr}{q} = 1 + \frac{2 \times 0{,}055}{3} = \frac{3{,}110}{3} = 1{,}0366.$$

La fórmula da: $\log C = \log 240\,000 + 12 \log 1{,}055 + \log 1{,}0366.$
Una vez efectuados los cálculos por medio de las tablas de logaritmos, se obtiene como *respuesta:* $C = 472\,960$ ptas.

2º **Hallar c.** — *¿Qué capital colocado durante 5 años y 7 meses a interés compuesto, al 4,5%, se habrá convertido al cabo de este tiempo en 154 320 P?*

Aplicando la fórmula (2) se tendrá:

$$\log C = \log c + n \log (1 + r) + \log \left(1 + \frac{pr}{q}\right),$$

de donde se obtiene:

$$\log c = \log C + n \operatorname{colog} (1 + r) + \operatorname{colog} \left(1 + \frac{pr}{q}\right).$$

Sustituyendo por los correspondientes valores,

$$\log c = \log 154\,320 + 5 \operatorname{colog} 1{,}045 + \operatorname{colog} \left(1 + \frac{7 \times 0{,}045}{12}\right).$$

Como este último término vale 1,0263 por exceso,

$$\log c = \log 154\,320 + 5 \operatorname{colog} 1{,}045 + \operatorname{colog} 1{,}0263.$$

Una vez efectuados los cálculos logarítmicos correspondientes, se obtiene para el capital inicial buscado $c = 120\,660$ P.

3º **Hallar el tiempo.** — Se utilizará la fórmula (2), que contiene dos incógnitas n y $\dfrac{p}{q}$.

Teniendo en cuenta que n debe ser un número entero, se tendrá

$$\log C = \log c + n \log (1 + r) + \log \left(1 + \frac{pr}{q}\right),$$

AÑOS	TANTO POR CIENTO DE INTERÉS r			
n	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
	P	P	P	P
1	0,956 938	0,952 381	0,947 867	0,943 396
2	0,915 730	0,907 030	0,898 452	0,889 996
3	0,876 297	0,863 838	0,851 614	0,839 619
4	0,838 561	0,822 703	0,807 217	0,792 094
5	0,802 451	0,783 526	0,765 134	0,747 258
6	0,767 896	0,746 215	0,725 246	0,704 961
7	0,734 829	0,710 681	0,687 437	0,665 057
8	0,703 185	0,676 839	0,651 599	0,627 412
9	0,672 904	0,644 609	0,617 629	0,591 898
10	0,643 928	0,613 913	0,585 431	0,558 395
11	0,616 199	0,584 679	0,554 910	0,526 788
12	0,589 664	0,556 837	0,525 982	0,496 969
13	0,564 272	0,530 321	0,498 561	0,468 839
14	0,539 973	0,505 068	0,472 569	0,442 301
15	0,516 720	0,481 017	0,447 933	0,417 265
16	0,494 469	0,458 112	0,424 581	0,393 646
17	0,473 176	0,436 297	0,402 447	0,371 364
18	0,452 800	0,415 521	0,381 466	0,350 344
19	0,433 302	0,395 734	0,361 579	0,330 513
20	0,414 643	0,376 890	0,342 729	0,311 805
21	0,396 787	0,358 942	0,324 862	0,294 155
22	0,379 701	0,341 850	0,307 926	0,277 505
23	0,363 350	0,325 571	0,291 873	0,261 797
24	0,347 704	0,310 068	0,276 657	0,246 979
25	0,332 731	0,295 303	0,262 234	0,232 999
26	0,318 403	0,281 241	0,248 563	0,219 810
27	0,304 691	0,267 848	0,235 604	0,207 368
28	0,291 571	0,255 094	0,233 322	0,195 630
29	0,279 015	0,242 946	0,211 679	0,184 557
30	0,267 000	0,231 377	0,200 644	0,174 110
31	0,255 502	0,220 360	0,190 184	0,164 255
32	0,244 500	0,209 866	0,180 269	0,154 957
33	0,233 971	0,199 873	0,170 871	0,146 186

TABLA II. Valor actual de un P pagadero al final de n años

de donde se deduce

$$n = \frac{\log C + \operatorname{colog} c}{\log (1 + r)} - \frac{\log \left(1 + \dfrac{pr}{q}\right)}{\log (1 + r)}.$$

Efectuemos la división $\dfrac{\log C + \operatorname{colog} c}{\log (1 + r)}$, y sea Q el cociente, que puede ser nulo, y R el resto, que será inferior a $\log (1 + r)$. Se tendrá:

$$n = Q + \frac{R}{\log (1 + r)} - \frac{\log \left(1 + \dfrac{pr}{q}\right)}{\log (1 + r)}.$$

n debe ser número entero, y, por lo tanto, $\begin{cases} n = Q \\ \log \left(1 + \dfrac{pr}{q}\right) = R. \end{cases}$

Una vez determinado n, la segunda igualdad permite calcular $\left(1 + \dfrac{pr}{q}\right)$ y, por consiguiente, $\dfrac{p}{q}$.

EJEMPLO. *¿Cuánto tiempo habrá de transcurrir para que se duplique un capital colocado al interés compuesto del 5%?*

Si c es el capital impuesto, se tendrá:

$$2c = c \times 1{,}05^n \times \left(1 + \frac{p \times 0{,}05}{q}\right)$$

De donde se deduce

$$\log 2 = n \log 1{,}05 + \log \left(1 + \frac{p \times 0{,}05}{q}\right)$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} - \frac{\log \left(1 + \dfrac{0{,}05\,p}{q}\right)}{\log 1{,}05}.$$

Se deduce fácilmente que $n = 14$ años y $\dfrac{p}{q} = \dfrac{437}{2119}$, o sea 75 días (por exceso).

4º **Hallar el rédito.** Si la duración de la imposición es un número entero de años, no se presentará ninguna dificultad, y aplicando la fórmula (1) se tendrá

$$\log (1 + r) = \frac{\log C + \operatorname{colog} c}{n}.$$

Se calculará $1 + r$ y después r.
Si el tiempo no es un número entero de años, el cálculo es algo más complicado. Se procederá por aproximaciones sucesivas.

OBSERVACIONES. I. — En el interés compuesto, la capitalización no se efectúa necesariamente cada año, sino que puede convenirse en efectuarla al final de períodos determinados, por ejemplo, cada 5 años.

Puede también aplicarse la fórmula (2), donde n indica el número entero de períodos, $\dfrac{p}{q}$ la fracción complementaria de un período y r lo que produce un P durante el período considerado.

II. — La fórmula del interés compuesto se aplica también a ciertos problemas análogos. Por ejemplo:

La población de un país aumenta cada año una fracción α de su valor al comienzo del año; ¿al cabo de cuánto tiempo estará dicha población en la relación K con respecto a su valor inicial?

Si v es el valor inicial, V el valor final, n el número entero de años buscado y f la fracción complementaria,

$$V = v\,(1 + \alpha)^n\,(1 + f\,\alpha).$$

Como $V = Kv$, se deducirá

$$K = (1 + \alpha)^n\,(1 + f\,\alpha).$$

Las incógnitas son n y α, y ya se ha visto anteriormente la forma de operar.

Anualidades

Anualidad de amortización. — *Se llama* **anualidad de amortización** *al pago anual que debe entregar un deudor para saldar una deuda al cabo de un número de años determinado.*

En general, las anualidades son fijas, es decir, que el deudor entrega cada año una cantidad constante. En este caso, si designamos por C el capital prestado, r el tanto por uno, n el número de años durante los cuales debe pagarse la anualidad y c el valor de la anualidad, la *fórmula de las anualidades* es la relación algebraica que existe entre las cuatro magnitudes C, r, n y c.

Al final del n^{esimo} año, la suma prestada C se habrá convertido, sumándole los intereses compuestos, en $C\,(1 + r)^n$.

Por otra parte, la primera anualidad, entregada un año después del préstamo, se habrá convertido en el momento de extinguirse la deuda en $c\,(1 + r)^{n-1}$; la segunda, en $c\,(1 + r)^{n-2}$, y así sucesivamente. La penúltima anualidad, pagada un año antes de extinguirse la deuda, será $c\,(1 + r)$.

La suma de las anualidades entregadas y de sus intereses compuestos debe ser igual, en el momento de entregar la última anualidad c, a la suma de la cantidad recibida en préstamo, más sus intereses compuestos. Por consiguiente,

$$C(1+r)^n = c(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} + \ldots + c(1+r) + c.$$

Este segundo miembro es una progresión geométrica de razón $1 + r$; aplicando la fórmula conocida (v. pág. 49), se tendrá

$$C(1+r)^n = \frac{c[(1+r)^n - 1]}{r},$$

de donde, sustituyendo C por A y c por a

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

que es la **fórmula de las anualidades de amortización** (v. TABLA III).

AÑOS n	TANTO POR CIENTO DE INTERÉS $4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
	P	P	P	P
1	1,045 000	1,050 000	1,055 000	1,060 000
2	0,533 998	0,537 805	0,541 618	0,545 437
3	0,363 773	0,367 209	0,370 654	0,374 110
4	0,278 744	0,282 012	0,285 294	0,288 591
5	0,227 792	0,230 975	0,234 176	0,237 396
6	0,193 878	0,197 017	0,200 179	0,203 363
7	0,169 701	0,172 820	0,175 964	0,179 135
8	0,151 610	0,154 722	0,157 864	0 161 036
9	0,137 574	0,140 690	0,143 839	0,147 022
10	0,126 379	0,129 505	0,132 668	0,135 868
11	0,117 248	0,120 389	0,123 571	0,126 793
12	0,109 666	0,112 825	0,116 029	0,119 277
13	0,103 275	0,106 456	0,109 684	0,112 960
14	0,097 820	0,101 024	0,104 2 9	0,107 585
15	0,093 114	0,096 342	0,099 626	0,102 963
16	0,089 015	0,092 270	0,095 583	0,098 952
17	0,085 418	0,088 699	0,092 042	0,095 445
18	0,082 237	0,085 546	0,088 920	0,092 357
19	0,079 407	0,082 745	0,086 150	0,089 621
20	0,076 876	0,080 243	0,083 679	0,087 185
21	0,074 601	0,077 996	0,081 465	0,085 005
22	0,072 546	0,075 971	0,079 471	0,083 046
23	0,070 682	0,074 137	0,077 670	0,081 278
24	0,068 987	0,072 471	0,076 036	0,079 679
25	0 067 439	0,070 952	0,074 549	0,078 227
26	0,066 021	0,069 564	0,073 193	0,076 904
27	0,064 719	0,068 292	0,071 952	0,075 697
28	0,063 521	0,067 123	0,070 814	0,074 593
29	0,062 415	0,066 046	0,069 769	0,073 580
30	0,061 392	0,065 051	0,068 805	0,072 649
31	0,060 443	0,064 132	0,067 917	0,071 792
32	0,059 563	0,063 280	0,067 095	0,071 002
33	0,058 745	0,062 490	0,066 335	0,070 273

TABLA III. Anualidad que amortiza un capital de un P al cabo de n años

OBSERVACIÓN. Los problemas relativos a las anualidades de amortización se resuelven valiéndose de esta fórmula, mediante el empleo, por lo general, de las tablas de logaritmos.

Por ejemplo, si a es la incógnita, se tendrá

$$\log a = \log A + \log r + n \log(1+r) + \text{colog}[(1+r)^n - 1].$$

Para calcular este último término, se calculará primeramente $(1+r)^n$ por medio de tablas, y después $(1+r)^n - 1$; se tomará el logaritmo del resultado y después el cologaritmo.

En realidad, cuando se trata de calcular a, se utilizan tablas calculadas previamente, como las que indicamos.

OBSERVACIÓN. El problema de las anualidades de amortización se presenta algunas veces en forma diferente: las anualidades para el pago de una deuda pueden ser variables, es decir, que los pagos anuales pueden ser diferentes. En algunos casos, no debe empezar a pagarse la anualidad hasta transcurrido cierto tiempo *(anualidad diferida)*. Análogamente, una anualidad puede ser *anticipada*, es decir, pagadera antes del lapso de tiempo que transcurre entre dos pagos consecutivos.

Anualidad de capitalización. — *Se denomina* **anualidad de capitalización** *a las imposiciones anuales que hay que efectuar para constituir un capital determinado al cabo de cierto número de años.*

Llamemos a al valor de la anualidad que suponemos fija, r al tanto por uno, n al número de años que se paga la anualidad y A al capital constituido. Razonando como en el párrafo anterior, se tendrá

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \ldots + a(1+r).$$

Efectuando la suma de los términos de la progresión geométrica que constituye el segundo término, se obtiene

$$A = \frac{a(1+r)}{r}[(1+r)^n - 1],$$

que es la **fórmula de las anualidades de capitalización**, que se resuelve por medio de la tabla de logaritmos.

OBSERVACIÓN. En la tabla IV se han calculado los diferentes valores de A, suponiendo $a = 1$, y n variable de 1 a 33 y r de 4,5 a 6, por fracciones de 0,50 P.

PROBLEMAS. 1. **Calcular la anualidad necesaria para amortizar una deuda de 1 000 000 de P en 15 años, al 5% de interés.**

Aplicando la fórmula de la anualidad de amortización

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$A = 1\,000\,000.$$

Como $r = 5\%$ y $n = 15$, la tabla III nos da, para valor de

$$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}, \qquad 0{,}096342.$$

La anualidad será, pues,

$$a = 1\,000\,000 \times 0{,}096342 = 96342 \text{ P}.$$

2º **¿En cuántos años se amortizará un capital de 400 000 P, por anualidades de 30 000 P al 5% de interés?**

Utilicemos la fórmula fundamental $\frac{a}{A} = \frac{30\,000}{400\,000} = 0{,}075.$

Busquemos en la tabla III, en la columna del 5%, 0,075. Enfrente de 22 figura 0,075 971, y enfrente de 23 leemos 0,074 137. Serán, pues, necesarias, 22 anualidades, siendo la última ligeramente superior a 30 000.

Para precisar el importe de esta última anualidad, averigüemos en qué se ha convertido la cantidad de 400 000 P colocada durante 22 años a interés compuesto del 5%. Utilicemos la tabla I.

Al cabo de 22 años, un P se ha convertido en 2,925 261; 400 000 P se habrán convertido en 2,925 261 × 400 000 = 1 170 104 P. Busquemos también, valiéndonos de la tabla IV, el capital formado por las anualidades de 30 000. La imposición ha durado 21 años.

En la columna relativa al 5% de la tabla IV, se encuentra, frente a 21, el número 37,50521. El capital formado por 30 000 P será, por lo tanto, 37,50521 × 30 000 = 1 125 156,30. Añadiéndole la 22ª anualidad de 30 000 P, se obtiene 1 155 156 P.

$$1\,170\,104 - 1\,155\,156 = 14\,948.$$

Para amortizar completamente la deuda habrá que añadir 14 948 P al último pago.

EJEMPLO: *Un ingeniero retira de su sueldo 200 000 P al año, que coloca en su industria al interés anual del 10%. En vez de cobrar este interés, lo deja para su capitalización. ¿Cuántos años debe retirar de su sueldo dicha cantidad, para que su industria le produzca un ingreso mínimo de 200 000 P?*

Conseguido este ingreso, este ingeniero se limita, sin retirar más cantidades de su sueldo, a capitalizar, al 10%, los intereses del capital que

AÑOS n	TANTO POR CIENTO DE INTERÉS $4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
	P	P	P	P
1	1,045 00	1,050 00	1,055 00	1,060 00
2	2,137 02	2,152 50	2,168 02	2,183 60
3	3,278 19	3,310 12	3,342 27	3,374 62
4	4,470 71	4,525 63	4,581 09	4,637 09
5	5,716 89	5,801 91	5,888 05	5,975 32
6	7,019 15	7,142 01	7,266 89	7,393 84
7	8,380 01	8,549 11	8,721 57	8,897 47
8	9,802 11	10,026 56	10,256 26	10,491 32
9	11,288 21	11,577 89	11,875 35	12,180 79
10	12,841 18	13,206 79	13,583 50	13,971 64
11	14,464 03	14,917 13	15,385 59	15,869 94
12	16,159 91	16,712 98	17,286 80	17,882 14
13	17,932 11	18,598 63	19,392 57	20,015 07
14	19,784 05	20,578 56	21,408 66	22,275 97
15	21,719 34	22,657 49	23,641 14	24,672 53
16	23,741 71	24,840 37	25,996 40	27,212 88
17	25,855 08	27,132 38	28,481 20	29,9·5 65
18	28,063 56	29,539 00	31,102 67	32,759 99
19	30,371 42	32,065 95	33,868 32	35,785 59
20	32,783 14	34,719 25	36,786 08	38,992 73
21	35,303 38	37,505 21	39,864 31	42,392 29
22	37,937 03	40,430 48	43,114 85	45,995 83
23	40,689 20	43,502 00	46,538 00	49,815 58
24	43,565 21	46,727 10	50, 52 59	53 864 51
25	46,570 64	50,113 45	53,965 98	58,156 38
26	49,711 32	53,669 13	57,989 11	62,705 77
27	52,993 33	57,402 58	62,233 51	67,628 11
28	56,423 03	61,322 71	66,711 35	72,639 80
29	60,007 07	65,438 85	71,435 48	78,058 19
30	63,752 39	69,760 79	76,419 43	83,801 68
31	67,666 25	74,298 83	81,677 50	89,889 78
32	71,756 23	79,063 77	87,224 76	96,343 16
33	76,030 26	84,066 96	93,077 12	103,183 75

TABLA IV. Suma producida al cabo de n años por la imposición anual de un P al comienzo de cada año

ha formado, retirándose al cabo de treinta años. ¿A qué interés x debe colocar el capital para obtener una renta anual de 1 000 000 de P?

Teniendo en cuenta que la primera cantidad retirada de su sueldo lo fue al final del primer año, y que la última cantidad retirada no produjo interés, el capital constituido será

$$200\,000\ \frac{1{,}1^n - 1}{0{,}1}.$$

Para que este capital produzca 200 000 P de interés anual deberá verificarse que $200\,000\ (1{,}1^n - 1) = 200\,000$, de donde

$$1{,}1^n = 2 \qquad \text{y} \qquad n = \frac{\log 2}{\log 1{,}1} = \frac{0{,}30103}{0{,}04139}.$$

El número de años buscado es 8, por exceso.

Durante 22 años, el ingeniero deja colocado a un interés compuesto del 0,1 el capital que representa las 8 cantidades que ha retirado de su sueldo.

El capital impuesto será, por lo tanto, $200\,000\ \dfrac{1{,}1^8 - 1}{0{,}1}$, que al cabo de 22 años se habrá convertido en $200\,000\ \dfrac{1{,}1^8 - 1}{0{,}1}\ 1{,}1^{22}$.

Se tendrá

$$200\,000\ \frac{1{,}1^8 - 1}{0{,}1}\ 1{,}1^{22}\ \frac{x}{100} = 1\,000\,000,$$

de donde se deduce

$$x = \frac{100}{2\,(1{,}1^8 - 1)\ 1{,}1^{22}}.$$

Primeramente se calculará por logaritmos $1{,}1^8$, que da 2,143, y se tendrá $\log x = \log 100 + \text{colog}\ 2 + \text{colog}\ 1{,}143 + 22\ \text{colog}\ 1{,}1$, de donde

$$\log x = 0{,}73035 \qquad \text{y} \qquad x = 5{,}38.$$

Algoritmo algebraico

Expresiones algebraicas

Se llama **expresión algebraica** *todo conjunto de números y letras unidos por signos que indican las operaciones que hay que efectuar.*

$$vt, \quad \frac{ait}{100}, \quad 3ax^2 - b^2, \quad \frac{4x^2 - a^2}{7ax}$$

son expresiones algebraicas.

Valor numérico de una expresión algebraica. Expresiones equivalentes. — El *valor numérico de una expresión algebraica* es el número que se obtiene sustituyendo las letras que figuran en la expresión por valores numéricos, y efectuando las operaciones indicadas.

Por ejemplo, sea la expresión algebraica $4a^3b^2 - 5a^2b^3$, y calculemos su valor numérico para $a = 2$, $b = -1$.

Se tendrá $4\,(2)^3\,(-1)^2 - 5\,(2)^2\,(-1)^3$, o sea $32 + 20 = 52$.

Se dice que dos expresiones algebraicas son *equivalentes* cuando toman el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores numéricos que se atribuyan a las letras que en ellas figuren: $(a + b - c)\,n$ y $an + bn - cn$ son dos expresiones algebraicas equivalentes.

Puede ocurrir que para ciertos valores numéricos que se atribuyan a las letras sea imposible calcular el valor numérico de la expresión algebraica. Por ejemplo, $\dfrac{4x^2 + 1}{x - 1}$ carece de valor numérico para $x = 1$, porque la división de un número por cero no tiene significación. Análogamente, tenemos que $\dfrac{2x - \sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$ carece de significación para $x = 2$ e $y = -1$, porque un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Con frecuencia se considera el *valor absoluto de una expresión algebraica*, que es el valor absoluto de su valor numérico.

El valor absoluto de $3a^2 - 4b^2 + ab$ para $a = 1$ y $b = -2$, es 15, y se indica así: $|3a^2 - 4b^2 + ab|$.

Monomio. — *Se denomina* **monomio** *toda expresión algebraica que consta de un solo término.*

$$3a^2b, \quad \frac{4a^3b^2}{3ab}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

son monomios.

Monomio racional e irracional. — Los monomios

$$3a^2b, \quad \frac{2a^3x}{b^2}, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

son racionales *porque las letras que en ellos figuran no están afectadas de ningún radical.*

En cambio

$$\sqrt{a}, \quad 3a\sqrt{x}, \quad \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

son *irracionales.*

Monomios enteros y no enteros. Monomios fraccionarios. Los monomios

$$3a^2x, \quad 4a^3b^2x, \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

se llaman enteros *porque son racionales y en sus denominadores no figura ninguna letra.*

$$2a^3\sqrt{x}, \quad a\sqrt{b}, \quad \frac{4a^3b^2}{3x}$$

son, en cambio, monomios no enteros; los dos primeros porque no son racionales y el tercero porque en su denominador figura una letra.

Todo monomio algebraico racional que contenga una letra en el denominador se llama *monomio fraccionario.*

Grado de un monomio entero. — Se llama *grado de un monomio entero* la suma de los exponentes de las diferentes letras que en él figuran. Por ejemplo: $4a^3b^2x^4$ es un monomio de noveno grado; $3a^2x$ es un monomio de tercer grado.

Con frecuencia se considera el grado de un monomio con respecto a una letra determinada: el grado es el exponente de dicha letra. Así, $4a^3bx^2$, es de tercer grado con respecto a a, de primer grado con respecto a b y de segundo con respecto a x.

Coeficiente de un monomio. — Se denomina *coeficiente* cualquier factor numérico, y se coloca delante de los factores literales.

Cuando en un monomio sólo figuran los factores literales, su coeficiente es igual a 1. Si va precedido del signo —, su coeficiente es —1. Así a^3b^2cx es un monomio cuyo coeficiente es 1. $-a^3b^2cx$ es un monomio cuyo coeficiente es —1.

Polinomio, binomio, trinomio. — Cuando varios monomios están ligados por el signo de la suma o por el de la resta constituyen un *polinomio;* cuando el polinomio sólo tiene dos términos o monomios se llama *binomio,* y si tiene tres términos, *trinomio.*

$a - b$, $4x^2 - 3a^2$ son binomios. $ax^2 + bx + c$ es un trinomio.

Puede decirse que un polinomio es una suma algebraica de monomios.

Por ejemplo, $3x^2 - 4x - \dfrac{5}{4}$, es un trinomio compuesto por la suma de $3x^2$, $-4x$ y $-\dfrac{5}{4}$.

Polinomio racional, irracional, entero y no entero. — Un polinomio es *racional* cuando todos sus términos o monomios son racionales. De lo contrario, es *irracional.*

Análogamente, un polinomio es *entero* cuando todos sus términos son enteros, y no entero en el caso contrario.

$$4x^3 - 3x^2 - 5x + 4, \qquad a^3b^2 - 4a^3b^3 - b^5,$$

son *polinomios enteros.*

$$3\,\frac{a}{x} + bx^2, \qquad a\sqrt{x} + b,$$

no son polinomios enteros: el primero porque contiene una letra en el denominador y el segundo porque uno de sus términos es irracional.

Grado de un polinomio entero. — Es el grado del término de mayor grado. $3x^4 - ax^3 + 5a^4$ es un polinomio de cuarto grado en x.

Polinomio homogéneo. — Se dice que un polinomio es *homogéneo* cuando todos sus términos tienen el mismo grado.
$4a^4 - 3a^3x + 5a^2x^2 + x^4$ es un polinomio homogéneo de cuarto grado.

Expresión algebraica simétrica con respecto a dos letras. — Una expresión algebraica es simétrica con respecto a dos letras a y b cuando no se altera si se permutan a y b.
$4ab$, $3ab\ (a^3 + b^3)$, son expresiones simétricas.
Las expresiones simétricas en a y b contienen grupos homogéneos: $a + b$, $a^2 + b^2$, ...; si existen otros términos como a^4b^3, por ejemplo, existirá necesariamente el término a^3b^4, por razón de homogeneidad.

Monomios semejantes. — Se llaman *monomios semejantes* los que tienen la misma parte literal y sólo difieren en sus coeficientes.
$4a^2bx$ y $-3a^2bx$ son monomios semejantes.

Monomios opuestos. — Son monomios semejantes cuyos coeficientes son opuestos. EJEMPLO: $3a^2bx^3$ y $-3a^2bx^3$.

Reducción de monomios semejantes. — Cuando un polinomio contiene varios monomios semejantes pueden reunirse en uno sólo, semejante a los primeros, de forma que, cualesquiera que sean los valores numéricos que se atribuyan a las letras, el valor numérico no varíe. Por ejemplo $5a^3x - 2a^3x + 4a^3x$ podrá reemplazarse por $(5 - 2 + 4)\ a^3x$, ó $7a^3x$, porque cualesquiera que sean los valores que se atribuyan a las letras, si a^3x toma un valor numérico m, el producto $(5 - 2 + 4)\ m$ será igual a

$$5m - 2m + 4m,$$

que es el valor numérico de $5a^3x - 2a^3x + 4a^3x$.
En un polinomio pueden agruparse los términos semejantes y reemplazar cada grupo por un solo término, por la misma razón que puede invertirse el orden de los términos de cualquier suma algebraica.
Reducir los términos semejantes de un polinomio es sustituir varios monomios semejantes por uno solo, semejante a los primeros, y cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los términos considerados. Dos monomios opuestos se destruyen.

Polinomio ordenado. — Se dice que un polinomio está *ordenado con respecto a las potencias decrecientes de* x cuando los grados de las potencias de x que en él figuran van disminuyendo desde el primero al último término.
$3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ es un polinomio ordenado con respecto a x.
$5 - 2a^2b^2 + 4a^3b$ es un polinomio *ordenado con respecto a las potencias crecientes de* a.

Operaciones con las expresiones algebraicas

Suma algebraica. — DEFINICIÓN. *La suma de dos o más expresiones algebraicas es la operación que tiene por objeto, dadas dos o más expresiones algebraicas, formar una sola expresión tal que si se atribuyen a las letras valores numéricos, el valor numérico de la expresión única sea la suma de los valores numéricos de las expresiones consideradas, cualesquiera que sean los valores numéricos atribuidos a las letras.*

Suma de monomios. — REGLA. *Para sumar varios monomios se colocan unos a continuación de otros, en cualquier orden, conservando sus signos.*
Si se atribuyen valores numéricos a las letras, cada monomio toma un valor numérico determinado cuya suma es evidentemente igual al valor numérico de la expresión definida. EJEMPLO: La suma de $(3x^2)$, $(-5xy)$, $(-y^2)$, es $3x^2 - 5xy - y^2$.

Suma de polinomios. — *Para sumar varios polinomios basta escribirlos unos a continuación de otros, conservando los signos de todos los términos.*
Se reducirán, si es necesario, los términos semejantes.
Esta regla se justifica fácilmente, puesto que si se atribuyen valores numéricos a las letras, cada polinomio se convierte en una suma de números, y para sumarlos se escriben unos a continuación de otros, conservando los signos de cada término.
EJEMPLO: Sean los polinomios

$$\begin{aligned} P &= x^4 + 3x^2y^2 - 4xy^3 - 2y^4, \\ P' &= 3x^3y - 4x^2y^2 + xy^3, \\ P'' &= 3x^4 - x^3y - x^2y^2 - 4y^4. \end{aligned}$$

Se tendrá:

$$\begin{aligned} P + P' + P'' &= (x^4 + 3x^2y^2 - 4xy^3 - 2y^4) + (3x^3y - 4x^2y^2 + xy^3) \\ &+ (3x^4 - x^3y - x^2y^2 - 4y^4) \\ &= 4x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 3xy^3 - 6y^4. \end{aligned}$$

Sustracción algebraica. — DEFINICIÓN. *Restar una expresión algebraica* A *de otra* B *es encontrar una tercera expresión también algebraica* C *tal que, si se atribuyen a las letras valores numéricos, el valor numérico de* C *sea igual al valor numérico de* A *menos el de* B*, debiendo verificarse esta relación cualesquiera que sean los valores numéricos atribuidos a las letras.*

REGLAS. 1° *Para restar dos monomios se añade al primero el segundo, con signo contrario;*

2° *Para restar dos polinomios, se añade el segundo al primero, cambiando los signos de todos sus términos, y después se reducen, si es necesario, los términos semejantes.*

EJEMPLO: Si se tiene $\begin{cases} P = 3a^2 - 4ab + b^2, \\ P' = a^2 + ab - b^2. \end{cases}$

Se escribirá

$$\begin{aligned} P - P' &= (3a^2 - 4ab + b^2) - (a^2 + ab - b^2) = 3a^2 - 4ab + \\ &+ b^2 - a^2 - ab + b^2 = 2a^2 - 5ab + 2b^2. \end{aligned}$$

Prueba de la sustracción. — La sustracción es la operación inversa de la adición; para **efectuar la prueba** de esta operación se suma el polinomio hallado al polinomio sustraendo, y debe obtenerse el polinomio minuendo.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} P = 4x^3 - 2x^2 - 1, \\ P' = -2x^3 - x^2 + 3x - 5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P - P &= 4x^3 - 2x^2 - 1 + 2x^3 + x^2 - 3x + 5, \\ P - P' &= 6x^3 - x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

PRUEBA:

$$(6x^3 - x^2 - 3x + 4) + (-2x^3 - x^2 + 3x - 5) = 4x^3 - 2x^2 - 1.$$

PROBLEMA. *Dados los polinomios*

$$\begin{aligned} P &= x^3 - 3x^2 - 1, \\ P' &= 3x^2 - 5x + 2, \\ P'' &= 2x^3 - x^2 + 4x + 3, \end{aligned}$$

formar la expresión

$$P - P' - P''.$$

Regla práctica: Si dos polinomios están unidos por signos + o —, pueden suprimirse los paréntesis a condición de cambiar los signos situados delante de los términos que figuran dentro de los paréntesis precedidos del signo —.
Se tendrá:

$$\begin{aligned} P - P' - P'' &= (x^3 - 3x^2 - 1) - (3x^2 - 5x + 2) - \\ &- (2x^3 - x^2 + 4x + 3) = - x^3 - 5x^2 + x - 6. \end{aligned}$$

Multiplicación algebraica. — DEFINICIÓN. *La multiplicación de dos o más expresiones algebraicas es la operación que tiene por objeto, dadas dos o más expresiones algebraicas, formar otra expresión tal que, si se atribuyen valores numéricos a sus letras, el valor numérico de la expresión formada sea el producto de los valores numéricos de las expresiones algebraicas dadas, cualesquiera que sean dichos valores numéricos.*

Producto de dos monomios. — Cada monomio puede considerarse como un producto de factores. Cuando se atribuyen a las letras valores numéricos, tendrá que efectuarse un producto de dos factores numéricos; se efectuará el producto de los factores que figuran en los dos monomios, en cualquier orden. Por consiguiente, *el producto de dos monomios se obtiene multiplicando en un orden cualquiera todos los factores que en ellos figuran.*
Si los monomios son enteros, se agrupan las potencias de las mismas letras así como sus coeficientes.

EJEMPLO:

1° $$\left(-\frac{3}{4}ax^3\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}a^3x\right) \equiv -\frac{3}{5}a^4x^4;$$

2° $$3a^2bc\cdot\frac{2}{5}ab^3 \equiv \frac{6}{5}a^3b^4c.$$

CONSECUENCIAS. 1° El producto es un monomio.
2° Su coeficiente es el producto de los coeficientes de los factores.
3° Cada letra del producto está afectada de un exponente que es la suma de los exponentes que tiene en ambos factores.
4° El grado de un producto es la suma de los grados de cada uno de los factores.

Producto de varios monomios. — *Se multiplican dos de ellos, el producto obtenido por un tercero, y así sucesivamente.* La observación anterior sigue aplicándose: el producto será un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los diferentes factores, estando afectada cada letra del producto de un exponente igual a la suma de los exponentes de dicha letra en los diferentes factores. Ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{4}ax^3y\right)\cdot\left(\frac{2}{5}a^2xy^2\right)\cdot\left(-5a^3x^2\right) = \frac{3}{2}a^6\ {}^6y^3.$$

Potencia de un monomio. — Para elevar un producto de factores a una potencia, se elevan a dicha potencia cada uno de los factores del producto. EJEMPLO:

$$\left(-\frac{3}{5}a^3x\right)^2 = \frac{9}{25}a^6x^2; \qquad \left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right)^3 = \frac{8}{27}a^6b^9x^3.$$

Producto de un polimonio por un monomio. — REGLA. *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio y se suman los productos obtenidos.*
Ello se deduce inmediatamente de la definición de la multiplicación y de lo que se ha dicho sobre la multiplicación de un polinomio numérico por un número. EJEMPLO:

1° $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 4)\cdot(-2x) = -6x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 8x;$
2° $(4a^3 - 3a^2x + 5ax^2 - 2x^3)\cdot(3ax^2) = 12a^4x^2 - 9a^3x^3 + 15a^2x^4 - 6ax^5.$

OBSERVACIÓN. Si el polinomio está ordenado con respecto a una letra, el producto estará ordenado con respecto a la misma letra si se toman sucesivamente todos los términos del polinomio en el orden en que están escritos.

Puede cambiarse, evidentemente, el orden de los dos factores del producto.

Producto de dos polinomios. — Para valores numéricos atribuidos a las letras, el valor numérico del producto debe ser igual al producto de los valores numéricos del multiplicando y el multiplicador. Teniendo en cuenta que el valor numérico del multiplicando es la suma de los valores numéricos de cada uno de sus términos, para multiplicar esta suma por el valor numérico del multiplicador habrá que multiplicar cada uno de sus términos por dicho valor numérico. De donde se deduce la siguiente

REGLA. *Para multiplicar dos polinomios se suman los términos obtenidos multiplicando cada término de uno de los polinomios por todos los términos del otro.*

OBSERVACIONES. 1º En la práctica, para operar más fácilmente, se empieza por ordenar los dos polinomios con respecto a las potencias crecientes o decrecientes de una misma letra, a fin de facilitar la reducción de los términos semejantes; los productos parciales, así como el producto definitivo, estarán ordenados con respecto a las potencias crecientes o decrecientes de la misma letra. La forma de operar es la siguiente:

$$\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \\
2x^2 - 7x + 3 \\
\hline
6x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 8x^2 \qquad\qquad\qquad \\
-21x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 28x \qquad\quad \\
9x^3 - 15x^2 + 9x - 12 \\
\hline
6x^5 - 31x^4 + 50x^3 - 44x^2 + 37x - 12.
\end{array}$$

Si uno de los productos parciales no contiene todas las potencias de la letra ordenatriz, deberá dejarse un espacio para los términos que faltan, ya que los restantes productos parciales podrán proporcionar términos semejantes al que falta, por ejemplo:

$$\begin{array}{l}
\qquad 3x^5 + 5a^2x^3 - 4a^3x^2 - a^4x - 3a^5 \\
\qquad 2ax^3 - 5a^2x^2 - 2a^4 \\
\hline
6ax^8 \qquad\quad + 10a^3x^6 - 8a^4x^5 - 2a^5x^4 - 6a^6x^3 \\
\quad - 15a^2x^7 \qquad\quad - 25a^4x^5 + 20a^5x^4 + 5a^6x^3 + 15a^7x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 6a^4x^5 \qquad\qquad - 10a^6x^3 + 8a^7x^2 + 2a^8x + 6a^9 \\
\hline
6ax^8 - 15a^2x^7 + 10a^3x^6 - 39a^4x^5 + 18a^5x^4 - 11a^6x^3 + 23a^7x^2 + 2a^8x + 6a^9.
\end{array}$$

2º Obsérvese que en un producto de dos polinomios ordenados con respecto a las potencias crecientes o decrecientes de una misma letra, el producto estará ordenado en el mismo sentido que los dos factores, y su primer término procede, sin reducción, del producto de los primeros términos de los dos factores del producto; su último término también procede, sin reducción, del producto de los dos últimos términos de los dos factores del producto.

Ello se debe a que como el primero y último términos del producto son los productos de los términos de mayor grado y de menor grado de los dos factores, no existen en el producto términos semejantes, y, por consiguiente, estos dos términos no pueden reducirse.

3º *El grado del producto de dos polinomios enteros es la suma de los grados de los dos factores.* Se deduce de lo anterior.

4º *El producto de dos polinomios homogéneos es un polinomio homogéneo.*

5º La igualdad que se obtiene como resultado de una multiplicación es evidentemente una identidad, puesto que existe entre los dos miembros, cualesquiera que sean los valores que se atribuyan a las letras. Podrá, pues, escribirse:

$$(3x^2 - 2x - 4)(2x - 5) = 6x^3 - 19x^2 + 2x + 20.$$

Lo mismo puede decirse con respecto a todas las igualdades que son consecuencia de una operación algebraica. En general, se indica la relación con el signo de igualdad.

Productos notables. — Cuadrado de un binomio. — Sea la suma $a + b$: Por definición, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Efectuando la operación: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

El cuadrado de la suma indicada de dos términos es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo. En particular:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Producto de una suma de dos términos por su diferencia. — Efectuando la multiplicación, se tendrá

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^4;$$

El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos dos términos.

EJEMPLO:

$$(3a^2 + b^2)(3a^2 - b^2) = 9a^4 - b^4;$$
$$(4x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 2x - 1) = (4x^2 - 2x)^2 - 1 = 16x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 1.$$

Cubo de un binomio.

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b),$$

y efectuando la multiplicación

$$(a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

También puede escribirse

$$(a + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

El cubo de la suma indicada de dos términos es igual al cubo del primero más el triplo del producto del cuadrado del primero por el segundo más el triplo del producto del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo. En particular:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

EJEMPLO:

$$(3x + 4y)^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3;$$
$$(2a^2 - 3b^2)^3 = 8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6.$$

División algebraica. — DEFINICIÓN. *División algebraica es la operación que tiene por objeto, dadas dos expresiones algebraicas llamadas* **dividendo** *y* **divisor**, *hallar una tercera llamada* **cociente,** *tal que si se atribuyen valores numéricos a las letras, el valor numérico del cociente sea exactamente el cociente del valor numérico del dividendo por el valor numérico del divisor, cualesquiera que sean los valores numéricos atribuidos a las letras.*

Se supondrá siempre que los valores numéricos atribuidos a las letras no anulan el divisor, pues en este caso la definición carecería de sentido.

En realidad, la definición dada equivale a decir que la división algebraica, como la división aritmética que se efectúe sin resto, es la operación que tiene por objeto, conocido el producto de dos factores y uno de ellos, hallar el otro.

El símbolo que indica la división es el mismo que el aritmético.

División de dos monomios. — La división de dos monomios A y B da lugar a la fracción $\frac{A}{B}$. Esta fracción puede simplificarse, en ciertos casos, multiplicando o dividiendo sus dos términos por una misma expresión algebraica, especialmente en el caso en que ambos monomios tengan factores comunes.

EJEMPLOS:

$$\frac{15a^3b^2c}{5a^2b} = 3abc.$$

$$\frac{-4a^2b^3x^2}{-10ab^3x} = \frac{2}{5}ax.$$

$$18a^3bc^2x^4 : (-3a^2bx^2) = -6ac^2x^2.$$

$$\frac{5ax^4}{by^2} : \frac{2x^2}{ay} = \frac{5ax^4}{by^2} \times \frac{ay}{2x^2} = \frac{5}{2}\,\frac{a^2x^2}{by}.$$

OBSERVACIÓN. En este ejemplo último el cociente no es entero. El cociente de dos monomios enteros no será un monomio entero:

1.º Cuando el dividendo no contenga todas las letras que figuran en el divisor;

2.º Cuando la letra que figure en el dividendo y el divisor tiene en el dividendo un exponente inferior al que tiene en el divisor.

En resumen: El cociente será entero cuando el dividendo contenga todas las letras que figuran en el divisor, afectada cada una de ellas de un exponente igual por lo menos al que tiene en el divisor.

División de un polinomio por un monomio. — En virtud de la definición de la división, se obtendrá el cociente dividiendo cada término del polinomio por el monomio:

$$\frac{18a^4x - 12a^3x^2 - 15ax^4}{3ax} = 6a^3 - 4a^2x - 5x^3,$$

$$\frac{\frac{2}{3}x^4y^2 - x^3y^3 + \frac{1}{2}xy^5}{\frac{2}{5}xy^2} = \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2y + \frac{5}{4}y^3.$$

Descomposición de una expresión entera en un producto de factores. — Las anteriores operaciones —adición, sustracción, multiplicación y elevación a potencias de monomios y polinomios— permiten, cuando dichos monomios o polinomios están ligados por los signos de las operaciones, reemplazar la expresión dada por un polinomio o un monomio. Esto es lo que se llama *desarrollar*. Aunque en numerosos casos es conveniente desarrollar, en otros muchos es en cambio conveniente reemplazar una expresión entera dada por un *producto de factores*, operación análoga a la que permite, en aritmética, reemplazar un número por un producto de factores primos. A falta de una regla general, se indican a continuación algunos procedimientos que conviene practicar, en el mismo orden en que aquí se indican:

1º *Sacar factor común.* Sacar factor común en un polinomio es sustituirlo por el producto del monomio que se saca factor y del polinomio cuyos términos son los cocientes de los términos del polinomio dado por el factor.

En la práctica, el mayor factor común que puede sacarse es el formado por las letras comunes a todos los términos del polinomio, afectadas cada una de ellas de su menor exponente (regla análoga a la del máximo común divisor en aritmética).

EJEMPLO: Sea el polinomio

$$77a^2b^4 - 22ab^3c^2 + 99a^2b^2cd + 55a^3b^3.$$

Puede sacarse $11ab^2$ factor común, y se tendrá

$$77a^2b^4 - 22ab^3c^2 + 99a^2b^2cd + 55a^3b^3 = 11ab^2(7ab^2 - 2bc^2 + 9acd + 5a^2b).$$

$$27x^2y^2z^4 - 12x^3yz^2 - 15x^2y^3z + 3xyz^2 + xyz = xyz(27xyz^3 - 12x^2z - 15xy^2 + 3z + 1);$$

2º *Empleo de productos notables.* Se agrupan los términos de la expresión dada, de forma que aparezcan productos notables, y puedan uti-

lizarse. En particular, cada vez que se tenga una diferencia de dos cuadrados se utilizará la identidad

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

EJEMPLO:

$$25x^2 - 36y^2 = (5x + 6y)(5x - 6y)$$
$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$
$$a^4b^2 - a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - b^2) = a^2b^2(a - b)(a + b)$$
$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = [2bc + b^2 + c^2 - a^2]\cdot[2bc - b^2 - c^2 + a^2]$$
$$= [(2bc + b^2 + c^2) - a^2]\cdot[a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)]$$
$$= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] = (a + b + c)(b + c - a)$$
$$(a + b - c)(a - b + c);$$

3° *Sacar factor común reiteradamente.* Se reparten los términos de la expresión dada en varios grupos. Si en cada uno de estos grupos puede sacarse el mismo polinomio factor común, este polinomio se sacará factor común de toda la expresión dada.

Sea la expresión $ac + ad + bc + bd$. Si se agrupan los dos primeros términos, puede sacarse a factor común, y análogamente puede sacarse b factor común en los dos últimos términos.

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d).$$

Como $(c + d)$ puede también sacarse factor común, en el segundo miembro, se tendrá:

$$ac + ad + bc + bd = (c + d)(a + b).$$

PROBLEMA. Sea la expresión $(ax - 3b)^2 - (bx - 3a)^2$.

1° Desarrollarla.

2° Descomponerla en un producto de factores.

1° Utilizando los productos notables, se obtiene

$$(ax - 3b)^2 - (bx - 3a)^2 = (a^2x^2 - 6abx + 9b^2) - (b^2x^2 - 6abx + 9a^2) = a^2x^2 - b^2x^2 + 9b^2 - 9a^2.$$

2° Se reconoce una diferencia de dos cuadrados:

$$(ax - 3b)^2 - (bx - 3a)^2 = (ax - 3b + bx - 3a)(ax - 3b - bx + 3a) =$$
$$= [x(a + b) - 3(a + b)]\cdot[x(a - b) + 3(a - b)] =$$
$$= (a + b)(a - b)(x + 3)(x - 3).$$

División de polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una misma letra.

Aunque por lo general el álgebra sólo hace referencia, en la división, al *cociente exacto*, cuando se dan dos polinomios A y B, *ordenados según las potencias decrecientes de una misma letra*, existe un polinomio cociente que recuerda el cociente aritmético aproximado en una unidad.

TEOREMA. *Dados dos polinomios* A *y* B *ordenados según las potencias decrecientes de una misma letra, siendo el grado de* A *superior o igual al de* B, *existe un solo polinomio* Q *y un solo polinomio* R *de grado inferior a* B *tales que se verifique la identidad*

$$A = BQ + R.$$

En efecto; supongamos otros dos polinomios Q′ y R′ tales que $A = BQ' + R'$. Se tendría $BQ + R = BQ' + R'$, de donde

$$B(Q - Q') = R' - R.$$

Si Q es diferente de Q′, el grado de $B(Q - Q')$ es por lo menos igual al grado de B. Pero $R' - R$, que es una diferencia de dos polinomios de grado inferior a B, es también de grado inferior a B. Como una expresión de grado superior al de B no puede ser idéntica a otra de grado inferior, si existieran dos polinomios Q se llegaría a un absurdo.

REGLA DE LA DIVISIÓN. Es parecida a la de la división aritmética.

Una vez *ordenados*, si es necesario, el dividendo y el divisor, se dispone la operación como en aritmética.

El primer término del cociente —término de mayor grado— es el cociente del primer término del dividendo por el primer término del divisor. Se multiplica el divisor por este primer término, y el producto se resta del dividendo, obteniéndose un polinomio cuyo grado es inferior al grado del dividendo.

Si el grado de este polinomio es inferior al del divisor, será el resto y la división se ha terminado. Si el grado de este polinomio es superior al del divisor, se tiene un dividendo parcial cuyo primer término se dividirá por el primer término del divisor, obteniéndose así el segundo término del cociente. Se multiplica el divisor por este segundo término, y el producto se resta del dividendo parcial, etc.

La operación se interrumpe cuando se obtenga una diferencia de grado inferior al del divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l}
10x^5 - 33x^4 & & + 22x^2 - 10x - 10 & & 5x^3 - 4x^2 + 3 \\
-10x^5 + 8x^4 & & - 6x^2 & & \\ \hline
& -25x^4 & + 16x^2 - 10x - 10 & & 2x^2 - 5x - 4 \\
& +25x^4 - 20x^3 & 15x & & \\ \hline
& & -20x^3 + 16x^2 + 5x - 10 & & \\
& & +20x^3 - 16x^2 \quad + 12 & & \\ \hline
& & 5x + 2 & &
\end{array}$$

El cociente de la división es $2x^2 - 5x - 4$, y el resto, $5x + 2$.

CASO PARTICULAR IMPORTANTE. El divisor es un binomio de primer grado de la forma $(ax - b)$. El resto es una constante, puesto que su grado ha de ser inferior al del divisor. Si $f(x)$ es el dividendo, $(ax - b)$ el divisor, $g(x)$ el cociente y C el resto, que no contiene la letra x, se tendrá

$$f(x) = g(x)(ax - b) + C.$$

Sustituyendo x por $\frac{b}{a}$ en esta última igualdad: $f\left(\frac{b}{a}\right) = C$.

Por consiguiente, *el resto de la división de un polinomio en* x *por el binomio* ax — b (*o por* x — a) *se obtiene sustituyendo la letra* x *por* $\frac{b}{a}$ (*o por* a), *raíz del binomio.*

Descomposición de un polinomio en producto de factores (4° procedimiento). — Si al reemplazar x por $\frac{b}{a}$ (o por a), se obtiene un resultado nulo, el polinomio es divisible por $ax - b$ (o por $x - a$), y al efectuar la división se obtiene un producto de factores.

EJEMPLO: 1° $x^2 + 3x - 10$ es divisible por $x - 2$, porque $4 + 6 - 10 = 0$.

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5);$$

2° $x^4 - a^4$ es divisible por $x - a$, porque $a^4 - a^4 = 0$.

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3).$$

Fracciones algebraicas

DEFINICIÓN. *Se denomina* **fracción algebraica** *el símbolo* $\frac{A}{B}$, *que indica la división de una expresión algebraica* A *por otra* B.

Si a las letras que figuran en A y B se les dan valores numéricos cualesquiera, la fracción $\frac{A}{B}$ se convierte en una fracción numérica ordinaria; esta fracción numérica queda completamente determinada, salvo para los casos en que los valores numéricos atribuidos a las letras anulan B.

Admitiremos, por el momento, que los valores numéricos atribuidos a las letras no anulan B. Entonces *se puede, evidentemente, multiplicar o dividir los dos términos de una fracción algebraica por una misma expresión algebraica, obteniéndose una fracción igual, siempre que el factor algebraico por el que se multiplican los dos términos no tenga un valor numérico nulo.*

De ello se deduce que, si se opera como en aritmética, pueden simplificarse las fracciones algebraicas así como reducir varias fracciones al mismo denominador, sumar varias fracciones, etc.

Simplificación de fracciones. — Para simplificar una fracción algebraica se dividen sus dos términos por el mismo divisor común.

Para obtener el máximo común divisor hay que descomponer ambos términos en productos de factores. El máximo común divisor está formado por todos los factores comunes, afectado cada uno de ellos de su menor exponente (regla análoga a la del máximo común divisor).

En la práctica, cuando un factor figura en el numerador y en el denominador con el mismo exponente, desaparece. Cuando figura en los dos términos, permanece en el término en el que esté afectado del mayor exponente, siendo su nuevo exponente la diferencia entre los dos exponentes.

PROBLEMAS. 1° *Simplificar*

$$\frac{24a^3bc^2x^4}{36a^2bc^3x^2}.$$

Se dividen ambos términos por $12a^2bc^2x^2$, y se obtiene la fracción simplificada $\frac{2ax^2}{3c}$.

2° *Simplificar*

$$\frac{(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2}{4c(a + b)^2}.$$

La fracción se convierte, después de transformada, en

$$\frac{(a + b + c + a + b - c)(a + b + c - a - b + c)}{4c(a + b)^2} =$$
$$= \frac{4c(a + b)}{4c(a + b)^2} = \frac{1}{a + b}.$$

Reducción de fracciones a un común denominador. — Se opera como en aritmética. Puede tomarse como denominador común el producto de los denominadores de las fracciones dadas, aunque es preferible tomar como denominador común la expresión algebraica más sencilla.

Se descomponen los denominadores en productos de factores, estando formado el denominador común por todos los factores diferentes afectados cada uno de ellos del mayor de sus exponentes.

OBSERVACIÓN. Dos factores opuestos no se consideran diferentes, puesto que puede pasarse de uno a otro multiplicándolos por -1.

PROBLEMAS

1° *Reducir a un común denominador las fracciones*

$$\frac{3x}{4a^3b},\ \frac{5x}{8ab^3},\ \frac{x}{12a^2b^2}.$$

Tomemos como denominador común $24a^3b^3$. Multpliquemos los dos términos de la primera fracción por $6b^2$, los dos términos de la segunda por $3a^2$ y los dos términos de la tercera por $2ab$; las fracciones serán

$$\frac{18b^2x}{24a^3b^3},\ \frac{15a^2x}{24a^3b^3},\ \frac{2abx}{24a^3b^3}.$$

2° *Reducir a un común denominador las fracciones*

$$\frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2},\ \frac{2x - 3}{x^2 - 2x},\ \frac{x - 5}{x^2 + x - 6}.$$

Se ve inmediatamente que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$
$$x^2 - 2x = x(x-2);$$
$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Se tomará como denominador común $x(x-1)(x-2)(x+3)$.

Las fracciones se escribirán

$$\frac{x(x-2)(x+3)}{x(x-1)(x-2)(x+3)} - \frac{(2x-3)(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x-2)(x+3)},$$
$$\frac{x(x-5)(x-1)}{x(x-1)(x-2)(x+3)}.$$

Operaciones con las fracciones algebraicas

Se efectúan como las operaciones correspondientes en aritmética.

Suma de fracciones algebraicas. — *Si las fracciones dadas tienen el mismo denominador, su suma es la fracción cuyo denominador es el denominador común y cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones dadas.*

Si las fracciones no tienen el mismo denominador, habrá que reducirlas al mismo denominador, y nos encontramos en el caso anterior.

PROBLEMAS. — 1° *Sumar* $1 + \frac{b}{a-b}$.

$$1 + \frac{b}{a-b} = \frac{a-b+b}{a-b} = \frac{a}{a-b}.$$

2° *Sumar* $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2+1}{a^2-1}$

Denominador común $= a^2 - 1$.

$$\text{Suma} = \frac{(a+1)^2 + (a-1)^2 - a^2 - 1}{a^2-1} = \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

3.° *Sumar*

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

Denominador común $= (a-b)(b-c)(c-a)$.

Suma:

$$= \frac{-a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Se supone que los números a, b, c, son diferentes, porque si se tuviera $a = b$, por ejemplo, las dos primeras fracciones dadas no tendrán sentido. La suma dada es, por consiguiente, nula.

Sustracción, multiplicación y división de fracciones algebraicas. — Se opera como en aritmética.

Fracciones irracionales. — Una fracción es irracional cuando uno cualquiera de sus términos no es racional.

Cuando una fracción es irracional, se la simplifica haciendo que desaparezcan, siempre que sea posible, los radicales del denominador.

1° *Denominador con un solo radical.* — Se multiplican los dos términos de la fracción por este denominador.

Así,

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

EJEMPLO:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} =$$
$$= \frac{(x-1)(x-4)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \frac{(x-4)\sqrt{x^2-1}}{x+1}.$$

2° *El denominador de la fracción es de la forma* $A \pm \sqrt{B}$, *o* $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$.

En este caso, se multiplican los dos términos de la fracción por la conjugada del denominador (se dice que dos cantidades son **conjugadas** cuando una de ellas es la suma y la otra la diferencia de dos expresiones iguales: $a - \sqrt{b}$ y $a + \sqrt{b}$ son expresiones conjugadas).

Así,

$$\frac{A}{B + \sqrt{C}} = \frac{A(B - \sqrt{C})}{B^2 - C}, \quad \frac{A}{B - \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C})}{B^2 - C}.$$

Análogamente,

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} - \sqrt{C})}{B - C}, \quad \frac{A}{\sqrt{B} - \sqrt{C}} =$$
$$= \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C})}{B - C}.$$

EJEMPLOS:

1°

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} = \frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x}{1} = \sqrt{4x^2+1} + 2x.$$

2.°

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} = \frac{(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})^2}{2b} =$$
$$= \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}{2b}.$$

OBSERVACIÓN. — En el caso en que figuren en el denominador más de dos radicales (de índice 2) puede también aplicarse el método anterior.

Por ejemplo:

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C} - \sqrt{D}} = \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D})}{(\sqrt{B} + \sqrt{C})^2 - D} =$$
$$= \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D})}{B + C - D + 2\sqrt{BC}} =$$
$$= \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D})(B + C - D - 2\sqrt{BC})}{(B + C - D)^2 - 4BC}.$$

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

Transformación de una ecuación: Inecuaciones. Diferentes clases de ecuaciones. Ecuaciones equivalentes. Principios generales de transformación. — **Ecuación de primer grado con una incógnita:** Ecuación entera de primer grado con una incógnita cuyos coeficientes son números enteros. Ecuación entera de primer grado con una incógnita cuyos coeficientes son números fraccionarios. Resolución general de la ecuación de primer grado. Ecuación irracional que puede reducirse a una ecuación de primer grado. — **Inecuación de primer grado con una incógnita:** *Problemas.* — **Ecuaciones e inecuaciones de primer grado con varias incógnitas.** — **Sistemas de ecuaciones:** Resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sistema de dos ecuaciones generales de primer grado con dos incógnitas. Resumen. — **Sistemas de n ecuaciones de primer grado:** Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tresincógnitas. Sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas. Incompatibilidad. Indeterminación. Eliminación por sustitución. Sistema de n ecuaciones con $n + p$ incógnitas. Sistema de $n + p$ ecuaciones con n incógnitas. — **Los problemas algebraicos:** Elección de las incógnitas. Planteamiento. Resolución y discusión de las ecuaciones. *Problemas*

Transformación de una ecuación

DEFINICIONES. — *Una* **ecuación** *es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se transforma en igualdad numérica cuando se atribuyen a las letras que figuran en la igualdad algebraica valores numéricos particulares.*

Una ecuación se distingue de una identidad en que esta última se transforma en identidad numérica cualesquiera que sean los valores que se atribuyan a las letras.

$3x^2 - 5x = 2$ es una ecuación. La igualdad se transforma en igualdad numérica únicamente para dos valores de x: $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$.

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ es una identidad, que puede escribirse

$$(x-1)^2 \equiv x^2 - 2x + 1.$$

Los valores particulares que hay que atribuir a las letras para que una ecuación se convierta en una igualdad numérica son las **raíces de la ecuación.**

Las expresiones algebraicas separadas por el signo = son los **miembros de la ecuación.**

En una ecuación pueden figurar letras cuyos valores se suponen conocidos, y que se denominan *parámetros*; las restantes letras que en ella figuran son las *incógnitas*. Las cantidades conocidas están representadas por letras, con objeto de tratar al mismo tiempo todos los problemas análogos que sólo difieren entre sí por los valores de los datos. Las incógnitas suelen representarse por las últimas letras del alfabeto.

Resolver una ecuación es hallar todas sus raíces. Si $x = a$ es raíz de una ecuación, se dice que la ecuación se **satisface** para $x = a$.

Una ecuación puede carecer de raíces:

$3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación que no tiene raíces, porque cualquiera que sea el valor que se atribuya a x, el primer miembro es siempre positivo y no puede ser nulo.

Inecuaciones. — Algunas inecuaciones son *numéricas*; por ejemplo $-3 < 2$ es una inecuación numérica.

Otras inecuaciones contienen letras. En la resolución de desigualdades se trata de determinar los valores que conviene atribuir a las incógnitas para que se verifiquen estas desigualdades: son *desigualdades condicionales* o también **inecuaciones.**

Por ejemplo, $3x - 2 > 4$ es una inecuación que se satisface para cualquier valor de x mayor que 2.

Diferentes clases de ecuaciones. Ecuaciones equivalentes. — Una ecuación puede contener una o varias incógnitas.

Se dice que una ecuación es **algebraica** cuando las operaciones que hay que verificar con cada incógnita son operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias o extracción de raíces); en cualquier otro caso, la ecuación se llama **trascendente.**

$2x - 3 = 0$ es una ecuación trascendente.

Se dice que una ecuación es **racional** cuando las expresiones algebraicas que la componen son racionales con respecto a las incógnitas. En caso contrario, la ecuación es **irracional.**

Se dice que una ecuación es **entera** cuando las expresiones algebraicas que en ella figuran son enteras con respecto a las incógnitas. En caso contrario se dice que la ecuación es **no entera.**

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** cuando admiten las mismas raíces.

Principios generales de transformación. — La resolución de ecuaciones se basa en los principios siguientes:

Teorema. *Si a los dos miembros de una ecuación se les añade la misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.*

Las dos ecuaciones

(1) $3x - 1 = 4x + 5.$

(2) $3x - 1 + 2x - 7 = 4x + 5 + 2x - 7$

son equivalentes; se demuestra que todo valor $x = a$ que satisface a la primera ecuación, satisface a la segunda, e inversamente.

Se admite, evidentemente, que la expresión algebraica que se añade a los dos miembros de la ecuación tiene un valor perfectamente determinado para una raíz de (1).

Aplicaciones. 1º *En una ecuación puede pasarse un término de un miembro a otro: basta para ello cambiarle de signo.*

Por ejemplo, en la ecuación (1) podrá pasarse 5 al primer miembro: para ello se añadirá -5 a ambos miembros, con lo que se obtendrá

$$3x - 1 - 5 = 4x.$$

2.º Se deduce de lo anterior que una ecuación puede reducirse siempre a otra ecuación en la que uno de sus miembros sea nulo.

Definición. *Cuando uno de los miembros de una ecuación entera es nulo, una vez reducidos los términos semejantes, se denomina* **grado de la ecuación** *al grado del término de mayor grado con respecto a las incógnitas.*

$3x - 1 = 0$ es de primer grado con una incógnita.

$4x^2 - 3x - 3 = 0$ es de segundo grado con una incógnita.

$4x^2 - 5xy + 1 = 0$ es de segundo grado con dos incógnitas, etc.

Una ecuación entera es homogénea cuando todos sus términos son del mismo grado: $4x^2 - 3xy + y^2 = 0$ es una ecuación homogénea de segundo grado con dos incógnitas.

Teorema. *Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión algebraica que no sea nula se obtiene una ecuación equivalente.*

Por ejemplo, las ecuaciones $3x - 1 = 4x + 5$

$$(3x - 1)(x^2 + 1) = (4x + 5)(x^2 + 1)$$

son equivalentes: fácilmente se demostraría que cualquier raíz $x = a$ de la primera es también raíz de la segunda, y recíprocamente.

Observaciones. 1.º En particular, una ecuación en la que los coeficientes de los términos son fraccionarios puede sustituirse por una ecuación equivalente en la cual los coeficientes de los términos son números enteros. Más adelante trataremos de nuevo esta cuestión (v. pág. 63).

2º Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión algebraica que se anula para ciertos valores de x, la ecuación obtenida no es, por regla general, equivalente a la dada.

Si se multiplican los dos miembros de la ecuación $A = B$ por $x - a$, la ecuación obtenida

$$A(x - a) = B(x - a)$$

admite todas las raíces de la ecuación dada, pero también admite la raíz $x = a$, que no es forzosamente raíz de la ecuación dada.

Por consiguiente, cuando se multiplican los dos miembros de la ecuación por $x - a$, la ecuación obtenida admitirá las raíces de la ecuación dada, pudiendo además admitir como raíz los valores de x que anulan la expresión por la que se ha multiplicado. Se dice que *la ecuación obtenida puede tener más soluciones que la ecuación dada.*

Aplicación. Si la ecuación es racional no entera, podrá convertirse en entera multiplicando sus dos miembros por un múltiplo de los denominadores.

Por ejemplo, sea la ecuación

$$\frac{x - 3}{x - 4} = 2.$$

Multiplicando sus dos términos por $x - 4$, la ecuación se hará entera, sin introducir en ella la raíz $x = 4$, ya que la nueva ecuación podrá escribirse, una vez simplificada, $x = 5$, ecuación que sólo admite como raíz el valor 5.

En resumen: una vez suprimidos los denominadores de la ecuación dada, la nueva ecuación admitirá una raíz que anula uno de los denominadores de la primera ecuación; esta raíz se desechará por ser una raíz extraña, y entonces podrá hacerse entera una ecuación racional sin necesidad de ninguna simplificación previa.

Teorema. *Cuando se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, la nueva ecuación obtenida podrá admitir más raíces que la ecuación dada. Entre las nuevas raíces figurarán las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación dada, siempre que ésta tenga raíces.*

Sea la ecuación $A = B$. Si se elevan ambos miembros al cuadrado, se obtiene la ecuación $A^2 = B^2$. Estas ecuaciones podrán escribirse

(1) $A - B = 0.$

(2) $A^2 - B^2 = 0$, o $(A + B)(A - B) = 0.$

1º Cualquier solución de la ecuación (1) es solución de la ecuación (2), ya que para cualquier solución de la ecuación (1) su primer miembro es idénticamente nulo y, por consiguiente, también lo será el primer miembro de la ecuación (2).

2º Sea una solución de la ecuación (2). Para esta solución el primer miembro de la ecuación (2) es idénticamente nulo. Como este primer miembro de la ecuación (2) es un producto de factores, será necesario y suficiente, para que se anule, que sea nulo uno de los factores. Se tendrá entonces, para la solución considerada, $A - B = 0$, que es una solución de la ecuación (1), o bien $A + B = 0$, y entonces la solución considerada no es solución de la ecuación (1), sino de la ecuación $A = -B$.

Ecuación de primer grado con una incógnita

Ecuación entera de primer grado con una incógnita cuyos coeficientes son números enteros. — Sea la ecuación

$$5x - 2 = 3x - 8.$$

Pasemos al primer miembro los términos en x, y al segundo miembro los términos conocidos. Después de reducir los términos semejantes, se tendrá

$$2x = -6.$$

Si se dividen los miembros de la ecuación por 2, se tendrá

$$x = -3.$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación dada, que admitirá, por consiguiente, como raíz $x = -3$.

Ecuación entera de primer grado con una incógnita cuyos coeficientes son números fraccionarios. — Sea la ecuación

$$\frac{3x - 1}{48} - \frac{x - 2}{36} + 2x - 1 = 3x - 4 + \frac{1}{12}.$$

Si se multiplican todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores, es decir por 144, se tendrá

$3(3x - 1) - (x - 2)4 + (2x - 1)144 = (3x - 4)144 + 12$

ó $\quad 9x - 3 - 4x + 8 + 288x - 144 = 432x - 576 + 12.$

Pasando a un miembro los términos en x y al otro miembro los términos conocidos, se tendrá:

$$9x - 4x + 288x - 432x = 3 - 8 + 144 - 576 + 12$$
$$-139x = -425,$$

y dividiendo ambos miembros por -139, se tendrá

$$x = \frac{425}{139},$$

que es la raíz de la ecuación.

La incógnita figura en el denominador. Sea la ecuación

$$\frac{3x^2 - 5x + 4}{x - 2} = 3x - \frac{1}{2}.$$

Multipliquemos esta ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, $2(x - 2)$, observando que puede introducirse en la ecuación la raíz $x = 2$.

Se tendrá:

$$6x^2 - 10x + 8 = 6x^2 - 12x - x + 2$$

o bien, una vez reducida

$$3x = -6,$$

de donde

$$x = -2.$$

Esta solución es aceptable, puesto que es diferente de $x = 2$.

En resumen, *para resolver una ecuación de primer grado:*

1º Se reduce a un común denominador multiplicando todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores;

2º Se llevan al primer miembro todos los términos en que figura la incógnita, y al segundo miembro todos los términos conocidos, y después se reducen los términos semejantes. Si la ecuación es entera y de primer grado, será de la forma $ax = b$.

Esta ecuación se denomina *ecuación general de primer grado.*

Resolución general de la ecuación de primer grado. — Sea la ecuación $ax = b$.

Pueden presentarse dos casos:

1° $a \neq 0$. Al dividir los dos miembros de la ecuación por a, se tendrá

$x = \frac{b}{a}$, que será la única raíz;

2° $a = 0$. La ecuación será en este caso $0 \cdot x = b$.

a) Si $b \neq 0$, no hay solución, porque no existe ningún número que al sustituir a x satisfaga la ecuación. Se dice que hay *imposibilidad*. No obstante, en ciertos casos, a no es un número fijo, sino un parámetro variable que tiende hacia 0, y la ecuación sigue admitiendo la raíz $x = \frac{b}{a}$, mientras a no sea nulo, pero a medida que a se aproxima a 0, el valor absoluto de $\frac{b}{a}$ es cada vez mayor y llega a ser infinito. Se dice entonces que la raíz de la ecuación es infinitamente grande en valor absoluto para $a = 0$.

Supongamos, por ejemplo, $b > 0$; cuando a tiende hacia 0 tomando valores negativos, $\frac{b}{a}$ tiende hacia $-\infty$; si a tiende hacia 0 tomando valores positivos, $\frac{b}{a}$ tenderá hacia $+\infty$. Más adelante explicaremos el significado de la expresión *tender hacia infinito*.

b) Si $b = 0$, la ecuación será $0 \cdot x = 0$.

La ecuación admite infinitas soluciones, puesto que cualquier número que sustituya a x satisface la ecuación y constituye una solución de la misma. Se dice que hay *indeterminación*.

En realidad, en este caso, la ecuación es una identidad.

PROBLEMAS. 1° *Resolver la ecuación*

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b.$$

Una vez suprimidos los denominadores, multiplicando todos los términos por ab, se obtiene la ecuación equivalente

$$(b - a)\, x = (a - b)\, ab.$$

1° $b - a \neq 0$. Dividiendo ambos miembros por $b - a$, se obtiene la raíz $x = -ab$.

2° $b - a = 0$. La ecuación es de la forma $0 \cdot x = 0$. Hay indeterminación, y cualquier valor de x será raíz de la ecuación.

2° *Resolver la ecuación*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-3}.$$

Después de multiplicar los dos miembros de la ecuación por el producto

$$(x-1)\,(x-2)\,(x-3),$$

se tendrá

$$(x-2)\,(x-3) + (x-1)\,(x-3) = 2\,(x-1)\,(x-2),$$

que, después de simplificar, se convierte en

$$3x = 5,$$

de donde

$$x = \frac{5}{3},$$

que es una raíz de la ecuación dada, siendo los valores no admisibles: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Ecuación irracional que puede reducirse a una ecuación de primer grado. — Se transforma la ecuación irracional en una ecuación entera. Si la ecuación dada sólo contiene una radical, se le aisla en un miembro, pasando al otro miembro todos los demás términos, y después se elevan ambos miembros a la potencia necesaria para que desaparezca el radical. La nueva ecuación, como es sabido, no siempre es equivalente a la ecuación dada (v. pág. 62); sólo se conservarán como raíces de la nueva ecuación las raíces de la ecuación dada.

EJEMPLO. *Resolver la ecuación*

$$2x - 3 + \sqrt{(x+10)\,(x+3)} = 3x + 3.$$

La ecuación podrá escribirse

$$\sqrt{(x+10)\,(x+3)} = x + 6.$$

Al elevar los dos miembros al cuadrado, la ecuación resultante podrá admitir más soluciones que la ecuación dada.

Se obtendrá:

$$(x+10)\,(x+3) = x^2 + 12x + 36,$$

o bien

$$x = 6.$$

Se comprueba que 6 es raíz de la ecuación dada.

OBSERVACIÓN. Obsérvese que la solución hallada (v. pág. 62) será raíz de cualquiera de las ecuaciones:

(1) $\sqrt{(x+10)\,(x+3)} = x + 6;$

(2) $\sqrt{(x+10)\,(x+3)} = -(x+6).$

Bastará, pues, llevar el valor obtenido al segundo miembro y verificar que $x + 6$ es positivo. Por regla general, deberán conservarse aquellas raíces para las cuales el miembro igual al radical toma un valor numérico positivo o nulo.

Si la ecuación contiene varios radicales, podrá repetirse varias veces la misma operación consistente en aislar el radical, para que la ecuación pueda transformarse en entera.

Inecuación de primer grado con una incógnita

DEFINICIÓN. Se ha visto que las ecuaciones son igualdades que se transforman en identidades cuando a ciertas letras, denominadas incógnitas, se atribuyen valores determinados, que son las raíces de la ecuación.

Análogamente, las inecuaciones son desigualdades que se transforman en desigualdades numéricas cuando se atribuyen a ciertas letras, llamadas incógnitas, determinados valores.

Las ecuaciones son identidades condicionales; las inecuaciones son desigualdades condicionales.

La expresión $x - 3 > 0$ es una inecuación, que se convertirá en desigualdad numérica para todo valor de x mayor que 3.

Las inecuaciones pueden contener también, como las ecuaciones, una o varias incógnitas; son también racionales o irracionales, enteras o no enteras, pudiéndose definir su grado cuando son enteras.

Dos inecuaciones son **equivalentes** cuando admiten las mismas soluciones.

Para establecer la equivalencia de dos inecuaciones, habrá que demostrar que toda solución de una de ellas es solución de la otra, y recíprocamente.

Para la resolución de las inecuaciones se establecen principios análogos a los de las ecuaciones.

TEOREMA. *Si se añade una misma expresión algebraica a los dos miembros de una inecuación, la inecuación obtenida es equivalente.*

Consideremos las inecuaciones

(1) $A > B$

(2) $A + C > B + C,$

siendo A, B y C tres expresiones algebraicas.

1° Cualquier solución de la inecuación (1) es solución de la inecuación (2), porque si se atribuyen a las letras valores determinados para los cuales el valor numérico de A es mayor que el de B, el valor numérico de A + C será también mayor que el valor numérico de B + C.

2.° Cualquier solución de la inecuación (2) es solución de la inecuación (1), puesto que podemos considerar que la inecuación (1) se obtiene al sumar a los dos miembros de la inecuación (2) la expresión — C.

OBSERVACIONES. 1° La expresión C deberá estar perfectamente determinada, como en el correspondiente teorema relativo a las ecuaciones, para los valores de las incógnitas que constituyan una solución de la inecuación (1).

2° Como en el teorema correspondiente relativo a las ecuaciones, esto se aplica para pasar un término de un miembro a otro de la ecuación, cambiando su signo.

TEOREMA. *Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por una expresión algebraica positiva, se obtiene una inecuación equivalente. Si la expresión multiplicador es negativa, se cambiará el sentido de la desigualdad para obtener una desigualdad equivalente a la dada.*

Sean las desigualdades:

(1) $A > B$

(2) $AC > BC,$

siendo A, B y C tres expresiones algebraicas, y C positiva para los valores atribuidos a las letras.

Cualquier solución de la desigualdad (1) será forzosamente solución de la (2), y recíprocamente.

Supongamos ahora que C *sea negativa*. Para cualquier solución de la desigualdad (1), el valor numérico de A será mayor que el de B. Si estos valores numéricos se multiplican por la expresión negativa C, AC y BC serán iguales en valor absoluto, pero AC será de signo contrario a A y BC de signo contrario a B; la desigualdad equivalente a (1) será, por consiguiente, $AC < BC$.

OBSERVACIONES. 1° El teorema anterior permitirá, como para las ecuaciones, suprimir los denominadores de una inecuación; en particular, permitirá la obtención de una inecuación equivalente con coeficientes enteros.

— En una inecuación pueden cambiarse los signos de todos sus términos siempre que se cambie el sentido de la inecuación, ya que esta operación equivale a multiplicar los dos miembros de la inecuación por — 1.

2° Fácilmente se establece que:

— *Si se elevan los dos miembros de una inecuación a una potencia impar, se obtiene una inecuación equivalente;*

— *Si se elevan los dos miembros de una inecuación a una potencia par, se obtiene una inecuación equivalente cuando los dos miembros tengan valores siempre positivos. Cuando los valores de ambos miembros sean siempre negativos, será necesario cambiar el sentido de la inecuación obtenida, para que sea equivalente a la primera.*

3° En una inecuación entera de primer grado con una incógnita, una vez suprimidos los denominadores y reducidos los términos semejantes, aplicando los principios antes indicados, sólo quedarán dos términos: el de primer grado y el término conocido, y su forma general será, por consiguiente, $ax + b > 0$.

Resolución de la inecuación general de primer grado con una incógnita.

Sea la inecuación $ax + b > 0$. Se distinguirán dos casos:

1° $a \neq 0$. La ecuación $ax + b = 0$ admite en este caso una raíz $x_0 = -(b/a)$. La desigualdad podrá escribirse $a\,(x - x_0) > 0$.

a) Si a es positivo, la inecuación queda satisfecha para todos los valores de x tales que $x > x_0$.

b) Si a es negativo, la desigualdad queda satisfecha para todos los valores de x tales que $x < x_0$.

Por regla general, $ax + b$ *tiene el mismo signo que* a *para todo valor de* x *mayor que* x_0, *y signo contrario para todo valor de* x *menor que* x_0;

2° $a = 0$. La desigualdad se escribirá $0 \cdot x + b > 0$.

a) Si b es positivo, la desigualdad queda satisfecha para todo valor de x;

b) Si b es negativo, la desigualdad es imposible, cualquiera que sea el valor de x.

PROBLEMAS

1° *Resolver la inecuación* $-3x + 4 < 0$.

La desigualdad se escribirá

$$-3\left(x - \frac{4}{3}\right) < 0$$

y quedará satisfecha para todo valor de x tal que $x > \frac{4}{3}$.

2° *Resolver la inecuación*

$$\frac{3x-1}{12} - \frac{2}{3} > \frac{x-2}{18}.$$

El m. c. m. de los denominadores es 36. Si se multiplican los dos miembros por 36, se obtiene la inecuación equivalente

$$9x - 3 - 24 > 2x - 4 \quad \text{ó} \quad 7x > 23.$$

La inecuación queda satisfecha para $x > \frac{23}{7}$.

3° *Resolver la inecuación*

$$4(8x-3)(x-2)(4x+1) > 0.$$

Como el factor 4 es positivo, bastará con satisfacer

$$(8x-3)(x-2)(4x+1) > 0.$$

El primer miembro es un producto de factores de primer grado; estudiaremos el signo de cada uno de los factores para los diferentes valores de x, es decir, cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$.

En el cuadro siguiente se resume este estudio, siendo P el primer miembro de la inecuación:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		2	$+\infty$
$8x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$4x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Para satisfacer la inecuación, se tomarán valores de x definidos por

$$-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{8},$$

$$2 < x < +\infty.$$

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado con varias incógnitas

Una ecuación de primer grado con varias incógnitas admite una infinidad de soluciones. Consideremos por ejemplo la ecuación $3x - 4y = 2$. Podrá darse a y un valor cualquiera y calcular el valor de x que satisface a la ecuación obtenida. Este valor de x, junto con el valor arbitrariamente escogido para y, constituye una solución de la ecuación o también, como suele decirse, un **sistema de solución.** En resumen, existe una infinidad de sistemas de solución. Una de las incógnitas puede elegirse arbitrariamente, y se dice que hay **indeterminación** para una incógnita.

Si la ecuación de primer grado contiene n incógnitas, podrán elegirse arbitrariamente $n-1$ incógnitas, sustituir en la ecuación estas $n-1$ incógnitas por sus valores arbitrarios, y calcular la $n^{ésima}$ incógnita que, junto con los $n-1$ valores escogidos, constituirá una solución de la ecuación. La ecuación tiene una infinidad de sistemas de solución; hay **indeterminación para** $n-1$ **incógnitas.**

Sistemas de ecuaciones

Definiciones. Cuando varias ecuaciones deben quedar satisfechas para un mismo sistema de valores de las incógnitas, se dice que forman un **sistema.** Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** cuando las ecuaciones de cada uno de ellos son verificadas por un mismo sistema de valores de las incógnitas.

Para establecer la equivalencia entre dos sistemas de ecuaciones hay que demostrar que toda solución del primer sistema es solución del segundo, y recíprocamente.

Dos sistemas de ecuaciones equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.

Resolver un sistema de ecuaciones es obtener todos los sistemas de valores de las incógnitas que satisfacen a las ecuaciones, es decir que, al sustituir a las incógnitas, transforman las ecuaciones del sistema en igualdades numéricas.

Los dos teoremas establecidos para una ecuación con una incógnita se aplican, evidentemente, en el caso de una ecuación con varias incógnitas.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Sea el sistema (1) $\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ 5x + 3y = 2. \end{cases}$

1° *Método de sustitución.*

Se despeja el valor de una incógnita en una de las ecuaciones, como si la otra incógnita fuera conocida, y se sustituye este valor en la otra ecuación. Se tendrá el sistema siguiente:

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{4+2y}{3}; \\ \dfrac{5(4+2y)}{3} + 3y = 2. \end{cases}$$

Los sistemas (1) y (2) son equivalentes, lo que se demuestra fácilmente comprobando que todo sistema $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ de soluciones del sistema (1) es solución del sistema (2), y recíprocamente; ahora bien, al transformar la segunda ecuación del sistema (2) se forma el sistema

$$(3) \quad \begin{cases} x = \dfrac{4+2y}{3}, \\ 19y = -14. \end{cases}$$

La última ecuación sólo se verifica para $y = \frac{-14}{19}$. Llevando este valor a la primera ecuación, se tendrá

$$x = \frac{4 - \frac{28}{19}}{3} = \frac{16}{19}.$$

Por consiguiente, se tendrá un solo sistema de solución.

2° *Método de adición.*

Está basado en la siguiente proposición: en un sistema de ecuaciones puede reemplazarse cualquiera de ellas por la ecuación que se obtiene sumando miembro a miembro todas las ecuaciones del sistema, previamente multiplicadas por un factor numérico que no sea nulo.

Sea, por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones; demostraremos que los dos sistemas (1) y (2) son equivalentes, siendo a, b y c factores numéricos, y $c \neq 0$):

$$(1) \quad \begin{cases} P = 0, \\ P' = 0, \\ P'' = 0. \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} P = 0 \\ P' = 0 \\ aP + bP' + cP'' = 0. \end{cases}$$

En primer lugar, toda solución del sistema (1) es también solución del sistema (2), puesto que cualquier solución del (1) hace que las expresiones P, P', P'' sean idénticas a 0.

La recíproca es también cierta: consideremos una solución del sistema (2); esta solución satisfará las dos primeras ecuaciones del sistema (1). La tercera quedará también satisfecha, puesto que si en las ecuaciones del sistema (2) se sustituyen sus valores, P y P' se anularán, así como cP''; como c es, por hipótesis, diferente de 0, P es nulo.

Sea el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 4x + 2y = 1. \end{cases}$

Multipliquemos la primera ecuación por 4 y la segunda por -3, de forma que los coeficientes de x sean iguales en valor absoluto y de signos contrarios, y sustituyamos la última ecuación por la ecuación que se obtiene sumando miembro a miembro las ecuaciones obtenidas. Se obtendrá el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 4, \\ 14y &= 13, \end{aligned}$$

que se resolverá como en el caso anterior.

Sistema de dos ecuaciones generales de primer grado con dos incógnitas. — Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas puede escribirse en la forma general

$$ax + by = c.$$

Sea el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$

que resolveremos por el método de sustitución.

I. Uno de los cuatro coeficientes a, b, a', b' es diferente de 0, por ejemplo $a \neq 0$. El sistema dado es equivalente al

$$\begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a}, \\ a'\left(\dfrac{c - by}{a}\right) + b'y = c'; \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a}, \\ (ab' - a'b)\,y = ac' - ca'. \end{cases}$$

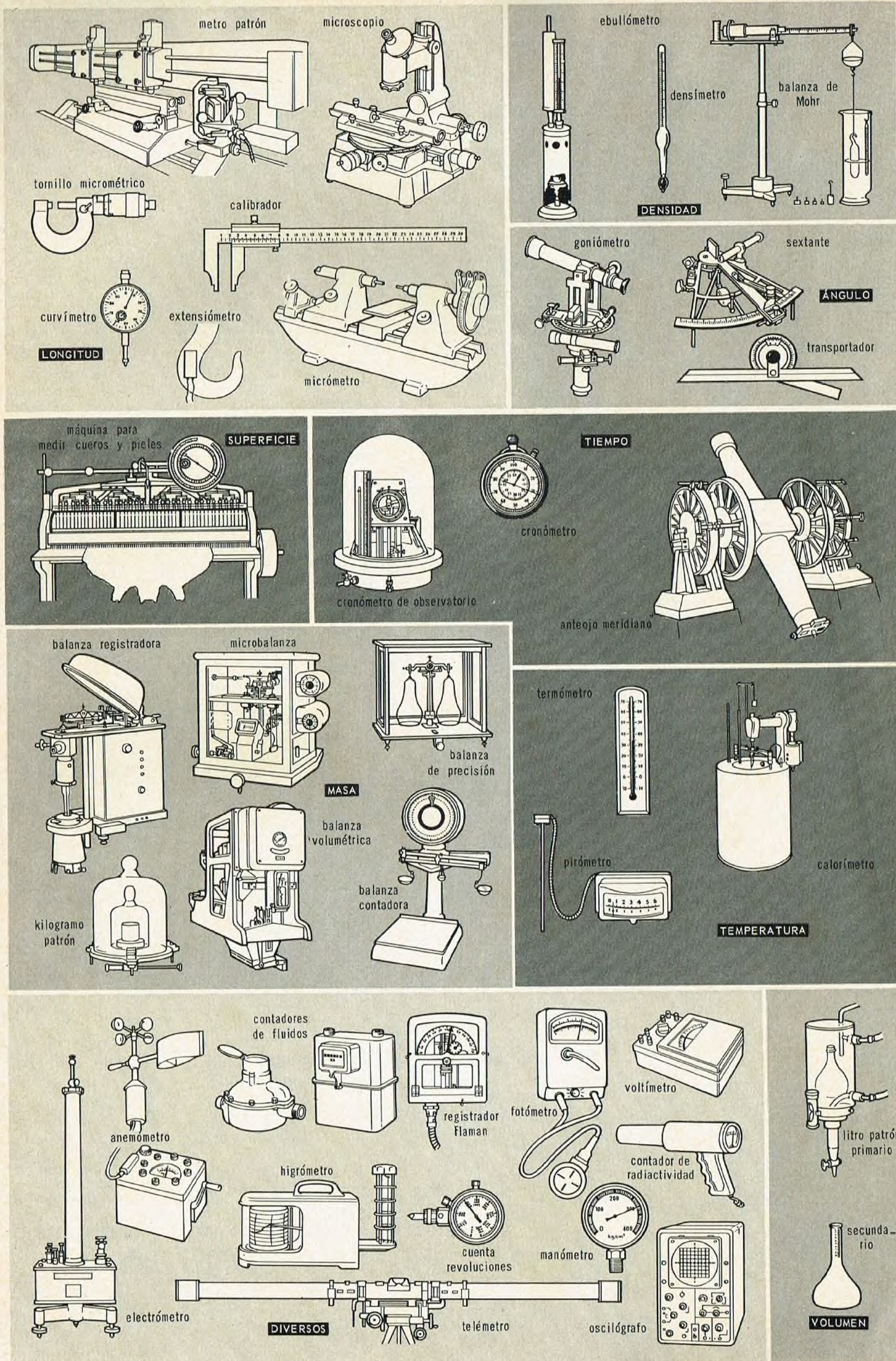
Pueden presentarse dos casos:

1° $ab' - ba' \neq 0$. Despejando el valor de y en la segunda ecuación y llevándolo a la primera, se tiene un sistema de soluciones

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \\ y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{cases}$$


ARISMETRICHA

INSTRUMENTOS DE MEDIDAS



◀ Lám. color. pág. precedente : *La Aritmética, miniatura de un tratado de Casiodoro sobre las artes liberales (Biblioteca Nacional, París)*
[Fot. Larousse]

El sistema admite, en este caso, una solución única. Las fórmulas que dan x e y se llaman **fórmulas de Cramer**, y $ab' - ba'$ es el determinante del sistema;

2° $ab' - ba' = 0$. El sistema puede escribirse

$$\begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a} \\ 0 \cdot y = ac' - ca'. \end{cases}$$

Si $ac' - ca' \neq 0$, no hay solución, y se dice que las ecuaciones son **incompatibles.**

Si $ac' - ca' = 0$, la segunda ecuación admite infinitas soluciones; a cada valor arbitrariamente elegido de y corresponde un valor de x que, junto con el valor arbitrario de y, constituye una solución. Por consiguiente, habrá infinitos sistemas de soluciones y se dice que el sistema es indeterminado.

Hay indeterminación para una incógnita.

II. $a = b = a' = b' = 0$. El sistema puede escribirse $\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c'. \end{cases}$

Si c o c' son diferentes de cero, no existe solución.

Si c o c' son iguales a cero, hay infinitas soluciones; un valor cualquiera de x, junto con un valor cualquiera de y, satisface las ecuaciones. El sistema es indeterminado, habiendo indeterminación para las dos incógnitas.

Resumen. — I. $ab' - ba' \neq 0$, *lo que implica que el coeficiente de una de las incógnitas sea* $\neq 0$.

Sistema único de soluciones, dado por las fórmulas de Cramer.

II. $ab' - ba' = 0$, con $a \neq 0$ y $ac' - ca' \neq 0$.

No hay solución. Las ecuaciones son incompatibles.

III. $ab' - ba' = 0$, *con* $a \neq 0$ *y* $ac' - ca' = 0$.

Hay indeterminación, es decir, *infinitas soluciones.*

OBSERVACIONES. Estudiemos los diferentes casos particulares.

$$ab' - ba' = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

I. Si $b \neq 0$, podrá escribirse $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$.

1° Si $ac' - ca' \neq 0$, con $c \neq 0$, se tendrá $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{c}{c'}$ y por consiguiente $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$. De donde se deduce que $bc' - cb' \neq 0$.

Si llamamos K al valor común de los cocientes $\dfrac{a'}{a}$ y $\dfrac{b'}{b}$, podrá escribirse

$$K = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c},$$

o también

$$a' = aK, \quad b' = bK, \quad c' \neq cK.$$

La segunda ecuación será $K(ax + by) = c'$. Esta ecuación no es compatible con $ax + by = c$, porque $c' \neq cK$.

2° Si $ac' - ca' \neq 0$, con $c = 0$, se deducirá que $c' \neq 0$.

Como $a' = aK$, $b' = bK$ y $c' \neq 0$, el sistema de ecuaciones será

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ K(ax + by) = c', \end{cases}$$

y el sistema sigue siendo incompatible.

EJEMPLO: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 6x - 9y = 5. \end{cases}$

Este sistema podrá escribirse $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3(2x - 3y) = 5. \end{cases}$

El sistema no tiene solución.

3.° Si $ac' - ca' = 0$, con $c \neq 0$, podrá escribirse

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c},$$

lo que implica que $bc' - cb' = 0$, y si K es el valor común de las razones iguales,

$$a' = aK, \quad b' = bK, \quad c' = cK.$$

Las ecuaciones serán $\begin{cases} ax + by = c, \\ Kax + Kby = Kc. \end{cases}$

En realidad sólo hay una ecuación con dos incógnitas, y, por consiguiente, indeterminación para una incógnita.

4.ª Si $ac' - ca' = 0$, con $c = 0$, se deducirá que $c' = 0$.

El sistema será $\begin{cases} ax + by = 0, \\ K(ax + by) = 0. \end{cases}$

Sigue existiendo indeterminación para una incógnita.

EJEMPLO: Resolver el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 2. \end{cases}$

La segunda ecuación podrá escribirse $2(3x + 4y) = 2$. En realidad sólo hay una ecuación, $3x + 4y = 1$, y, por consiguiente, indeterminación.

II. Si $b = 0$, $ab' = 0$ y, por consiguiente, $b' = 0$. El sistema queda reducido a

$$\begin{cases} ax = c, \\ a'x = c'. \end{cases}$$

Las dos ecuaciones sólo serán compatibles si $ac' - ca' = 0$; entonces, $x = \dfrac{c}{a}$, siendo y indeterminado.

PROBLEMA: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + my = 3, \\ x + y = 3m. \end{cases}$

$$ab' - ba' = 2 - m.$$

1.° $m \neq 2$. Una sola solución.

2.° $m = 2$, $ab' - ba' = 0$ y $ac' - ca' = 6m - 3 \neq 0$.

El sistema es imposible.

Operemos directamente, despejando x en la primera ecuación y sustituyendo el sistema dado por el sistema equivalente

$$x = \frac{3 - my}{2},$$

$$\frac{3 - my}{2} + y = 3m.$$

La segunda ecuación podrá escribirse $(2 - m)\,y = 3(2m - 1)$.

1.° $m \neq 2$. La ecuación da $y = \dfrac{3(2m - 1)}{2 - m}$

y se tiene una sola solución $\begin{cases} x = \dfrac{6(m^2 - 1)}{2(2 - m)}, \\ y = \dfrac{3(2m - 1)}{2 - m}. \end{cases}$

2.° $m = 2$. La ecuación se escribirá $0 \cdot y = 3 \times 3 = 9$.

El sistema no tiene solución.

Sistemas de n *ecuaciones de primer grado*

Sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. — Sea el sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 5, \\ 2x - 3y + 4z = 2, \\ 5x + 2y - 3z = 6. \end{cases}$$

1.° *Método de sustitución.* Despejemos el valor de x en la primera ecuación, que llevaremos a las demás ecuaciones; después de simplificar se tendrá

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5 - 4y + 2z}{3}, \\ 14y - z = 7, \\ 17y - 16z = 4. \end{cases}$$

Se demuestra fácilmente que los sistemas (1) y (2) son equivalentes, comprobando que si $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$ es una solución del sistema (1), también lo es del sistema (2), y recíprocamente. Las dos últimas ecuaciones del sistema (2) admiten como solución única $\begin{cases} z = \dfrac{7}{23}, \\ y = \dfrac{108}{207}, \end{cases}$ y, reemplazando estos valores en la primera ecuación, se deducirá para el sistema de soluciones $\begin{cases} x = \dfrac{27}{23} \\ y = \dfrac{12}{23} \\ z = \dfrac{7}{23}. \end{cases}$

2.° *Método de adición.* Sea el sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x - 3y + 5z = 2, \\ 2x + 4y + 2z = 5, \\ 3x - y + 4z = 3. \end{cases}$$

Eliminemos x, por el método de adición, entre una ecuación cualquiera y cada una de las dos restantes; por ejemplo, entre la primera y cada una de las otras dos, y reemplacemos el sistema (1) por el

$$(2) \qquad \begin{cases} x - 3y + 5z = 2, \\ 10y - 8z = 1, \\ 8y - 11z = -3. \end{cases}$$

Fácilmente se demuestra que los sistemas (2) y (1) son equivalentes.

La resolución del sistema se acaba en la forma ya indicada, una vez resueltas la dos últimas ecuaciones por adición o por sustitución.

Sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas. Incompatibilidad. Indeterminación. Eliminación por sustitución. — Se despeja el valor de una incógnita en una de las ecuaciones

del sistema (1) dado, y se lleva a las restantes ecuaciones; de este modo se formará un nuevo sistema (2) de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas, que será equivalente al sistema dado, y en el cual $n-1$ de las ecuaciones ya no contienen la incógnita eliminada. Estas $n-1$ ecuaciones constituyen un sistema de primer grado con $n-1$ incógnitas; se eliminará una nueva incógnita, y reemplazándola en el sistema (2) se obtendrá el sistema (3) equivalente al (1), que constará de n ecuaciones de primer grado, de las cuales $n-2$ sólo contendrán $n-2$ incógnitas, y así sucesivamente. Se llegará a la resolución de un sistema de n ecuaciones de primer grado equivalente al sistema (1), en el cual dos de sus ecuaciones sólo contendrán dos incógnitas. Estas dos ecuaciones admitirán por lo general una solución única y, sustituyéndola sucesivamente en las restantes ecuaciones del sistema, se obtendrá, en principio, una solución única.

En la resolución, podrá llegarse a ecuaciones de la forma $0 \cdot x = m$, con $m \neq 0$, o bien $0 \cdot x = 0$. En el primer caso se dice que **el sistema es imposible** o que **las ecuaciones son incompatibles;** en el segundo caso, **el sistema es indeterminado.**

Sistema de n ecuaciones con $n + p$ incógnitas. — Este sistema tiene infinitas soluciones; podrán escogerse arbitrariamente p incógnitas, y se tendrá un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que en general proporcionará un sistema de solución. Se dice que hay indeterminación para p incógnitas.

EJEMPLO: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 4, \\ 3x - y - 2z = 3. \end{cases}$

Podrá escogerse arbitrariamente z, por ejemplo. Sea $z = 1$, con lo que el sistema se convertirá en

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x - y = 5, \end{cases}$$

que admitirá como solución $x = \dfrac{12}{7}$, $y = \dfrac{1}{7}$. En estas condiciones $\begin{cases} x = \dfrac{12}{7}, \\ y = \dfrac{1}{7}, \\ z = 1 \end{cases}$ constituye un sistema de soluciones, habiendo **indeterminación para una incógnita.**

Sistema de $n + p$ ecuaciones con n incógnitas. — Este sistema carece, por lo general, de sistema de soluciones, porque n de las ecuaciones dadas forman un sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas que admiten generalmente un sistema único de soluciones, sin que haya razones para que este sistema de soluciones verifique las p restantes ecuaciones.

Las ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 7x - 2y = 3, \\ 2x + 5y = 4, \end{cases}$ carecen de sistema de soluciones. Las dos primeras admiten como solución $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ que no es solución de la última; las ecuaciones son **incompatibles.**

Los problemas algebraicos

La solución de un problema utilizando los procedimientos algebraicos consta de varias partes, que se presentan sucesivamente y en un orden determinado. Cabe distinguir:

1° La elección de la incógnita o de las incógnitas;

2° El planteamiento;

3° La resolución y la discusión de las ecuaciones;

4° La interpretación de los resultados.

1° **Elección de las incógnitas.** — En el enunciado del problema se indican las magnitudes conocidas y las que se trata de determinar: estas últimas son las incógnitas del problema, que puede constar de una sola incógnita. El enunciado indica frecuentemente en forma directa la incógnita que conviene elegir, pero, por lo general, no convendrá escoger esta incógnita al azar. Será necesario, en primer lugar, una vez determinada esta incógnita, que permita que de ella se obtenga con sencillez y sin ambigüedad la magnitud desconocida del problema; la incógnita que se elija deberá, además, conducir a un planteamiento lo más sencillo posible. Esta magnitud desconocida deberá definirse de manera perfecta. Por ejemplo, si se toma como incógnita la velocidad de un móvil, habrá que especificar qué unidades de espacio y de tiempo se eligen. Podrá tomarse como incógnita la velocidad, expresada en metros por segundo o en kilómetros por hora, etc. También habrá que convenir, en ciertos casos, en qué sentido se cuentan las magnitudes, ya sea positiva o negativamente, de forma que permita la interpretación de la solución hallada, así como el origen a partir del cual deberá considerarse la incógnita.

La incógnita o incógnitas elegidas se designan por letras, y convendrá indicar acto seguido, de acuerdo con el enunciado del problema, a qué condiciones deberán someterse dichas incógnitas para que satisfagan la cuestión propuesta. Estas condiciones suelen por lo general expresarse mediante igualdades entre las magnitudes desconocidas y las magnitudes conocidas.

2° **Planteamiento.** — El planteamiento de un problema consiste en expresar todas las relaciones entre las magnitudes conocidas y desconocidas que resultan del enunciado. Estas relaciones están constituidas no sólo por igualdades, sino también por las desigualdades que acabamos de mencionar.

Cuando el problema es sencillo, las relaciones que hay que escribir, y que constituyen las ecuaciones, están indicadas en el enunciado, pero no siempre ocurre así.

3° **Resoluciones y discusión de las ecuaciones.** — Una vez expresadas las ecuaciones del problema, si dichas ecuaciones forman un sistema de primer grado, se dice que el *problema es de primer grado.*

Se procederá a resolver las ecuaciones, y si son numéricas, podrá comprobarse que los valores hallados satisfacen las condiciones precisadas en el enunciado.

Si las ecuaciones no son numéricas, podrán, en primer lugar, discutirse las condiciones *algebraicas* de posibilidad de resolución de las ecuaciones obtenidas; por ejemplo, si estas ecuaciones son irracionales, cada elevación al cuadrado deberá ir acompañada de las desigualdades que deberán quedar satisfechas. Las demás condiciones de posibilidad procederán de la incógnita elegida, y se habrán indicado antes del planteamiento.

Las magnitudes dadas podrán ser susceptibles de variación y la discusión consistirá, entonces, en estudiar todos los casos que puedan presentarse, cada uno de ellos desde el punto de vista de las condiciones a que deben someterse los datos para que el problema tenga una o varias soluciones, y determinar las que sean aceptables, de acuerdo con las soluciones impuestas.

PROBLEMAS

1° *Calcular dos números sabiendo que su diferencia es 4 y que la diferencia entre sus cuadrados es 72.*

Sean x e y los dos números, designando por x el mayor de ellos. Se tendrá

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x - y = 4, \\ y^2 - x^2 = 72. \end{cases}$$

El primer sistema podrá reemplazarse por $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 18, \end{cases}$ que da como solución $x = 11$, $y = 7$.

El segundo sistema podrá reemplazarse por $\begin{cases} x - y = 4, \\ -(x + y) = 18; \end{cases}$

o por $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = -18, \end{cases}$

cuya solución es $x = -7$ e $y = -11$.

2° *¿Cuántos años habrán de transcurrir para que la edad de un padre, que tiene 42 años, llegue a ser igual al doble de la suma de las edades de sus dos hijos, que tienen 18 y 15 años, respectivamente?*

Si x es el número de años que se busca, el planteamiento será:

$$(18 + x + 15 + x)\,2 = 42 + x, \text{ de donde se deduce } x = -8.$$

El problema, así planteado, carece de solución, pero el tiempo puede interpretarse en dos sentidos diferentes; en este caso podrá interpretarse que el hecho estudiado sucedió hace ocho años. El enunciado del problema podría, entonces, modificarse en la forma siguiente:

Si un padre, de 42 años de edad, tiene dos hijos, de 18 y 15 años, respectivamente, ¿cuántos años habrán transcurrido desde que la edad del padre era doble de la suma de las edades de sus dos hijos?

Si x es el número de años buscado, el planteamiento nos dará

$$42 - x = (18 - x + 15 - x)\,2.$$

De donde $x = 8$.

Habrán transcurrido 8 años.

3° *Hallar un número de 4 cifras, sabiendo que:*

— *La suma de sus cifras es 19;*

— *La suma de las cifras de sus unidades y de las decenas es igual a la cifra de las centenas;*

— *La suma de las cifras de las unidades, de las decenas y de los millares es igual a la cifra de las centenas más 1;*

— *Si se invierte el orden de las cifras del número, el nuevo número así obtenido es igual al primero más 4 455.*

Si designamos por x la cifra de las unidades, por y la de las decenas, por z la de las centenas y por t la de los millares, se tendrá

$$\begin{cases} x + y + z + t = 19, \\ x + y = z, \\ x + y + t = z + 1, \\ 1\,000x + 100y + 10z + t = 1\,000t + 100z + 10y + x + 4\,455. \end{cases}$$

Se tendrá un sistema de primer grado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. La última ecuación, una vez simplificada, será

$$111x + 10y - 10z - 111t = 495.$$

De las tres primeras ecuaciones se obtiene inmediatamente $z = 9$, $t = 1$, de donde se deduce que $x = 6$, $y = 3$. El número buscado es 1 936.

Ecuación de segundo grado

Ecuación de segundo grado con una incógnita: Resolución de las ecuaciones incompletas de segundo grado con una incógnita. Resolución de la ecuación completa de segundo grado. — **Relaciones entre los coeficientes y las raíces:** Aplicaciones. — **Ecuación bicuadrada:** Resolución de la ecuación bicuadrada. — **Ecuaciones binomias.** — **Ecuación irracional reducible a una ecuación de segundo grado:** La ecuación dada contiene sólo un radical. La ecuación dada contiene dos radicales. — **Trinomio de segundo grado:** Transformación y signo del trinomio de segundo grado. Aplicaciones. Clasificar dos números con respecto a las raíces de una ecuación de segundo grado. *Problemas.* — **Inecuaciones de segundo grado:** *Problemas*

Ecuación de segundo grado con una incógnita

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, una vez simplificada y reducidos sus términos semejantes, consta como máximo de tres términos:

un término con la incógnita de segundo grado;
un término con la incógnita de primer grado;
un término conocido.

La forma general de toda ecuación de segundo grado con una incógnita será, pues,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Obsérvese, en primer lugar, que el coeficiente a no es nulo, pues si lo fuera la ecuación sería de primer grado. En cambio, pueden ser nulos b o c, o bien ambos y se dice entonces que la ecuación es una *ecuación incompleta*. Comenzaremos resolviendo las ecuaciones incompletas.

Resolución de las ecuaciones incompletas de segundo grado con una incógnita. — Supongamos $b = 0$ $c = 0$. La ecuación se reduce a $ax^2 = 0$, siendo a una constante distinta de cero. La condición necesaria y suficiente para que el primer miembro sea nulo es que lo sea x^2, lo que sólo se verificará si $x = 0$. Por otra parte, x^2 puede considerarse como un producto de dos factores $x \cdot x$, y para tener en cuenta este hecho diremos que la ecuación admite *una raíz doble igual a cero*, o también que la ecuación admite dos raíces iguales a cero.

Supongamos ahora que $b \neq 0$, $c = 0$.

Evidentemente a será distinto de cero, puesto que la ecuación es de segundo grado. La ecuación se reduce a

$$ax^2 + bx = 0, \quad \text{o también} \quad (ax + b)\, x = 0.$$

El primer miembro es un producto de dos factores. Para que un producto de factores sea nulo es necesario y suficiente que lo sea uno cualquiera de los factores. El primer factor se anula para $x = \dfrac{-b}{a}$, y el segundo para $x = 0$. Por consiguiente, la ecuación admitirá dos raíces, una de las cuales es igual a cero.

Ejemplo. *Resolver la ecuación* $3x^2 + 5x = 0$.

La ecuación podrá escribirse $(3x + 5)\, x = 0$. Por el mismo razonamiento que en el caso general, se hallarán como raíces de la ecuación

$$x = -\frac{5}{3}, \quad x = 0.$$

Por último, supongamos que $b = 0$, $c \neq 0$.

La ecuación se reduce a $ax^2 + c = 0$. Dividiendo sus dos miembros por a, que es diferente de cero, se convertirá en

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Pueden presentarse dos casos:

1° $\dfrac{c}{a} > 0$, es decir, c y a tienen el mismo signo. En este caso, la ecuación carece de raíz, porque cualquiera que sea el valor que se atribuya a x, x^2 es siempre un número positivo y como $\dfrac{c}{a}$ es también positivo, la suma no puede ser nula;

2° $\dfrac{c}{a} < 0$, es decir, c y a son de signos contrarios.

La ecuación podrá escribirse $x^2 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) = 0$.

La expresión $-\dfrac{c}{a}$ es positiva y puede considerarse como el cuadrado de su raíz cuadrada. La ecuación se convierte entonces en

$$x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0.$$

El primer miembro es una diferencia de dos cuadrados, que puede transformarse en producto de factores, y la ecuación será entonces

$$\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0.$$

Para que un producto de factores sea nulo, es necesario y suficiente que lo sea uno de los factores; la ecuación tendrá, por consiguiente, dos raíces, que serán

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad ; \quad x = -\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

o también, agrupando los dos valores:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

La ecuación admite dos raíces, que son números opuestos.

Ejemplos. 1° *Resolver la ecuación* $3x^2 + 5 = 0$.

Esta ecuación no tiene ninguna raíz, porque cualquiera que sea el valor que se atribuya a x, x^2 es siempre positivo y el primer miembro de la ecuación no puede ser nulo, puesto que es una suma de dos números positivos.

2° *Resolver la ecuación* $4x^2 - 7 = 0$.

La ecuación podrá escribirse

$$x^2 - \frac{7}{4} = 0 \quad \text{o también} \quad x^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2 = 0.$$

Sustituyendo el primer miembro por un producto de factores;

$$\left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 0;$$

para que el primer miembro sea nulo, bastará con que lo sea uno cualquiera de los factores. Las raíces de la ecuación son $\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Resolución de la ecuación completa de segundo grado. — La forma general de la ecuación completa de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

siendo a, b, c diferentes de cero. Para resolverla, transformaremos, siempre que sea posible, el primer miembro en un producto de factores. Dividamos los dos miembros de la ecuación por a, que es diferente de cero; se tendrá

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Observemos que $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ son los dos primeros términos del desarrollo de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, por lo que podemos escribir la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

o (1)
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Distinguiremos tres casos, según sea el valor de $b^2 - 4ac$:

1° $b^2 - 4ac > 0$.

$4a^2$ es un cuadrado perfecto y, por consiguiente, positivo, cualquiera que sea el valor de a; la expresión $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ será positiva, y puede considerarse como el cuadrado de su raíz cuadrada. La ecuación podrá escribirse

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0,$$

o, transformando el primer miembro,

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0.$$

Para que el primer miembro sea nulo, bastará que lo sea uno cualquiera de los factores. La ecuación tiene dos raíces desiguales:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que se agrupan en una misma fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2° $b^2 - 4ac = 0$. La ecuación (1) se reduce a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

El primer miembro sólo se anula para $x = -\dfrac{b}{2a}$. La ecuación sólo tiene una raíz; no obstante, para recordar que, en este caso, el primer miembro de la ecuación es un cuadrado perfecto o un producto de dos fac-

tores iguales a $x + \dfrac{b}{2a}$, se dice que la ecuación tiene dos *raíces iguales*, o también *una raíz doble igual a* $-\dfrac{b}{2a}$.

3° $b^2 - 4ac < 0$. La ecuación (1) podrá escribirse

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

$\dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$ es positivo. Como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ es positivo (o nulo para un solo valor de x), el primer miembro de la ecuación será siempre positivo y no podrá anularse: **la ecuación carece de raíz.**

En resumen: En la resolución de una ecuación de segundo grado pueden presentarse tres casos, según el valor de la expresión $b^2 - 4ac$, denominada *discriminante de la ecuación*, y que se designa por Δ.

1° $\Delta > 0$. La ecuación tiene dos raíces distintas que se obtienen de la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La raíz que corresponde al signo + que precede al radical se designa, generalmente, por x' y la otra por x''.

2° $\Delta = 0$. La ecuación sólo tiene la raíz $x = \dfrac{-b}{2a}$. Para recordar que en este caso el primer miembro de la ecuación es un producto de dos factores iguales, se dice que **la raíz es doble,** o que tiene **dos raíces iguales.**

3° $\Delta < 0$. La ecuación no tiene raíces.

Ejemplos: 1° *Resolver la ecuación* $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3\,(-2) = 25 + 24 = 49.$$

La ecuación tiene dos raíces distintas.

Apliquemos la fórmula:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6}.$$

Las dos raíces son

$$x' = \frac{5+7}{6} = 2, \quad x'' = \frac{5-7}{6} = \frac{1}{3}\cdot$$

2° *Resolver la ecuación* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

$\Delta = 64 - 64 = 0$. La ecuación tiene una raíz doble $x = \dfrac{8}{2} = 4$.

Observemos que el primer miembro es $(x - 4)^2$.

3° *Resolver la ecuación* $x^2 - x + 2 = 0$. $\Delta = 1 - 8 = -7$.

La ecuación no tiene raíces.

Observaciones. 1° *Si una ecuación de segundo grado tiene sus términos extremos de signos contrarios, sus dos raíces serán diferentes,* puesto que el discriminante $b^2 - 4ac$ será positivo por estar formado de una suma de dos números positivos.

2° *Si en una ecuación de segundo grado el coeficiente de* x *es múltiplo de 2, puede simplificarse la fórmula que permite calcular sus raíces.*

Designando por b' la mitad del coeficiente b, se tendrá $b = 2b'$; el discriminante será $\Delta = 4b'^2 - 4ac = 4\,(b'^2 - ac)$; el signo de Δ es el mismo que el de $b'^2 - ac$, expresión que se designa por Δ', y si $\Delta' > 0$, la ecuación tendrá dos raíces dadas por la fórmula

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4\,(b'^2 + ac)}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Ejemplo. *Resolver la ecuación* $3x^2 + 8x - 11 = 0$.

Como los términos extremos son de signos contrarios, la ecuación tendrá dos raíces distintas, que son

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 33}}{3} = \frac{-4 \pm 7}{3},$$

$$x' = \frac{3}{1} = 1, \quad x'' = \frac{-4-7}{3} = \frac{-11}{3}.$$

Relaciones entre los coeficientes y las raíces

Aplicaciones. — 1° Supongamos que la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces distintas. Estas raíces serán

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\[2mm] x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{cases}$$

Suma de las raíces.

$$x' + x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Producto de las raíces.

$$x'\,x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})\,(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}.$$

El numerador no es más que el producto de una suma de dos términos por su diferencia. Se tendrá

$$x'x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Observación. Estas relaciones pueden también establecerse en forma diferente: como x' y x'' son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, el primer miembro de esta ecuación se anulará para $x = x'$ y $x = x''$, y, por consiguiente, será divisible por $x - x'$ y por $x - x''$. Este primer miembro será, pues, divisible por el producto $(x - x')\,(x - x'')$ [v. pág. 60]. El cociente será evidentemente un factor numérico, puesto que los dos polinomios son de segundo grado, factor que sólo puede ser a; se tendrá, pues,

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'')$$

o bien $\quad ax^2 + bx + c = ax^2 - a\,(x' + x'')\,x + ax'x''.$

Se tendrá, pues,

$$a\,(x' + x'') = -b \quad \text{y} \quad ax\,x'' = c,$$

de donde se deduce

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad \text{y} \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

2° Hemos establecido las dos fórmulas

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a},$$

que vamos a aplicar en la resolución de un cierto número de problemas relativos a la ecuación de segundo grado.

Obsérvese, por otra parte, que si la ecuación general considerada fuera $x^2 + px + q = 0$, las relaciones serían $x' + x'' = -p$ y $x'x'' = q$.

Por regla general, puede calcularse $x' - x''$.

$$(x' - x'')^2 = (x' + x'')^2 - 4x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

de donde se obtiene

$$x' - x'' = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Se obtienen dos valores opuestos cuyo signo depende evidentemente de la raíz que se denomina x', por ejemplo. Puede también observarse que la diferencia $x' - x''$ y a tienen el mismo signo si se conviene en tomar

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Determinar el signo de las raíces de una ecuación de segundo grado sin resolverla.

1° Sea la ecuación $3\,x^2 - 2\,x - 1 = 0$, de la cual queremos determinar los signos de sus raíces.

Esta ecuación tendrá, en primer lugar, dos raíces distintas, puesto que sus términos extremos son de signos contrarios.

El producto de las raíces es $-\dfrac{1}{3}$. Las raíces son, por consiguiente, de signos contrarios.

La suma de las raíces es $\dfrac{2}{3}$. La mayor de las raíces, en valor absoluto, es la raíz positiva.

2° Sea la ecuación $5\,x^2 - 8\,x + 1 = 0$, de la cual vamos a determinar los signos de sus raíces.

$\Delta' = 16 - 5 = 11$. La ecuación tiene dos raíces distintas. El producto de las raíces es $\dfrac{1}{5}$. Las raíces tienen el mismo signo. La suma de las raíces es $\dfrac{8}{5}$. Las dos raíces son positivas.

3° Estudiar las raíces de la ecuación $3\,x^2 - 2\,x + m - 1 = 0$, siendo m un parámetro susceptible de variar desde $-\infty$ a $+\infty$.

Formemos el discriminante $\Delta' = 1 - 3\,(m - 1) = -3\,m + 4$. $-3\,m + 4$ es una función de m de primer grado, que se anula para $m = \dfrac{4}{3}$; positiva cuando m varía de $-\infty$ a $\dfrac{4}{3}$, y negativa cuando m varía de $\dfrac{4}{3}$ a $+\infty$.

Formemos el producto de las raíces. Este producto, $\dfrac{m-1}{3}$, es una función de m de primer grado, que se anula para $m = 1$, siendo negativa cuando m varía de $-\infty$ a 1, y positiva cuando m varía de 1 a $+\infty$.

Formemos la suma de las raíces. Esta suma, $\dfrac{2}{3}$, es positiva, cualquiera que sea el valor de m.

En el cuadro siguiente se indican estos resultados, así como sus consecuencias:

m	$-\infty$	1		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Δ	$+$		$+$	0	$-$
P	$-$	0	$+$		$+$
S	$+$		$+$		$+$
Ecuación	2 raíces distintas de signos contrarios, siendo positiva la mayor en valor absoluto		2 raíces distintas positivas		Ninguna raíz

Para $m = 1$, el producto de las raíces es nulo, y la ecuación tiene una raíz nula; en efecto, queda reducida a $3x^2 - 2x = 0$ ó a $(3x - 2)\ x = 0$.

La ecuación admite como raíces $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$.

Para $m = \frac{4}{3}$ la ecuación admite una raíz doble que es $\frac{1}{3}$.

Formar una ecuación de segundo grado que admita como raíces dos números dados.

Si a y b son los dos números dados, la ecuación buscada será evidentemente $(x - a)\ (x - b) = 0$.

Si la ecuación buscada se considera de la forma $x^2 + px + q = 0$, se tendrá, si llamamos S y P, respectivamente, a la suma y al producto de las raíces dadas: $-p = S$ y $q = P$.

La ecuación buscada se escribirá, por consiguiente,

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

EJEMPLO. *Formar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 4 y* $-\frac{5}{6}$.

Producto de las raíces:

$$4\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}.$$

Suma de las raíces:

$$4 - \frac{5}{6} = \frac{24 - 5}{6} = \frac{19}{6}.$$

La ecuación buscada será:

$$x^2 - \frac{19}{6}x - \frac{10}{3} = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación tienen, en efecto, como producto y como suma el producto y suma de los números dados. La ecuación puede también escribirse

$$6x^2 - 19x - 20 = 0.$$

Hallar dos números, conocidos su suma y su producto.

Supongamos que su suma sea 11 y su producto 24; sean x e y los dos números buscados.

$$\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24. \end{cases}$$

Los dos números pueden considerarse como raíces de la ecuación

$$x^2 - 11x + 24 = 0.$$

Los números serán 8 y 3.

OBSERVACIÓN. En general, si S y P son la suma y producto, respectivamente, de los números buscados, estos números son raíces de la ecuación

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces distintas si

$$S^2 - 4P \geq 0 \quad \text{ó} \quad P \leq \frac{S^2}{4}.$$

Si se consideran dos números variables, pero de suma S constante, su producto máximo es $\frac{S^2}{4}$ y el discriminante de la ecuación anterior es entonces nulo, siendo los dos números iguales, respectivamente, a $\frac{S}{2}$.

Si dos números variables tienen una suma constante, su producto es máximo cuando los dos números son iguales.

Hallar dos números conociendo su diferencia y su producto.

Supongamos que la diferencia sea 12 y el producto -35, siendo x e y los números buscados,

$$\begin{cases} x - y = 12, \\ xy = -35. \end{cases}$$

x y $-y$ pueden considerarse como raíces de la ecuación

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Los números buscados son 7 y -5, ó 5 y -7.

Es más sencillo, para resolver el sistema, reemplazar la segunda ecuación por

$$(x - y)^2 + 4xy = 12^2 - 140 = (x + y)^2.$$

Habrá que resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = \pm 2, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. En general, si x e y son los dos números, D su diferencia y P su producto, deberá tenerse

$$\begin{cases} x - y = D, \\ xy = P. \end{cases}$$

Los números x y $-y$ pueden considerarse como raíces de la ecuación

$$x^2 - Dx - P = 0.$$

Si esta ecuación admite dos raíces x' y x'', los dos números buscados serán x' y $-x''$, o bien $-x'$ y x''.

Hallar la relación que debe existir entre los coeficientes de la ecuación de segundo grado para que sus raíces satisfagan una relación dada.

Dada la ecuación $3x^2 - 2x + m - 1 = 0$, calcular m para que una de las raíces sea triple de la otra.

Designemos las dos raíces de la ecuación por x' y x''; se tendrá

$$\begin{cases} x' = 3x'', \\ x' + x'' = \frac{2}{3}, \\ x'x'' = \frac{m - 1}{3}. \end{cases}$$

Si puede resolverse el sistema, la ecuación tendrá raíces, y el valor que se obtenga para m satisfará la relación.

Se halla inmediatamente $x' = \frac{1}{2}$, $x'' = \frac{1}{6}$ y $m = \frac{5}{4}$.

La ecuación buscada es

$$3x^2 - 2x + \frac{5}{4} - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad 12x^2 - 8x + 1 = 0.$$

OBSERVACIÓN. La ecuación general de segundo grado puede ponerse en la forma $x^2 + px + q = 0$, y depende de los dos coeficientes variables p y q (parámetros). Entre las raíces x' y x'' y los parámetros p y q existen las relaciones

$$x' + x'' = -p \qquad x'x'' = q.$$

Si se da una relación entre x' y x'', se obtendrá un sistema de tres relaciones entre x', x'', p y q, que permitirá determinar la relación que debe existir entre p y q para que se cumpla la relación pedida.

Por ejemplo: se trata de determinar la relación que debe existir entre p y q para que se tenga $ax' + bx'' = c$, siendo a, b y c tres números dados.

Si la ecuación no contiene más que un parámetro desconocido —como en el caso que se acaba de citar— podrá calcularse este parámetro, para lo cual habrá que resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Este sistema podrá carecer de solución.

Funciones simétricas de las raíces. — Se dice que una función de x' y x'' es simétrica con respecto a ellas cuando no varía al sustituir x' por x'' o recíprocamente.

EJEMPLO: $\frac{3x'x''}{x' + x''}$ es una función simétrica de x' y x''.

Si se considera una función simétrica racional de las raíces, se puede expresar racionalmente en función de los coeficientes de la ecuación, para lo cual se expresará la expresión considerada en función de la suma y del producto de las raíces.

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. La suma de los cuadrados de las raíces será

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Ecuación bicuadrada

DEFINICIÓN. *Se denomina* **ecuación bicuadrada** *una ecuación de cuarto grado con una incógnita que, una vez reducida, sólo contiene tres términos como máximo: un término de cuarto grado, un término de segundo grado y un término conocido.*

La ecuación general bicuadrada tendrá, por consiguiente, la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Resolución de la ecuación bicuadrada. — Haciendo $x^2 = y$, tendremos que resolver el sistema

$$\begin{cases} ay^2 + by + c = 0, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

A toda raíz positiva dada por la primera de estas ecuaciones (ecuación transformada en y, o *ecuación resolvente*) corresponderán dos valores de x dados por la segunda ecuación, y estos valores, de signos contrarios, serán las raíces de la ecuación bicuadrada.

DISCUSIÓN. — Sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante de la ecuación.

I. $\Delta > 0$. La ecuación transformada tiene dos raíces distintas.

1° $\frac{c}{a} > 0$ y $-\frac{b}{a} > 0$. Las raíces distintas, y' e y'', de la ecuación

transformada, son ambas positivas, y la ecuación bicuadrada tiene cuatro raíces distintas, opuestas dos a dos. Estas raíces son

$$x = \pm \sqrt{y'}, \quad x = \pm \sqrt{y''}.$$

En general,

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Se harán todas las combinaciones posibles con los signos que preceden a los radicales.

2° $\frac{c}{a} > 0$ y $-\frac{b}{a} < 0$. Las raíces distintas de la ecuación transformada son ambas negativas y la ecuación bicuadrada carece de raíces.

3° $\frac{c}{a} < 0$. La ecuación transformada tiene dos raíces de signos contrarios. Sólo se conservará la raíz positiva y', y la ecuación bicuadrada admitirá dos raíces $x = \pm \sqrt{y'}$, que son números opuestos.

4° $\frac{c}{a} = 0$. Este caso es el de la ecuación incompleta $ax^4 + bx^2 = 0$, que se sustituye por

$$\begin{cases} ay^2 + by = 0, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

La ecuación bicuadrada tiene una raíz doble nula; si $\frac{b}{a} < 0$, tendrá otras dos raíces, que serán números opuestos.

II. $\Delta = 0$. La ecuación transformada tiene una raíz doble.

1° $-\frac{b}{a} > 0$. La ecuación bicuadrada admite dos raíces, y puede decirse, para recordar la forma que toma el primer miembro de la ecuación, que son dos raíces dobles.

2° $-\frac{b}{a} < 0$. La ecuación bicuadrada carece de raíces.

3° $\frac{b}{a} = 0$. En virtud de las hipótesis, $b = c = 0$, y la ecuación bicuadrada es incompleta: $ax^4 = 0$. Tiene una raíz cuádruple igual a cero.

III. $\Delta < 0$. La ecuación transformada carece de raíces, así como la ecuación bicuadrada.

PROBLEMAS. 1° *Resolver la ecuación* $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$.
Haciendo $x^2 = y$, habrá que resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} y^2 - 4y - 45 = 0, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

La ecuación en y admite como raíces 9 y -5, y las raíces de la ecuación bicuadrada vendrán dadas por la ecuación $x^2 = 9$, o sea $x = \pm 3$.

2° *Resolver la ecuación* $36x^4 - 17x^2 + 2 = 0$.
Hagamos $x^2 = y$ y resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 36y^2 - 17y + 2 = 0, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

La ecuación en y admite dos raíces positivas, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{9}$, y la ecuación bicuadrada las cuatro raíces $x = \pm \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3° *Resolver la ecuación* $x^4 - 3x^2 + 5 = 0$.
Hagamos $x^2 = y$ y resolvamos el sistema

$$\begin{cases} y^2 - 3y + 5 = 0, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

La ecuación en y carece de raíces, así como la ecuación bicuadrada.

4° *Resolver la ecuación* $9x^4 - 5x^2 = 0$.
Es una ecuación bicuadrada incompleta que puede reemplazarse por el sistema habitual o también, para mayor sencillez, por

$$x^2 (9x^2 - 5) = 0.$$

Expresada en esta forma se ve inmediatamente que admite una raíz doble 0 y las raíces $\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ecuaciones binomias

DEFINICIÓN. *Una* **ecuación binomia** *es una ecuación entera que sólo contiene, una vez simplificada, dos términos, siendo de la forma*

$$ax^m + bx^n = 0.$$

Si $m > n$, la ecuación se escribirá $x^n (ax^{m-n} + b) = 0$.

El primer miembro es un producto de dos factores, y para que sea nulo es necesario y suficiente que lo sea uno cualquiera de sus factores.

La ecuación admitirá, por consiguiente, como raíces $x = 0$ (raíz de orden n) y las raíces de la ecuación $ax^{m-n} + b = 0$.

Esta última ecuación es de la forma $x^\alpha = A$.

1° α *par*. — Si A es negativo, la ecuación carece evidentemente de raíces. Si A es positivo, la ecuación tiene dos raíces diferentes que son números opuestos.

2° α *impar*. — La ecuación $x^\alpha = A$ sigue teniendo una sola raíz.

PROBLEMAS. 1° *Resolver* $9x^4 - 1 = 0$.

Se deduce inmediatamente $x^4 = \frac{1}{9}$ y $x^2 = \frac{1}{3}$, rechazándose el valor negativo.

En resumen:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2° *Resolver* $x^5 + 64x^2 = 0$.

La ecuación podrá escribirse $x^2 (x^3 + 64) = 0$, y admite la raíz doble $x = 0$ y la raíz de la ecuación $x^3 + 64 = 0$, o sea $x = -4$.

3° *Resolver* $x^6 + 5 = 0$.

La ecuación carece de raíces, porque el primer miembro, que es una suma de dos números positivos, no puede ser nulo.

Ecuación irracional reducible a una ecuación de segundo grado

Ya se ha indicado (pág. 61) la forma de racionalizar una ecuación irracional. Si la ecuación entera obtenida, una vez efectuadas las operaciones y reducidos los términos semejantes, es de segundo grado, se dice que la ecuación primitiva irracional era de segundo grado.

La ecuación dada sólo contiene un radical.

Sea la ecuación $\sqrt{A} = B$, siendo A y B dos polinomios enteros. Si se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se tendrá $A = B^2$.

Para que pueda aceptarse una solución, es necesario, en primer lugar, que satisfaga esta última ecuación y, además, que haga a B positivo.

La expresión A, o expresión subradical, debe hacerse positiva, y así ocurrirá, puesto que la solución satisfará $A = B^2$. Es decir, la ecuación dada podrá reemplazarse por el sistema

$$\begin{cases} A = B^2, \\ B > 0. \end{cases}$$

EJEMPLO. *Resolver* $2 = \sqrt{x^2 + 4x + 8} - 3x$.

Escribiendo la ecuación en la forma $\sqrt{x^2 + 4x + 8} = 3x + 2$, podrá ser reemplazada por el sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 8 = (3x + 2)^2, \\ 3x + 2 > 0; \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 = 0, \\ 3x + 2 > 0. \end{cases}$$

La ecuación de segundo grado admite dos raíces distintas de signos contrarios, pero sólo es aceptable la raíz positiva $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

La ecuación dada contiene dos radicales. Podrá, entonces, ponerse en la forma general $\pm \sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$, siendo A, B y C tres polinomios.

EJEMPLO. *Resolver la ecuación* $\sqrt{3x - 2} = \sqrt{4x^2 + x - 3}$.

Será equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3x - 2 = 4x^2 + x - 3, \\ 3x - 2 > 0; \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} 4x^2 - 2x - 1 = 0, \\ x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

La ecuación de segundo grado tiene dos raíces distintas de signos contrarios, siendo la mayor de las raíces la única aceptable.

OBSERVACIÓN. En general, la ecuación $\sqrt{A} = \sqrt{B}$, se reemplazará por el sistema

$$\begin{cases} A = B \\ A \text{ y } B > 0. \end{cases}$$

La ecuación $\sqrt{A} = -\sqrt{B}$, ó $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$, sólo tendrá solución si esta última verifica a la vez $A = B = 0$.

Trinomio de segundo grado

DEFINICIÓN. *El* **trinomio de segundo grado** *es un trinomio con una sola variable, cuya forma general es*

$$ax^2 + bx + c,$$

siendo a, b *y* c *tres coeficientes, de los cuales* a *es necesariamente diferente de cero.*

El trinomio de segundo grado está definido para todos los valores de x.

Transformación y signo del trinomio de segundo grado.

Hagamos $y = ax^2 + bx + c$.

Podrá escribirse

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\right].$$

x^2 y $\frac{b}{a}x$ son los dos primeros términos del desarrollo de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ y se tendrá:

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

o bien

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Hagamos $\triangle = b^2 - 4ac$ (v. págs. 67-68).

1° Si $\triangle > 0$, el trinomio se escribirá

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

o, haciendo

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$y = a\,(x - x')\,(x - x'').$$

2° Si $\triangle = 0$, se tiene

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

3° Si $\triangle < 0$, haciendo $b^2 - 4ac = -K^2$, se tiene

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right].$$

Teorema. 1° *Un trinomio que carece de raíces o que tiene una raíz doble, tiene siempre el signo de su primer término, cualquiera que sea el valor que se atribuya a* x, *salvo para el valor igual a la raíz doble, puesto que este valor lo anula;*

2° *Un trinomio con dos raíces distintas tiene siempre el signo de su primer término para todos los valores de* x *exteriores a las raíces, y signo contrario a su primer término para todos los valores de* x *interiores a las raíces, anulándose para los valores de* x *iguales a las raíces.*

1° Si el trinomio tiene una raíz doble, se tendrá

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ es positivo cualquiera que sea x, salvo para la raíz doble $-\frac{b}{2a}$ que lo anula; para cualquier otro valor, y tiene el signo de a.

Si el trinomio carece de raíz,

$$y = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right].$$

La expresión entre corchetes es positiva, cualquiera que sea x; y es, por consiguiente, del mismo signo que a.

2° Supongamos ahora que el trinomio tenga dos raíces distintas: x' y x''; se tendrá $y = a\,(x - x')\,(x - x'')$.

Supongamos que $x' > x''$.

Estudiemos la sucesión $-\infty$, x'', x', $+\infty$.

Si x varía entre $-\infty$ y x'', las diferencias $x - x''$ y $x - x'$ son negativas; por tanto su producto es positivo, e y tiene el signo de a. Si x está comprendida entre x'' y x', $x - x''$ es positiva, $x - x'$ es negativa, el producto $(x - x')\,(x - x'')$ es negativo, y los signos de a e y son contrarios.

Si x está comprendida entre x' y $+\infty$, $x - x'$ y $x - x''$ son positivas, su producto es positivo, e y tiene el mismo signo de a.

Si se dan a x los valores x' o x'', se tendrá, evidentemente, $y = 0$.

Hagamos $f(x) = ax^2 + bx + c$, y designemos por $f(\alpha)$ el resultado que se obtiene al sustituir x por α en la expresión anterior.

I. *Si* α *es un número tal que* $af(\alpha) < 0$, *el trinomio tiene dos raíces distintas y* α *está comprendido entre las raíces.*

Si $af(\alpha) < 0$, a y $f(\alpha)$ tienen signos contrarios, el trinomio tiene necesariamente dos raíces distintas, pues de lo contrario $f(\alpha)$ tendría el mismo signo que a. Por otra parte, α está comprendido entre las raíces, puesto que si fuera exterior, $af(\alpha)$ sería positivo.

II. *Si* α *y* β *son dos números tales que* $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, *el trinomio tiene dos raíces distintas, estando comprendida una sola de estas raíces entre* α *y* β.

Si $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, podrá escribirse $af(\alpha) \cdot af(\beta) < 0$. Uno de los productos $af(\alpha)$ o $af(\beta)$ será, evidentemente, negativo.

Supongamos que $af(\alpha) < 0$. En virtud de lo que acaba de decirse, el trinomio tendrá dos raíces distintas y α estará comprendido entre ambas; en este caso, β será exterior a las raíces, pues de lo contrario se tendría $af(\beta) < 0$ y el producto $af(\alpha) \cdot af(\beta)$ sería positivo, lo que sería contrario a la hipótesis.

Aplicaciones. — *Determinar la situación de un número con respecto a las raíces de una ecuación de segundo grado, sin necesidad de resolverla.*

Sea α el número cuya situación se desea determinar.

Si $f(\alpha) = 0$, α es raíz de la ecuación.

Supongamos $f(\alpha) \neq 0$; se formará $af(\alpha)$.

Si $af(\alpha) < 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas, estando α comprendido entre ellas.

Si $af(\alpha) > 0$, se formará el discriminante $\triangle$.

Si $\triangle > 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas x'' y x', y α es exterior a las mismas, es decir, α es menor o mayor que ambas raíces. Para distinguir entre los dos casos, se compara α con un número comprendido entre las raíces. Puede utilizarse, a falta de un número más sencillo, la semisuma de las raíces $-\frac{b}{2a}$:

Si $\alpha < \frac{-b}{2a}$, $\alpha < x'' > x'$;

Si $\alpha > \frac{-b}{2a}$, $x'' < x' < \alpha$.

Problema. *Clasificar 4 con respecto a las raíces de la ecuación*

$$3x^2 - 4x + m - 1 = 0.$$

Esta ecuación contiene el parámetro m. El coeficiente de x^2 es positivo y se tendrá: $f(4) = 31 + m$, binomio que se anula para $m = -31$. Por otra parte, $\triangle = 4 - 3\,(m - 1) = -3m + 7$, binomio que se anula para $m = \frac{7}{3}$. La semisuma de las raíces, $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}$ es menor que 4.

Los resultados buscados se indican en el siguiente cuadro:

m	$-\infty$		-31		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3f(4)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\triangle$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
		2 r. distintas $x'' < 4 < x'$	4 es raíz $x'' < 4$	2 r. distintas $x'' < x' < 4$	$x' = x'' = \frac{2}{3}$	Ninguna raíz	

Clasificar dos números con respecto a las raíces de una ecuación de segundo grado.

Sean los números α y β los que se quieren clasificar con respecto a las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(\alpha < \beta)$.

Se buscan los signos de $af(\alpha)$ y de $af(\beta)$. Si los dos son negativos, la ecuación tiene raíces, estando α y β comprendidos entre las raíces

$$x'' < \alpha < \beta < x'.$$

Si $af(\alpha) < 0$ y $af(\beta) > 0$, se tendrá $x'' < \alpha < x' < \beta$.

Si, análogamente, $af(\alpha) > 0$ y $af(\beta) < 0$, se tendrá $\alpha < x'' < \beta < x'$

El caso más delicado es aquel en que $af(\alpha)$ y $af(\beta)$ son ambos positivos; habrá que comenzar por asegurarse de la existencia de raíces utilizando el discriminante. Si existen raíces, α y β son exteriores a ellas. Se tendrá, por consiguiente, una de estas tres disposiciones:

$$\alpha < \beta < x'' < x', \quad \text{ó} \quad \alpha < x'' < x' < \beta, \quad \text{ó} \quad x'' < x' < \alpha < \beta.$$

Para distinguir entre los tres casos, se comparan α y β con un número comprendido entre las raíces, pudiendo tomarse, a falta de uno más sencillo, la semisuma de las raíces: $-\frac{b}{2a}$.

Si los coeficientes de la ecuación son funciones de un parámetro, se colocan los signos en un cuadro.

PROBLEMAS

1° *Comparar 1 y 3 con las raíces de la ecuación*

$$(m - 2)\,x^2 - 4mx + m - 1 = 0$$

$$f(1) = -2m - 3, \quad f(3) = -2m - 19.$$

De donde $af(1) = -(m - 2)\,(2m + 3)$, trinomio cuyas raíces son 2 y $-\frac{3}{2}$.

$af(3) = -(m - 2)\,(2m + 19)$, trinomio cuyas raíces son 2 y $-\frac{19}{2}$.

Podrá entonces formarse el siguiente cuadro

m	$-\infty$		$-\frac{19}{2}$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$af(1)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$af(3)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

que permite la siguiente conclusión:

1° Si m es $< \frac{-19}{2}$, el trinomio tiene dos raíces, estando 1 y 3 comprendidos entre ambas: $x'' < 1 < 3 < x'$;

2° Si $-\frac{19}{2} < m < -\frac{3}{2}$, entre las dos raíces del trinomio está comprendido 1:

$$x'' < 1 < x' < 3;$$

3° Si $m > 2$, el trinomio tiene dos raíces, estando 1 y 3 comprendidos entre ambas:

$$x'' < 1 < 3 < x'.$$

Queda el caso en que $-\frac{3}{2} < m < 2$; para concluir, habrá que recurrir a otros elementos. Se tiene

$$\Delta' = 4m^2 - (m-2)(m-1) = 3m^2 + 3m - 2,$$

trinomio que se anula para

$$m = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{6} \text{ y } m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{6}.$$

Por otra parte:

$$\frac{S}{2} - 1 = \frac{2m}{m-2} - 1 = \frac{m+2}{m-2},$$

que cambia de signo para $m = -2$ y $m = 2$.

$$\frac{S}{2} - 3 = \frac{2m}{m-2} - 3 = \frac{-m+6}{m-2},$$

que cambia de signo para $m = +2$ y $m = 6$. Se puede entonces establecer el siguiente cuadro:

m	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}$		$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}$		2
$af(1)$		+		+		+	
$af(3)$		+		+		+	
Δ'		+	0	—	0	+	
$\frac{S}{2}-1$		—		—		—	
$\frac{S}{2}-3$		—		—		—	
Conclusiones		$x''<x'<1<3$		Ninguna raíz		$x''<x'<1<3$	

2° *¿Para qué valores de* m *las raíces de la ecuación*

$$(3m-1)x^2 - (m-1)x + m = 0$$

comprenden el número 2?

Para que las raíces comprendan el número 2, bastará con que se tenga

$$(3m-1) f(2) < 0 \quad \text{ó} \quad (3m-1)(11m-2) < 0.$$

El primer miembro es un trinomio de segundo grado en el cual a es positivo y que admite como raíces $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{11}$; será necesario que se verifique $\frac{2}{11} < m < \frac{1}{3}$.

3° *Hallar los valores de* m *para los cuales las raíces de la ecuación* $3mx^2 - 4(m-1)x + m - 2 = 0$ *serán mayores que* 3.

Deberá tenerse

$$\Delta > 0; \; af(3) > 0; \; 3 < x'' < x; \; -\frac{b}{2a} - 3 > 0.$$

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 3m(m-2) = m^2 - 2m + 4,$$

trinomio que es siempre positivo.

$$af(3) = 6m(8m+5);$$

$$\frac{x'+x''}{2} - 3 = \frac{2(m-1)}{3m} - 3 = \frac{-7m-2}{3m}.$$

Se puede formar el siguiente cuadro:

m	$-\infty$		$-\frac{5}{8}$		$-\frac{2}{7}$		0	
$af(3)$		+			—			+
$\frac{S}{2}-3$		—		—		+		—

Las desigualdades $af(3) > 0$, $\frac{x'+x''}{2} - 3 > 0$ no se satisfacen nunca simultáneamente. Las raíces de la ecuación considerada no son jamás ambas mayores que 3.

4° *En un círculo de centro* O *y de radio* R, *determinar una cuerda tal que la suma de su longitud y de su distancia al centro sea igual a un número positivo dado,* l.

Sea AB la cuerda buscada, OH la perpendicular trazada desde O a AB; tomemos como incógnita OH = x, y se tendrá

$$AB + x = l.$$

En el triángulo AHO:

$$AH^2 = \frac{AB^2}{4} = R^2 - x^2,$$

de donde

$$AB = 2\sqrt{R^2 - x^2},$$

y para determinar la incógnita x se tendrá la ecuación

$$2\sqrt{R^2 - x^2} + x = l \quad \text{ó} \quad 2\sqrt{R^2 - x^2} = l - x.$$

Esta ecuación es equivalente, como se sabe (v. pág. 61), al sistema

(1) $\quad 4R^2 - 4x^2 = l^2 + x^2 - 2lx$
$\quad l - x > 0$ ó $x < l$ (x es positivo).

Lo que muestra que las soluciones del problema son las raíces de la ecuación (1) que satisfagan las desigualdades $x > 0$, $x < R$, $x < l$, porque la longitud OH es ciertamente menor que R.

DISCUSIÓN. La ecuación (1) puede escribirse

$$5x^2 - 2lx + l^2 - 4R^2 = 0.$$

El coeficiente de x^2 es positivo.

$$f(0) = l^2 - 4R^2 = (l + 2R)(l - 2R),$$
$$f(R) = R^2 - 2lR + l^2 = (R - l)^2 > 0,$$
$$f(l) = 4l^2 - 4R^2 = 4(l + R)(l - R).$$

Como vemos, R es siempre exterior a las raíces. Los valores notables de l son R y 2R; como l es positivo, puede establecerse el siguiente cuadro:

l	0		R		2R		$R\sqrt{5}$	
$f(0)$		—		—	0	+		+
$f(l)$		—		+		+		+
		$x'<0<l<x''<R$		$x'<0<x''<R<l$		$0<x''<x'<R<l$		

que permite decir:

1° Si $l < R$, no hay ninguna solución;

2° Si $R < l < 2R$, hay una solución que es la mayor raíz x''.

Queda el caso en que $l > 2R$. Formando entonces

$$\Delta = l^2 - 5(l^2 - 4R^2) = 20R^2 - 4l^2 = 4(5R^2 - l^2).$$

Pueden distinguirse dos casos:

$$2R < l < R\sqrt{5} \quad \text{y} \quad l > R\sqrt{5};$$

3° $2R < l < R\sqrt{5}$. Δ es positivo, y la ecuación tiene dos raíces cuya semisuma $\frac{l}{5}$ es positiva, menor que l y que R. Se tendrá, pues, $0 < x' < x'' < R < l$ y el problema tiene dos soluciones;

4° $l > R\sqrt{5}$; la ecuación carece de raíces y el problema no tiene solución.

Casos particulares.

$l = R$; las raíces de la ecuación son R y $\frac{-5}{3}$ R, y el problema tiene una solución límite, $x = R$.

$l = 2R$; las raíces de la ecuación son 0 y $\frac{4}{5}$ R que son las dos soluciones del problema.

$l = R \cdot \sqrt{5}$; la ecuación tiene una raíz doble $\frac{R\sqrt{5}}{5}$ que es solución del problema.

Inecuaciones de segundo grado

La inecuación de segundo grado es entera, y su forma general es

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

siendo $a \neq 0$.

Su resolución tiene por objeto hallar los valores de x que la satisfacen, y puede reducirse al estudio del signo del trinomio de segundo grado (v. págs. 70-71).

PROBLEMAS

1° *Resolver* $3x^2 + x - 4 < 0$.

El trinomio tiene dos raíces distintas y de signo contrario, puesto que los términos extremos son de signos contrarios; como $a = 3$ es positivo, la inecuación quedará satisfecha para todo valor de x comprendido entre las raíces $x'' < x < x'$.

Como las raíces son 1 y $-\frac{4}{3}$, se tendrá $-\frac{4}{3} < x < 1$.

2° *Resolver* $x^2 - 3x + 1 > 0$.
$\Delta = 9 - 4 = 5$. El trinomio tiene dos raíces distintas, x' y x''; como $a = 1$ es positiva, la ecuación quedará satisfecha para todo valor de x tal que $x < x''$ y $x > x'$.

Como las raíces son $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, se tendrá

$$x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ó} \quad x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

3° *Resolver* $\frac{A}{B} = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 3} < 0$.

Obsérvese que como A y B son funciones de x, si para un valor de esta última $\frac{A}{B}$ es negativo, A y B serán de signos contrarios y el producto AB será también negativo, y recíprocamente.

La inecuación considerada quedará satisfecha al mismo tiempo que

$$(3x - 1)(x^2 - x - 3) < 0.$$

$3x - 1$ se anula para $x = \frac{1}{3}$, y el trinomio $x^2 - x - 3$ tendrá dos raíces distintas, x'' y x', puesto que sus términos extremos son de signos contrarios. Por otra parte, para este trinomio $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{29}{9}$ es negativo, y $\frac{1}{3}$ está comprendido entre sus raíces. Las raíces del primer miembro, ordenadas según su magnitud, son x'', $\frac{1}{3}$ y x', pudiendo formarse el siguiente cuadro:

x	$-\infty$		x''		$\frac{1}{3}$		x'		$+\infty$
$3x - 1$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x^2 - x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
cociente		negativo		positivo		negativo		positivo	

La inecuación queda satisfecha para $x < x''$ y $\frac{1}{3} < x < x'$.

Puede verse que $x' = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ y $x'' = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

J. Dalbanne

BIBLIOGRAFÍA. — J. Rey Pastor: *Análisis Algebraico*. Biblioteca Matemática. Madrid, 1960. — Fernández de Trocóniz y Belda Villena: *Análisis Algebraico*. Ed. Moderna. Bilbao. — C. Mataix Aracil: *Algebra Práctica*. — I. Salinas y M. Benítez: *Aritmética*. Ed. Hernando, Madrid.



La escuela de Atenas. Cuadro de Rafael Sanzio. *(Fot. Anderson-Giraudon)*



Geometría

La Geometría. Cuadro de Pinturicchio *(Fot. Anderson)*

Reseña histórica

Una leyenda, propagada por los autores griegos, atribuye la invención de la geometría a los egipcios y pretende que ésta se debió a la necesidad de volver a encontrar los límites de los campos después de las inundaciones del Nilo.

Cualquiera que sea su origen, el hecho es que los egipcios, en el siglo IV antes de la era cristiana, poseían numerosos procedimientos prácticos; pero la agrimensura no es el único origen de la geometría. **Thales** introduce la geometría en Grecia con la teoría de los triángulos semejantes. Su discípulo **Pitágoras** establece la proposición del cuadrado de la hipotenusa y demuestra que la circunferencia y la esfera son unos máximos entre las figuras de igual perímetro y las de igual área, respectivamente; estudia los polígonos regulares. El auge de la geometría data de **Platón,** que introduce en la ciencia el método analítico, la teoría de las secciones cónicas y la teoría de los lugares geométricos. En esta época se esfuerzan por lograr la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Perseo, al cortar un toro por un plano, formó sus líneas *espíricas,* curvas de cuarto grado. **Sudore** enuncia la teoría de las proporciones y demuestra que las superficies de los círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros respectivos. **Euclides** (320-270) coordina y sistematiza toda la obra geométrica realizada hasta sus días; en sus *Elementos* aparece por primera vez el método de reducción al absurdo. **Arquímedes** (287-212) establece la razón de la circunferencia al diámetro, primer ejemplo de un problema resuelto por *aproximación.* También se debe a él un *Tratado de las espirales,* el volumen y la superficie de la esfera y la curvatura de los esferoides y de los conoides. La marcha seguida por Arquímedes constituye el método *de exhaustión* en el cual se halla en germen el *método de los límites.* **Diocles,** en el año 250, inventa el *cisoide.* Los escritos de **Apolonio** (fin del siglo III a. de J. C.) son sobre todo relativos a la geometría de la forma; el principal parece ser el *Gran tratado de las cónicas.* Se le atribuye también la teoría de los egipcios. Con Apolonio se logra el apogeo de la geometría entre los griegos. **Hiparco** (hacia 190-125) inventa la trigonometría rectilínea y esférica.

Menelao, en su *Tratado de las esféricas,* establece la propiedad de las transversales en los triángulos rectilíneos o esféricos.

Los romanos, esencialmente prácticos, apenas se interesan por la ciencia pura. Los agrimensores romanos copian de los griegos sus soluciones y sus proposiciones, pero sin demostración.

Ptolomeo (siglo II después de J. C.) prosigue la obra de Hiparco y, en su *Almagesto,* ha dejado escrito un tratado de trigonometría rectilínea y esférica. Citemos su *Tratado de las tres dimensiones de los cuerpos.*

Pappus, en sus *Colecciones matemáticas,* da una definición precisa del *análisis* y de la *síntesis:* en su libro se encuentra la razón anarmónica y el germen de la involución.

En Constantinopla, aparte de los elementos de Euclides, la geometría fue descuidada. Los matemáticos del Islam, herederos de la ciencia griega, no aportaron ningún elemento original.

A principios de la Edad Media no se cuenta más que con los escritos de los romanos. La geometría es únicamente un arte; se ha retrocedido al nivel de los egipcios.

En el siglo XIII aparecen algunos autores originales. Citemos a **Leonardo** *de Pisa* y **Jordano. Oresmes** (1330-1382) firma un *Tratado de la esfera.* El mallorquín **Raimundo Lulio** escribe varias obras de geometría.

En el siglo XVI el español **Ciruelo,** que publica la *Geometría especulativa,* es profesor de Matemáticas en la Sorbona; también se destacan **J. Muñoz,** eminente geómetra, y **Pérez de Moya,** al que se deben originales construcciones de geometría.

A partir de la segunda mitad del siglo XVI, se cuenta con suficientes traducciones de Arquímedes, Apolonio y Pappus y los progresos son rápidos. **Viète,** inventando el álgebra, completa el método analítico de Platón y restituye el tratado de Apolonio. **Kepler** introduce en geometría la noción de lo *infinito.*

Desargues crea la geometría proyectiva (1593-1662), y prepara la teoría de las polares, de la involución, de la homologia, etc.; es el fundador de la geometría moderna.

A **Fermat** se debe la restitución de los lugares planos de Apolonio; a **Pascal,** un *Ensayo sobre las cónicas.* El descubrimiento de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal abren un nuevo campo que, durante un siglo y medio, absorbe casi todos los esfuerzos.

Sin embargo, **Cotes** y **Mac Laurin** estudian las propiedades generales de las curvas geométricas; **Halley** traduce a Apolonio y Menelao; **Simson** escribe un tratado sobre las cónicas y restituye la *sección determinada* de Apolonio; **Stewart** escribe sus *Teoremas generales;* **Euler** y **Lambert** tratan de resucitar los métodos antiguos. En España, **Hugo de Omerique,** con su *Analysis geométrica,* se propone restaurar la geometría de los griegos.

En el siglo XIX, **Monge** inventa la *geometría descriptiva* (1795) e introduce en la ciencia el *principio de continuidad.* **Carnot** escribe una *Geometría de posición* (1803) y un *Ensayo sobre las transversales.* Mencionemos también el gran *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras,* de **Poncelet,** creador de la geometría descriptiva; **Chasles,** continuador de Desargues, crea una nueva geometría descriptiva, fundada en la consideración de la razón anarmónica (teoría de las transversales), de la homografía y de la involución; en fin, es preciso citar los trabajos de **Lexell** y **Fuss** sobre la geometría de la esfera; la *Teoría de la rotación de los cuerpos,* de **Poinsot;** los estudios de **Cauchy** sobre los poliedros y las investigaciones de geometría infinitesimal de **Darboux.**

En España, **Echegaray** importa la geometría de Chasles y **Torroja** introduce la de Staudt; entre sus discípulos descuellan **Álvarez Ude** y de modo especial **Rey Pastor** con importantes trabajos sobre la teoría de conjuntos en relación con la geometría, siendo notables sus obras de investigación: *Fundamentos de la geometría proyectiva superior* y *Teoría geométrica de la polaridad.*

En Hispanoamérica, se han dedicado a la investigación en relación con la geometría, entre otros, Santaló, Farengo, Di Cesare, Lamensa, Pascali, Leví, Terracini y Raimondi.

Geometría euclidiana y no euclidiana. — Ya en 1792, **Gauss** había examinado lo que resultaría al suponer la falsedad de la proposición que establece que, por un punto, no se puede trazar más que una paralela a una recta (postulado de Euclides). En 1832, **Johann Bolyai** publica una primera memoria de geometría no euclidiana, y **Nicolás Lobatchevsky** publica una *Geometría imaginaria* (1835-1838) y más tarde una *Pangeometría* (1855). En fin, volviendo a tomar otro postulado de Euclides, el que entra implícitamente en la noción de línea recta en cuanto que siempre está concebida como determinada por dos de sus puntos, **Riemann** construye una nueva geometría (1854), estudiada por **Beltrami** (1868) y por **Klein.**

Geometría Plana

Generalidades

Línea recta. Magnitudes de la misma especie. Razón de dos magnitudes de la misma especie. Comparación de magnitudes de diferentes especies. Puntos que dividen un segmento en una razón dada. Plano. Desplazamiento y volvimiento

El objeto de la geometría es, en principio, el estudio de las formas y de las propiedades de los cuerpos naturales. Éstos son demasiado variados para que semejante estudio sea posible; por eso el geómetra sustituye estos cuerpos por figuras, llamadas figuras geométricas que son imágenes esquematizadas, figuras que es posible definir rigurosamente y, por consiguiente, estudiar con precisión. Así, pues, la geometría no es una ciencia experimental, puesto que su objeto es estudiar, no determinados aspectos de la naturaleza, sino una reproducción necesariamente arbitraria de ésta: por ello es frecuente decir que la geometría es una ciencia abstracta, si bien es verdad que se inspira en el estudio de los fenómenos experimentales y que comprueba sus resultados, en principio teóricos, con medidas que se aplican a ejemplos concretos.

La noción experimental más sencilla es la de volumen. Se dice que un cuerpo ocupa cierto **volumen** cuando ocupa un lugar determinado en el espacio. Admitiremos como una cosa evidente que un volumen está limitado por una **superficie;** pero si la existencia del volumen se puede comprobar y medir físicamente, la superficie es una creación del ingenio. Es un ser geométrico.

Cuando una superficie está limitada, este límite es una **línea.** También la línea es otra creación del ingenio; una línea no tiene existencia experimental; es algo semejante a la figura formada por un alambre. También es un ser geométrico.

Cuando una línea está limitada, su límite es un **punto;** el punto es algo semejante a la intersección de dos hilos tensos. Es también una creación del ingenio y un ser geométrico.

Es corriente, en geometría, representar un punto por una letra A, B, ...; una línea, o una superficie, por una letra entre paréntesis. Se dice, por ejemplo: la línea (C), la superficie (S).

La expresión "línea AB", designa en general una línea limitada por los puntos A y B. Diremos que un punto M está situado en la recta AB, para expresar lo siguiente: toda línea AB puede ser dividida, de infinidad de modos, en dos fragmentos limitados por A y M de una parte, y por M y B de otra, hecho inspirado al geómetra por la posibilidad de cortar en dos partes un trozo de alambre, y esto de una infinidad de modos.

Cuando un punto M está situado en una línea AB sin que su posición sobre esta línea sea fija, se dice que el punto M describe la línea citada.

La expresión "la línea (L) está trazada en una superficie (S)", significa que la superficie (S) podría ser dividida en varias porciones, de modo que la línea (L) sea el límite o una parte del límite de una de esas porciones. Esta definición está inspirada en el hecho de que es posible recortar una tela, por ejemplo, siguiendo con unas tijeras un trazo cualquiera dibujado en ella.

Cuando una línea (L) está trazada en una superficie (S), todo punto M que esté situado en la línea (L) estará también situado, por definición, en la superficie (S). Se dice que es un punto de esta superficie.

Línea recta. — La figura geométrica más sencilla es la **línea recta.** Es aquella cuya imagen está representada por un hilo tenso.

Dos hilos tensos que tengan los mismos extremos coinciden: es un hecho experimental. Por tanto, el geómetra deberá admitir la siguiente proposición, que no intentaremos demostrar:

Por dos puntos distintos A y B *pasa una recta y solamente una.*

Dicho de otro modo:

Dos rectas (D) y (D') *que tienen dos puntos comunes coinciden; todo punto de una de ellas es un punto de la otra y recíprocamente.* De esta proposición se deduce que dos rectas (D) y (D') o no tienen ningún punto común (entonces se dice que no se cortan o que no son secantes), o tienen un punto común solamente (en este caso son secantes y distintas) —el punto común se llama punto de intersección—, o tienen más de un punto común (entonces coinciden). Se comprueba que estas tres hipótesis corresponden a hechos experimentales fácilmente realizables.

Definición. *Se llama* **semirrecta** *la porción de recta limitada en un punto denominado origen.*

La expresión "semirrecta OA", designa la semirrecta de origen O (punto nombrado en primer lugar) que contiene el punto A.

Se dice que dos semirrectas OA y OB *son* **opuestas** *cuando con ambas se forma la recta* AB.

Se llama **segmento** AB *una porción de recta limitada por dos puntos* A *y* B. *Estos puntos se llaman extremos del segmento.*

Magnitudes de la misma especie. — *Se dice que las figuras geométricas son* **magnitudes de la misma especie** *cuando es posible definir:*

1º *En qué caso se dirá que una figura* (A) *es igual a una figura* (B) *y, si son desiguales, cuál de ellas es la menor;*

2º *Lo que debemos entender por suma de una figura* (A) *y una figura* (B).

Las definiciones elegidas deben ser tales que si consideran (A) menor que (B) y (B) menor que (C), (A) debe ser también menor que (C); además, es preciso que la figura llamada suma de (A) y (B) sea igual a la que es llamada suma de (B) y (A). En fin, la sustitución en una comparación, una igualdad o una suma, de una figura por otra igual no debe modificar el resultado de las operaciones.

Para comprender lo que son magnitudes de la misma especie, tomemos el ejemplo de los segmentos de recta. Admitiremos que es posible decidir la igualdad de dos segmentos MN y M'N' cuando se les puede hacer coincidir. Admitiremos también que es posible sustituir el segmento M'N' por un segmento igual MD y llevado sobre la semirrecta MN. En fin, admitiremos que es posible distinguir entre tres puntos A, B, C, tomados al azar en una recta, cuál de ellos está situado entre los otros dos. Cuando el punto C (obtenido al llevar sobre la semirrecta AB un segmento AC igual a A'B') queda situado entre A y B (*fig.* 1) se conviene en decir que el segmento A'B' es menor que el segmento AB, lo que resumiendo se escribe A'B' < AB. Si el punto C estuviese en B, los segmentos AB y A'B' serían iguales y se escribiría: A'B' = AB.

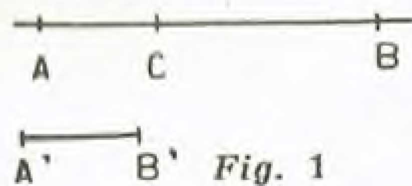


Fig. 1

Se conviene en llamar suma de dos segmentos AB y A'B', el segmento AC (*fig.* 2) obtenido al llevar sobre la semirrecta opuesta a la BA un segmento BC igual a A'B'. Esta operación se expresa escribiendo

$$AC = AB + A'B'.$$

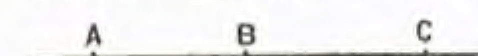


Fig. 2

Dejamos al lector que compruebe que estas definiciones satisfacen las condiciones impuestas. Esta comprobación bastará para demostrar que los segmentos de recta son magnitudes de la misma especie.

Razón de dos magnitudes de la misma especie. — Consideremos magnitudes de la misma especie. Sumar entre sí varias de estas magnitudes, es sumar una de ellas a otra, la suma obtenida a una tercera, etc. Por ejemplo, sumar los segmentos AB, BC, CD, es sumar AC y CD, lo que da como resultado AD (*fig.* 3). La operación se expresa escribiendo



Fig. 3

$$AD = AB + BC + CD.$$

Multiplicar una magnitud por un número entero n, es sumar n magnitudes iguales a la considerada. Por ejemplo, si fuese AB = BC = = CD, la operación anterior se escribiría

$$AD = 3 \cdot AB.$$

Vamos a definir lo que se llama comparar dos magnitudes (A) y (B) de la misma especie. Elijamos arbitrariamente una magnitud (C) de la misma especie que (A) y que (B) y menor que cada una de ellas. Formemos una serie de magnitudes tales que

$$(C_1) = (C),\ (C_2) = 2\ (C),\ \ldots\ (C_p) = p\ (C),\ \ldots$$

Supongamos que la magnitud (A) se intercala entre dos magnitudes (C_p) y (C_{p+1}) y que (B) se encuentra entre otras dos (C_q) y (C_{q+1}). En este caso se dice que la razón de las magnitudes (A) y (B) es un número $\frac{(A)}{(B)}$ positivo, comprendido entre $\frac{(C_p)}{(C_{q+1})}$ y $\frac{(C_{p+1})}{(C_q)}$.

Se demuestra en álgebra que este número existe y que queda suficientemente definido con la operación anterior, con tal que ésta pueda realizarse cualquiera que sea (C).

Consideremos, por ejemplo, dos segmentos AB y A'B'. Para efectuar la operación anterior, utilicemos una regla graduada cuya unidad sea la magnitud (C), en este caso un segmento elegido arbitrariamente. Apliquemos el cero de la regla en A, con lo que B quedará intercalado entre dos graduaciones de la regla, p y $p+1$; para A'B', estando el cero en A', el punto B' estará situado entre q y $q + 1$. Expresaremos el resultado de estas mediciones escribiendo

$$\frac{p}{q+1} < \frac{AB}{A'B'} < \frac{p+1}{q};$$

se dice que $\frac{p}{q+1}$ es una medida por defecto de la razón $\frac{AB}{A'B'}$ y $\frac{p+1}{q}$ una medida por exceso.

Definición. *Se llama* **medida de una magnitud** (A) *el número positivo que mide la razón de esta magnitud y otra* (U) *elegida arbitrariamente y que se llama unidad.*

La medida de la unidad es 1, por definición.

Se puede demostrar que si a es la medida de (A) y b la de (B)

evaluadas ambas con una misma unidad (U) el número $\frac{(A)}{(B)}$ es igual a la razón $\frac{a}{b}$ de las medidas de estas magnitudes. Esta razón es independiente de la unidad elegida.

Se dice que (B) *es una* **parte alícuota** *de* (A) *si la razón* $\frac{(A)}{(B)}$ *es un número entero.*

Convendremos, de una vez para siempre, que en geometría todas las magnitudes de la misma especie que intervienen en una figura dada están medidas con la misma unidad. En particular todos los segmentos están medidos con la misma unidad. Esta unidad es, en general, el metro o una de sus partes alícuotas (V. SISTEMA MÉTRICO, página 34).

Comparación de magnitudes de diferentes especies. — Sean (A), (B), (C), ..., (S), magnitudes de la misma especie; (A′), (B′), (C′), ..., (S′), magnitudes de la misma especie, pero que no son necesariamente de igual especie que las anteriores. Se dice que estas magnitudes son **homólogas,** si podemos agruparlas de dos en dos, (A′) homóloga de (A), (B′) homóloga de (B) ..., etc., de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:

Si (A) es igual a (B), (A′) es igual a (B′);

Si (A) es menor que (B), (A′) es menor que (B′);

Si (S) es la suma de (A) y (B), (S′) es la suma de (A′) y (B′).

Para calcular la razón $\frac{(A)}{(B)}$ formaremos la serie (C_1), (C_2), ... (C_p) de la pregunta precedente; para calcular la razón $\frac{(A')}{(B')}$ formaremos la serie (C'_1) (C'_2) ... (C'_p), obtenida como la anterior, pero a partir de la magnitud (C′) homóloga de (C).

Es evidente que si (A) se intercala entre (C_p) y (C_{p+1}), (A′) se intercalará entre (C'_p) y (C'_{p+1}); de igual modo, si (B) se intercala entre (C_q) y (C_{q+1}), (B′) se intercalará entre (C'_q) y (C'_{q+1}). Las razones $\frac{(A)}{(B)}$ y $\frac{(A')}{(B')}$ estarán comprendidas entre los mismos números $\frac{p}{q+1}$ y $\frac{p+1}{q}$. En álgebra se demuestra que esto es suficiente para que estas dos razones sean iguales. Por consiguiente:

La razón de dos magnitudes (A) *y* (B) *es igual a la razón de las* magnitudes homólogas (A′) y (B′).

Si las magnitudes (A), (B), ..., son medidas con una unidad (U), y si las magnitudes (A′), (B′), ..., son medidas con una unidad (U′), homóloga de (U), las razones iguales $\frac{(A)}{(U)}$ y $\frac{(A')}{(U')}$ son precisamente las medidas de (A) y (A′). Por consiguiente:

Las medidas de dos magnitudes homólogas (A) *y* (A′) *son iguales a condición de que las unidades elegidas para medirlas sean también magnitudes homólogas.*

Puntos que dividen un segmento en una razón dada. — En una semirrecta O*x* (*fig.* 4) elijamos un punto M. Sea *x* la medida de OM. A cada punto M de la semirrecta corresponde un número positivo *x* y solamente uno; admitiremos también que a un número positivo *x*, arbitrariamente elegido, corresponde un punto M de la semirrecta y solamente uno. Esta proposición no puede ser demostrada; constituye una hipótesis, que se llama **axioma de continuidad** de la recta.

Fig. 4.

Una consecuencia de esta hipótesis es que hay un punto y solamente uno, C, que divide el segmento OM en partes iguales. Este punto es uno de la semirrecta OM, tal que $OC = \frac{OM}{2}$. Se le llama punto medio del segmento OM.

TEOREMA. *Hay un punto* M *y sólo uno, situado en el segmento* AB, *tal que la razón* $\frac{MA}{MB}$ *sea igual a un número positivo dado* λ (*fig.* 5).

Si $\lambda = 1$, este punto es el punto medio del segmento.

Sea M un punto cualquiera del segmento AB; sea *x* la medida de AM, y *a* la medida de AB: la medida de MB será $a - x$, puesto que M está colocado entre A y B (*fig.* 5). En este caso tendremos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{x}{a-x}.$$

Para que esta razón sea igual a λ, es preciso y basta que *x* sea solución de la ecuación

$$\frac{x}{a-x} = \lambda.$$

Ahora bien, esta ecuación admite como solución única $x = \frac{a\lambda}{1+\lambda}$. A este valor de *x*, positivo menor que *a*, corresponde un punto M, y sólo uno, de la semirrecta AB tal que AM = *x*. Este punto M satisface, y solamente él, las condiciones impuestas.

TEOREMA. *Hay un punto* M *y sólo uno en la recta* AB, *exterior al segmento* AB, *tal que la razón* $\frac{MA}{MB}$ *sea igual a un número dado* λ *diferente de* 1 (*fig.* 6).

1° Supongamos $\lambda > 1$. Sea M un punto cualquiera de la recta AB, exterior al segmento AB: puede suceder que A esté situado en el segmento MB, o que B esté en el segmento MA. Si A pertenece al segmento MB, se tiene MB > MA, y por tanto $\frac{MA}{MB} < 1 < \lambda$. En este



Fig. 5



Fig. 6

caso el punto M no responde al teorema enunciado.

Si B pertenece al segmento MA (*fig.* 6), supongamos que MA = *x* y AB = *a*, con lo que MB = *x*-*a*. Por consiguiente tendremos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{x}{x-a}.$$

Para que esta razón sea igual a λ es necesario y suficiente que *x* sea solución de la ecuación

$$\frac{x}{x-a} = \lambda.$$

Esta ecuación admite como única solución $x = \frac{a\lambda}{\lambda - 1}$, que siempre será positiva, pues $\lambda > 1$. A este valor de *x*, positivo y mayor que 1, corresponde un punto M, y sólo uno, de la semirrecta AB. Este punto M satisface, y solamente él, las condiciones impuestas.

2° Supongamos que $\lambda < 1$. Buscaremos un punto M para el cual $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{\lambda}$, número mayor que 1. Habrá un punto y sólo uno según hemos visto en el caso anterior (1°), y sólo él satisface las condiciones impuestas.

OBSERVACIÓN. No hay ningún punto M exterior al segmento AB para el que se verifique $\frac{MA}{MB} = 1$. En efecto, si A pertenece al segmento MB, se tiene $\frac{MA}{MB} < 1$, cualquiera que sea el punto M, y si B pertenece al segmento MA, se verificará $\frac{MA}{MB} > 1$.

Plano. — Consideremos una superficie (S) y dos puntos A y B de la misma. Se pueden presentar dos casos:

1° Si hay puntos de la recta AB que no están en la superficie (S), diremos que la recta AB corta la superficie; los puntos comunes a la recta AB y a la superficie (S) son los puntos de intersección de (S) y AB. Entre estos puntos comunes se hallan los puntos citados A y B.

2° Si todos los puntos de la recta AB son puntos de la superficie (S), diremos que la recta AB está contenida en la superficie (S).

Llamaremos **plano** a una superficie tal que toda recta AB que una dos puntos arbitrariamente elegidos en la superficie, esté contenida en ella.

Admitiremos que existe semejante superficie y que por tres puntos A, B, C, no situados en línea recta, pasa un plano y sólo uno. El estudio de los planos se hará más adelante (V. GEOMETRÍA DEL ESPACIO, página 114): ahora nos proponemos estudiar las figuras geométricas trazadas en un plano dado, llamadas figuras "planas". Su estudio constituye la geometría plana. En la práctica las figuras serán dibujadas sobre una hoja de papel o sobre la superficie de una pizarra; admitiremos que estas superficies son imágenes suficientes de la superficie llamada plano.

Desplazamiento y volvimiento. — Sea (F) un dibujo que se ha hecho en un cuadro plano; en un papel transparente que tenga una de sus caras aplicada sobre el plano del cuadro, hagamos un calco (F_1) del dibujo (F). Aplicando este calco en otra parte del cuadro, hagamos un nuevo dibujo (F′) idéntico a (F). Si ha permanecido aplicada sobre el cuadro la misma cara del papel transparente, el dibujo (F′) se obtiene del (F) mediante una operación llamada **desplazamiento;** por el contrario, si el papel ha sido vuelto, y es el dorso el que ahora está aplicado sobre el cuadro, la operación se llama **volvimiento.**

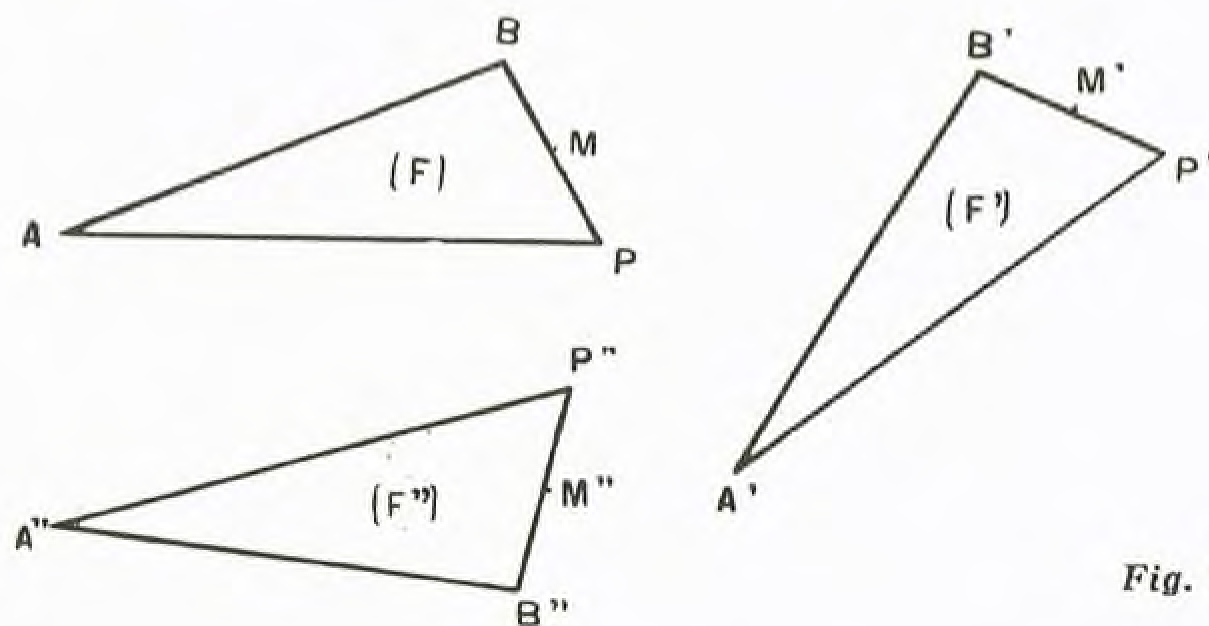


Fig. 7

Cualquiera de estas dos operaciones hace corresponder a cada punto A del dibujo (F) un punto A′ del dibujo (F′), que se denomina homólogo de A. Un segmento AB de (F) coincidirá con un segmento A′B′ de (F′), homólogo de aquél; estos dos segmentos son iguales por definición, cualesquiera que sean A y B.

Comúnmente se dice que el dibujo (F) se puede *superponer* al dibujo (F′), y que estos dos dibujos representan figuras iguales.

El geómetra que no razona sobre dibujos, sino sobre figuras teóricas de las que un dibujo, por perfecto que sea, no es más que una imagen incorrecta, no puede hacer ningún calco ni medida práctica que le permitan operaciones análogas al desplazamiento o al volvimiento. Por consiguiente, supondremos que semejantes operaciones pueden ser definidas teóricamente; admitiremos que existe un desplazamiento y sólo uno que permite hacer que coincida un segmento AB de una figura (F) con un segmento A′B′, con tal que éste sea igual al segmento AB (A′ sobre A y B′ sobre B). Esta hipótesis significa que si M es un punto de la primera figura, es posible hacerle corresponder un punto M′ homólogo, determinado, de la segunda figura (F′), de modo que A′ sea homólogo de A, B′ lo sea de B, y que la distancia de dos puntos sea igual a la distancia de los puntos homólogos, MA = M′A′ y MB = M′B′.

Admitiremos igualmente que existe un volvimiento y sólo uno llamado *semigiro* en el que permanecen fijos dos puntos A y B. Esta hipótesis significa que es posible hacer que a un punto M corresponda un punto M″ homólogo, determinado, de modo que A″ sea homólogo de A, B″ lo sea de B, y que la distancia de dos puntos M y P sea igual a la de los puntos homólogos M″ y P″.

El homólogo de M en un semigiro es llamado *simétrico* de M respecto a la recta AB, que es el eje del semigiro. La figura (F″) homóloga de (F) en un semigiro se denomina simétrica de (F) respecto a la recta AB.

De dos figuras obtenidas una de otra, mediante un volvimiento o un desplazamiento se dice que son *figuras iguales*.

Ángulos

Comparación de dos ángulos. Suma de varios ángulos. Medida de los ángulos. Sistemas de unidades. Ángulos que tienen un valor dado. Ángulo recto, agudo, obtuso. Ángulos suplementarios y complementarios. Rectas perpendiculares. Bisectriz de un ángulo. Ángulos opuestos por el vértice. Bisectrices de dos rectas

DEFINICIONES. *Se llama* **ángulo** *la porción de plano limitada por dos semirrectas,* OA *y* OB *por ejemplo. El punto* O *se llama* **vértice** *del ángulo, las semirrectas* OA *y* OB *se denominan* **lados** *del ángulo.*

Se llama *ángulo formado por dos segmentos* AB y AC, el ángulo de vértice A cuyos lados son las semirrectas AB y AC.

Las semirrectas OA y OB dividen el plano en dos regiones; por consiguiente determinan dos ángulos: uno de ellos, constituido por la región rayada en la figura 8, se denomina ángulo saliente; el otro, constituido por la región rayada en la figura 9, se denomina ángulo entrante.

La notación $\widehat{BOA}$ o $\widehat{AOB}$ designa uno de estos dos ángulos: la

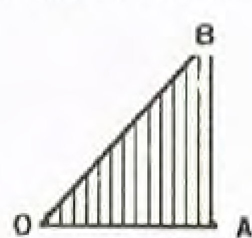


Fig. 8

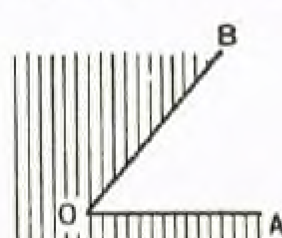


Fig. 9

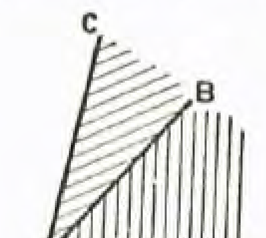


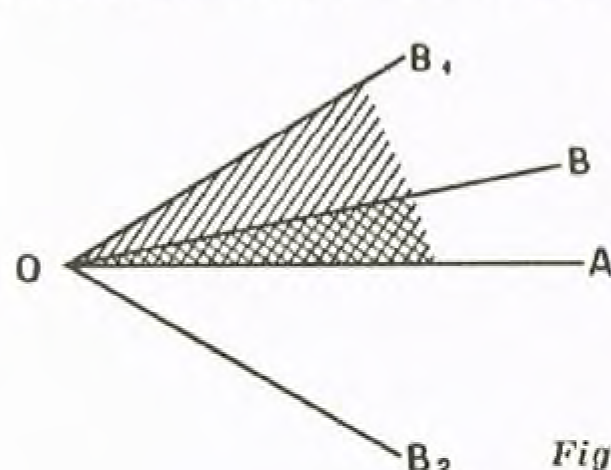
Fig. 10

letra que indica el vértice debe escribirse en segundo lugar. Cuando no se hace ninguna advertencia especial, con esta notación nos referimos siempre al ángulo saliente.

Se llama *ángulo llano* el ángulo formado por dos semirrectas opuestas.

Se denominan *adyacentes* dos ángulos que teniendo el vértice y uno de los lados comunes, están situados a una y otra parte del lado común. En la figura 10, los ángulos salientes $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son adyacentes.

Comparación de dos ángulos. — Sean $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ dos ángulos situados en un mismo plano: hemos admitido anteriormente que existe un desplazamiento que lleva O′ a confundirse con O y A′ a un punto A de la semirrecta OA; este desplazamiento puede llevar O′B′ a OB_1 (*fig.* 11), de modo que los dos ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AOB_1}$ no sean adyacentes, o bien a OB_2, de modo que $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AOB_2}$ sean adya-



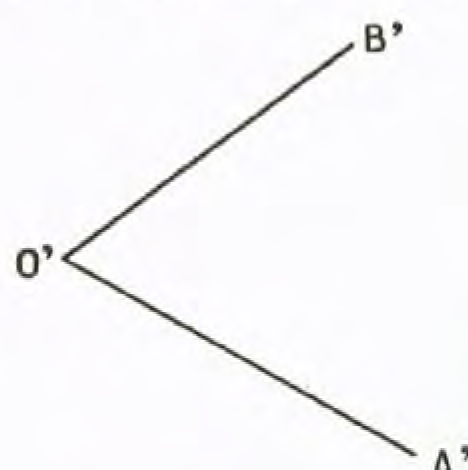


Fig. 11

centes; en este último caso, un semigiro suplementario alrededor de OA llevará $\widehat{AOB_2}$ a la posición $\widehat{AOB_1}$. Este desplazamiento y este volvimiento, si ha de hacerse, sustituyen $\widehat{A'O'B'}$ por un ángulo $\widehat{AOB_1}$, igual a él por definición.

Si OB_1 se confunde con OB, los ángulos $\widehat{AOB_1}$ y $\widehat{AOB}$ son iguales, pues cada punto de uno de ellos es un punto del otro: en este caso diremos que los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ son iguales, lo que se expresa por la igualdad

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}.$$

Si OB_1 no coincide con OB, hay puntos de uno de los dos ángulos, $\widehat{AOB_1}$ por ejemplo, que no son puntos del ángulo $\widehat{AOB}$. En la figura 11 el ángulo $\widehat{AOB}$ está rayado y el ángulo $\widehat{AOB_1}$ también; los puntos a que nos referimos son los del ángulo $\widehat{BOB_1}$ que tiene rayado sencillo. Acordaremos decir que el ángulo $\widehat{AOB_1}$ y por consiguiente el ángulo igual $\widehat{A'O'B'}$ son, en este caso, mayores que el ángulo $\widehat{AOB}$, lo que se expresa por la desigualdad

$$\widehat{A'O'B'} > \widehat{AOB}.$$

Suma de varios ángulos. — 1° *Suma de dos ángulos* $\widehat{AOB}$ *y* $\widehat{BOC}$ *adyacentes.*

Pueden presentarse dos casos según que los ángulos sean salientes o entrantes: a) Sean $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ los dos ángulos a sumar (*fig.* 12). Por definición, la suma de estos ángulos es el ángulo $\widehat{AOC}$, lo que se expresa por la igualdad

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC};$$

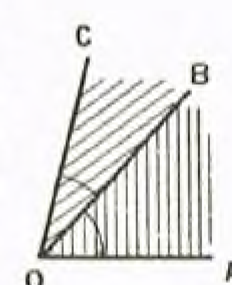


Fig. 12

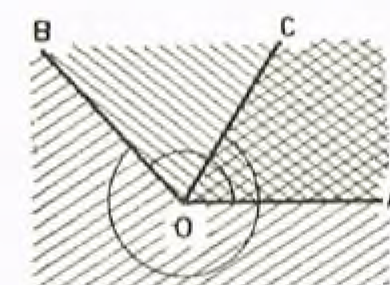


Fig. 13

b) Sea $\widehat{BOC}$ un ángulo entrante que vayamos a sumar con el ángulo saliente $\widehat{AOB}$ (*fig.* 13). Si rayamos sucesivamente los dos ángulos, el ángulo $\widehat{AOC}$ resultará rayado dos veces.

En este caso, la suma de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ es igual al ángulo $\widehat{AOC}$ aumentado en dos ángulos llanos, lo que se expresa escribiendo

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} + 2 \text{ ángulos llanos.}$$

2° *Suma de dos ángulos cualesquiera* (fig. 14).

La suma de dos ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ es, por definición, igual a la suma del ángulo $\widehat{AOB}$ y de otro $\widehat{BOC}$, igual al ángulo $\widehat{A'O'B'}$ y adyacente al ángulo $\widehat{AOB}$.

El ángulo igual a la suma se obtiene mediante un desplazamiento que haga coincidir O′ con O y A′ con un punto de OA, seguido o no de un volvimiento alrededor de OA.

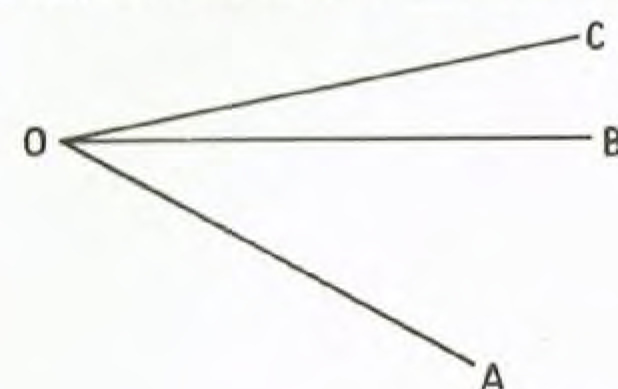


Fig. 14

3° *Suma de más de dos ángulos.*

La suma de varios ángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, etc., es, por definición, igual a la suma que se obtiene añadiendo el primer ángulo al segundo, la suma obtenida al tercero, y así sucesivamente. Sea $\widehat{AOB}$ el primer ángulo, $\widehat{BOC}$ un ángulo igual al segundo y adyacente al $\widehat{AOB}$, etc., $\widehat{KOL}$ un ángulo igual al último de los ángulos a sumar y adyacente al que le precede. El resultado de la suma será $\widehat{AOL}$ aumentado en dos ángulos llanos tantas veces como el plano haya sido recubierto en el curso de las operaciones de la suma. Fácilmente se comprueba que este resultado es independiente del orden en que se sumen los ángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, etc.

Medida de los ángulos. — Hemos definido la igualdad y la suma de dos ángulos. Como estas definiciones satisfacen las condiciones im-

puestas en el primer capítulo (v. p. 75), los ángulos situados en un plano son magnitudes de la misma especie. Por consiguiente, elijamos arbitrariamente un ángulo del plano $\widehat{aob}$, que será la unidad angular para el plano: el valor de la razón $\dfrac{\widehat{AOB}}{\widehat{aob}}$, hallado como se ha explicado en la página 75, será un número positivo θ, llamado por definición medida del ángulo $\widehat{AOB}$, con la unidad elegida $\widehat{aob}$.

La medida de un ángulo llano se designa por la letra griega π. Como todos los ángulos del plano son menores que dos ángulos llanos, el número θ (que es la medida de $\widehat{AOB}$) debe ser menor que 2π.

Sean α, β, γ las medidas de varios ángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$. Insistimos en el hecho evidente de que las igualdades $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$ o $\alpha = \beta$ son equivalentes, así como las desigualdades $\widehat{AOB} < \widehat{BOC}$ y $\alpha < \beta$. Estas observaciones se impondrán cada vez que magnitudes de la misma especie sean medidas con la misma unidad. Por el contrario, insistiremos en el hecho de que, según la misma definición de la suma de varios ángulos, $\alpha + \beta + \gamma$ es la medida del ángulo $\widehat{AOD}$ aumentada en dos ángulos llanos tantas veces como el plano haya sido recubierto en el curso de las operaciones de la suma:

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{AOD} + 2n\pi.$$

El número entero n que aparece en este cálculo tiene un valor que podría ser determinado, pero que no tiene para el geómetra ninguna importancia, como se podrá comprobar posteriormente. Por ello se ha convenido no escribir en geometría el número $2n\pi$, bastando por consiguiente escribir $\alpha + \beta + \gamma = \widehat{AOD}$, y para justificar esta omisión se establece el siguiente convenio.

CONVENIO. *La igualdad*

$$\widehat{AOB} = \theta$$

significa que θ es la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ si se verifica

$$0 \leqq \theta < 2\pi.$$

Si θ es mayor que 2π, la igualdad significa que la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ es $\theta - 2K\pi$, siendo K un número entero positivo o nulo elegido de modo que se verifique $0 \leqq \theta - 2K\pi < 2\pi$.

OBSERVACIONES. 1° Existe un número entero positivo K y sólo uno, tal que se verifique $0 \leqq \theta - 2K\pi < 2\pi$, es decir, $\dfrac{\theta}{2\pi} - 1 < K \leqq \dfrac{\theta}{2\pi}$, pues los dos números $\dfrac{\theta}{2\pi} - 1$ y $\dfrac{\theta}{2\pi}$ son positivos y difieren en 1.

2° Decir que α es la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ supone que se verifica $0 \leqq \alpha < 2\pi$ y ello implica la igualdad $\widehat{AOB} = \alpha$. Pero escribir $\widehat{AOB} = \alpha$ no implica, en general, que α sea la medida de $\widehat{AOB}$; para ello es necesario que además se verifique $0 \leqq \alpha < 2\pi$.

Sistemas de unidades. — *Se llama* **grado centesimal** *la* 200 *ava parte del ángulo llano.*

El grado centesimal es una de las unidades angulares más empleadas, y sus submúltiplos son: el *minuto centesimal*, igual a la centésima parte del grado, y el *segundo centesimal*, igual a la centésima parte del minuto centesimal. La notación $\theta = 40{,}1824$ gr se lee: θ igual a cuarenta grados, dieciocho minutos y veinticuatro segundos centesimales.

Se llama **grado sexagesimal** *la* 180 *ava parte del ángulo llano.*

Todos los cálculos antiguos están hechos con grados sexagesimales; los submúltiplos del grado sexagesimal son: el *minuto sexagesimal*, igual a la sesentaava parte del grado sexagesimal, y el *segundo sexagesimal*, igual a la sesentaava parte del minuto sexagesimal. La notación $\theta = 30°\,18'\,11''$ se lee: θ igual a treinta grados, dieciocho minutos y once segundos sexagesimales.

La suma de los ángulos expresados en grados, minutos y segundos sexagesimales es bastante incómoda; por ejemplo,

$$25°\,39'\,48'' + 15°\,27'\,30'' = 41°\,07'\,18''.$$

Observemos que 1 grado centesimal $= \dfrac{9}{10}$ de grado sexagesimal, que π = 180 grados sexagesimales = 200 grados centesimales. Los ángulos cuya medida es $\dfrac{\pi}{6}$ o $\dfrac{\pi}{3}$ intervienen con frecuencia en geometría; su valor en grados sexagesimales es sencillo. $\dfrac{\pi}{6} = 30°$, $\dfrac{\pi}{3} = 60°$. (V. TRIGONOMETRÍA, pág. 180.)

Ángulos que tienen un valor dado. — A cada ángulo $\widehat{AOB}$ del plano corresponde su medida θ, efectuada con una unidad elegida; θ es un número positivo menor que 2π.

Recíprocamente, sea θ un número positivo cualquiera comprendido entre 0 y 2π; admitiremos que hay infinidad de ángulos $\widehat{AOB}$ iguales entre sí cuya medida con la unidad angular elegida sea θ. Esta propriedad no se demuestra: constituye el axioma de continuidad del plano.

TEOREMA. *Hay dos semirrectas, y solamente dos, que forman con una semirrecta dada* OA *ángulos de un valor dado θ* (fig. 15).

En efecto, sea $\widehat{A'O'B'}$ un ángulo cuya medida es θ; mediante un desplazamiento hagamos coincidir O′ con O y O′A′ con OA: O′B′ tomará una posición bien determinada OC y el ángulo $\widehat{AOC}$ tendrá por medida θ. El ángulo $\widehat{AOD}$ obtenido del $\widehat{AOC}$ por un semigiro alrededor de OA, tendrá también por medida el número θ. Por consiguiente, las dos semirrectas OC y OD responden al teorema enunciado.

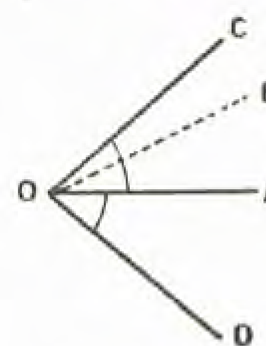


Fig. 15

Veamos que estas rectas son las únicas que lo cumplen. En efecto, tracemos una semirrecta OE distinta de OC y OD: si OE está situada en el ángulo $\widehat{COD}$, el ángulo $\widehat{AOE}$ es un ángulo menor que $\widehat{AOC}$, por definición, o que $\widehat{AOD}$; luego su medida es menor que θ. Si OE está situada fuera de dicho ángulo, el $\widehat{AOE}$ es mayor que $\widehat{AOC}$ o que $\widehat{AOD}$, por definición y su medida será mayor que θ. Por consiguiente, las semirrectas distintas de OC y OD no responden al teorema enunciado.

Ángulo recto, agudo y obtuso. Ángulos suplementarios y complementarios. — *Se denomina* **recto,** *o* **ángulo recto,** *un ángulo igual a la mitad de un ángulo llano.* La medida de un recto $\dfrac{\pi}{2}$ es 90° ó 100 grados centesimales.

Se llama **agudo** *todo ángulo menor que un recto;* **obtuso,** *todo ángulo mayor que un recto.*

Se dice que dos ángulos son **suplementarios** *cuando su suma vale dos ángulos rectos*; si θ es la medida de uno de ellos, $\pi - \theta$ será la medida del otro. La condición necesaria y suficiente para que dos ángulos adyacentes $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ sean suplementarios (*fig.* 16) es que los lados no adyacentes OA y OC sean dos semirrectas opuestas.

Se dice que dos ángulos son **complementarios** *cuando su suma* (fig. 17) *vale un recto.* Si la medida de uno de ellos es θ, la del otro será $\dfrac{\pi}{2} - \theta$. Evidentemente, dos ángulos complementarios son agudos por definición.

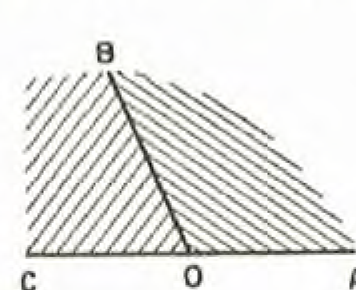


Fig. 16

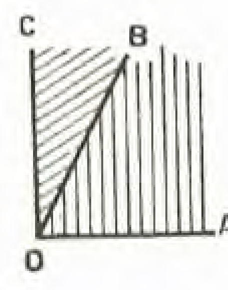


Fig. 17

Rectas perpendiculares. — Dos rectas secantes AOB y COD forman cuatro ángulos cuyas medidas son $\widehat{AOC} = \theta$, $\widehat{COB} = \pi - \theta$, $\widehat{BOD} = \pi - (\pi - \theta) = \theta$, $\widehat{DOA} = \pi - \theta$, puesto que cada uno de ellos es suplementario del que le precede (*fig.* 18).

DEFINICIÓN. *Se dice que dos rectas* AB *y* CD *son perpendiculares cuando uno cualquiera de los cuatro ángulos que forman es recto.* En este caso, y solamente en él, vemos que los cuatro ángulos son rectos.

TEOREMA. *Por un punto* O *de una recta* AB, *se puede trazar una perpendicular, y sólo una, a dicha recta* (*fig.* 18).

Hemos visto que existen dos semirrectas OC y OD, y solamente dos, que forman con una semirrecta OA un ángulo de medida dada θ. Supongamos, en este caso, que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (*fig.* 18). Estas dos semirrectas están situadas a uno y otro lado de AB, por consiguiente,

$$\widehat{COD} = \widehat{COA} + \widehat{AOD} = \pi.$$

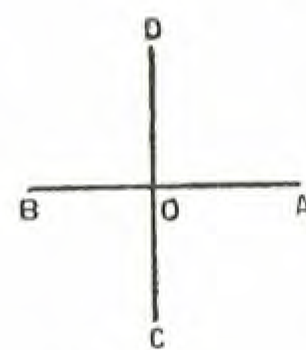


Fig. 18

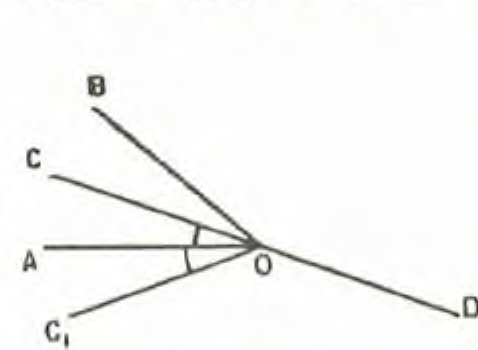


Fig. 19

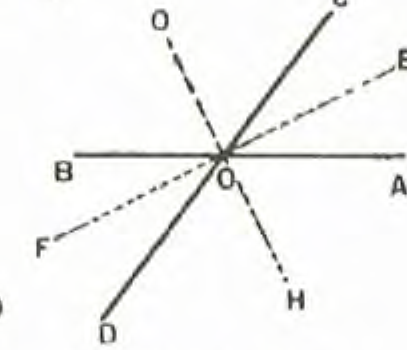


Fig. 20

El ángulo $\widehat{COD}$ es llano y los puntos C, O, D están situados en línea recta. La recta CD pasa por O; es la única recta que pasa por O de modo que $\widehat{AOC}$ sea recto: por consiguiente, es la única perpendicular en O a la recta AB.

Bisectriz de un ángulo. — TEOREMA. *Hay una semirrecta y sólo una,* OC, *que divida un ángulo dado $\widehat{AOB}$ en dos partes iguales* (fig. 19).

Para que una semirrecta OC (*fig.* 19) divida el ángulo $\widehat{AOB}$ dado, que mide θ, en partes iguales, es preciso que $\widehat{AOC} = \dfrac{\theta}{2}$ y que los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AOC}$ no sean adyacentes. Ahora bien, si hay dos semirrectas OC y OC_1, simétricas respecto a OA, definidas por la igualdad $\widehat{AOC} = \dfrac{\theta}{2}$, una sola (OC) define un ángulo $\widehat{AOC}$ que no es adyacente al $\widehat{AOB}$.

Esta semirrecta única divide el ángulo $\widehat{AOB}$ en partes iguales. En

efecto, como $\widehat{AOC}$ es menor que $\widehat{AOB}$, la semirrecta OC estará situada en el ángulo $\widehat{AOB}$, y por consiguiente, $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC} = \frac{\theta}{2}$.

Los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOC}$ son iguales. La semirrecta OC responde, y solamente ella, al enunciado.

DEFINICIÓN. *Se llama* **semibisectriz** *del ángulo* $\widehat{AOB}$ *la semirrecta* OC *que divide este ángulo en dos partes iguales.*

TEOREMA. *La semibisectriz* OC *del ángulo saliente y la semibisectriz* OD *del ángulo entrante* $\widehat{AOB}$ *son dos semirrectas opuestas.*

Estando situada OA entre OC y OD, se tiene (*fig.* 19)

$$\widehat{COD} = \widehat{COA} + \widehat{AOD}.$$

Si θ es la medida del ángulo saliente $\widehat{AOB}$, la medida de $\widehat{COA}$ es $\frac{\theta}{2}$; la medida del ángulo entrante $\widehat{AOB}$ es $2\pi - \theta$ y la de $\widehat{AOD}$ es $\frac{2\pi - \theta}{2}$; por consiguiente, la medida de $\widehat{COD}$ será $\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi - \theta}{2} = \pi$.

El ángulo $\widehat{COD}$ es llano; OC y OD son semirrectas opuestas.

DEFINICIÓN. *Se llama* **bisectriz** *de un ángulo* $\widehat{AOB}$ *la recta* CD, *de la que una mitad divide el ángulo saliente en partes iguales y la otra mitad el ángulo entrante* $\widehat{AOB}$.

Ángulos opuestos por el vértice. Bisectrices de dos rectas. —Dos rectas AB y CD que se cortan forman cuatro ángulos (*fig.* 20): $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOA}$. Los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOD}$ cuyos lados son opuestos, se denominan **opuestos por el vértice:** lo mismo ocurre con los ángulos $\widehat{BOC}$ y $\widehat{DOA}$. Si θ es la medida de $\widehat{AOC}$, la medida del ángulo adyacente $\widehat{COB}$ es $\pi - \theta$; la del ángulo $\widehat{DOB}$ adyacente del anterior será $\pi - (\pi - \theta) = \theta$; la de $\widehat{DOA}$ será $\pi - \theta$. Sea OE la semibisectriz del ángulo $\widehat{AOC}$, OG la de $\widehat{COB}$, OF la de $\widehat{BOD}$ y OH la de $\widehat{DOA}$; tendremos

$$\widehat{COE} = \frac{\theta}{2} \qquad \widehat{COG} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

y, por consiguiente,

$$\widehat{GOE} = \frac{\pi}{2}.$$

Igualmente se verificará $\widehat{GOF} = \widehat{FOH} = \widehat{HOE} = \frac{\pi}{2}$.

Todos estos resultados sobre medida de ángulos se pueden resumir así:

1º *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

2º *Dos ángulos opuestos por el vértice tienen la misma bisectriz.*

3º *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.*

4º *Las bisectrices de los ángulos formados por dos secantes son dos rectas perpendiculares, que se denominan, abreviando,* **bisectrices de esas dos rectas.**

Triángulos

Casos de igualdad de triángulos. Primer caso de igualdad. Segundo caso de igualdad. Triángulos isósceles. Lugar geométrico. Tercer caso de igualdad de triángulos. Ángulo exterior de un triángulo. Relaciones de desigualdad entre los lados de un triángulo

DEFINICIONES. *Se llama* **triángulo** *la figura formada por tres segmentos* AB, BC, CA (fig. 21) *con la condición de que los puntos* A, B, C *no estén situados en línea recta.* Los segmentos AB, BC y CA son los **lados** del triángulo. Los puntos A, B, C son los **vértices** del triángulo. El ángulo saliente $\widehat{BAC}$, que contiene todos los puntos del lado BC, se denomina ángulo $\widehat{A}$ del triángulo; se emplea la notación $\widehat{A}$ cuando no haya lugar a confusión; en caso contrario, se utiliza la notación $\widehat{BAC}$ con el mismo criterio.

En un triángulo hay seis **elementos,** a saber: tres ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, y tres lados AB, BC, CA. Designaremos por a = BC, b = AC, c = AB las longitudes de los lados medidos con la misma unidad, y por A, B, C las medidas de los ángulos. Cada ángulo de un triángulo está comprendido entre 0 y 2 rectos.

Del lado BC comprendido en el ángulo $\widehat{A}$ se dice que es opuesto a este ángulo: en algunos casos se le denomina **base** respecto al vértice A.

Casos de igualdad de triángulos. — Se dice que dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales cuando mediante un desplazamiento o un volvimiento se puede hacer coincidir A' con A, B' con B y C' con C. *Se ha convenido expresamente que los vértices* A', B', C' *homólogos de* A, B, C *sean enunciados en el mismo orden que éstos.*

Primer caso de igualdad. — TEOREMA. *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales, respectivamente, un lado* BC = B'C' *y los dos ángulos contiguos al mismo* $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Puesto que BC = B'C' (*fig.* 21), mediante un desplazamiento, podemos hacer coincidir B' con B y C' con C; este desplazamiento llevará A' al punto A_1 situado al mismo lado que A respecto a la recta BC, o al punto A_2 simétrico de A_1 respecto a BC. Si A está en A_2 un semigiro alrededor de BC le llevará al punto A_1.

Las dos semirrectas BA y BA_1 forman, por hipótesis, con BC el mismo ángulo, puesto que $\widehat{B'} = \widehat{B}$; como ellas están por construcción al mismo lado de BC, se confundirán (v. p. 78). Puesto que $\widehat{C} = \widehat{C'}$, por la misma razón se confundirán las semirrectas CA y CA_1. Luego A_1 coincidirá con A. Por consiguiente, los dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales.

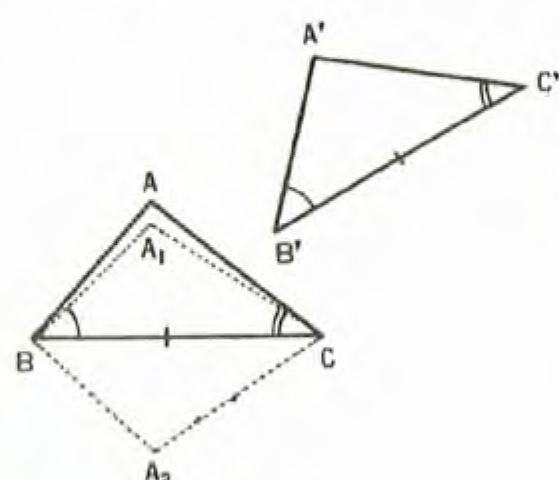


Fig. 21

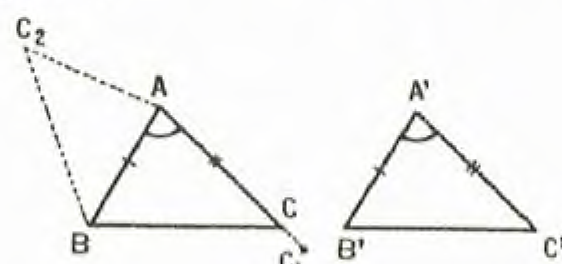


Fig. 22

Segundo caso de igualdad. — TEOREMA. *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales, respectivamente, un ángulo* $\widehat{A} = \widehat{A'}$ *y los lados que lo forman* AB = A'B' *y* AC = A'C'.

Puesto que AB = A'B' (*fig.* 22), mediante un desplazamiento (véase página 77) podemos hacer coincidir B' con B y A' con A; este desplazamiento llevará C' al punto C_1, situado al mismo lado que C respecto a la recta AB, o al punto C_2 simétrico de C_1 respecto a la recta AB. Si quedase en C_2 un semigiro alrededor de AB lo llevaría a C_1. Las semirrectas AC y AC_1 situadas a un mismo lado de AB forman, por hipótesis, el mismo ángulo con AB, puesto que $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Por tanto, AC y AC_1 (v. p. 78) coinciden. La hipótesis AC = AC_1 implica que C_1 y C coincidan. Por consiguiente, los dos triángulos ABC y A'B'C' son iguales.

Triángulos isósceles. — *Se dice que un triángulo* ABC *es* **isósceles** *cuando dos de sus lados* AB *y* AC *son iguales.* En este caso el tercer lado BC se denomina *base* del triángulo (*fig.* 24).

Se dice que un triángulo es **escaleno** *cuando no es isósceles.*

Se llama **mediatriz** *de un segmento* BC *la perpendicular a la recta* BC *en su punto medio* H.

TEOREMA. *En un triángulo isósceles* (fig. 24):

1º *los ángulos* $\widehat{B}$ *y* $\widehat{C}$ *opuestos a los lados iguales son iguales;*

2º *la mediatriz de* BC *y la bisectriz del ángulo* A *se confunden.*

Sea AH la bisectriz de A, y H el punto de su intersección con la base BC. Los dos triángulos BAH y CAH tienen un ángulo igual, $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ por construcción, comprendido entre dos lados iguales: AH que es común y AB = AC por hipótesis. Por consiguiente, estos triángulos son iguales (v. SEGUNDO CASO DE IGUALDAD). Luego:

1º Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, opuestos al lado común AH, son iguales;

2º Los lados HB y HC, opuestos a los ángulos iguales $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$, son iguales. Por tanto, H es el punto medio de BC. Los ángulos $\widehat{AHB}$ y $\widehat{AHC}$, opuestos a los lados iguales AB y AC, son iguales; siendo la suma de estos ángulos igual a un ángulo llano, cada uno de ellos valdrá la mitad, es decir, un recto. Luego HA es perpendicular a BC, y, como H es el punto medio de BC, la recta HA será a la vez mediatriz del segmento BC y bisectriz del ángulo $\widehat{A}$. Esta proposición implica que el vértice A de un triángulo isósceles opuesto a la base BC esté en la mediatriz de esta base.

RECÍPROCO. *Todo triángulo* ABC (fig. 23) *en el que dos ángulos* $\widehat{B}$ *y* $\widehat{C}$ *sean iguales es un triángulo isósceles,* AB = AC.

Sean los triángulos ABC y A'B'C', obtenido este último por un volvimiento del triángulo ABC. Del lado AC se obtiene el A'C', del AB el A'B' y del BC el B'C'. Transportemos el triángulo A'B'C' sobre el triángulo ABC de modo que C'B' se confunda con BC.

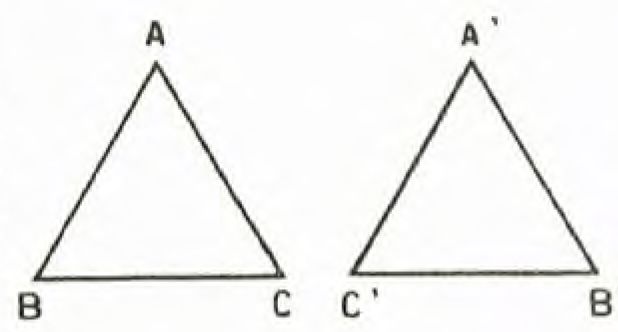


Fig. 23

Siendo el ángulo $\widehat{C'}$ igual a $\widehat{C}$, que también es igual a $\widehat{B}$ por hipótesis, el lado C'A' tomará la dirección BA, y el punto A' estará sobre BA. Por la misma razón, B'A' tomará la dirección CA, y el punto A' estará sobre CA. Como el punto A' debe encontrarse a la vez sobre BA y CA se encontrará en la intersección de estos dos segmentos y coincidirá con el punto A, de donde se deduce que A'B' = AC. Pero A'B' es igual que AB. Luego el triángulo es isósceles.

Lugar geométrico. — *Se llama* **lugar geométrico** *de un punto* M, *sujeto a determinadas condiciones, el conjunto de las posiciones ocupadas por el punto* M. En geometría plana, limitaremos el estudio de los lugares geométricos al caso en que las condiciones impuestas sean suficientes para que el punto M describa un arco de curva (C).

Para demostrar que un arco de curva (C) es un lugar geométrico definido por un conjunto de condiciones, se debe establecer en un orden arbitrario:

1° Que las condiciones impuestas son suficientes, es decir, que la hipótesis —las condiciones impuestas se cumplen— implica la conclusión: el punto M está situado en la curva (C);

2° Que las condiciones impuestas son necesarias, es decir, que la hipótesis —el punto M está en la curva (C)— implica la conclusión: las condiciones impuestas se cumplen.

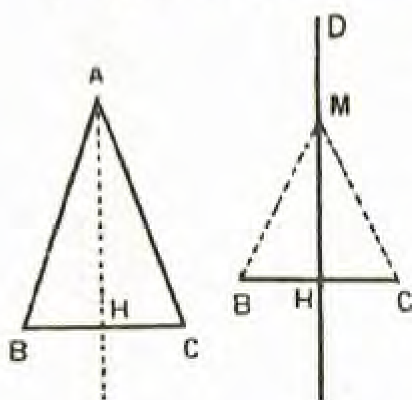


Fig. 24

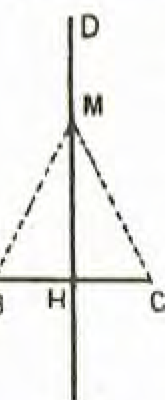


Fig. 25

La expresión: el punto M pertenece al lugar, equivale a la expresión: las condiciones impuestas al punto M son satisfechas.

La expresión: la condición necesaria y suficiente para que el punto M sea un punto del lugar es que M esté situado en la curva (C), resume las proposiciones (1) y (2).

TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos* M *equidistantes de dos puntos* B *y* C *dados, es la mediatriz* (D) *del segmento* BC (fig. 25).

1° Todo punto del lugar está en la recta (D). Dicho de otra forma, la hipótesis MB = MC implica que M esté en la mediatriz de BC. En efecto, si MB = MC, el triángulo MBC es isósceles y el vértice M estará en la mediatriz de BC.

2° Todo punto de la recta (D) es un punto del lugar. Lo que equivale a decir que si está en la mediatriz de BC, se verificará que MB = = MC. En efecto, si M está en la recta (D) que corta al segmento BC en su punto medio H, los triángulos MHB y MHC serán iguales (segundo caso de igualdad: $\widehat{BHM} = \widehat{CHM}$ porque estos ángulos son rectos, HM común, HB = HC porque H es el punto medio de BC): por consiguiente, los lados MB y MC serán iguales, MB = MC, y el punto M será un punto del lugar.

Tercer caso de igualdad de triángulos. — TEOREMA. *Dos triángulos son iguales si los tres lados de uno de ellos son, respectivamente, iguales a los tres lados del otro.* AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' (*fig.* 26).

Puesto que BC = B'C', mediante un desplazamiento podremos hacer coincidir B' con B y C' (v. p. 77). Este desplazamiento llevará A' sobre A_1, situado al mismo lado que el punto A respecto a BC; si A' fuese a caer en A_2, simétrico de A_1 respecto a BC, un semigiro alrededor de BC llevaría A_2 sobre A_1. Si A_1 y A coinciden, los dos triángulos A'B'C' y ABC son iguales. Vamos a demostrar que la hipótesis en que A_1 es distinto de A nos lleva a conclusiones absurdas.

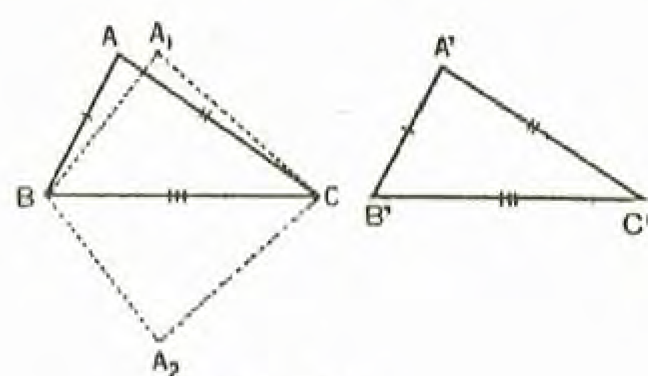


Fig. 26

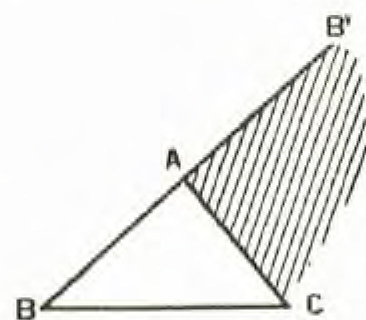


Fig. 27

En efecto, si A_1 es distinto de A, la hipótesis A'B' = AB implica que A_1B = AB y, en consecuencia, que B pertenezca al lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y A_1, es decir, a la mediatriz de AA_1. Por la misma razón, la igualdad A'C' = AC implica que A_1C = AC, y, por tanto, que C esté en la mediatriz de AA_1. Por consiguiente, los puntos A y A_1 serán simétricos respecto a BC, conclusión absurda, puesto que los hemos supuesto situados al mismo lado de BC. Luego A y A_1 no serán distintos y los triángulos A'B'C' y ABC serán iguales.

Ángulo exterior de un triángulo. — *Se llama* **ángulo exterior de un triángulo** *un ángulo saliente que tenga por vértice uno de los vértices* A *del triángulo y que esté formado por un lado,* AC *por ejemplo, y la semirrecta* AB' *opuesta a la semirrecta* AB (fig. 27).

TEOREMA. *Todo ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos no adyacentes de este triángulo.*

Vamos a demostrar que el ángulo exterior $\widehat{CAB'}$ (*fig.* 28) es mayor: 1° que el ángulo $\widehat{ACB}$; 2° que el ángulo $\widehat{ABC}$, que no le son adyacentes.

1° Sea D el punto medio de AC (*fig.* 28). Prolonguemos BD una longitud DE igual a BD. Unamos A con E. Los dos triángulos BCD y EDA son iguales (segundo caso de igualdad de triángulos: $\widehat{BDC} = \widehat{EDA}$ ángulos opuestos por el vértice, DA = DC y DB = DE por construcción).

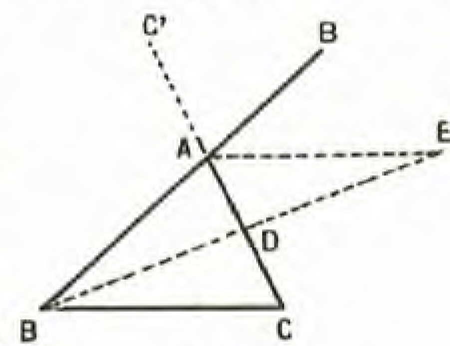


Fig. 28

Por tanto, los ángulos $\widehat{DAE}$ y $\widehat{DCB}$ son iguales. Ahora bien, por construcción el punto E está situado en el interior del ángulo CAB'; por consiguiente, la recta AE también estará en el interior de este ángulo y, en consecuencia, el ángulo $\widehat{CAB'}$ será mayor que el $\widehat{CAE}$, y que el $\widehat{DAE}$, y por consiguiente también será mayor que el $\widehat{ACB}$ que es igual al $\widehat{DAE}$;

$$\widehat{CAB'} > \widehat{ACB}$$

2° Aplicando la demostración anterior al ángulo exterior $\widehat{C'AB}$ llegaríamos a la siguiente conclusión:

$$\widehat{BAC'} > \widehat{ABC}.$$

Ahora bien, $\widehat{BAC'}$ y $\widehat{CAB'}$ son iguales por ser ángulos opuestos por el vértice; por consiguiente

$$\widehat{CAB'} > \widehat{ABC}$$

El teorema queda así demostrado.

Relaciones de desigualdad entre los lados de un triángulo. — TEOREMA. *En todo triángulo, a mayor lado* AB *se opone mayor ángulo* $\widehat{C}$ (fig. 29).

Hipótesis: AB > AC. La conclusión será $\widehat{C} > \widehat{B}$. La hipótesis AB > AC implica que en el segmento AB exista un punto D tal que AD = AC. El ángulo $\widehat{ADC}$ exterior en el triángulo BDC es mayor que el ángulo $\widehat{B}$ que no le es adyacente.

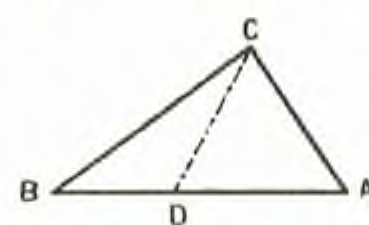


Fig. 29

$$\widehat{ADC} > \widehat{B}.$$

El triángulo DAC es isósceles, puesto que AD = AC por construcción, luego

$$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}.$$

Al estar situado el punto D entre A y B, la recta DC estará en el interior del ángulo $\widehat{ACB}$ y, en consecuencia,

$$\widehat{ACB} > \widehat{ACD}.$$

Como el ángulo $\widehat{ACB}$, o $\widehat{C}$, es mayor que el $\widehat{ACD}$, ángulo igual al $\widehat{ADC}$, el cual es superior al $\widehat{B}$, resulta que $\widehat{C} > \widehat{B}$.

El teorema queda, pues, demostrado.

RECÍPROCO. *En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.*

La desigualdad $\widehat{B} < \widehat{C}$ implica AC < AB, pues si AC fuese mayor que AB tendríamos que, en virtud de la proposición directa, $\widehat{B} > \widehat{C}$, lo que es contrario a la hipótesis.

TEOREMA. *En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos* (fig. 30).

Prolonguemos BA más allá de A una longitud AD igual al lado AC. El triángulo CAD será isósceles; por tanto,



Fig. 30

$$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}.$$

Como el punto D está fuera del segmento AB, la recta CA estará situada en el ángulo $\widehat{DCB}$ y, por consiguiente,

$$\widehat{DCB} > \widehat{ACD}.$$

De la igualdad y desigualdad citadas se deduce que

$$\widehat{DCB} > \widehat{ADC}.$$

En el triángulo BCD, el ángulo $\widehat{DCB}$ es mayor que el ángulo $\widehat{D}$, luego, según el teorema anterior, el lado BD, opuesto al ángulo mayor, será mayor que BC, lado opuesto a un ángulo menor.

Por consiguiente, tenemos que BC < BD, es decir, BC < BA + AD y como AD = AC por construcción,

$$BC < BA + AC.$$

OBSERVACIÓN. En un triángulo ABC, cada uno de los tres lados es menor que la suma de los otros dos. Las tres desigualdades

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

se verifican siempre, y son equivalentes a las tres siguientes

$$a < b + c, \quad a > b - c, \quad a > c - b$$

que se pueden resumir de este modo

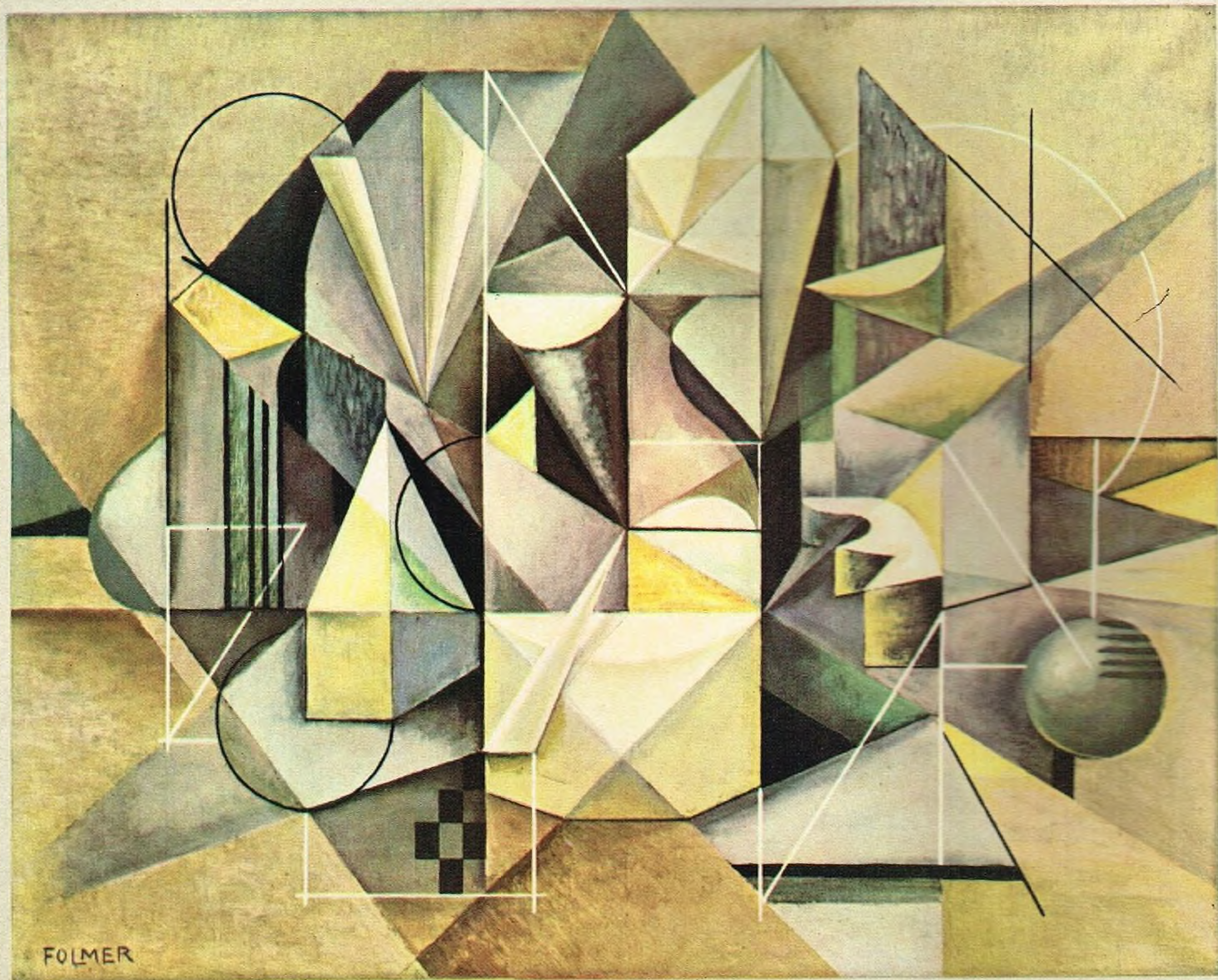
$$|\, c - b \,| < a < b + c,$$

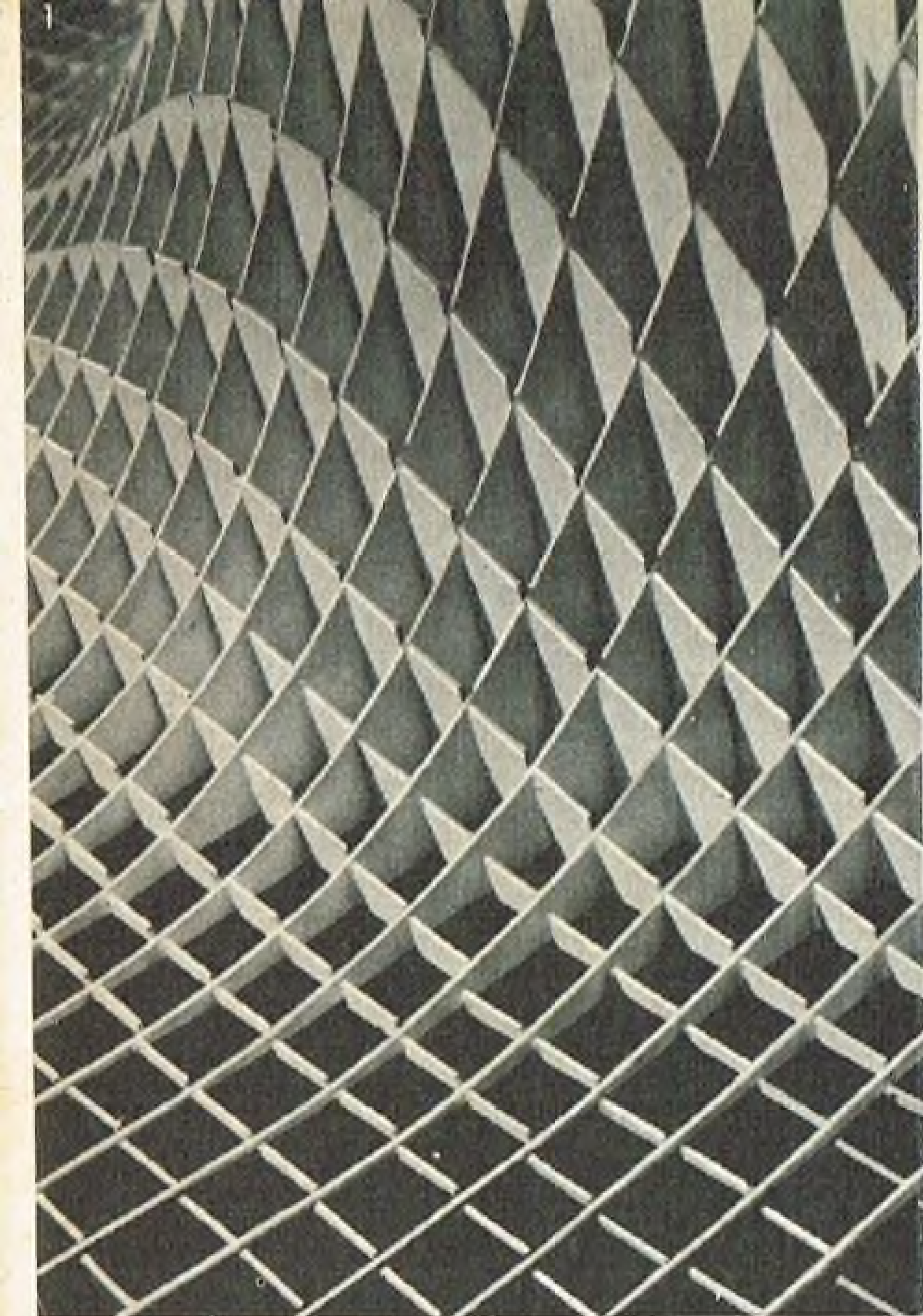
que se expresa diciendo:

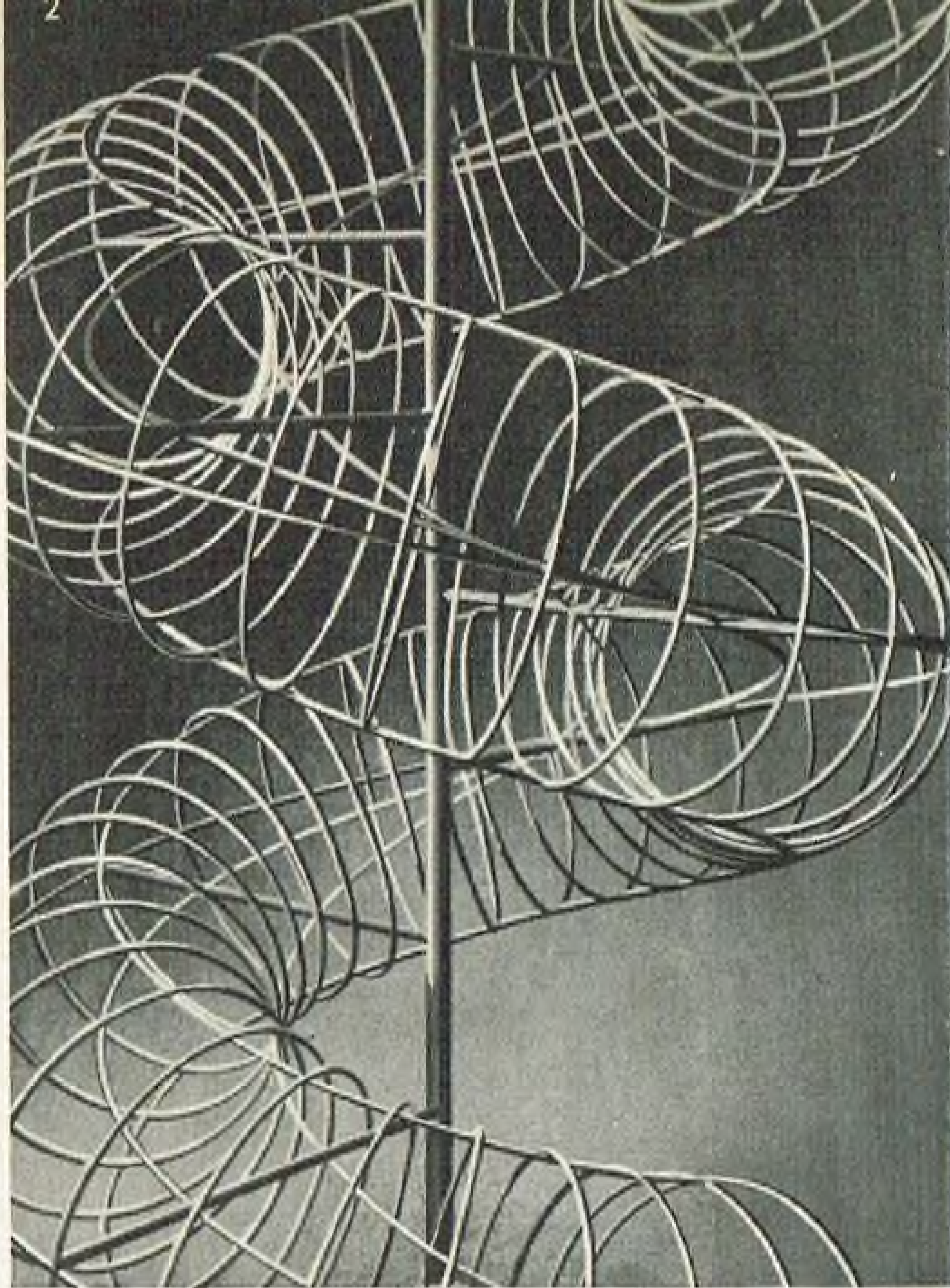
En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que el valor absoluto de su diferencia.

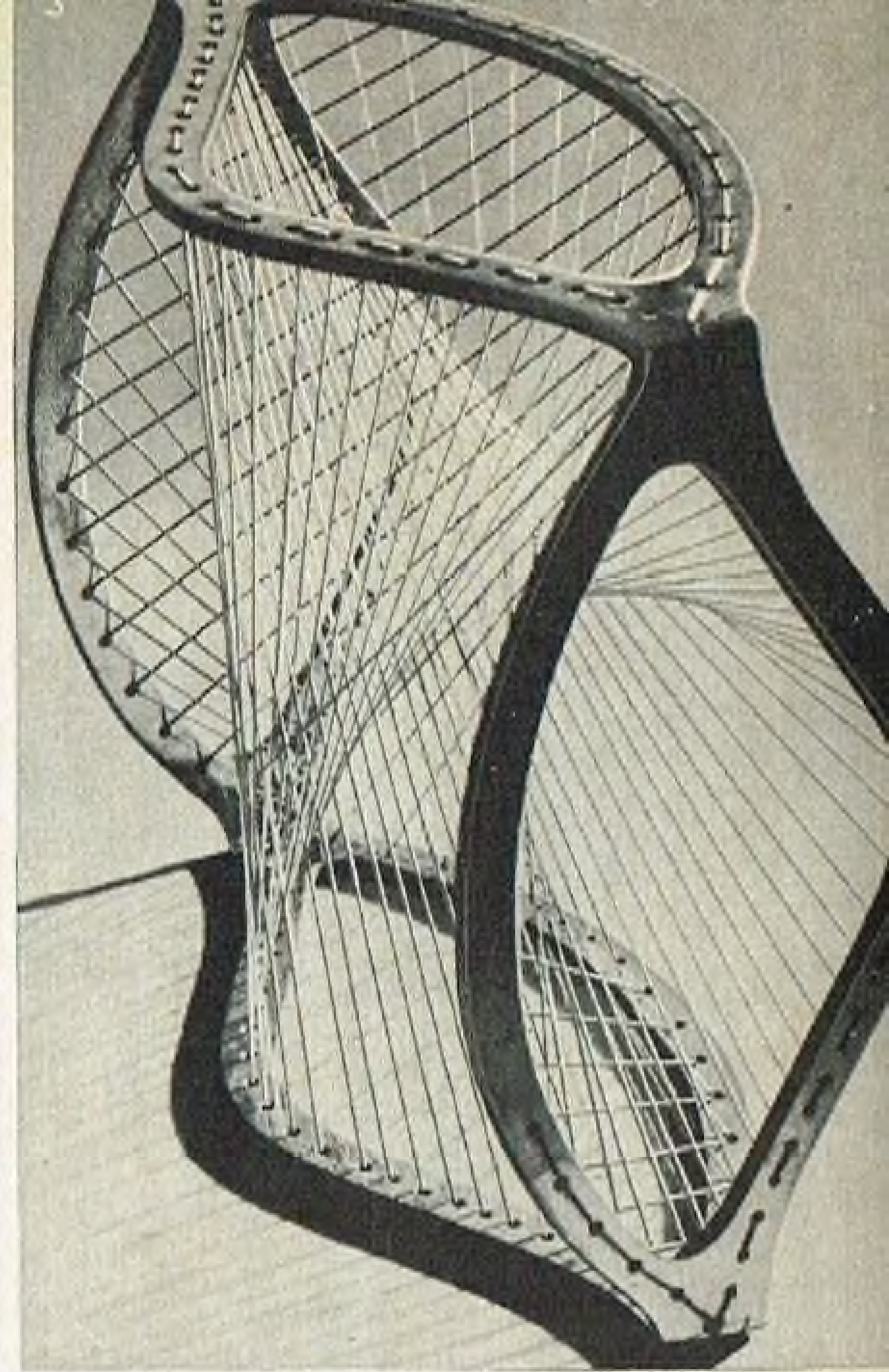
Dejamos al lector que demuestre la proposición clásica: "La línea recta es más corta que las líneas quebradas que tienen los mismos extremos que aquélla".

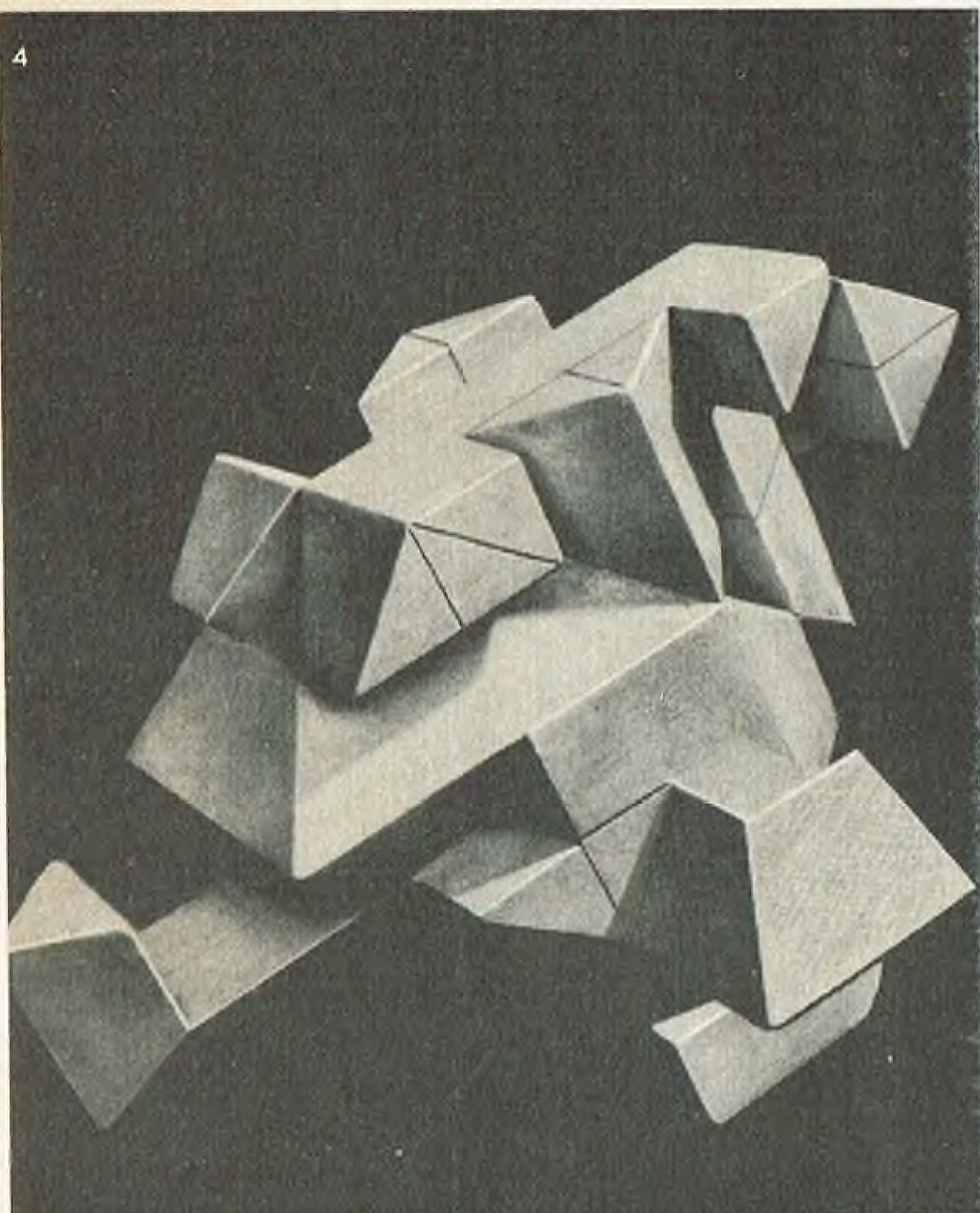
TEOREMA. *Si dos triángulos tienen un ángulo desigual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, los terceros lados son desiguales y a mayor ángulo se opone mayor lado.*


FOLMER









MATEMÁTICA

Estas formas insólitas y estos volúmenes de peregrina silueta constituyen un intento de representar en el espacio operaciones o leyes matemáticas abstractas o movimientos en el transcurso de su realización :

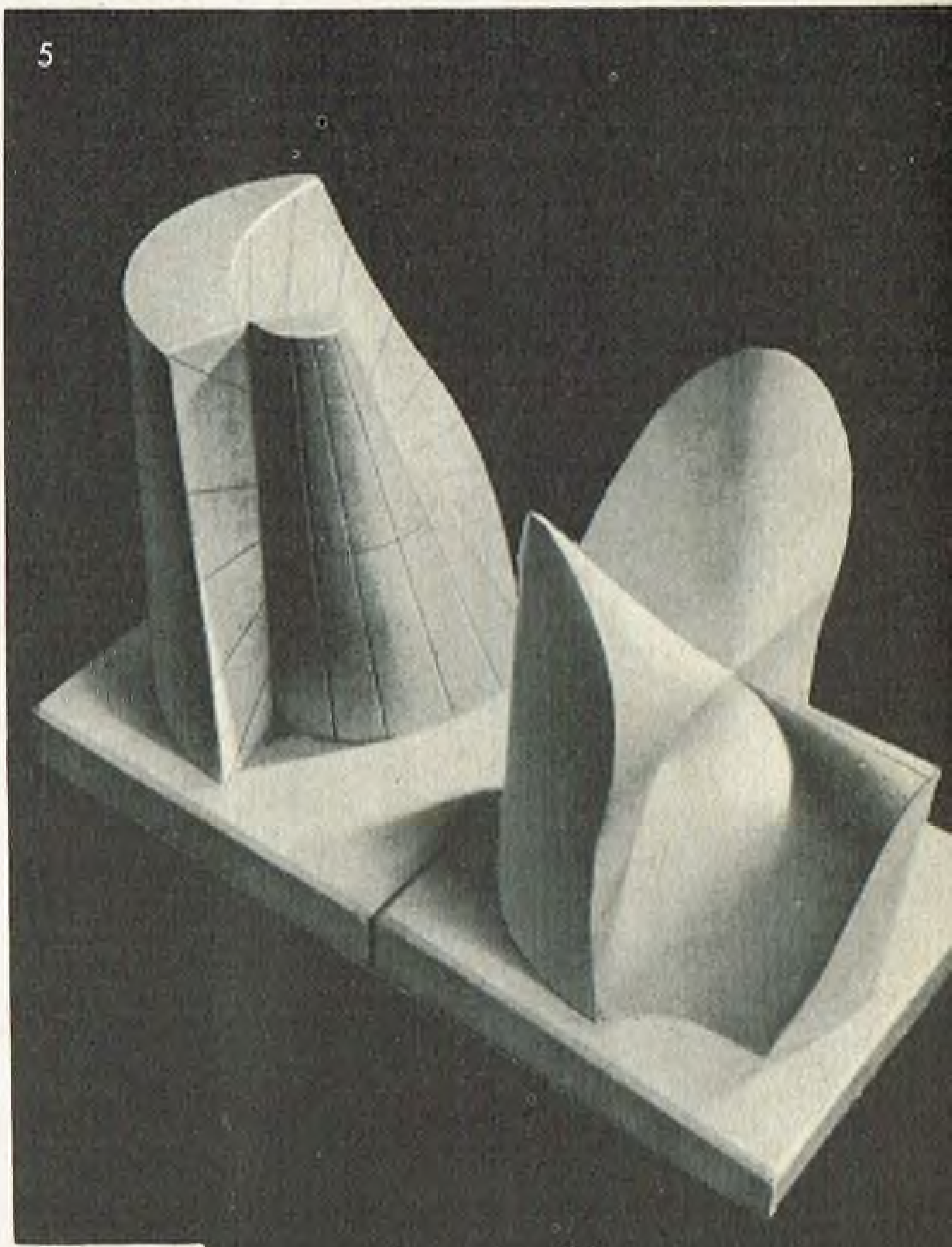
1. Estructura en forma de panal que representa la célebre ley de Gauss sobre la distribución de una variable aleatoria de dos dimensiones

2. Superficie engendrada por el movimiento de una esfera de radio constante que se traslada a lo largo de una hélice circular

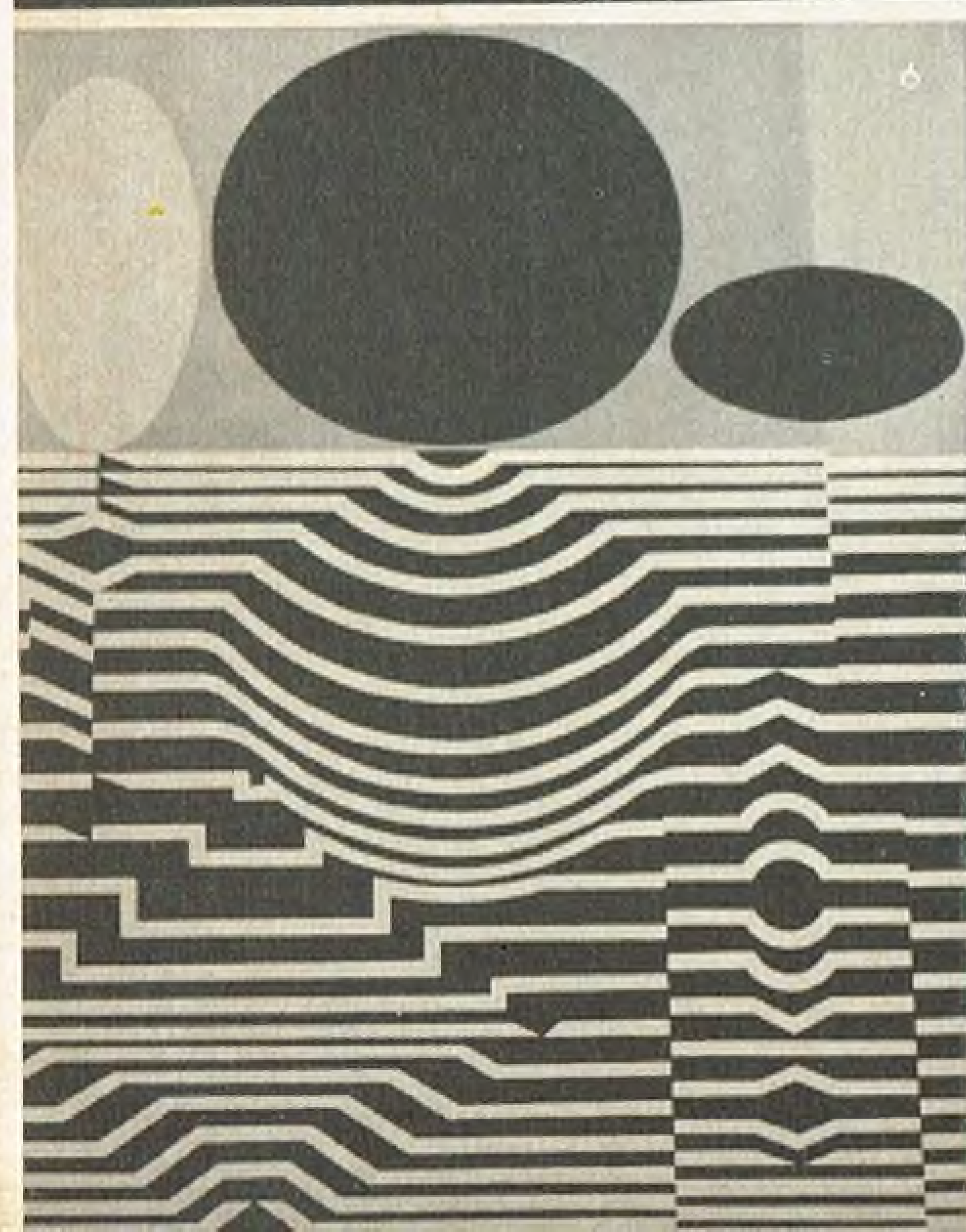
3. Proyección en tres dimensiones de una fórmula matemática llamada « conoide de Plucker »

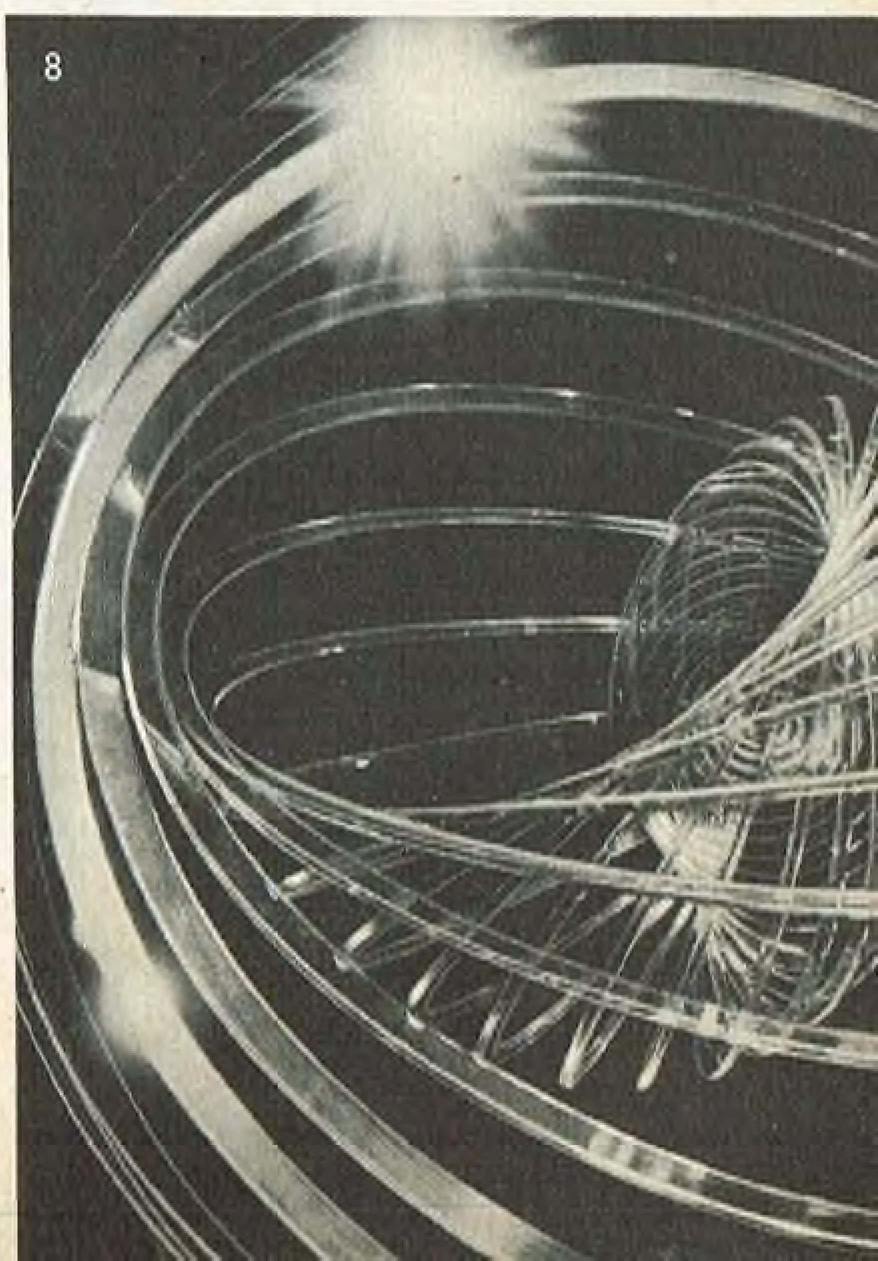
4. Superficie que ilustra las construcciones de curvas relativas a la repartición del espacio

5. Figuras que muestran dos de las secciones posibles de ecuaciones de tercer grado









6. Composición geométrica en el espacio. Cuadro de Ladislas Moholy-Nagy (Museo de Arte Moderno, París)

7. Esfera y cíclida de Dupin

8. Desarrollo sincrónico de un círculo hacia el infinito, realizado en plástico por Gregorio Vardanega (Fot. Almasy, Larousse, Vardanega)

Lam. color pág. precedente : *Utilización de elementos geométricos en la pintura moderna : Sinfonía armónica, por Folmer (Museo de Arte Moderno, París)* [Fot. Larousse]

Hipótesis: Sean ABC y A'B'C' dos triángulos en los que AB = = A'B', AC = A'C' y $\widehat{A} > \widehat{A'}$ (*fig.* 31).

Mediante un desplazamiento o un volvimiento hagamos coincidir A' con A, B' con B y C' con D, de modo que D y C estén situados a un mismo lado de AB. Puesto que por hipótesis $\widehat{A} > \widehat{A'}$, $\widehat{BAC}$ será mayor que $\widehat{BAD}$ y por consiguiente AD será una recta del ángulo $\widehat{BAC}$. Tracemos AE, bisectriz del ángulo $\widehat{CAD}$; esta recta estará situada en el ángulo $\widehat{DAC}$ y por

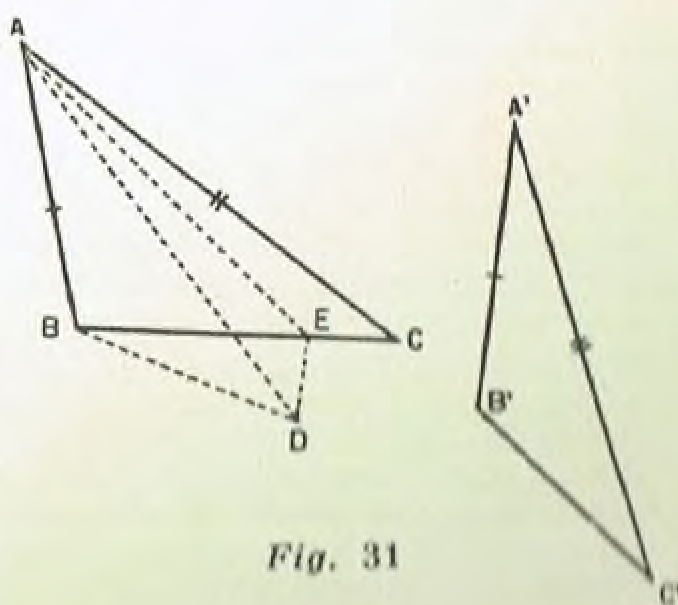


Fig. 31

tanto en el $\widehat{BAC}$, y cortará al lado BC; supongamos que E sea el punto de intersección de AE con BC, y unamos D con E.

Los dos triángulos DAE Y CAE son iguales (segundo caso de igualdad de triángulos: $\widehat{DAE} = \widehat{CAE}$ por construcción, AE común, AD = = AC por construcción). Por consiguiente, DE = CE.

En el triángulo BDE, el lado BD es menor que la suma de los otros dos

$$BD < BE + DE,$$

y como DE = CE:

$$BD < BE + CE,$$

es decir,

$$BD < BC,$$

y por consiguiente, B'C' < BC.

Perpendiculares, oblicuas y paralelas

Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella. Propiedades de la perpendicular y de las diversas oblicuas. Ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera. Rectas paralelas. — **Postulado de Euclides:** Consecuencias del postulado de Euclides. Ángulos cuyos lados son paralelos. Suma de los ángulos de un triángulo. Casos de igualdad de los triángulos rectángulos. Puntos que equidistan de dos rectas secantes

Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella. —TEOREMA. *Por un punto* A *exterior a una recta* BC, *se puede trazar a ésta una sola perpendicular.*

1° Se puede trazar una perpendicular.

Hagamos que el triángulo ABC efectúe un semigiro alrededor de BC (*fig.* 32): por definición, A coincide con A', simétrico de A respecto a BC. Puesto que las figuras ABC y A'BC son iguales, AB = A'B y AC = A'C. Luego BC es la mediatriz de AA' y las rectas BC y AA' son perpendiculares. Por consiguiente, AA' es una perpendicular a BC trazada por el punto A.

2° No se pueden trazar varias perpendiculares.

Sea AH una perpendicular trazada desde A a BC: esa perpendicular cortará BC en un punto H que ha de ser distinto de B o de C. Supongamos que H sea distinto de B. Los ángulos $\widehat{AHB}$ y $\widehat{A'HB}$ que se obtienen uno de otro mediante un volvimiento son iguales, y como cada uno de ellos es recto, el ángulo $\widehat{AHA'}$ será llano. La recta AH coincide con la recta AA' ya construida. Por consiguiente, la recta AA' es la única perpendicular a BC que pasa por el punto A.

DEFINICIONES. *Se llama* **proyección ortogonal** *de un punto* A *sobre una recta* BC *el punto* H *de su intersección con la perpendicular a* BC *trazada por el punto* A. *El punto* H *se llama también* **pie** *de esta perpendicular.*

Se llama **distancia** *del punto* A *a la recta* BC *la longitud del segmento* AH.

Puesto que BC es la mediatriz de AA', H será el punto medio de AA'; por consiguiente:

Un punto A y su simétrico A' respecto a una recta (D) se caracterizan por las dos propiedades siguientes:

1° AA' es perpendicular a (D);

2° el punto medio de AA' está situado en (D).

La recta AB, *que une el punto* A *con un punto de la recta* BC, *distinto del pie* H *de la perpendicular trazada por* A *a esta recta, se llama* **oblicua.** *El punto* B *se llama* **pie de esta oblicua.**

Propiedades de la perpendicular y de las diversas oblicuas. — TEOREMA. *Si desde un punto* A *exterior a una recta* BC, *se traza la perpendicular* AH *a esta recta y varias oblicuas* AB *y* AC:

1° *la perpendicular es menor que las oblicuas;*

2° *las oblicuas, cuyos pies* C *y* D *están a igual distancia del pie* H *de la perpendicular, son iguales;*

3° *de dos oblicuas* AB *y* AC, *la mayor es aquella cuyo pie está más alejado del pie* H *de la perpendicular* (fig. 33).

1° Sea HA' la prolongación de la perpendicular AH. El ángulo recto $\widehat{CHA'}$, exterior al triángulo AHC, es mayor que el ángulo $\widehat{ACH}$ de este triángulo (v. p. 80) y como $\widehat{CHA'} = \widehat{CHA}$ por ser ambos ángulos rectos, el ángulo $\widehat{CHA}$ será mayor que $\widehat{ACH}$.

De la desigualdad de los ángulos

$$\widehat{CHA} > \widehat{ACH}$$

se deduce la desigualdad de los lados

$$AC > AH.$$

2° Como HC = HD por hipótesis, HA será la mediatriz de CD. Luego todo punto A de esta mediatriz equidista de C y D (v. p. 80): por tanto, AC = AD.

3° Como HB > HC por hipótesis, uno de los puntos C o D estará situado en el segmento HB. Supongamos que ese punto sea C. El triángulo CAD es isósceles, puesto que AC = AD según el párrafo 2°: por consiguiente, los ángulos en la base $\widehat{ADH}$ y $\widehat{ACH}$ son iguales (v. p. 79) y el ángulo $\widehat{ACH}$, exterior al triángulo ACB, es mayor que el ángulo $\widehat{ABH}$, que no le es adyacente. Por tanto, $\widehat{ADH}$ es mayor que $\widehat{ABH}$.

La desigualdad $\widehat{ADH} > \widehat{ABH}$ entre los ángulos del triángulo ABD, implica la desigualdad de los lados AB > AD.

RECÍPROCO. *Si dos oblicuas* AC *y* AD *son iguales, sus pies están a igual distancia del pie* H *de la perpendicular* (fig. 33).

Si dos oblicuas AB *y* AD *son desiguales, el pie de la mayor* AB *está más separado del pie* H *de la perpendicular.*

Si HC fuese distinto de HD, según la proposición directa, AC sería mayor o menor que AD, lo que no es posible. Por consiguiente, HC = = HD.

Si HB fuese menor o igual que HD, según la proposición directa, AB sería menor o igual que AD, lo que no es posible. Luego HB > HD.

OBSERVACIÓN. La distancia de un punto fijo A a un punto M variable de una recta (D) es la menor posible cuando el punto M está en H, pie de la perpendicular trazada desde A sobre la recta (D). De donde resulta que lo que se llama distancia de un punto a una recta es en realidad la más corta de las distancias del punto A a los diferentes puntos de la recta (D).

Ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera. — Tracemos en un plano (*fig.* 34) dos rectas (D) y (D'). Sea A un punto de (D') y B un punto de (D): la recta AB y cada una de las rectas (D) y (D') determinan cuatro ángulos, luego en total forman 8 ángulos. Los designaremos por su vértice A o B afectado de uno de los subíndices 1, 2, 3, 4, correspondiendo cada uno de ellos a las porciones de plano que tienen igual numeración en la figura.

DEFINICIONES. *Se llaman* **ángulos correspondientes,** en la figura 34, *los ángulos siguientes:*

A_1 y B_1
A_2 y B_2
A_3 y B_3
A_4 y B_4

Se llaman **alternos internos** *los ángulos* (fig. 34):

A_3 y B_1
A_4 y B_2

Se llaman **alternos externos** *los ángulos:*

A_1 y B_3
A_2 y B_4.

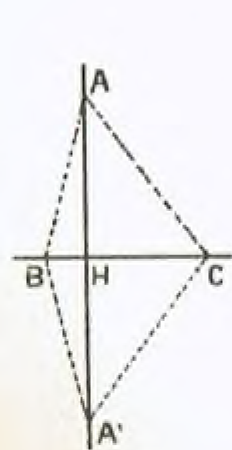


Fig. 32

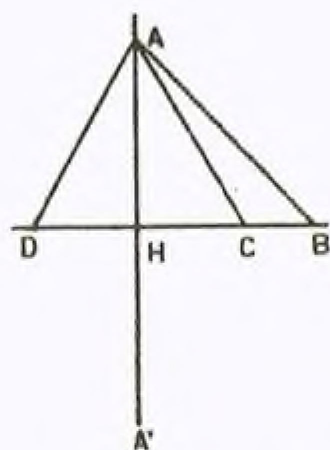


Fig. 33

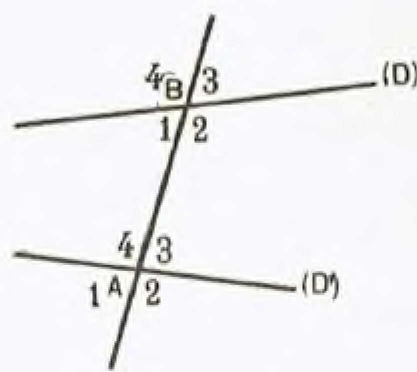


Fig. 34

Rectas paralelas. — Si trazamos dos rectas (D) y (D′) en un mismo plano, o se cortan en un punto A de la figura o no se cortan. En este último caso, es necesario saber si las rectas no tienen ningún punto común porque no se han prolongado suficientemente o si verdaderamente no lo tienen por mucho que se las prolongue.

El teorema siguiente demuestra que hay rectas que no tienen ningún punto común por mucho que se las prolongue: de tales rectas se dice que son paralelas entre sí.

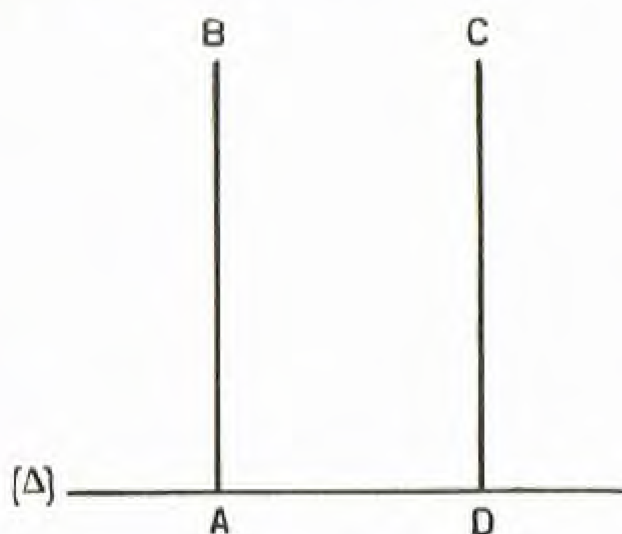


Fig. 35

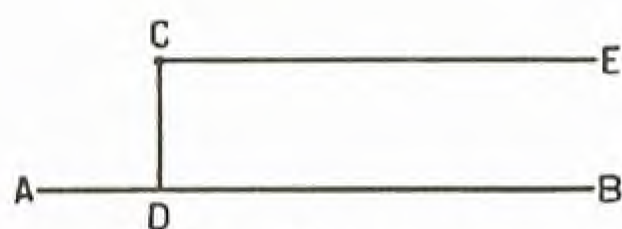


Fig. 36

TEOREMA. *Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí* (fig. 35).

Sean AB y CD dos rectas perpendiculares a una tercera (△). Las rectas AB y CD no pueden cortarse, pues en caso de hacerlo podríamos trazar desde su punto de intersección dos perpendiculares a una misma recta (△), lo que es imposible. Por consiguiente, al no cortarse las rectas AB y CD son paralelas.

COROLARIO. *Por un punto* C *exterior a una recta* AB, *se puede trazar una paralela a esta recta* (fig. 36).

Por el punto C tracemos CD perpendicular a la recta AB, y después CE perpendicular a CD. Las dos rectas CE y AB, perpendiculares a la misma recta CD, son paralelas entre sí.

Postulado de Euclides

Por un punto A *fuera de una recta no se puede trazar a ésta más que una sola paralela.*

Esta proposición es conocida con el nombre de **postulado de Euclides:** constituye una hipótesis y no es susceptible de demostración. La geometría que se ha formado admitiendo el postulado de Euclides se llama geometría *euclidiana;* las geometrías que se han formado reemplazando el postulado por otra proposición que admite, por ejemplo, que por un punto se pueden trazar varias paralelas a una misma recta, son geometrías *no euclidianas.* Estas geometrías son completamente comparables a la nuestra; los teoremas pueden tener en ellas el mismo orden de colocación; la serie de razonamientos y demostraciones está en ellas tan sólida e irreprochablemente ordenado como en la geometría euclidiana. Desde el punto de vista de la lógica pura no hay razón para preferir una de estas geometrías a una de las otras; pero es este el lugar oportuno para recordar que si bien la geometría no es una ciencia experimental, ella toma de la experiencia sus inspiraciones: es precisamente la comparación de los resultados teóricos con los resultados experimentales lo que inclina al geómetra a preferir la geometría euclidiana a las demás geometrías.

Consecuencias del postulado de Euclides. — 1° *Si dos rectas* (AB) *y* (CD) *son paralelas, toda recta* (E′F′) *que corte una de ellas corta también la otra.*

Sea F el punto de intersección de las rectas (CD) y (E′F′) [*fig.* 37]: si la recta (E′F′) no cortase la recta (AB), sería paralela a ella y, en ese caso, por el punto F pasarían dos rectas (CD) y (E′F′) paralelas a una tercera (AB), lo que no es posible. Luego la recta (E′F′) corta la recta (AB).

2° *Dos rectas* (AB) *y* (CD) *paralelas a una tercera* (E′F′) *son paralelas entre sí.*

Si (CD) no fuese paralela a la recta (AB), la cortaría y también cortaría la recta (E′F) paralela a la recta (AB): por tanto, no sería paralela a (E′F′).

TEOREMA. *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante:*

1° *Los ángulos alternos internos son iguales;*

2° *los ángulos alternos externos son iguales;*

3° *los ángulos correspondientes son iguales.*

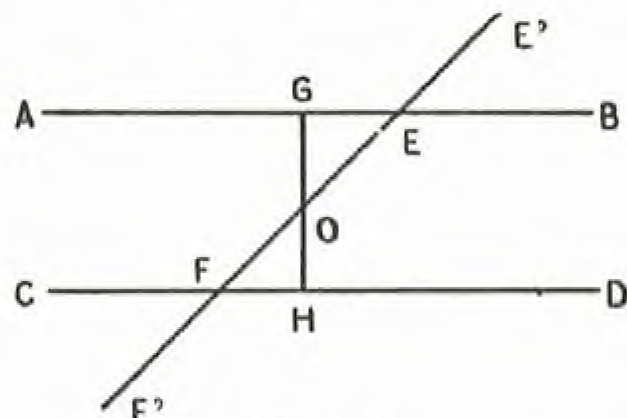


Fig. 37

Sean AB y CD dos rectas paralelas y EF la secante (*fig.* 37):

1° Tracemos por O, punto medio de EF, la recta GH perpendicular a AB; la recta GH también es perpendicular a CD. Los triángulos rectángulos EOG y FOH tienen iguales un ángulo agudo ($\widehat{GOE} = \widehat{FOH}$) y la hipotenusa (OF = OE). Por consiguiente, los triángulos son iguales y los ángulos $\widehat{OFH}$ y $\widehat{GEO}$ también son iguales;

2° Los ángulos alternos externos $\widehat{E'EB}$ y $\widehat{F'FC}$ son iguales, pues $\widehat{E'EB}$ es opuesto por el vértice al ángulo $\widehat{AEF}$ que es alterno interno con el $\widehat{EFD}$, y éste es opuesto por el vértice con el $\widehat{F'FC}$. Luego $\widehat{E'EB} = \widehat{F'FC}$.

RECÍPROCO. *Si dos rectas son cortadas por una secante que forma con ellas:*

dos ángulos alternos internos iguales,
o dos ángulos alternos externos iguales,
o dos ángulos correspondientes iguales,

estas dos rectas son paralelas.

OBSERVACIÓN. Para demostrar el paralelismo de dos rectas, es necesario y suficiente que sean iguales los ángulos alternos internos, alternos externos o correspondientes formados por estas dos rectas con una secante.

Ángulos cuyos lados son paralelos. — *Se dice que dos segmentos o dos semirrectas* AB *y* A′B′ *son paralelas cuando las rectas* AB *y* A′B′ *son paralelas. Se dice que dos semirrectas* AB *y* A′B′ *son paralelas y del* **mismo sentido** *cuando están situadas a un mismo lado con relación a la recta que une sus orígenes* A *y* A′.

TEOREMA. *Dos ángulos* $\widehat{BAC}$ *y* $\widehat{B'A'C'}$ *que tienen sus lados paralelos y en el mismo sentido, son iguales.*

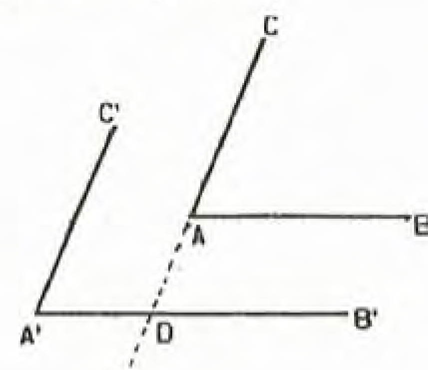


Fig. 38

La recta AC que corta la recta AB en A (*fig.* 38) corta la paralela A′B′ en un punto D. Tendremos: $\widehat{CAB} = \widehat{CDB'}$ (ángulos correspondientes) y $\widehat{CDB'} = \widehat{C'A'B'}$ (ángulos correspondientes). Por consiguiente, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B}$.

COROLARIOS. 1° *Dos ángulos* $\widehat{BAC}$ *y* $\widehat{B'A'C'}$ *que tienen sus lados paralelos y en sentido contrario, son iguales.*

Sea A′D′ (*fig.* 39) la prolongación de la semirrecta A′B′ y A′E′ la de A′C′. Tendremos: $\widehat{CAB} = \widehat{E'A'D'}$ (ángulos que tienen los lados paralelos y en el mismo sentido) y $\widehat{E'A'D'} = \widehat{B'A'C'}$ (ángulos opuestos por el vértice). Por consiguiente, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.

2° *Dos ángulos* $\widehat{BAC}$ *y* $\widehat{B'A'C'}$ *que tienen sus lados paralelos son iguales o suplementarios.*

Si tienen los lados paralelos y en el mismo sentido o paralelos y en sentido contrario, los ángulos son iguales. En un caso distinto los ángulos tendrán dos lados AC y A′C′ en el mismo sentido y otros lados AB y A′B′ en sentido contrario (*fig.* 40). Sea A′D′ la prolongación de A′B′. Tendremos: $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'D'}$ (lados paralelos y en

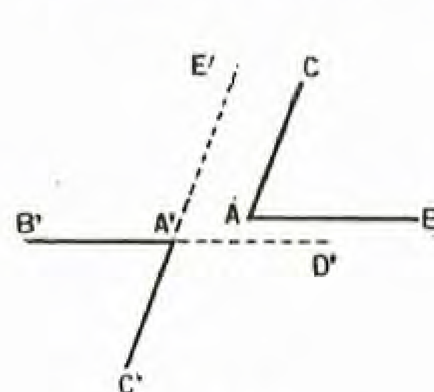


Fig. 39

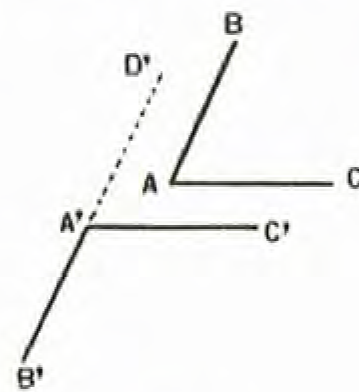


Fig. 40

el mismo sentido) y como $\widehat{C'A'D'}$ y $\widehat{C'A'B'}$ son suplementarios, también lo serán $\widehat{CAB}$ y $\widehat{C'A'B'}$.

TEOREMA. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales o suplementarios.*

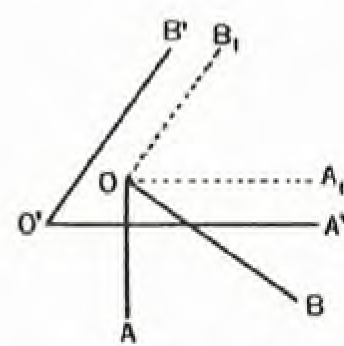


Fig. 41

Sean $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ los ángulos (*fig.* 41). Por hipótesis, la recta O′A′ es perpendicular a la recta OA, y la recta O′B′ a la OB. Sean las semirrectas OA_1 y O′A′ paralelas y del mismo sentido. Supondremos que B está situado en el ángulo $\widehat{AOA_1}$. Sea OB_1 la semirrecta que con OA_1 forma un ángulo igual al $\widehat{AOB}$ y que está situada, respecto a la recta OA_1, en región distinta que el punto B: sabemos (v. p. 78) que en ese caso hay una y sólo una. Puesto que según esta construcción, OA_1 está situado en el ángulo $\widehat{BOB_1}$, tendremos:

$$\widehat{BOB_1} = \widehat{BOA_1} + \widehat{A_1OB_1}.$$

Como por construcción $\widehat{A_1OB_1} = \widehat{AOB}$, de ambas igualdades se deduce

$$\widehat{BOB_1} = \widehat{BOA_1} + \widehat{AOB} = \widehat{AOA_1}.$$

Luego el ángulo $\widehat{BOB_1}$ es recto. De donde se deduce que OB_1, perpendicular a OB, es paralela a O′B′. Los dos ángulos $\widehat{A'O'B'}$ y $\widehat{A_1OB_1}$, que tienen sus lados paralelos, son iguales o suplementarios; luego el ángulo $\widehat{AOB}$, que es igual a $\widehat{A_1OB_1}$ por construcción, y el ángulo $\widehat{A'O'B'}$ son iguales o suplementarios.

Suma de los ángulos de un triángulo. — TEOREMA. *En un triángulo* ABC, *el ángulo* $\widehat{DAC}$ *exterior es igual a la suma de los ángulos interiores* $\widehat{B}$ *y* $\widehat{C}$ *no adyacentes.*

Tracemos por el punto A (*fig.* 42) una semirrecta AE paralela a BC y situada al mismo lado que BC respecto a la recta AB.

Tenemos que $\widehat{DAE} = \widehat{DBC}$ (ángulos que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido) y $\widehat{EAC} = \widehat{BCA}$ (ángulos alternos internos en la figura formada por las paralelas BC y AE cortadas por la secante AC). Por otra parte, el

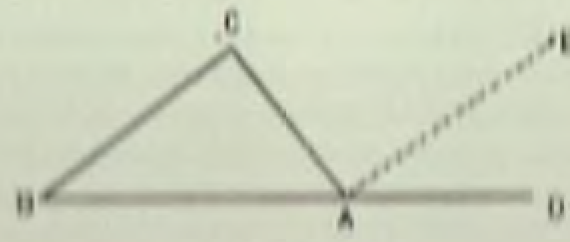


Fig. 42

ángulo exterior $\widehat{DAC}$ es mayor que el ángulo interior no adyacente $\widehat{B}$ y por consiguiente mayor que el ángulo $\widehat{DAE}$, pues $\widehat{DAE} = \widehat{B}$. Luego también se verificará:

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAE} + \widehat{EAC}.$$

Como $\widehat{DAE} = \widehat{B}$ y $\widehat{EAC} = \widehat{C}$, la primera igualdad se convierte en

$$\widehat{DAC} = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Corolario. *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

De las igualdades $\widehat{DAC} = \widehat{B} + \widehat{C}$ y $\widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \pi$ (ángulos adyacentes), se deduce que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Casos de igualdad de los triángulos rectángulos. — *Se dice que un triángulo* ABC *es* **rectángulo** *en* A *cuando el ángulo* $\widehat{A}$ *es recto. El lado* BC *opuesto al ángulo recto se llama* **hipotenusa.**

La igualdad $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$ unida a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ dan como resultado

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2}.$$

Luego los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son agudos y la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a un recto.

Sean ABC y A′B′C′ dos triángulos rectángulos en A′ y A respectivamente: $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ recto por hipótesis. Si se verifica que $\widehat{B} = \widehat{B'}$, de esta igualdad y de $\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{B'} + \widehat{C'} = 1$ recto, resulta que $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Teorema. *Dos triángulos* ABC *y* A′B′C′, *rectángulos en* A *y* A′ *respectivamente, son iguales en cualquiera de los tres casos siguientes:*

1º *hipotenusas iguales* BC = B′C′ *y un ángulo agudo igual;*

2º *hipotenusas iguales* BC = B′C′ *y uno de los otros lados igual* AC = A′C′;

3º *un lado igual* AC = A′C′ *y un ángulo agudo igual.*

1º Puesto que, por hipótesis, los dos triángulos tienen uno de los ángulos agudos iguales (*fig.* 43) tendrán también igual el otro ángulo agudo. Luego los dos triángulos son iguales puesto que tienen un lado igual BC = B′C′, y los dos ángulos contiguos iguales $\widehat{B} = \widehat{B'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (primer caso de igualdad de triángulos) (v. p. 79);

2º Llevemos, mediante un desplazamiento o un volvimiento, A′ sobre A (*fig.* 44), C′ sobre C y B′ sobre B₁, de modo que B y B₁ estén a distinto lado de AC. Los puntos B, A y B₁ están situados

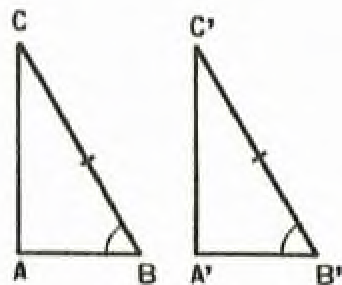


Fig. 43

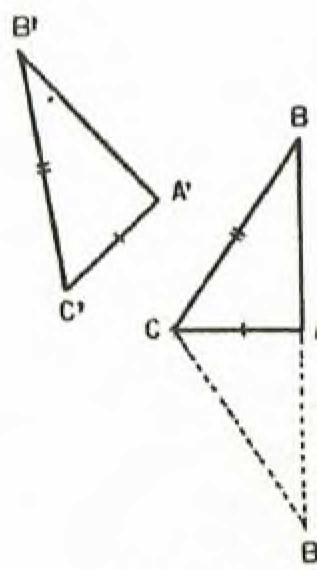


Fig. 44

en línea recta porque, por hipótesis, los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{B_1AC}$ son rectos; por consiguiente, A es el pie de la perpendicular trazada desde el punto C sobre BB_1, y por tanto CB y CB_1 son dos oblicuas iguales por hipótesis; de ahí que los pies B y B_1 de estas oblicuas estén separados igualmente del pie de la penpendicular A. Por consiguiente, $AB = AB_1$. Los dos triángulos ABC, AB_1C, y, en consecuencia, ABC y A′B′C′ son entonces iguales, puesto que tienen tres lados iguales;

3º Los dos triángulos tienen, como en el caso 1º, dos ángulos agudos iguales $\widehat{B} = \widehat{B'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (*fig.* 45). Por consiguiente, son iguales, puesto que tienen un lado común AC = A′C′ y los dos ángulos contiguos iguales $\widehat{A} = \widehat{A'} = 1$ recto y $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

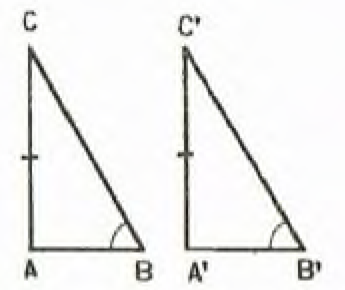


Fig. 45

Puntos que equidistan de dos rectas secantes. — Teorema.

El lugar geométrico de los puntos de un ángulo $\widehat{AOB}$ *que equidistan de sus lados* OA *y* OB *es la semibisectriz* OC *de este ángulo.*

Sea M un punto del plano (*fig.* 46) y los puntos H y K sus proyecciones ortogonales sobre OA y OB respectivamente.

1º Si M es un punto del lugar, se tiene, por hipótesis, MH = MK; luego los triángulos rectángulos OMH y OMK son iguales (hipotenusas iguales, OM común, y un lado igual MH = MK): por consiguiente, los ángulos $\widehat{MOH}$ y $\widehat{MOK}$, opuestos a lados iguales, son iguales. Como M es un punto del ángulo $\widehat{AOB}$, la semirrecta OM divide el ángulo $\widehat{AOB}$ en partes iguales y, por consiguiente, coincide con la semibisectriz OC. Por tanto, M está situado sobre OC;

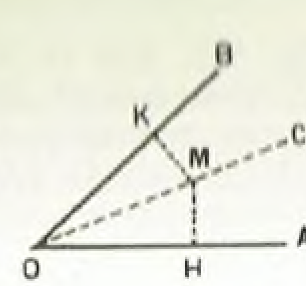


Fig. 46

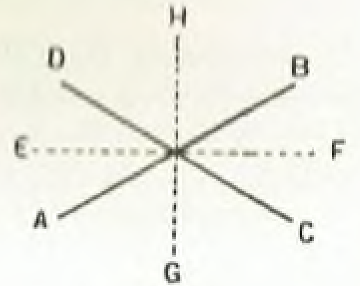


Fig. 47

2º Si M es un punto de OC, se tiene $\widehat{MOH} = \widehat{MOK}$ por hipótesis. Los triángulos MOH y MOK son por tanto iguales (hipotenusas iguales, OM común, un ángulo agudo igual). Los lados opuestos a los ángulos iguales son iguales: MH = MK. Luego M es un punto del lugar.

Por consiguiente, el lugar geométrico lo constituye la semirrecta OC.

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos* M *del plano equidistantes de dos rectas dadas* (AB) *y* (CD) *secantes se compone de las dos bisectrices de los ángulos formados por estas dos rectas* (fig. 47).

Hemos visto (pág. 79) que dos rectas secantes AB y CD forman cuatro ángulos; en cada uno de ellos el lugar buscado es una semibisectriz. Hemos visto también que las cuatro semibisectrices formaban dos rectas perpendiculares llamadas EF y GH, bisectrices de los ángulos que forman las rectas (AB) y (CD). Estas dos bisectrices son las que constituyen el lugar buscado. A diferencia de la vez anterior, hallamos un lugar geométrico constituido no por una recta solamente como en la página 79, sino por dos rectas. Para que M sea un punto del lugar, es preciso y suficiente (v. p. 79) que esté situado sobre una cualquiera de estas dos rectas.

Se demuestra que la semibisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$ pasa (*fig.* 46) por el punto medio de HK, lo que permite construir la recta OC con un compás.

Circunferencia

Interior y exterior de una circunferencia. Circunferencia que pasa por dos puntos. Circunferencia que pasa por tres puntos. Tangente a una circunferencia. Tangentes a un círculo paralelas a una dirección dada. Diámetro conjugado de una dirección en un círculo. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. Posiciones relativas de dos circunferencias

Definiciones. *Se llama* **circunferencia** *el lugar geométrico de los puntos* M *del plano que están a una distancia dada* R, *llamada* **radio**, *de un punto fijo* O, *llamado* **centro** *de la circunferencia* (fig. 48).

$$OM = R.$$

Con la palabra radio se designa tanto el segmento OM como su medida R.

Se denomina **círculo** la porción de plano limitada por la circunferencia y que contiene el centro O, aunque a veces se utiliza para mayor comodidad la palabra círculo en vez de circunferencia cuando la sustitución no se presta a una interpretación dudosa.

Se llama **diámetro** *toda recta que pasa por el centro* O *del círculo. Todo diámetro corta la circunferencia en dos puntos* A *y* B, *definidos por* OA = OB = R, *que se llaman* **extremos** *del diámetro. Se dice que dos puntos de una circunferencia son* **diametralmente opuestos** *cuando son los dos extremos de un mismo diámetro.*

Interior y exterior de una circunferencia. — Una circunferencia divide el plano en dos regiones: la que contiene el centro, que se llama interior, y la que no lo contiene, que se llama exterior.

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que un punto* P *sea interior a una circunferencia* (O), *de centro* O *y radio* R, *es que* OP < R.

La condición es necesaria (*fig.* 48). Si por hipótesis P es interior

a la circunferencia (O) estará situado en el punto O o entre los extremos A y B del diámetro OP; si está en O, la proposición es evidente; si no está en O, estará situado entre O y A, por ejemplo, y se tiene que OP < OA, es decir, OP < R.

La condición es suficiente. Si por hipótesis OP < R, el punto P está situado entre los extremos A y B del diámetro OP, y por tanto será interior a la circunferencia (O).

COROLARIO. *La condición necesaria y suficiente para que* P *sea exterior a la circunferencia* (O) *es que* OP > R.

Circunferencia que pasa por dos puntos. — *Se llama* **cuerda** CD *de un círculo el segmento que tiene sus extremos* C *y* D *en la circunferencia.*

TEOREMA. *La mediatriz de una cuerda* CD *es un diámetro.*

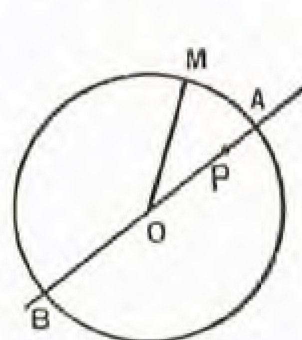


Fig. 48

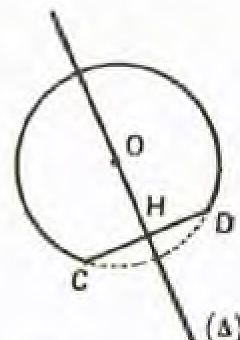


Fig. 49

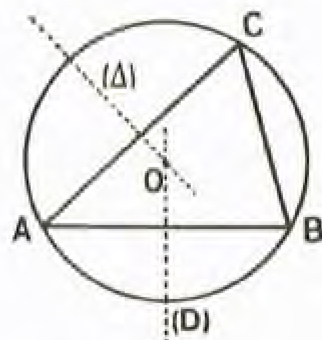


Fig. 50

La mediatriz de CD (*fig.* 49), que es una cuerda del círculo (O) [de centro O y radio R], pasa por el punto O, porque (v. p. 80) OC = OD = R. Luego esta mediatriz es un diámetro.

COROLARIO. *La perpendicular trazada por el centro* O *de un círculo a una cuerda* CD *del mismo pasa por el punto medio de dicha cuerda.*

En efecto, la mediatriz de la cuerda CD es OH, que es perpendicular a CD. Ahora bien, por el punto O se puede trazar una perpendicular sobre la recta CD y sólo una. Por consiguiente, esta perpendicular es OH.

APLICACIÓN. *El lugar de los centros* O *de las circunferencias que pasan por dos puntos dados* C *y* D *es la mediatriz* (△) *del segmento* CD (fig. 49).

Si el punto O es el centro de una circunferencia que pasa por C y D, el segmento CD es una cuerda de la misma y su mediatriz (△) pasa por el punto O. Por consiguiente, O es un punto de (△).

Si O es un punto de (△), mediatriz de CD, se tiene que OC = OD. La circunferencia de centro O que pasa por C también pasa por D. Luego el punto O es el centro de una circunferencia que pasa por C y D.

CONCLUSIÓN. El lugar geométrico de los centros O es la recta (△) en toda su extensión.

Circunferencia que pasa por tres puntos. — TEOREMA. *Por tres puntos* A, B *y* C, *no situados en línea recta, pasa una circunferencia y sólo una.*

Se trazan las rectas (D) y (△) mediatrices de AB y AC, respectivamente (*fig.* 50). Si (D) y (△) fuesen paralelas, la perpendicular AB a (D) sería también perpendicular a (△) y por tanto se confundiría con AC: luego los puntos A, B y C estarían alineados. Por consiguiente, las rectas (D) y (△) no son paralelas y se cortan en un punto O.

1º Por A, B y C pasa una circunferencia.

Perteneciendo el punto O a la recta (D) mediatriz de AB, resulta que OA = OB por definición, y al estar O en la recta (△) mediatriz de AC, se tiene que OA = OC. La circunferencia (O), de centro O y radio OA, pasa por B (ya que OA = OB) y por C (puesto que OA = OC). Luego pasa por A, B y C.

2º Por A, B, y C sólo pasa una circunferencia.

Si por los puntos A, B y C pasase una circunferencia distinta de la circunferencia (O), de centro O y radio OA, su centro O′ estaría situado en las mediatrices de AB y de AC, que son dos cuerdas de esta circunferencia; luego O′ se confundiría con O. Como la circunferencia que consideramos pasaría por A, tendría el mismo centro y radio que la circunferencia (O) y por tanto se confundiría con ella.

OBSERVACIÓN.—La mediatriz de BC, que también es una cuerda del círculo (O), pasa por el punto O. Por consiguiente, se puede decir que **las tres mediatrices de los lados de un triángulo ABC concurren en un punto.**

Tangente a una circunferencia. — *Se dice que un punto* M *variable tiende hacia un punto fijo* A *cuando la distancia de estos dos puntos tiende a cero.*

TEOREMA. *La recta* AM, *que une un punto fijo* A *de una circunferencia con un punto variable* M *de la misma, tiende hacia una posición límite cuando* M *tiende hacia* A. *Esta posición límite se llama* **tangente a la circunferencia en el punto A** (fig. 51) *y esta tangente es perpendicular al radio que termina en el punto* A.

Tracemos la mediatriz OH de la cuerda AM y la recta AT perpendicular en A al radio OA.

El punto H, centro del segmento AM, tiende hacia A cuando el punto M tienda también hacia A. La mediatriz OH de la cuerda AM pasa por O, punto fijo, y por H, punto variable que tiende hacia A; por consiguiente, OH tenderá hacia OA. La recta AM que pasa por el punto fijo A es perpendicular a OH que tiende hacia OA: esta recta AM tenderá por tanto hacia AT, recta que pasa por A y que es perpendicular a OA.

El teorema queda demostrado. Existe una posición límite que es AT. Esta recta AT es, por definición, la tangente en A a la circunferencia (O).

El punto A, que es el único punto común a la circunferencia (O) y la tangente, se llama *punto de contacto.* No se debe decir que hay tangencia en A o que A es un punto de tangencia, ya que constituye un barbarismo.

TEOREMA. *Existe una circunferencia* (O) *y sólo una que pase por dos puntos* A *y* B *y sea tangente en* A *a una recta* AT *que no pasa por* B (fig. 52).

Tracemos las rectas (D) mediatriz de la cuerda AB y (△) perpendicular en A a la recta AT. Si estas dos rectas (D) y (△) fuesen paralelas, AT, que es perpendicular a una de ellas, (△), sería también perpendicular a la otra (D), luego se confundiría con AB, lo que no es posible. Por consiguiente, (D) y (△) se cortan en un punto O.

La circunferencia de centro O y radio OA pasa por B (ya que OA = OB porque O está en la mediatriz de AB) y es tangente en A a la recta AT, perpendicular al radio OA en el punto A. Luego satisface las condiciones impuestas.

No existe otra circunferencia (O′) distinta de (O) que cumpla estas condiciones. En efecto, si existiese una, su centro O′ estaría en la recta (D) mediatriz de AB, puesto que pasa por A y B, y también estaría en la recta (△) perpendicular en A a la tangente AT. Por tanto, su centro sería O y su radio OA, lo que equivale a decir que dicha circunferencia sería precisamente la circunferencia (O).

El teorema queda, pues, demostrado.

Tangentes a un círculo paralelas a una dirección dada. —Vamos a demostrar que *a un círculo* (O) *siempre le podremos trazar dos tangentes paralelas a una dirección* (△) *dada* (fig. 53).

Tracemos desde O la perpendicular (D) a la recta (△). Esta perpendicular que pasa por O es un diámetro AB que corta la circunferencia en A y B. Sean AA′ y BB′ las tangentes en A y B a la circunferencia (O).

1º Existen dos tangentes al círculo (O) paralelas a (△) que son las rectas AA′ y BB′. En efecto, una de estas rectas, AA′ por ejemplo, es perpendicular en A al radio OA, es decir, a la recta (D). La recta (△) es, por construcción, perpendicular a la recta (D), luego AA′ es paralela a la recta (△).

2º No existe ninguna tangente distinta de AA′ y BB′ que sea paralela a (△). En efecto, si una tangente QP fuese paralela a (△), el radio OM perpendicular a la tangente QP sería también perpendicular a la recta paralela (△). Por consiguiente, M estaría en A o en B y la recta QP coincidiría con AA′ o con BB′.

Diámetro conjugado de una dirección en un círculo. — *Se llama* **diámetro conjugado** *de una dirección* (△) *en un círculo* (O), *el diámetro* (D) *perpendicular a* (△) [fig. 53].

El diámetro conjugado tiene las siguientes propiedades:

Toda cuerda PQ *del círculo, paralela a* (△), *está cortada por* (D) *en dos partes iguales:* PM = MQ.

El diámetro conjugado de una dirección (△) *corta a la circunferencia en los puntos de contacto de las tangentes a la misma paralelas a* (△).

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. — TEOREMA. *Sean una recta* (D) *y una circunferencia* (O) *de centro* O *y radio* R; *sea* H *el pie de la perpendicular trazada desde* O *a la recta* (D).

1º *Si* OH < R (fig. 54), *la recta* (D) *corta la circunferencia* (O) *en dos puntos* A *y* B. *Todo punto* P *del segmento* AB *es interior a la circunferencia, y todo punto* P′, *exterior al segmento* AB, *es exterior a la circunferencia* (O).

2º *Si* OH > R (fig. 55), *la recta* (D) *no corta la circunferencia* (O). *Todo punto* P′ *de esta recta es exterior a la circunferencia.*

3º *Si* OH = R (fig. 56), *la recta* (D) *es tangente en* H *a la circunferencia* (O). *Todo punto* P′ *de esta recta distinto de* H, *es exterior a la circunferencia.*

1º Puesto que por hipótesis OH < R, el punto H es interior a la circunferencia (O). Sea C uno de los dos puntos de la recta (D) definido por HC = R. Se puede considerar CO como una oblicua y CH como una perpendicular a la recta OH; la oblicua CO (v. p. 81) es

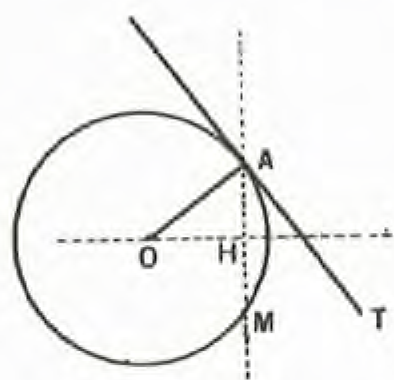


Fig. 51

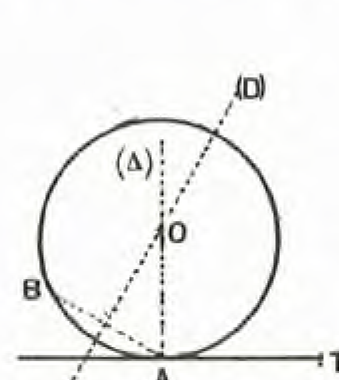


Fig. 52

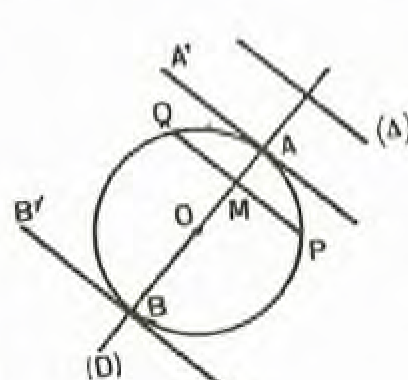


Fig. 53

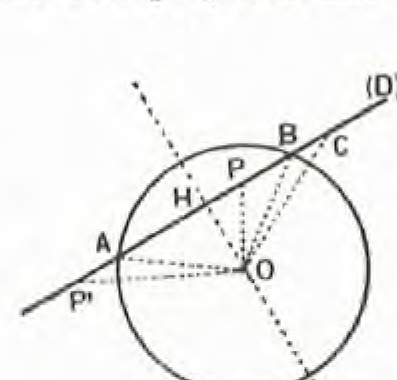


Fig. 54

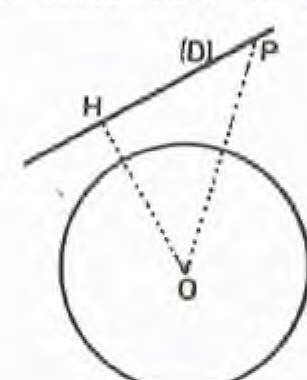


Fig. 55

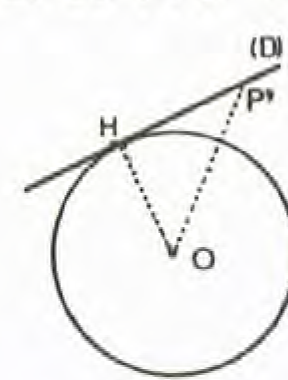


Fig. 56

mayor que CH, es decir, que R. La desigualdad $OC > R$ prueba que C es exterior a la circunferencia (O). Admitiremos que al segmento HC pertenece un punto B de esta circunferencia, puesto que sus extremos son H y C, respectivamente interior y exterior a la circunferencia (O).

Sea A el punto de la recta (D) definido por $HA = HB$. Las dos oblicuas OA, OB a la recta (D) son iguales, puesto que sus pies A y B equidistan de H, pie de la perpendicular; luego $OA = OB$ y por tanto $OA = R$. De donde A es también un punto de la circunferencia. La recta (D) corta la circunferencia en A y B.

Sea P un punto del segmento AB y P' un punto exterior: OP, OB y OP' serán oblicuas trazadas desde O a la recta (D), y de las desigualdades $HP < HB < HP'$ se deducirán (v. p. 81) $OP < OB < OP'$; por consiguiente, OP será menor que R y P será interior a la circunferencia (O); OP' será mayor que R, y P' será exterior a dicha circunferencia;

2º Por hipótesis (*fig.* 55), $OH > R$. La oblicua OP' a la recta (D) es mayor que la perpendicular OH, luego $OP' > R$ y por tanto P' será exterior a la circunferencia (O);

3º Por hipótesis (*fig.* 56), $OH = R$, luego H pertenece a la circunferencia (O). La recta (D), perpendicular al radio OH en el punto H, es por consiguiente la tangente en H a esta circunferencia. Como la oblicua OP' es mayor que la perpendicular OH, resulta que $OP' > R$. Todo punto P' distinto de H será exterior a la circunferencia (O).

CONSECUENCIAS. 1º *Una recta* (D) *y una circunferencia* (O) *tienen como máximo dos puntos comunes.* La condición necesaria y suficiente para que (D) corte (O) es $OH < R$ (*fig.* 54) y para que (D) sea tangente a (O) dicha condición es $OH = R$ (*fig.* 56);

2º *Dos circunferencias* (O) *y* (O') *distintas tienen como máximo dos puntos comunes*, pues si tuviesen tres, A, B, C, estos tres puntos no estarían alineados (*fig.* 57) y la recta AB, que corta la circunferencia (O) en A y B, no la cortaría en un tercer punto C; pero por tres puntos A, B, C, que no están en línea recta, pasa una circunferencia y solamente una. Por consiguiente, al ser distintas las circunferencias (O) y (O') no pueden tener tres puntos comunes.

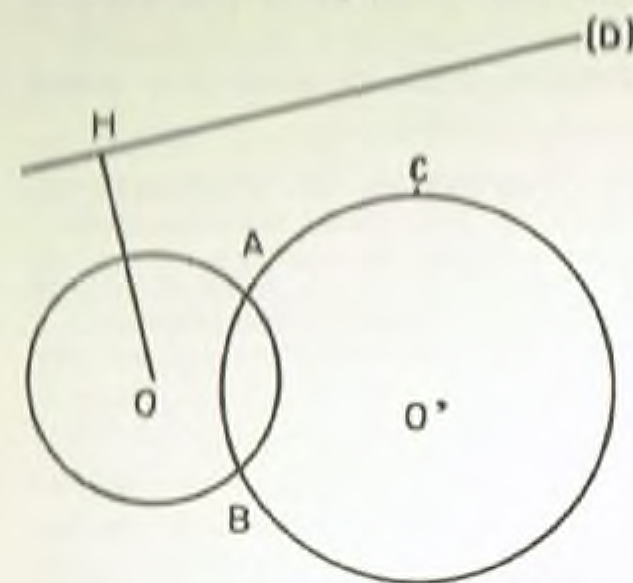


Fig. 57

Posiciones relativas de dos circunferencias. — *Se dice que dos circunferencias son* **concéntricas** *cuando tienen el mismo centro y radios diferentes* (fig. 58).

Se dice que dos circunferencias son **iguales** *cuando tienen radios iguales y centros diferentes.* En este caso se las puede superponer mediante un desplazamiento.

Sean dos circunferencias (O) y (O'), la primera de centro O y radio R, la segunda de centro O' y radio R'. Supondremos que $R \geq R'$ y examinaremos los cinco casos siguientes:

1º $OO' > R + R'$ (*fig.* 59). Sea P un punto interior a la circunferencia (O') o situado sobre ella, por lo que se verificará la desigualdad $O'P \leq R'$. El lado OP del triángulo POO' es mayor (v. p. 80) que la diferencia $OO' - O'P$ de los otros dos lados; hemos escrito $OO' - O'P$, pues como OO' es mayor que $R + R'$, por hipótesis, también será mayor que R' y que O'P, que es una cantidad menor. Por consiguiente, se tiene

$$OP > OO' - O'P,$$

y como, por hipótesis, $OO' > R + R'$, se tiene en definitiva

$$OP > R + R' - O'P.$$

Siendo el número $R' - O'P$ positivo o nulo, por hipótesis, de esta desigualdad se deducirá que

$$OP > R.$$

Luego el punto P es exterior a la circunferencia (O).

Resulta, en primer lugar, que las dos circunferencias no tienen ningún punto común, y además que un punto interior a una cualquiera de ellas es exterior a la otra. Se dice que son **exteriores entre sí** y ocupan la posición indicada en la figura 59.

2º $OO' = R + R'$ (*fig.* 60). El punto A del segmento OO', definido por $OA = R$ y $O'A = R'$, es un punto común a las dos circunferencias. La recta (D) perpendicular en A a la línea de los centros es a la vez tangente a las circunferencias (O) y (O'). Esto se expresa diciendo que las dos circunferencias son **tangentes en A.**

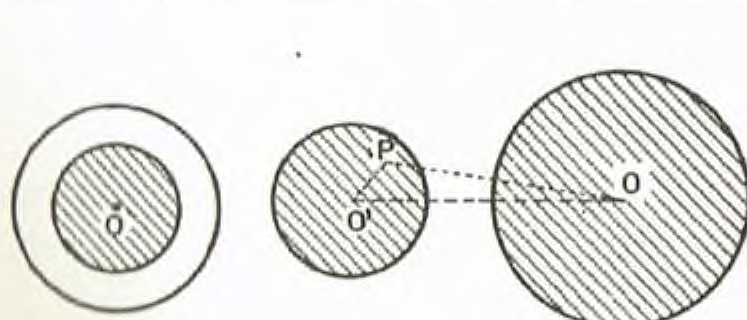


Fig. 58 *Fig.* 59

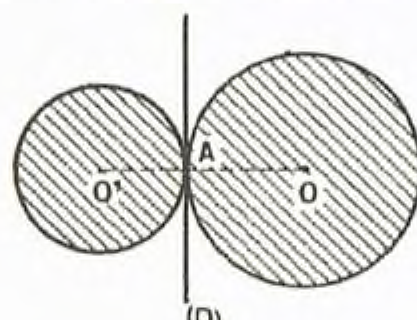
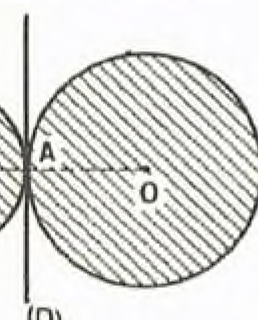



Fig. 60

Un punto P interior a una cualquiera de estas circunferencias (O') o situado sobre ella, pero diferente de A, es también exterior a la circunferencia (O). Se demuestra como en el caso 1º. Luego las dos circunferencias son también **exteriores** y se dice que son **tangentes exteriormente.**

3º $OO' < R - R'$ (*fig.* 61). Si las dos circunferencias son concéntricas (*fig.* 58), todo punto P interior a (O') o situado sobre ella, es decir, tal que $O'P \leq R'$, es también interior a la circunferencia (O), pues de esta desigualdad se deduce que $O'P < R$.

Si O y O' son distintos, el lado OP del triángulo OO'P es menor que la suma $OO' + O'P$ de los otros dos lados; por tanto, se tiene

$$OP < OO' + O'P,$$

y como OO' es menor que $R - R'$, de esta desigualdad se deduce que

$$OP < R - R' + O'P.$$

Luego si el punto P es interior a la circunferencia (O') de menor radio R', como el número $O'P - R'$ es negativo, de esta desigualdad se obtiene $OP < R$. Por consiguiente, el punto P es interior a la circunferencia (O).

Resulta, en primer lugar, que tanto en un caso (circunferencias concéntricas) como en el otro, las dos circunferencias no tienen ningún punto común, y además que todo punto P interior a la circunferencia (O') de menor radio es también interior a la circunferencia (O). Por consiguiente, ocupan la posición indicada en la figura 58 o en la figura 61, y se dice que una de ellas (O') es **interior** a la otra (O).

4º $OO' = R - R'$ (*fig.* 62). En la recta OO' existe un punto A exterior al segmento OO' para el que se verifica $OA = R$ y $O'A = R'$. Este punto es común a las dos circunferencias: la recta (D), perpendicular en A a la recta OA o O'A, es tangente a las dos circunferencias. Se dice que las circunferencias (O) y (O') son **tangentes en A.**

Un punto P interior a la circunferencia (O') o situado sobre ella, pero distinto de A, es interior a la circunferencia (O), según la demostración que se ha expuesto en el caso 3º. Se dice que (O) y (O') son **tangentes interiormente.**

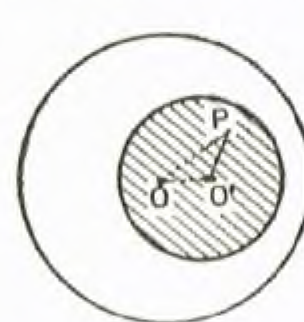


Fig. 61

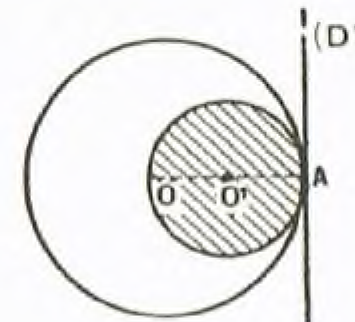


Fig. 62

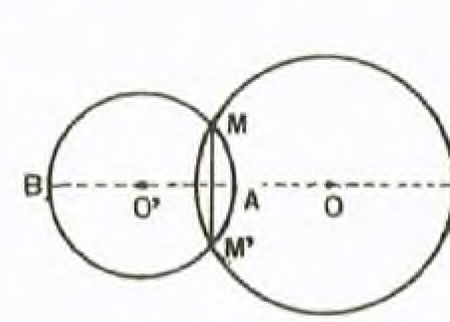


Fig. 63

5º $R - R' < OO' < R + R'$ (*fig.* 63). Puesto que OO' es mayor que $R - R'$, los centros O y O' son distintos. El diámetro OO' corta en A y B la circunferencia (O'). Tenemos que $OA = OO' - R'$ y de la desigualdad $OO' < R + R'$, que se verifica por hipótesis, se deduce que $OO' - R' < R$, es decir, que $OA < R$. Por tanto, el punto A es interior a la circunferencia (O). Por un razonamiento semejante tenemos que $OB = OO' + R'$; de la desigualdad $OO' > R - R'$ se obtiene $OO' + R' > R$ y por consiguiente $OB > R$. El punto B es exterior a la circunferencia (O). La circunferencia (O'), que pasa por A, punto interior a la circunferencia (O), y por B, punto exterior a la misma corta (O) por lo menos en un punto M, que no pertenece a OO'. Un semigiro alrededor de OO' lleva M sobre M' diferente de M, y se tiene que $OM' = OM$ y $O'M' = O'M$; si M es un punto común a las circunferencias (O) y (O'), el punto M' es otro punto común.

Por consiguiente, las circunferencias (O) y (O') tienen dos puntos comunes, M y M', simétricos con relación a la línea de los centros OO'. No tienen ningún otro, pues dos circunferencias (O) y (O') distintas no pueden tener más de dos puntos comunes.

Las dos circunferencias ocupan la posición indicada en la figura 63: en este caso se dice que son **secantes.** La cuerda MM' se llama **cuerda común** de las dos circunferencias.

La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias de centros O *y* O' *y de radios* R *y* R' *se corten en dos puntos distintos es que se verifique la doble desigualdad:*

$$| R - R' | < OO' < R + R'.$$

La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias sean tangentes es que se verifique una de las dos igualdades siguientes:

$$OO' = | R - R' |$$

o

$$OO' = R + R'.$$

Arcos y ángulos inscritos

Arco de circunferencia. Propiedad fundamental del ángulo inscrito. Lugar de los puntos desde los que se ve un segmento rectilíneo bajo un ángulo recto. Lugar de los puntos desde los que se ve un segmento rectilíneo AB bajo un ángulo dado. Propiedades de las tangentes a un círculo (O) trazadas por un punto A. Medida de los arcos

Arco de circunferencia. — *Dos puntos* A *y* B *distintos, tomados sobre una circunferencia, la dividen en dos porciones llamadas* **arcos** *de esta circunferencia, cuyos* **extremos** *son, por definición,* A *y* B. *Uno de estos arcos es* AMB, *el otro es* APB (fig. 64).

Se llama **ángulo central** *correspondiente al arco AMB* (fig. 65), *o bien que intercepta en la circunferencia el arco* AMB, *el ángulo* $\widehat{AOB}$ *que teniendo por vértice el centro* O *del círculo y por lados* OA *y* OB, *contiene todos los puntos del arco* AB.

Se llama **sector** *la porción de plano comprendida entre los lados de un ángulo central* $\widehat{AOB}$ *y el arco correspondiente* AMB (fig. 65).

Se llama **segmento** *la porción de plano limitada por un arco de circunferencia* AMB *y una cuerda* AB (fig. 66).

Se llama **ángulo inscrito** *en un segmento* AMB, *un ángulo que tiene por vértice un punto del arco que limita el segmento, por lados* MA *y* MB, *y que no contiene ningún punto del arco* AMB (fig. 67). Este ángulo intercepta el arco APB de extremos A y B, en el que no está el punto M.

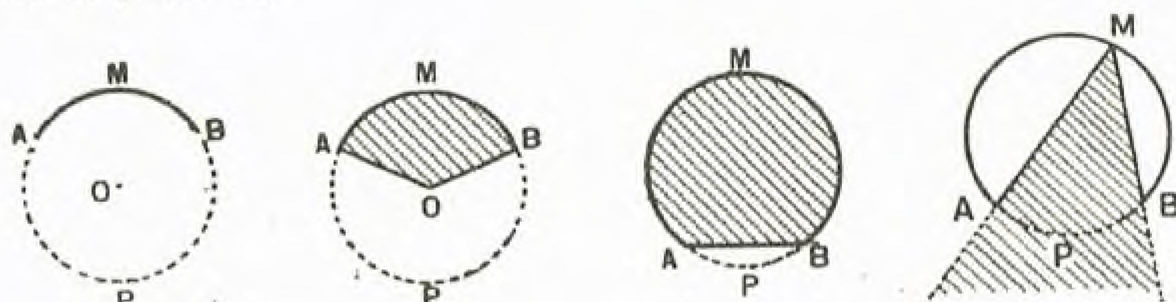


Fig. 64

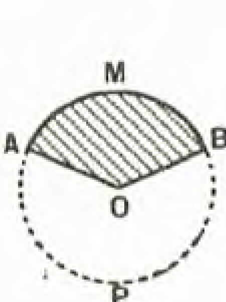


Fig. 65

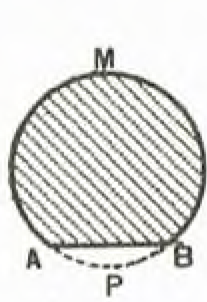


Fig. 66

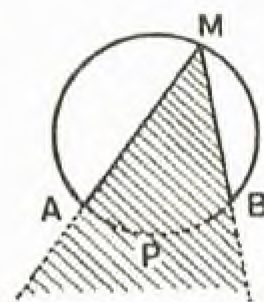


Fig. 67

Propiedad fundamental del ángulo inscrito. — Teorema. *El ángulo inscrito* $\widehat{AMB}$ *es igual a la mitad del ángulo central* $\widehat{AOB}$ *que comprende entre sus lados el mismo arco que él.*

Distinguiremos tres casos según que el diámetro MO del círculo (O) [el ángulo $\widehat{AMB}$ está inscrito en un segmento de este círculo] sea uno de los dos lados del ángulo inscrito (*fig.* 68), una recta de este ángulo (*fig.* 69) o una recta exterior al mismo (*fig.* 70).

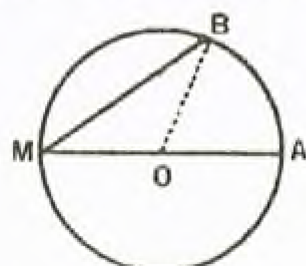


Fig. 68

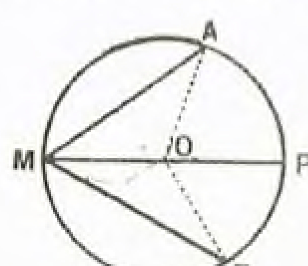


Fig. 69

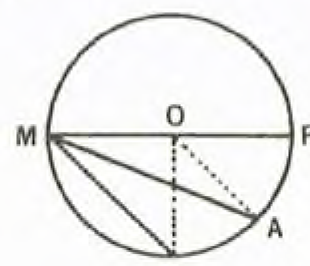


Fig. 70

1^er^ caso. Supongamos que MA es un diámetro del círculo (O) [*figura* 68]. El ángulo central $\widehat{AOB}$ es un ángulo exterior del triángulo MOB, luego es igual (v. p. 82) a la suma de los ángulos interiores que no le son adyacentes:

$$\widehat{AOB} = \widehat{OMB} + \widehat{MBO}.$$

Pero el triángulo MOB es isósceles, puesto que OM = OB, por tanto los ángulos opuestos a estos lados son iguales:

$$\widehat{OMB} = \widehat{MBO}.$$

De estas dos igualdades se deduce que

$$\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}.$$

El ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es, por consiguiente, igual a la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$.

2° caso. Supongamos que el diámetro MO es una recta del ángulo $\widehat{AMB}$ (*fig.* 69) y que corta en P el arco AB comprendido entre los lados de este ángulo. Por consiguiente, se tiene:

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMP} + \widehat{BMP}.$$

El ángulo inscrito $\widehat{AMP}$, uno de cuyos lados MP es un diámetro del círculo (O), es igual (1^er^ caso) a la mitad del ángulo central $\widehat{AOP}$; por idéntica razón, el ángulo inscrito $\widehat{BMP}$, uno de cuyos lados MP es un diámetro del círculo (O), es igual a la mitad del ángulo central $\widehat{BOP}$. Por consiguiente, tendremos

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOP} + \frac{1}{2}\,\widehat{BOP}.$$

Pero la recta OP, que une el centro O con un punto P del arco AB interceptado en la circunferencia por el ángulo $\widehat{AOB}$, es una recta de este ángulo, y por consiguiente

$$\widehat{AOP} + \widehat{BOP} = \widehat{AOB}.$$

De todo ello resulta que

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}.$$

El ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es también en este caso igual a la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$.

3^er^ caso. Supongamos que el diámetro MO es una recta exterior al ángulo $\widehat{AMB}$. El punto P, en que este diámetro corta la circunferencia (O), no pertenece al arco AB; la figura 70 está hecha suponiendo que MA está situada en el ángulo inscrito $\widehat{BMP}$.

Como en el 2° caso, tenemos que $\widehat{AMP} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOP}$ y $\widehat{BMP} = \frac{1}{2}\,\widehat{BOP}$, pero ahora, estando MA en el ángulo inscrito $\widehat{BMP}$, tendremos

$$\widehat{AMB} = \widehat{BMP} - \widehat{AMP},$$

de donde se deduce que

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,(\widehat{BOP} - \widehat{AOP}).$$

Como el punto A es un punto del arco comprendido entre los lados del ángulo $\widehat{BMP}$, la recta OA será una recta del ángulo $\widehat{BOP}$, y, en consecuencia,

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOP} - \widehat{AOP}$$

y finalmente

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}.$$

También en este caso el ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es igual a la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$.

Consecuencia. **Todos los ángulos inscritos en un segmento de círculo son iguales.**

En efecto, sea AMB un segmento de un círculo (O) y $\widehat{AOB}$ el ángulo central correspondiente. Según el teorema precedente tendremos:

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}.$$

El ángulo inscrito $\widehat{AMB}$, cuyo vértice M ha sido elegido arbitrariamente sobre el arco AB que limita el segmento, tiene siempre un valor igual a $\frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$, cualquiera que sea el punto M. Por tanto, todos los ángulos inscritos son iguales.

En el caso particular (*fig.* 72) de que el punto M tienda hacia A, la recta MA tenderá hacia la tangente AT, y el ángulo $\widehat{AMB}$ se convertirá en el ángulo $\widehat{TAB}$. Demostremos que también el ángulo $\widehat{TAB}$ es igual a $\frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$. Siendo TA perpendicular a OA, el ángulo $\widehat{TAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$ ($\widehat{A}$ es uno de los ángulos del triángulo OAB). Puesto que OAB es isósceles: $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Por otra parte, en el triángulo OAB tenemos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{O} = \pi.$$

Por consiguiente,

$$\widehat{O} = \pi - 2\widehat{A},$$

que es el doble del ángulo $\widehat{TAB}$. Luego el ángulo $\widehat{TAB}$ es equivalente a la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$, como todos los demás ángulos inscritos $\widehat{AMB}$.

Lugar de los puntos desde los que se ve un segmento rectilíneo bajo un ángulo recto. — *Se llama* **ángulo bajo el cual se ve desde un punto M un segmento rectilíneo AB dado,** *aquel de los dos ángulos* $\widehat{AMB}$ *que contiene el segmento rectilíneo* AB.

Teorema. *El lugar de los puntos desde los que se ve un segmento rectilíneo* AB *bajo un ángulo recto es la circunferencia de diámetro* AB (fig. 71).

Todo punto M del lugar, es decir, tal que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, pertenece a una circunferencia (O) de diámetro AB. En efecto, sea (O) la circunferencia circunscrita al triángulo AMB: el ángulo central $\widehat{AOB}$ es igual al doble del ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ y por tanto igual a π, es decir, a un ángulo llano, y AB será un diámetro de la circunferencia (O).

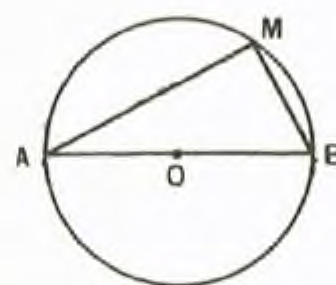


Fig. 71

Todo punto de la circunferencia (O) de diámetro AB es un punto del lugar. En efecto, el ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es igual a la mitad del ángulo central $\widehat{AOB}$ que es llano; por consiguiente, $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$.

Luego el lugar de los puntos M es la circunferencia de diámetro AB.

Lugar de los puntos desde los que se ve un segmento rectilíneo AB bajo un ángulo dado. — Teorema. *El lugar de los puntos* M *desde los que se ve un segmento rectilíneo* AB *bajo un ángulo dado se compone de dos arcos de círculo simétricos con relación a la recta* AB (fig. 73).

La recta AB divide el plano en dos regiones (I) y (II) [*fig.* 72]. Supondremos que el punto M está en la región (I). Hemos visto (véase página 78) que hay dos semirrectas AT y AT' que forman con la semirrecta AB el ángulo dado α; designaremos por AT la semirrecta que está en la región (II).

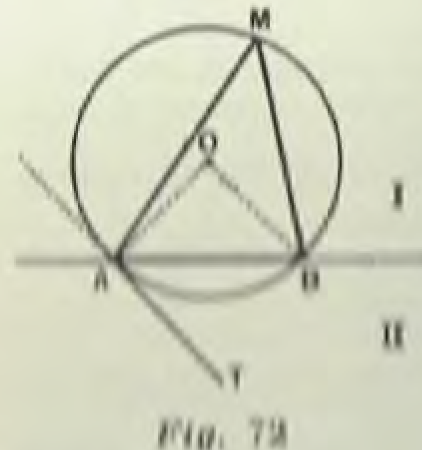


Fig. 72

Hemos visto igualmente (v. p. 84) que existe una circunferencia (O), y sólo una, que pase por B y sea tangente a la recta AT en el punto A. Vamos a demostrar que la parte de lugar geométrico de los puntos M que está situada en la región (I) se compone del arco AB del círculo (O) situado en esta región.

En primer lugar demostremos que todo punto M del lugar está situado sobre el arco AB. En efecto, puesto que el punto M es por hipótesis un punto del lugar, se verifica que $\widehat{AMB} = \widehat{TAB}$. Sea (O') la circunferencia circunscrita al triángulo AMB; la semitangente AT_1 a esta circunferencia en el punto A, situada en la región (II), será tal que tendremos (v. p. 86) $\widehat{AMB} = \widehat{T_1AB}$ y, por consiguiente, $\widehat{TAB} = \widehat{T_1AB}$. Por tanto, las semirrectas AT_1 y AT, situadas a un mismo lado de AB y que forman con AB el mismo ángulo, coincidirán. La circunferencia (O') que es tangente a T_1A, es decir, a TA, y que pasa por B, se confunde con la circunferencia (O) que es la única (v. p. 84) que cumple estas condiciones. Por consiguiente, el punto M del lugar está sobre la circunferencia (O) y como está en la región (I), será un punto del arco AB.

Demostremos a continuación que si M es un punto del arco AB, este punto pertenece al lugar. En efecto, siendo M un punto del arco AB, el ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es igual a $\widehat{TAB}$, es decir, a α, y el punto M será un punto del lugar.

Supongamos ahora que M está en la región (II): un semigiro alrededor de AB llevará M al punto simétrico M'. La condición necesaria y suficiente para que $\widehat{AMB} = \alpha$ será que $\widehat{AM'B} = \alpha$, es decir, que M' sea un punto del arco AB que constituye el lugar geométrico en la región (I). De lo que resulta que en la región (II) el lugar se compone de un arco de círculo que se obtiene del primero por una simetría con relación a AB.

Luego el lugar se compone, en total, de dos arcos de círculo simétricos, que se llaman **arcos capaces del ángulo** α. Estos dos arcos (*fig.* 73) pertenecen a dos círculos (O) y O' distintos, excepto si $\alpha = \frac{\pi}{2}$; este caso ha sido estudiado anteriormente.

Aplicación. *Trazar por un punto dado* A *tangentes a un círculo* (O) *de centro* O.

Si A es interior al círculo, por el punto A no pasa ninguna tangente. En efecto, se ha demostrado que, con excepción del punto de contacto, los puntos de una tangente eran todos exteriores al círculo.

Si A es un punto de la circunferencia, por la razón expuesta antes, por él pasa sólo una tangente, aquella que tiene A como punto de contacto. Es la perpendicular a OA en el punto A.

Teorema. *Por un punto* A *exterior a un círculo, se le pueden trazar dos tangentes.*

Supongamos que A es exterior al círculo (*fig.* 74). Tracemos la circunferencia de diámetro OA que cortará la circunferencia (O) en dos puntos M y M', puesto que A es exterior y O interior al círculo (O).

Las rectas AM y AM' son dos tangentes al círculo (O) en M y M'. En efecto, los ángulos $\widehat{AMO}$ y $\widehat{AM'O}$ son, por construcción, ángulos inscritos en la semicircunferencia de diámetro AO, luego son rectos. La recta MA es perpendicular en M al radio MO; por consiguiente es tangente en M al círculo (O). Por una razón semejante AM' es tangente en M' a este círculo.

Ninguna otra recta que una el punto A con un punto P de la circunferencia (O) será tangente a este círculo. Pues si fuese así, el ángulo $\widehat{OPA}$ sería recto, y el punto P coincidiría con M o con M'.

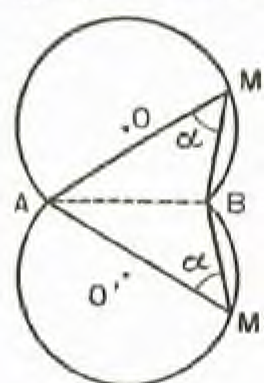


Fig. 73

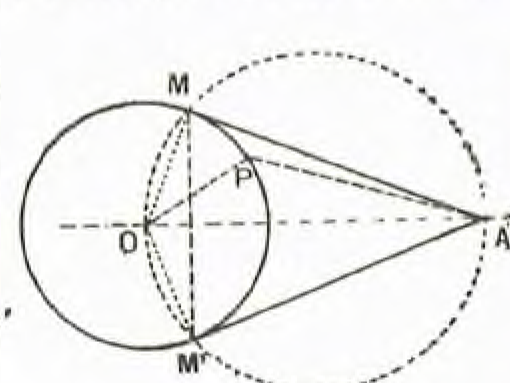


Fig. 74

Propiedades de las tangentes a un círculo (O) trazadas por un punto A. — 1° *Las porciones de tangentes comprendidas entre el punto* A *y los puntos de contacto* M *y* M' *son iguales* (figura 74).

En efecto, los triángulos AOM y AM'O rectángulos en M y M', por hipótesis, son iguales (hipotenusa OA común, un lado igual OM = OM'). Luego AM = AM'.

2° *La recta que une el punto* A *con el centro* O *del círculo* (O) *es a la vez bisectriz del ángulo formado por las tangentes y mediatriz del segmento* MM' *que une los puntos de contacto.*

Es bisectriz del ángulo formado por las tangentes, como consecuencia de la igualdad de los triángulos OMA y OM'A, de la que se deduce: $\widehat{MAO} = \widehat{M'AO}$.

Es mediatriz de MM' porque es bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ del triángulo AMM', isósceles según hemos visto en el caso 1°.

Medida de los arcos. — Dos arcos tomados sobre dos circunferencias (O) y (O') de radios diferentes tienen como máximo dos puntos comunes, puesto que dos circunferencias de radios diferentes tienen también como máximo dos puntos comunes. Estos arcos no pueden superponerse por ningún desplazamiento ni volvimiento: para nosotros constituyen magnitudes de especies diferentes.

Por el contrario, dos arcos AB y A'B' de una misma circunferencia (O) o de dos circunferencias de igual radio, (O) y (O'), son magnitudes de la misma especie que vamos a estudiar (*fig.* 75). Existe un desplazamiento o un volvimiento que lleva el radio O'A' del círculo (O') a coincidir con OA (*fig.* 75), O' con O, A' con A, y que, además, lleva el punto B' sobre B_1, de modo que los ángulos centrales $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AOB_1}$ no sean adyacentes.

Se dice que los arcos AB y A'B' son iguales cuando B_1 coincide con B; se dice que el arco A'B' es menor que el arco AB, si B_1 es un punto del arco AB.

Recordemos que si el arco A'B' es igual que el arco AB, también el ángulo central $\widehat{A'O'B'}$ será igual que el ángulo central $\widehat{AOB}$, por definición.

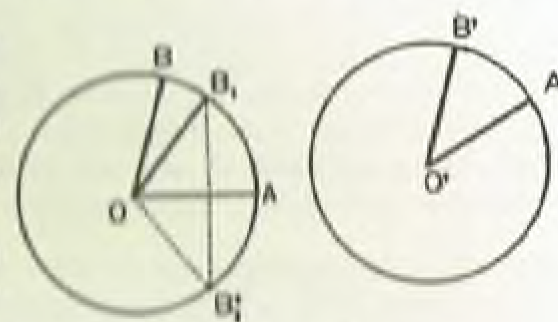


Fig. 75

Recordemos también que si el arco A'B' es menor que el arco AB, el ángulo central $\widehat{A'O'B'}$ será menor que el ángulo central $\widehat{AOB}$.

Hagamos ahora un volvimiento alrededor de OA, con lo que el punto B_1 coincidira con B'_1. Si B'_1 no es un punto del arco AB, se llama suma de los arcos AB y A'B' el arco BB'_1; si B'_1 es un punto del arco AB, se llama suma el arco BB'_1 aumentado en una circunferencia.

Observemos en fin que el ángulo central $\widehat{BOB'_1}$ es, tanto en un caso como en otro, igual a la suma de los ángulos centrales $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$, con la condición de admitir que si se añade a los arcos una circunferencia, añadimos a los ángulos dos ángulos llanos.

Por consiguiente, hemos establecido que los arcos de dos circunferencias iguales eran magnitudes de igual especie; luego resulta que se les puede medir eligiendo como unidad de arco un arco $\alpha\beta$ de una de las dos circunferencias, la (O) por ejemplo. Al mismo tiempo hemos comprobado que los ángulos centrales eran magnitudes homólogas a los arcos correspondientes, con la única reserva expuesta en la comparación de las sumas: por consiguiente, si se toma como unidad de ángulos el ángulo central $\widehat{\alpha O \beta}$ correspondiente a la unidad de arcos, esta reserva queda satisfecha, puesto que a la medida de una circunferencia completa corresponderá el número 2π y, por consiguiente, la medida del arco se expresará por el mismo número que expresa la medida del ángulo central.

Conclusión. *Se conviene en elegir como unidad de arco sobre una circunferencia* (O), *el arco comprendido por los lados de un ángulo central que tiene por medida la unidad de ángulo.*

En estas condiciones:

La medida de un arco AB *del círculo* (O), *o de un círculo igual, es igual a la medida del ángulo central.*

La medida del ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida del arco comprendido en este círculo por los lados del ángulo considerado.

Aplicaciones. 1° *Se llama* **cuerda** *de un arco, o cuerda que subtiende un arco de una circunferencia* (O), *el segmento rectilíneo cuyos extremos son los del arco.*

En dos círculos iguales, a dos arcos iguales corresponden dos cuerdas iguales.

Esta propiedad es evidente: dos arcos iguales AMB y A'M'B' pueden hacerse coincidir mediante un desplazamiento o un volvimiento; este mismo desplazamiento o volvimiento haría coincidir las cuerdas AB y A'B'. Luego éstas son iguales.

Si dos arcos son desiguales, al mayor corresponde la cuerda mayor. Esta propiedad es evidente.

2° *Los extremos* A *y* B *de dos cuerdas* MA *y* MB *rectangulares son diametralmente opuestos.*

El ángulo central $\widehat{AOB}$ correspondiente al ángulo inscrito $\widehat{AMB}$ es el doble de éste, luego es un ángulo llano, y AB pasa por O, centro del círculo: por consiguiente, A y B son diametralmente opuestos.

3° *Las bisectrices de un ángulo inscrito* $\widehat{AMB}$ *en un círculo* (O) *pasan por los puntos medios* E *y* E' *de los arcos cuyos extremos son* A *y* B.

Una de las bisectrices del ángulo $\widehat{AMB}$ (*fig.* 76) corta en E la circunferencia (O). De la igualdad de los ángulos $\widehat{AME}$ y $\widehat{BME}$, inscritos, se deduce la igualdad de los ángulos centrales $\widehat{AOE}$ y $\widehat{EOB}$ de valor doble; de la igualdad de los ángulos centrales se deduce la igualdad de los arcos AE y EB; por consiguiente, E es el punto medio de uno de los arcos cuyos extremos son A y B.

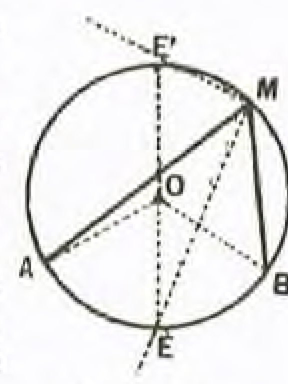


Fig. 76

Si una de las bisectrices pasa por E, la otra pasará por el punto E' diametralmente opuesto al punto E. Luego la recta EE' que une los puntos medios de los dos arcos AB es un diámetro del círculo (O). Un semigiro alrededor de EE' haría coincidir A con B; por consiguiente, este diámetro EE' es perpendicular a la recta AB en su punto medio.

Polígonos convexos

Polígonos convexos. Paralelogramo. Rectángulo. Propiedades del rectángulo. Rombo. Propiedades del rombo. Cuadrado. Distancia entre dos rectas paralelas. Trapecio. Polígono inscriptible

Polígonos convexos. — *Se llama* **polígono** *la figura formada por segmentos AB, BC, CD, ... KA, que se llaman* **lados** *del polígono. Los puntos A, B, C, ... K son los* **vértices** *del polígono. Se dice que dos vértices son* **consecutivos** *cuando son los extremos de un lado, y se dice que dos lados son consecutivos cuando tienen un extremo común. Se llaman* **diagonales** *de un polígono los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.*

Se dice que un polígono es **convexo** *cuando todos los puntos de este polígono están situados a un mismo lado de la recta que una dos vértices consecutivos cualesquiera.* El polígono ABCDE de la figura 77 es convexo; el polígono de la figura 78 no es convexo porque la recta CD deja a un lado los puntos A y B y a otro lado el punto E. Se dice que este polígono es **cóncavo.**

Se llama **ángulo A** *de un polígono convexo el ángulo saliente formado por dos lados consecutivos de vértice* A. En el caso de la figura 77 es el ángulo $\widehat{BAE}$.

Un polígono que tiene tres lados es un **triángulo;** *el que tiene cuatro, un* **cuadrilátero;** *el que tiene cinco, un* **pentágono;** *el de seis, un* **exágono;** *el de ocho, un* **octógono;** *el de diez, un* **decágono;** *el de doce, un* **dodecágono.** Limitaremos nuestro estudio al cuadrilátero convexo y a algunos polígonos igualmente convexos.

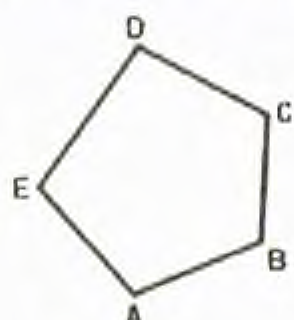


Fig. 77

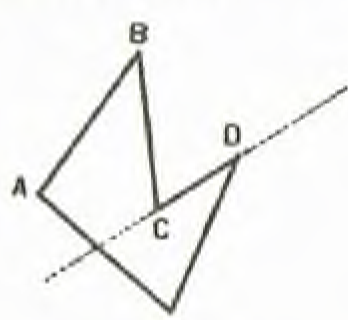


Fig. 78

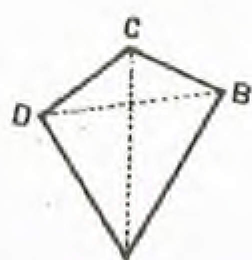


Fig. 79

Un cuadrilátero convexo está formado por cuatro segmentos AB, BC, CD, DA (*fig.* 79). Tiene dos diagonales AC y BD. A los vértices A y C, B y D, no consecutivos, se les llama opuestos; los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ también se llaman opuestos. Admitiremos que los vértices opuestos A y C de un cuadrilátero convexo están situados a uno y otro lado de la diagonal BD.

Una diagonal AC forma con el cuadrilátero convexo ABCD una figura compuesta de dos triángulos: la suma de los ángulos de estos dos triángulos es igual a la suma $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}$ de los ángulos del cuadrilátero. Por consiguiente, ésta es igual a 4 rectos.

La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es igual a cuatro rectos.

Paralelogramo. — *Se llama* **paralelogramo** *todo cuadrilátero convexo cuyos lados opuestos son paralelos* (fig. 80).

Teorema. *En un paralelogramo* ABCD:

1° *Los ángulos opuestos son iguales;*

2° *Los lados opuestos son iguales;*

3° *El punto de intersección* I *de las diagonales es el punto medio de cada una de ellas.*

La hipótesis es que las rectas AB y AD son respectivamente paralelas a las rectas CD y BC.

D D' C I A B E

Fig. 80

1° Los ángulos opuestos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ son iguales. En efecto, los lados de estos ángulos AB y CD por una parte, AD y BC por otra, son paralelos y de sentido contrario. De donde se deduce que estos ángulos son iguales (véase página 82). Por consiguiente, se tiene $\widehat{A} = \widehat{C}$. De un modo semejante se demuestra que $\widehat{B} = \widehat{D}$.

2° Los lados opuestos AB y CD son iguales. En efecto, la recta AC forma con las paralelas AB y CD ángulos alternos internos iguales, $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$, y con las rectas paralelas BC y AD forma también ángulos alternos internos iguales, $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$. De ahí que los triángulos ABC y CDA son iguales (primer caso de igualdad: AC común, $\widehat{CAB} = \widehat{ACD}$, $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$) y que, en consecuencia, los lados AB y CD son iguales. Por un procedimiento análogo se demuestra que AD = BC.

3° El punto I es el punto medio de AC y de BD. En efecto, los triángulos IAB, ICD son iguales (AB = CD según hemos visto en el caso anterior, $\widehat{IAB} = \widehat{ICD}$ y $\widehat{IBA} = \widehat{IDC}$, por ser ángulos alternos internos). Por consiguiente, se tiene IA = IC, IB = ID.

Recíproco. *Un cuadrilátero* ABCD *convexo es un paralelogramo en uno de los cuatro casos siguientes:*

1° *Si los ángulos opuestos son iguales dos a dos;*

2° *Si los lados opuestos son iguales dos a dos;*

3° *Si dos lados son iguales y paralelos;*

4° *Si las diagonales se cortan en su punto medio.*

1° Por hipótesis, los ángulos opuestos son iguales dos a dos. Por tanto, se tiene $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$, y como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$ (v. Polígonos convexos, primer apartado de este capítulo) se obtiene que $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$. Sea BE la prolongación del lado AB (*fig.* 80); el ángulo $\widehat{CBE}$, suplementario del ángulo $\widehat{B}$, tiene por medida π — B, luego es igual al ángulo $\widehat{A}$. De lo que se deduce que las rectas AD y BC son paralelas (v. p. 82) porque forman con la recta AB ángulos correspondientes $\widehat{DAE}$ y $\widehat{CBE}$ iguales.

De las igualdades $\widehat{B} = \widehat{D}$ y $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$ se obtiene $\widehat{A} + \widehat{D} = \pi$. Un razonamiento semejante al precedente demuestra que esta hipótesis nos lleva a la conclusión de que AB y DC son paralelas. Por consiguiente, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

2° Por hipótesis, los lados opuestos son iguales dos a dos. Por tanto, se tiene AB = DC y BC = AD. Construyamos un paralelogramo ABCD' (*fig.* 80) en el que dos de sus lados son AB y BC: siendo convexos los dos cuadriláteros ABCD y ABCD', el primero por hipótesis y el segundo por definición, D y D' estarán situados a un mismo lado de la recta AC. Por otra parte, siendo un paralelogramo la figura ABCD', tendremos D'C = AB, AD' = BC, y puesto que, por hipótesis, AB = BC y BC = AD, se verificará que D'C = DC y AD' = AD. Los dos triángulos ACD y ACD' son iguales, ya que tienen sus tres lados iguales; por consiguiente D y D', situados a un mismo lado de AC, coincidirán. El cuadrilátero ABCD, que coincide con el paralelogramo ABCD', será, por consiguiente, un paralelogramo.

3° Dos lados AB y CD son iguales y paralelos. Demostremos que las rectas AD y BC son paralelas. Tracemos AC. Los triángulos ADC y ABC son iguales, pues AC es común, $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$, DC y AB son iguales y paralelos por hipótesis. Luego $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$, y las rectas BC y AD son paralelas y el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

4° Por hipótesis, las diagonales AC y BD se cortan en I de modo que IA = IC, IB = ID. Por tanto, los triángulos ICD, IAB son iguales, pues $\widehat{DIC} = \widehat{BIA}$ (ángulos opuestos por el vértice), IC = IA, ID = IB: luego AB = CD. Igualmente se demuestra que los triángulos IDA, IBC son iguales y que, en consecuencia, AD = BC. El cuadrilátero convexo ABCD tiene sus lados opuestos iguales dos a dos: por consiguiente, es un paralelogramo.

Rectángulo. — *Se llama* **rectángulo** *un cuadrilátero convexo que tiene los cuatro ángulos iguales* (fig. 81).

Propiedades del rectángulo. — 1° *El rectángulo es un paralelogramo* porque es un cuadrilátero convexo cuyos ángulos opuestos son iguales;

2° *Los cuatro ángulos de un rectángulo son rectos.*

Las igualdades $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D}$, que expresan la igualdad de los ángulos, relacionadas con $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$, dan lugar a las igualdades siguientes: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}$;

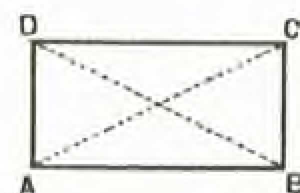


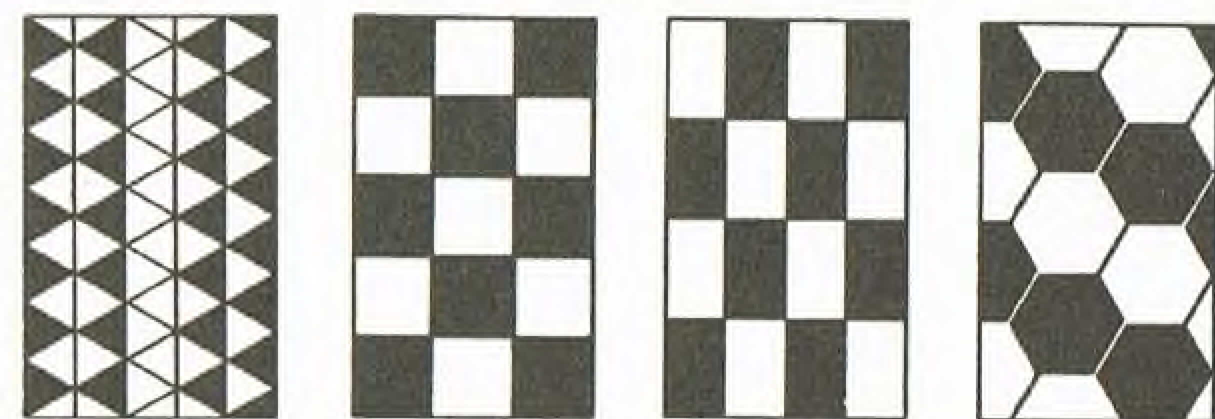
Fig. 81

3° *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

Los triángulos DAB y CBA (*fig.* 81) son iguales, pues tienen $\widehat{A} = \widehat{B}$ ángulos iguales porque son rectos, AB lado común, AD = BC lados opuestos de un paralelogramo. Los lados BD y AC de estos triángulos son iguales, puesto que son lados opuestos a ángulos iguales. Luego las diagonales del rectángulo son iguales.

Recíproco. *Todo paralelogramo que tiene las diagonales iguales es un rectángulo.*

Por hipótesis, AC = BD. Los triángulos DAB y CBA (*fig.* 81) son iguales, pues AC = BD por hipótesis, AB común, AD = BC son lados opuestos de un paralelogramo. Por consiguiente, también son iguales los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de estos triángulos, que son también los del paralelogramo. Ahora bien, en un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales, $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$; de estas igualdades y de $\widehat{A} = \widehat{B}$ se deduce



Polígonos regulares utilizados como enlosados (no se puede cubrir un plano con polígonos regulares de la misma especie más que si tienen tres, cuatro o seis lados)

la igualdad de los cuatro ángulos. Luego el paralelogramo es un rectángulo.

Rombo. — *Se llama* **rombo** *un cuadrilátero convexo que tiene los cuatro lados iguales* (fig. 82).

Propiedades del rombo. — 1° *El rombo es un paralelogramo* porque (v. p. 88) es un cuadrilátero convexo que tiene los lados opuestos iguales.

Las diagonales del rombo son perpendiculares.

La igualdad de los lados supone que CB = CD y AB = AD: por tanto, los puntos C y A son dos puntos de la mediatriz del segmento BD y la recta AC es perpendicular a la recta BD.

RECÍPROCO. *Todo paralelogramo que tiene las diagonales perpendiculares es un rombo.*

Fig. 82

Las diagonales AC y BD son perpendiculares por hipótesis, y se cortan en su punto medio. Por consiguiente, la recta AC es la mediatriz de BD, lo que supone que AB = AD y BC = CD, y siendo iguales los lados opuestos AB y DC del paralelogramo, de estas igualdades se deducen también AB = BC = CD = AD. Los cuatro lados del paralelogramo son iguales: es un rombo.

Cuadrado. — *Se llama* **cuadrado** *el cuadrilátero convexo que tiene los ángulos iguales y los lados iguales.*

Como un cuadrado es a la vez rectángulo y rombo (*fig.* 83), resulta que:

1° *Los ángulos del cuadrado son rectos;*

2° *Las diagonales del cuadrado son iguales y perpendiculares.*

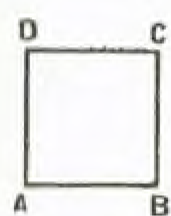


Fig. 83

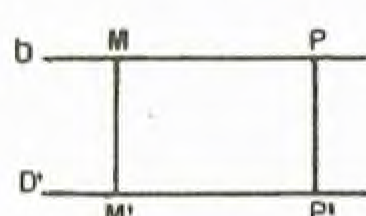


Fig. 84

Todo paralelogramo que tiene las diagonales iguales es un rectángulo, y todo paralelogramo que tiene las diagonales perpendiculares es un rombo; por consiguiente, todo paralelogramo cuyas diagonales son a la vez iguales y perpendiculares es a la vez rectángulo y rombo, es decir, un cuadrado.

Distancia entre dos rectas paralelas. — Sean (D) y (D′) dos rectas paralelas (*fig.* 84).

1° Las distancias de dos puntos M y P de la recta (D) a la recta (D′) son iguales. En efecto, las perpendiculares MM′ y PP′ trazadas por M y P a la recta (D) son paralelas (v. p. 82); dichas rectas cortan a (D′) en los puntos M′ y P′, y la figura MM′P′P es un paralelogramo (y precisando más, un rectángulo). Por consiguiente, los lados opuestos de este paralelogramo MM′ y PP′ son iguales. Las distancias MM′ y PP′ de los puntos M y P a la recta (D′) son también iguales.

2° La distancia de un punto M de la recta (D) a la recta (D′) es igual a la distancia de un punto P′ de la recta (D′) a la recta (D).

La recta PP′ que hemos considerado en el caso primero, perpendicular a la recta (D′) por construcción, es también perpendicular a la recta (D) paralela a (D′).

Luego la distancia de P′ a la recta (D) es P′P, que, según hemos visto, es igual a MM′, distancia de M a la recta (D′).

DEFINICIONES. *Se llama* **distancia entre dos rectas paralelas** *la distancia* MM′ *de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra.*

Se dice que dos rectas (D) *y* (D′) *son* **equidistantes** de una tercera (△), *cuando la distancia entre las rectas* (D) *y* (△) *es igual a la que hay entre las rectas* (D′) *y* (△).

APLICACIÓN. *El lugar de los puntos* M *de un plano* (fig. 85) *situados a un mismo lado de una recta* (△) *y a una distancia determinada,* a, *de ésta, es una recta* (D) *paralela a* (△).

Fig. 85

Sobre la perpendicular trazada a (△) en un punto A, tomemos AB = AB′ = *a*. Por hipótesis M está al mismo lado que B con relación a (△). Sea H el pie de la perpendicular MH a (△).

Si M es un punto del lugar, por hipótesis MH = BA. El cuadrilátero convexo ABMH cuyos lados AB y HM son paralelos [perpendiculares a (△)] e iguales, es un paralelogramo (rectángulo). Por consiguiente, el punto M pertenece a la recta (D) que es una paralela a (△) trazada por B.

Si el punto M está situado en (D), como (D) y (△) son paralelas, MH = BA. Luego el lugar geométrico es la recta (D).

Si el punto M estuviese, con relación a (△), al mismo lado que B′, el lugar geométrico sería la recta (D′), paralela a (△), trazada por B′. Por consiguiente, en general, *el lugar geométrico de los puntos situados a una distancia determinada de una recta dada* (△) *se compone de dos rectas* (D) *y* (D′) *paralelas a* (△) *y equidistantes de ella.*

Trapecio. — *Se llama* **trapecio** *un cuadrilátero convexo que tiene paralelos dos lados opuestos llamados* **bases.** *La distancia entre las bases se denomina* **altura** *del trapecio* (fig. 86).

Se dice que un **trapecio** ABCD **es isósceles** *cuando los lados no paralelos* AD *y* BC *son iguales* (fig. 87).

Fig. 86

Fig. 87

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un trapecio sea isósceles es que los ángulos adyacentes a una de las bases sean iguales.*

Sean H y K las proyecciones ortogonales de A y B sobre el lado CD paralelo a AB (*fig.* 87).

La condición es necesaria. Hipótesis: el trapecio es isósceles, AD = BC. Los triángulos rectángulos AHD y BKC tienen la hipotenusa igual, AD = BC, y un lado del ángulo recto igual, AH = BK (distancia entre dos rectas paralelas). Luego estos triángulos son iguales y $\widehat{D} = \widehat{C}$.

La condición es suficiente. Hipótesis: $\widehat{D} = \widehat{C}$. Los triángulos AHD y BKC son iguales (AH = BK y un ángulo agudo igual, $\widehat{D} = \widehat{C}$; primer caso de igualdad de triángulos rectángulos). Por consiguiente, AD = BC.

OBSERVACIÓN. La perpendicular (△) a las bases, trazada por el punto medio de AB, pasa por el punto medio de CD. El trapecio isósceles se superpone a sí mismo mediante un semigiro alrededor de (△). Esto se expresa diciendo que (△) es un **eje de simetría** del trapecio.

Polígono inscriptible. — *Se dice que un polígono está* **inscrito** *en un círculo* (O) *cuando los vértices del polígono están situados en la circunferencia.*

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero convexo* ABCD *sea inscriptible es que la suma de dos ángulos opuestos sea igual a dos rectos.*

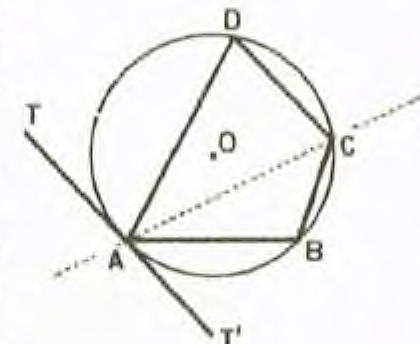


Fig. 88

Tracemos la circunferencia (O) que pase por los puntos A, B y C (*fig.* 88). La tangente a la misma en A es TT′: designemos por AT la semirrecta situada con relación a AC al mismo lado que lo está el punto D. Siendo convexo el cuadrilátero, el punto B estará, con relación a AC, al mismo lado en que se halla la semirrecta AT′.

La condición es necesaria. Hipótesis: el punto D está en la circunferencia (O); por consiguiente, se tiene $\widehat{ADC} = \widehat{T'AC}$ (v. p. 86) y $\widehat{ABC} = \widehat{TAC}$. Como $\widehat{TAC} + \widehat{T'AC} = \pi$, se deduce que en el cuadrilátero inscrito la suma de los ángulos opuestos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ es igual a π. La suma $\widehat{A} + \widehat{C}$ es también igual a π porque $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$.

La condición es suficiente. Hipótesis: $\widehat{B} + \widehat{D} = \pi$. Como A, B y C son, por construcción, tres puntos de la circunferencia (O), se tiene (v. p. 86) $\widehat{ABC} = \widehat{TAC}$: luego de la hipótesis $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{ABC}$ se obtiene $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{TAC} = \widehat{T'AC}$. Por tanto, el punto D está situado en el arco de circunferencia que pasa por A y B, y es tangente en A a la recta AT′; con relación a AC está situado al mismo lado que AT; ahora bien, por A y B pasa una circunferencia y sólo una que sea tangente en A a la recta AT′, y ésta es precisamente la circunferencia (O). Por consiguiente, el punto D está situado en la circunferencia (O): el cuadrilátero es inscriptible.

Vectores

Segmentos determinados en dos rectas cortadas por rectas paralelas. Orientación de segmentos. Fórmula de Chasles. Punto de una recta AB definido por la razón $\dfrac{MA}{MB}$. Teorema de Thales. Triángulos formados por un ángulo y secantes paralelas. Triángulos semejantes

Segmentos determinados en dos rectas cortadas por rectas paralelas. — Sean (D) y (D′) dos rectas fijas (*fig.* 89) y (△) una recta que corte (D) y (D′). A cada punto A de la recta (D) hagamos corresponder el punto A′ de intersección de la recta (D′) con la paralela a la recta (△) trazada por A. Llamaremos A′ al punto homólogo de A; por tanto, el segmento A′B′, cuyos extremos son puntos homólogos, será homólogo del segmento AB.

TEOREMA. *Los segmentos* A′B′ *y* E′F′, *homólogos de segmentos iguales* AB *y* EF, *son iguales.*

Sea C el cuarto vértice del paralelogramo AA′B′C (*fig.* 89) y G el cuarto vértice del paralelogramo EE′F′G. Los triángulos ABC y EFG

son iguales: en efecto, AB = EF por hipótesis, $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$ y $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$ porque son, respectivamente, ángulos correspondientes (primer caso de igualdad de triángulos). Por consiguiente, AC = EG.

Por otra parte, AC = A'B', pues son lados opuestos de un paralelogramo; EG = E'F' por la misma razón, y como AC = EG, resulta que A'B' = E'F'. El teorema queda demostrado.

TEOREMA. *La suma A'B' + E'F' de dos segmentos homólogos de otros dos segmentos dados es homóloga de la suma AB + EF de estos dos segmentos* (fig. 90).

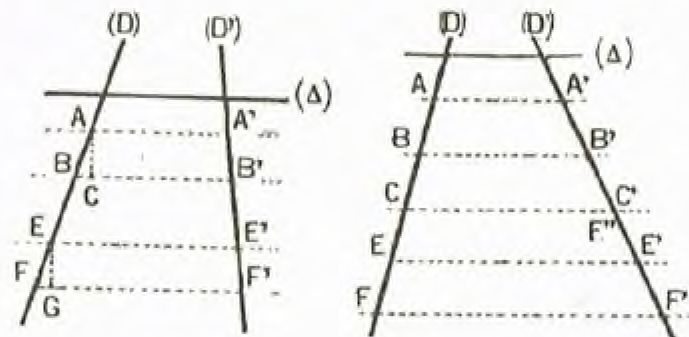


Fig. 89

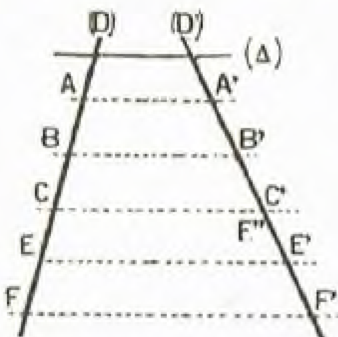


Fig. 90

Para sumar AB + EF se sustituye EF por un segmento igual BC, y tenemos así AC = AB + EF.

Sea C' el homólogo de C: de la igualdad EF = BC se deduce E'F' = B'C'; por consiguiente, la suma A'B' + E'F' será igual a A'B' + B'C', es decir, igual a A'C'. El teorema queda demostrado.

Siendo la suma de dos segmentos mayor que cada uno de los sumandos, de los teoremas anteriores se deduce que a segmentos desiguales corresponden segmentos homólogos desiguales, y que al mayor de ellos corresponde el homólogo mayor. Por consiguiente, los segmentos AB y A'B' son magnitudes homólogas (v. pág. 76) y la razón $\frac{AB}{EF}$ de dos cualesquiera de ellas es igual a la razón $\frac{A'B'}{E'F'}$ de las magnitudes homólogas.

OBSERVACIÓN. Supongamos dos rectas ABEF y A'B'E' (*fig.* 90) y sea M' un punto de la recta A'B'; la igualdad $\frac{AB}{EF} = \frac{A'B'}{E'M'}$ define la longitud E'M' y, por consiguiente, dos puntos M': uno de ellos es el punto F' de la figura precedente, y el segundo, F'', está situado al otro lado de F' con relación a E' Es evidente que FF'' no es paralela a la direción (Δ). La igualdad $\frac{AB}{EF} = \frac{A'B'}{E'F'}$ no expresa una condición necesaria y suficiente para que F' sea homólogo de F. Por tanto, es incompleta, y para concretarla es indispensable orientar los segmentos.

Orientación de segmentos. — *Se llama* **vector** *todo segmento de recta* AB *orientado, es decir, aquel en que se distingue uno de los puntos* A, *llamado origen, del otro* B, *llamado extremo.* El vector AB, de origen A y extremo B, está representado por la notación $\overrightarrow{AB}$. En la figura se pone una pequeña flecha en el extremo B (*fig.* 91).

Se llama **sentido de un vector** $\overrightarrow{AB}$, *el sentido en que se desplaza un punto móvil que recorre el vector desde* A *hacia* B; **módulo** *del vector es el valor absoluto de la longitud del segmento* AB; *la recta* AB *se llama también* **línea de acción** *o* **soporte** *del vector* $\overrightarrow{AB}$.

Se dice que **dos vectores** $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{EF}$ **son paralelos** *cuando las rectas* AB *y* EF *son paralelas.* Dos vectores paralelos pueden ser paralelos y del mismo sentido (*fig.* 92) o paralelos y de sentido contrario (*fig.* 93).

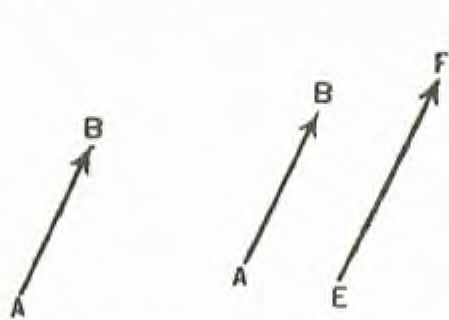


Fig. 91

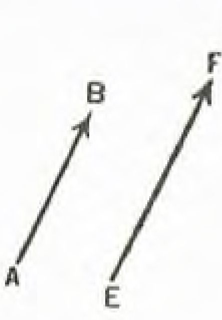


Fig. 92



Fig. 93

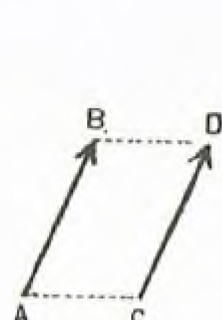


Fig. 94

Se llama **razón de dos vectores paralelos** *y se designa por la notación*

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}}$$

el número cuyo valor absoluto es igual a la razón $\frac{AB}{EF}$ *de los dos segmentos y cuyo signo es + si los dos vectores son del mismo sentido y — si son de sentido contrario.*

Por consiguiente, escribir $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = k$, o lo que es igual, $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{EF}$, es lo mismo que escribir: 1º que las rectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ son paralelas; 2º que el sentido desde A hacia B es igual que el de E hacia F, cuando k es positivo, y es diferente cuando k es negativo; 3º que $\frac{AB}{EF} = k$.

Se dice que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** *cuando su razón es igual a* 1 (fig. 94). En este caso se escribe $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, lo que significa que AB y CD son paralelas, que el sentido de A hacia B es el mismo que el de C hacia D y que AB = CD.

Al decir que $\overrightarrow{AB}$ es del mismo sentido que $\overrightarrow{CD}$ se expresa la condición para que el cuadrilátero ABCD sea convexo, y cuando se dice que AB y CD son iguales y paralelas se expresa la condición para que este cuadrilátero sea un paralelogramo. Por consiguiente, de la igualdad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se deduce que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Se llama **valor algebraico** *de un vector* $\overrightarrow{AB}$, *y se designa por la notación* $\overline{AB}$, *la razón* $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OU}}$ *entre este vector y otro paralelo* $\overrightarrow{OU}$ *elegido arbitrariamente y llamado vector unidad.*

Se conviene expresamente que todos los vectores paralelos de una misma figura estarán medidos con el mismo vector unidad. En estas condiciones, **la razón de dos vectores paralelos** $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}}$ **es igual a la razón de sus valores algebraicos** $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$.

Si, en una figura, ciertos vectores son paralelos entre sí, están medidos con un vector unidad $\overrightarrow{OU}$ que es paralelo a ellos; si otros vectores, no paralelos a los primeros, son igualmente paralelos entre sí, estarán medidos con un vector unidad $\overrightarrow{O'U'}$ diferente del primero, puesto que $\overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{O'U'}$ no son paralelos.

Quede bien entendido que, en este caso, $\overrightarrow{OU}$ *y* $\overrightarrow{O'U'}$ *tienen la misma magnitud.*

Fórmula de Chasles. — *Si* A, B *y* C *son tres puntos de una recta, tenemos que* $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Elijamos un vector unidad del mismo sentido que $\overrightarrow{AB}$ y distingamos tres casos (*fig.* 95):

1º *Supongamos que* B *pertenece al segmento* AC. Se tiene AB + + BC = AC; ahora bien, $\overline{AB}$ = AB, $\overline{BC}$ = BC y $\overline{CA}$ = — AC, según los convenios establecidos; por tanto la igualdad se verifica.

2º *Supongamos que* C *pertenece al segmento* AB. Se tiene AC + + CB = AB. Esta vez $\overline{AB}$ = AB, $\overline{BC}$ = — CB y $\overline{CA}$ = — AC; luego se verifica la igualdad.

3º *Supongamos que* A *pertenece al segmento* CB. Se tiene CA + AB = CB. Ahora bien, $\overline{AB}$ = AB, $\overline{BC}$ = —CB y $\overline{CA}$ = CA; por consiguiente la igualdad se verifica.

Cambiar el sentido del vector unidad, sin cambiar su longitud, equivale a sustituir $\overline{AB}$ por —$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ por —$\overline{BC}$, $\overline{CA}$ por —$\overline{CA}$, lo que no varía la fórmula de Chasles. Por consiguiente, ésta se verifica en todos los casos posibles.

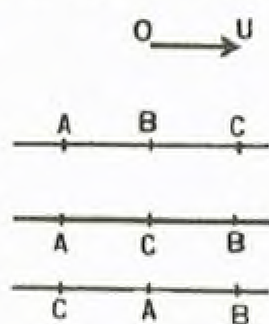


Fig. 95

APLICACIONES. 1º *La fórmula de Chasles podrá también escribirse:* $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

porque $\overline{AC} = -\overline{CA}$ y $\overline{CB} = -\overline{BC}$.

2º *Si* A, B, C *y* D *son cuatro puntos de una misma recta, se tiene*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$$

En efecto, $\overline{CD} + \overline{DA} = \overline{CA}$ según hemos visto en el caso 1º; por tanto esta fórmula equivale a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \text{ fórmula de Chasles.}$$

Por tanto se puede generalizar para un número cualquiera de puntos.

3º Sea C el punto medio de AB, con lo que

$$CA = -\overline{CB}.$$

Sea O un punto cualquiera de la recta AB.

Se tiene $\overline{CA} = \overline{CO} + \overline{OA}$, $\overline{CB} = \overline{CO} + \overline{OB}$.

La condición $\overline{CA} = -\overline{CB}$ se convierte en $2\overline{CO} + \overline{OA} + \overline{OB} = 0$, o bien

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$

Punto de una recta AB definido por la razón $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. —

TEOREMA. *En la recta* AB *hay un punto* M, *y sólo uno, definido por la igualdad* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, *siendo* k *un número dado diferente de* 1.

El punto M de la recta AB puede estar situado entre A y B, con lo que la razón $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ es negativa, o bien, fuera del segmento AB y entonces $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ es positiva. Recíprocamente si $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ es negativa, M está situado entre A y B; si $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ es positiva, el punto M está situado fuera del segmento AB.

Por consiguiente, si el número k es negativo, M está entre A y B (*fig.* 96): hemos visto (v. p. 76) que entre A y B hay un punto M y sólo uno para el que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ es igual a un número negativo k. Este punto es el único de la recta AB para el cual $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$.

Fig. 96

Si k es positivo, M está situado fuera del segmento AB: hemos visto (v. p. 76) que había un punto, y sólo uno, de la recta AB fuera del segmento AB, para el cual $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, si k es diferente de 1. Este punto es el único de la recta AB para el que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$.

Si $k = 1$, el punto M estará en el infinito, ya a la derecha, ya a la izquierda del segmento AB.

Si $k = -1$, el punto M será el punto medio de AB.

Teorema de Thales. — Sean (D) y (D') dos rectas fijas (*fig.* 97) cortadas por las rectas AA', BB', EE' y FF' paralelas a una dirección dada ($\triangle$) secante a esas dos rectas. Hemos llamado (v. p. 89) al punto A' homólogo de A y a B' homólogo de B. Convendremos en decir que el vector $\overrightarrow{A'B'}$ es homólogo del vector $\overrightarrow{AB}$.

TEOREMA. *Los vectores homólogos determinados en dos rectas dadas* (D) *y* (D') *por rectas paralelas son proporcionales* (fig. 97).

Cuatro secantes determinan en las rectas (D) y (D') los puntos homólogos que figuran escritos a continuación, respectivamente unos debajo de otros:

A B E F
A' B' E' F'

y por consiguiente, numerosos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$...

Todos estos vectores son proporcionales a sus homólogos; vamos a demostrarlo para dos cualesquiera de ellos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$. Se tiene (v. p. 90) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{EF}{E'F'}$. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ son del mismo sentido, $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{E'F'}$ serán también del mismo sentido; si aquéllos son de sentido contrario, $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{E'F'}$ también serán de sentido contrario. En consecuencia, en todos los casos se verificará la igualdad de

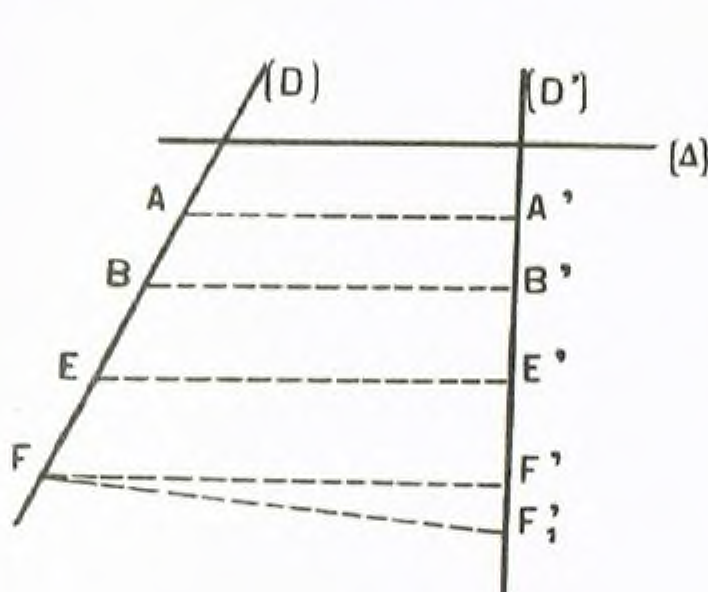


Fig. 97

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}}.$$

De esta igualdad se deduce que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{E'F'}}$ y, por consiguiente (v. p. 90), la igualdad de las razones $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{E'F'}}$ de los vectores paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ de los vectores homólogos, igualmente paralelos, $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{E'F'}$.

RECÍPROCO. *Si una secante* FF' *y otras tres secantes paralelas entre sí,* AA', BB', CC', *determinan en dos rectas* (D) *y* (D') *vectores proporcionales, la recta* FF' *es paralela a estas tres secantes.*

Tracemos (*fig.* 97) por F la paralela FF'_1 a las secantes AA', BB', EE'; según la proporción directa tendremos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'_1}}$$

y según la hipótesis:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}}.$$

De estas igualdades resulta que $\overline{E'F'_1} = \overline{E'F'}$ y que, por consiguiente, F'_1 y F' coinciden. Luego la recta FF' será paralela a las tres secantes AA', BB', EE'.

Triángulos formados por un ángulo y secantes paralelas. — TEOREMA. *Los lados de los triángulos* ABC *y* AB'C', *obtenidos al cortar dos rectas concurrentes por rectas paralelas* BC *y* B'C', *son proporcionales* (fig. 98).

Cortemos las rectas AB y AC por las paralelas BC y B'C'. Tracemos por A la paralela a BC. Según el teorema de Thales, tenemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

Igualmente, cortemos las dos secantes CA y CB por tres paralelas AB, C'D y CC_1. Según el teorema de Thales:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC'}},$$

de donde

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Fig. 98

Como $B'C' = BD$, se obtiene finalmente

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

La demostración prueba que los lados son proporcionales y además que las razones $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$, etc., tienen el mismo signo.

COROLARIO. *Si dos secantes* BC *y* B'C' *determinan en dos rectas concurrentes en un punto* A *segmentos tales que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}},$$

estas secantes son paralelas (fig. 98).

Supongamos que la paralela a la recta B'C' trazada por el punto B, corta en C_1 la recta AC; según la proposición directa tenemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC'}} \quad \text{y por hipótesis:} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}};$$

luego $\frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC'}}$; por consiguiente, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC_1}$ son vectores paralelos y el punto C_1 se confunde con el punto C. La recta BC es paralela a la B'C'.

PROBLEMA. *Dividir un segmento* AB *dado en* n *partes iguales.*

Unir el punto A con un punto C cualquiera, situado fuera de la recta AB; llevar sobre la semirrecta AC n segmentos iguales a AC (*fig.* 99):

$$AC = CD = DE = \dots = FG;$$

unir G con B; trazar por C, D, E, ... paralelas a GB. Éstas determinan en el segmento AB n segmentos iguales.

En la figura se ha considerado $n = 5$.

Triángulos semejantes. — *Se dice que dos triángulos* ABC *y* A'B'C' *son* **semejantes** *cuando los ángulos de estos triángulos son iguales dos a dos* (figura 100) $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. *Los vértices* A *y* A', *que corresponden a ángulos iguales, se denominan* **homólogos;** *los lados* BC *y* B'C', *opuestos a los ángulos iguales, se llaman también* **homólogos.**

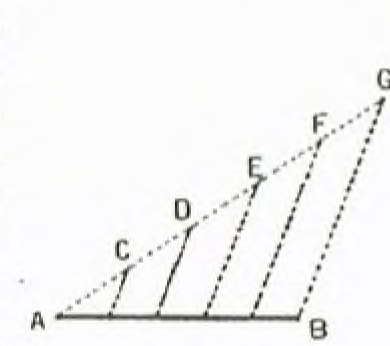


Fig. 99

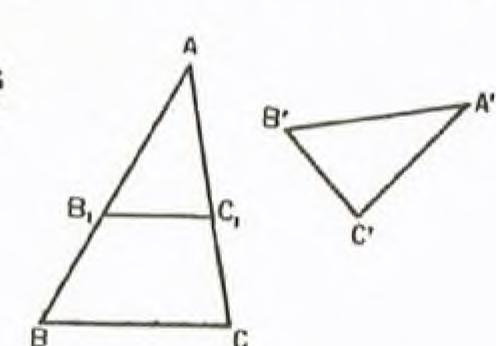


Fig. 100

Al enunciar los vértices de dos triángulos semejantes ABC y A'B'C', se hace de modo que A' sea el homólogo de A, B' de B y C' de C.

TEOREMA. *Si dos triángulos* ABC *y* A'B'C' *son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales.*

Por hipótesis, los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes; esto quiere decir que sus ángulos son iguales dos a dos: $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Tomemos sobre la semirrecta AB la longitud $AB_1 = A'B'$; por el punto B_1 tracemos la recta B_1C_1 paralela a BC: los dos triángulos ABC y AB_1C_1 se obtienen al ser cortados los lados de un ángulo por dos paralelas BC y B_1C_1; por consiguiente, sus lados son proporcionales.

$$\text{(I)} \qquad \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Los dos triángulos AB_1C_1 y $A'B'C'$ tienen, por construcción, un lado igual $AB_1 = A'B'$; por hipótesis, tienen un ángulo igual $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Por construcción igualmente, puesto que B_1C_1 es paralela a BC, los ángulos correspondientes $\widehat{B_1}$ y $\widehat{B}$ son iguales, y como $\widehat{B} = \widehat{B'}$ por hipótesis, resulta que $\widehat{B_1} = \widehat{B'}$. Luego los triángulos AB_1C_1 y $A'B'C'$ son iguales ($A'B' = AB_1$, $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B_1} = \widehat{B'}$, primer caso de igualdad de triángulos); de ello se deduce que sus lados son iguales, $AB_1 = A'B'$, $B_1C_1 = B'C'$, $AC_1 = A'C'$, y que de las igualdades (I) se obtienen las siguientes:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Teorema. *Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes en uno cualquiera de los tres casos siguientes:*

1º *Si tienen un ángulo igual $\widehat{A} = \widehat{A'}$ comprendido entre lados proporcionales* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$;

2º *Si tienen dos ángulos respectivamente iguales;*

3º *Si tienen sus tres lados proporcionales* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Relación y haz armónicos

Razón doble. División armónica. Condición de armonía. Haz armónico de rectas concurrentes o paralelas. Construcción de la cuarta recta de un haz o de una división armónica. Diámetro de una dirección con relación a los lados de un ángulo. Diámetro de una dirección dada con relación a dos rectas paralelas. Polar de un punto con relación a dos rectas paralelas. Polar de un punto con relación a dos rectas secantes. Construcción de la polar de un punto A con relación a los lados de un ángulo. Cuadrilátero completo. Construcción de la polar del punto A con relación a dos rectas paralelas

Razón doble. — *Se llama* **razón doble** *de cuatro puntos alineados* A, B, C, D, *distintos, enumerados en cierto orden, la cantidad*

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Este número se representa por el símbolo (A · B · C · D).

Propiedades. 1.º La razón doble (C · D · A · B) obtenida cambiando entre sí los pares (A . B) y (C . D) es igual a (A . B . C . D).

Para comprobarlo basta efectuar las operaciones indicadas por los símbolos

$$(A \cdot B \cdot C \cdot D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}};$$

$$(C \cdot D \cdot A \cdot B) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

Estas dos razones son evidentemente iguales porque $\overline{AC} = -\overline{CA}$ y $\overline{BD} = -\overline{DB}$, etc.

2º La razón doble (B · A · C · D) obtenida cambiando entre sí los puntos que forman un par cualquiera (A · B), (C · D) es inversa de (A · B · C · D).

La cantidad

$$(B \cdot A \cdot C \cdot D) = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}$$

es evidentemente inversa de

$$(A \cdot B \cdot C \cdot D) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}.$$

División armónica. — *Se dice que cuatro puntos alineados y enumerados en cierto orden forman una* **división armónica,** *si la razón doble de estos cuatro puntos es igual a* —1.

Se llama **condición de armonía,** *la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos formen una división armónica.*

La condición de armonía deducida de la definición es

$$(A \cdot B \cdot C \cdot D) = -1$$

Si (A . B . C . D) = —1, se dice que el par (A . B) es **conjugado armónico** del par (C . D). Si (A . B . C . D) = —1, también se verifica (C · D · A · B) = —1 (propiedad 1ª), de donde *si el par* (A · B) *es conjugado armónico del par* (C · D), *el par* (C · D) *es conjugado armónico del par* (A · B).

También se dice en este caso que D es conjugado armónico de C con relación a A y B. La igualdad (A · B · C · D) = —1 lleva consigo que se verifiquen las siguientes igualdades (propiedad 2ª) (B . A . C . D) = —1 y (A . B . D . C) = —1. Por consiguiente, *si* D *es conjugado armónico de* C *con relación al par* (A . B), *también lo es con relación al par* (B . A); *también* C *es conjugado armónico de* D, *con relación a los mismos pares.*

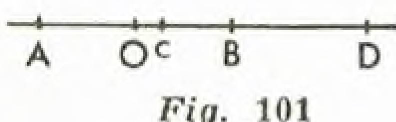


Fig. 101

En resumen, la relación de armonía es una relación entre dos pares de puntos (A · B) (C · D): *el orden de los pares y el orden de los puntos dentro de cada uno de los pares es indiferente.*

Condición de armonía. — Teorema. *Sea* O *el centro de un segmento* AB (fig. 101). *La relación* $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OA}^2$ *es una condición de armonía de los pares de puntos* (A · B) *y* (C · D).

La hipótesis es $\overline{OB} = -\overline{OA}$. Se tiene

$$\overline{CA} = \overline{CO} + \overline{OA} = \overline{OA} - \overline{OC},$$
$$\overline{CB} = \overline{CO} + \overline{OB} = -\overline{OA} - \overline{OC},$$
$$\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD},$$
$$\overline{DB} = -\overline{OA} - \overline{OD}.$$

Para que haya armonía, es necesario, por definición, que se verifique la siguiente relación:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = -1.$$

Sustituyendo los valores antes calculados, la relación se transforma en

$$\frac{\overline{OA} - \overline{OC}}{-\overline{OA} - \overline{OC}} \cdot \frac{-\overline{OA} - \overline{OD}}{\overline{OA} - \overline{OD}} = -1.$$

Efectuando operaciones se tiene

$$-\overline{OA}^2 + \overline{OC} \cdot \overline{OA} - \overline{OA} \cdot \overline{OD} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{OC} \cdot \overline{OA} - \overline{OA} \cdot \overline{OD} - \overline{OC} \cdot \overline{OD};$$

y después de simplificar queda: $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OA}^2$.

Consecuencia. $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ tienen el mismo signo, *los puntos* C *y* D *conjugados armónicos de* A *y* B *están al mismo lado del centro* O *del segmento* AB.

Ejercicio. Comprobar que verificándose

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB}, \ \overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB}$$

y llevando estos valores a la relación $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$, esta relación toma la forma $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

Definición. *Se llama* **media armónica** *de dos números* a *y* b, *el número* x *definido por la igualdad*

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

De aquí que $\overline{AB}$ es media armónica de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

Aplicación. *Existe un punto* M' *y uno sólo, conjugado armónico de un punto* M *de la recta* AB *con relación a los dos puntos* A *y* B, *excepto en el caso de que* M *sea el centro de* AB (fig. 102).

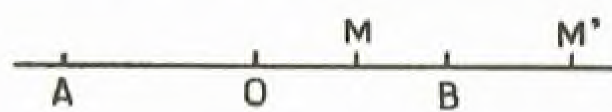


Fig. 102

Sea O el centro de AB; la condición de armonía

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA}^2$$

determina un valor y uno sólo de OM' cuando se conoce OM, siempre que OM sea distinto de cero. Queda definido por tanto un punto M' y uno sólo cuando M sea conocido y siempre que M sea distinto de O.

Teorema. *Si cuatro rectas paralelas están cortadas por dos secantes en los puntos* A, B, C, D *y* A', B', C', D' (fig. 103), *la condición* (A . B . C . D) = — 1 *lleva consigo* (A' . B' . C' . D') = — 1.

Los puntos A y A', B y B', etc., son puntos homólogos sobre las rectas AB y A'B', cortadas por las paralelas AA', BB', etc. Se tendrá por tanto (v. p. 91).

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{D'B'}}.$$

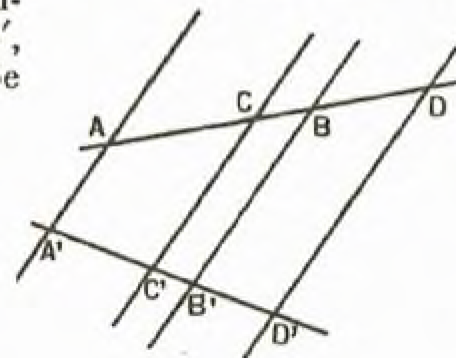


Fig. 103

De estas igualdades se deduce $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}$ y de aquí la igualdad de las razones dobles (A . B . C . D) (A' . B' . C' . D'). Si una de las dos es igual a — 1, la segunda es también igual a — 1.

Teorema. *Sean* SA, SB, SC, SD *cuatro rectas concurrentes cortadas*

por una secante en cuatro puntos A, B, C, D (fig. 104). *La condición necesaria y suficiente para que* (A . B . C . D) = — 1, *es que la paralela a la recta* SA *trazada por el punto* B *corte* SC *y* SD *en dos puntos* E *y* F *tales que* B *sea el centro de* EF.

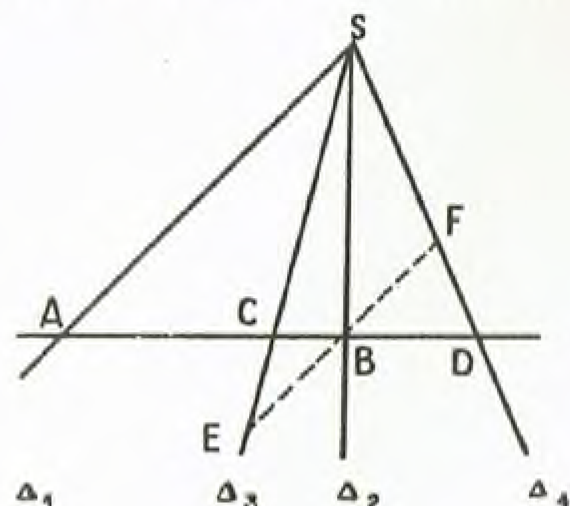


Fig. 104

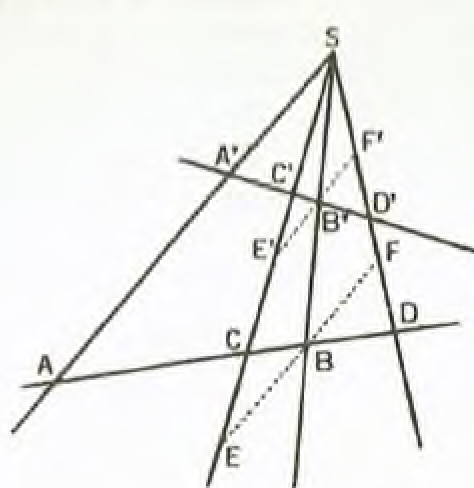


Fig. 105

Los triángulos CSA y CEB, determinados por dos rectas paralelas SA y EF que cortan dos secantes, son semejantes, por tanto $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{EB}}$. Por la misma razón, DAS y DFB son semejantes y $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{FB}}$. La condición necesaria y suficiente para que (A . B . C . D) = — 1, es decir, para que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$, hace que $\frac{SA}{EB} : \frac{SA}{FB} = -1$, luego $\overline{FB} = -\overline{EB}$, que es la condición para que B sea el centro de EF.

TEOREMA. *Si cuatro rectas concurrentes en un punto* S *son cortadas por dos secantes en los puntos* A, B, C, D *y* A', B', C', D', *la condición* (A . B . C . D.) = — 1 *lleva consigo* (A' . B' . C' . D' .) = — 1 (*fig.* 105).

Tracemos por B la paralela EF a la recta SA que corta en E y F las rectas SC y SD, y por B' la paralela E'F' que corta en E' y F' las mismas rectas. De la hipótesis (A . B . C . D) = — 1 se deduce $\overline{BE} = -\overline{BF}$. Ahora bien, siendo semejantes los triángulos SBE y SB'E' se tiene $\frac{\overline{BE}}{\overline{B'E'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}}$, y por ser semejantes los triángulos SBF y SB'F' tenemos que $\frac{\overline{BF}}{\overline{B'F'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}}$: de estas dos igualdades se deduce $\frac{\overline{BE}}{\overline{B'E'}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{B'F'}}$, y puesto que $\overline{BE} = -\overline{BF}$, $\overline{B'E'} = -\overline{B'F'}$. Condición suficiente para que (A' . B' . C' . D') = —1.

Haz armónico de rectas concurrentes o paralelas. — De los teoremas precedentes resulta que si cuatro rectas concurrentes (*fig.* 104) o paralelas [*fig.* 106] (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4) son cortadas por una secante en cuatro puntos A, B, C, D que forman una división armónica, al ser cortadas por cualquier otra secante en cuatro puntos también forman una división armónica.

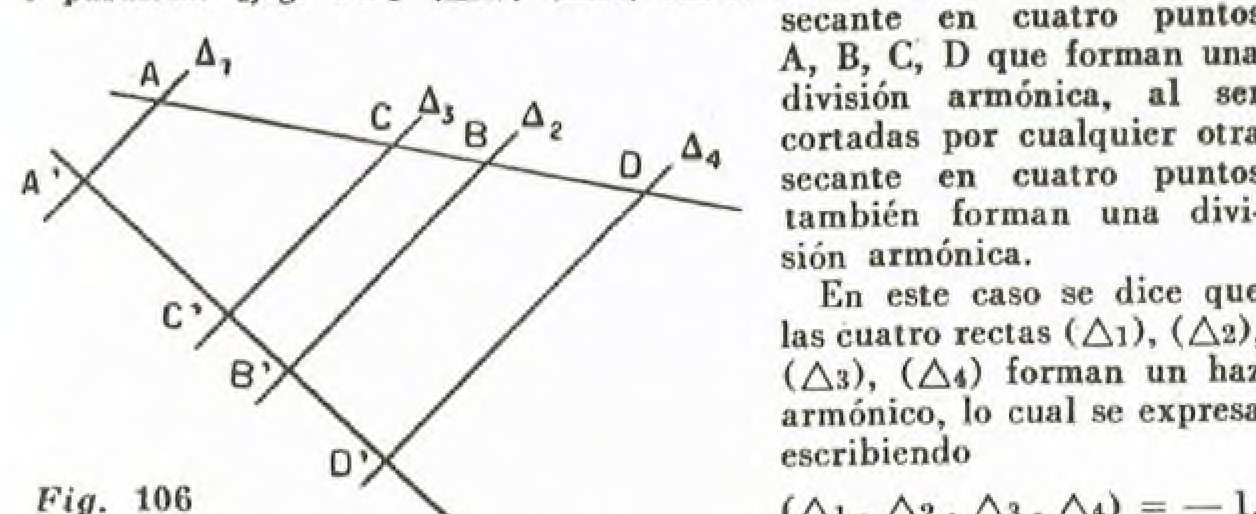


Fig. 106

En este caso se dice que las cuatro rectas (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3), (Δ_4) forman un haz armónico, lo cual se expresa escribiendo

$$(\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 \cdot \Delta_4) = -1,$$

o si las rectas SA, SB, SC, SD son concurrentes

$$S\,(A \cdot B \cdot C \cdot D) = -1.$$

Decir que cuatro rectas forman un haz armónico, es afirmar:

1° que son concurrentes o paralelas;

2° que al cortarlas por una secante cualquiera en cuatro puntos, forman una división armónica.

De lo expuesto en la página 92 resulta que la propiedad del haz armónico es una propiedad del par de rectas ($\Delta_1 \cdot \Delta_2$) con relación al par ($\Delta_3 \cdot \Delta_4$). Se dice que uno de estos pares es **conjugado armónico** con relación al otro: esta propiedad no cambia si se permutan los pares o las rectas dentro de cada par.

Construcción de la cuarta recta de un haz o de una división armónica. — Sean SA, SB, SC tres rectas concurrentes (el mismo problema puede resolverse con rectas paralelas). *Existe una recta* SD *y una sola definida por la condición* S (A . B . C . D) = —1. Se demuestra esta propiedad determinando la recta SD. Se traza por B (*fig.* 104) la paralela a SA que corta SC en E; para que SD sea la recta que se busca, es necesario y suficiente que SD corte esta paralela BE en un punto F definido por $\overline{BF} = -\overline{BE}$. Esta construcción define claramente una recta y sólo una.

APLICACIÓN. *Determinar el punto* D, *conociendo tres puntos* A, B, C *y sabiendo que* (A . B . C . D) = —1.

Se traza por A una recta AS, por B la recta paralela BE, por C una secante CS que corte en E la paralela BE. Se toma sobre BE, $\overline{BF} = -\overline{BE}$. La recta SF corta la recta AB en el punto D buscado (*fig.* 104).

TEOREMA. *Cuando en un haz armónico de rectas concurrentes, dos rectas* SA *y* SB *forman un par y son perpendiculares, estas rectas son las dos bisectrices de los ángulos que forma el segundo par* SC, SD.

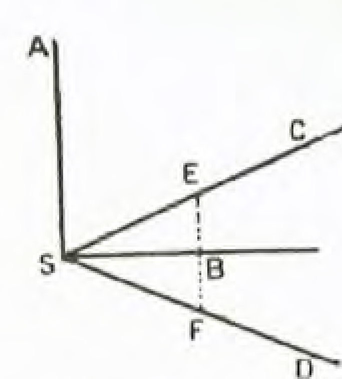


Fig. 107

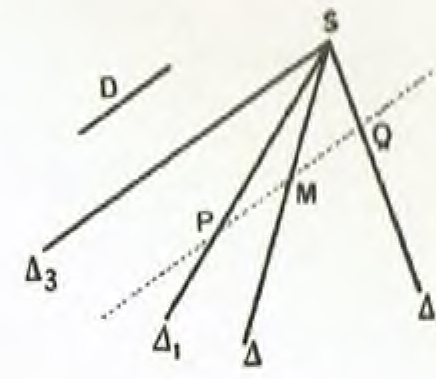


Fig. 108

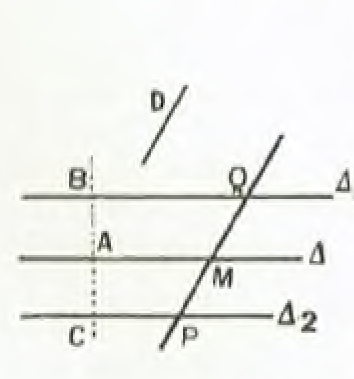


Fig. 109

Por un punto B de SB (*fig.* 107) tracemos la paralela EF a SA que corta en E y F las rectas SC y SD. La hipótesis S (A . B . C . D) = = —1 se traduce por $\overline{EB} = \overline{BF}$. La hipótesis SA y SB perpendiculares se traduce por $\widehat{SBF} = \widehat{SBE} = \frac{\pi}{2}$. Los dos triángulos rectángulos SBE, SBF son iguales (SB común, BE = BF), los ángulos $\widehat{BSE}$, $\widehat{BSF}$ son por tanto iguales y SB es bisectriz del ángulo $\widehat{ESF}$. La segunda bisectriz del ángulo formado por las rectas SC, SD es perpendicular a la primera, luego ésta es la recta SA.

Diámetro de una dirección con relación a los lados de un ángulo. — TEOREMA. *El lugar de los puntos medios de los segmentos* PQ *determinados sobre una recta variable, paralela a una dirección dada* (D), *por dos rectas* (Δ_1), (Δ_2), *no paralelas a* (D) *fijas y concurrentes, es una recta* (fig. 108).

Esta recta es por definición el **diámetro conjugado** de la dirección (D) con relación a las dos rectas; se dice también con relación a los lados de un ángulo dado.

Tracemos por S, punto común a las dos rectas concurrentes (Δ_1), (Δ_2), la paralela (Δ_3) a la dirección dada (D); sea (Δ) la recta definida por ($\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 \cdot \Delta$) = — 1, determinada por el procedimiento indicado anteriormente.

Todo punto M en que un segmento PQ paralelo a (Δ_3) corta (Δ) es el punto medio de PQ (v. p. 93). Luego todo punto que pertenezca al lugar está sobre (Δ).

Recíprocamente toda paralela a (Δ_3) trazada por un punto M de (Δ) corta en P y Q las rectas (Δ_1), (Δ_2), siendo M el punto medio de PQ. Todo punto de (Δ) es un punto del lugar y la recta (Δ) es el lugar buscado.

Diámetro de una dirección dada con relación a dos rectas paralelas. — TEOREMA. *El lugar de los puntos medios de los segmentos determinados sobre una recta variable, paralela a una dirección dada* (D), *por dos rectas paralelas* (Δ_1), (Δ_2), *fijas y no paralelas a* (D), *es la recta* (Δ) *equidistante de las dos rectas dadas* (fig. 109).

Esta recta fija, *independiente de la dirección elegida*, se llama también **diámetro conjugado** de la dirección (D) con relación a las dos rectas dadas.

Sea (Δ) la recta equidistante de las rectas (Δ_1), (Δ_2): para determinarla, se traza una perpendicular BC a las dos rectas, que las corta en B y C; la recta equidistante (Δ) es la paralela a las dos rectas trazada por el punto medio A de BC.

Sean P y Q los puntos en que una paralela a la dirección (D) corta (Δ_1) y (Δ_2).

Todo punto M del lugar está sobre la recta (Δ). En efecto, si M es por hipótesis el punto medio de PQ se tendrá $\overline{MP} = -\overline{MQ}$ y como, por construcción, $\overline{AB} = -\overline{AC}$, de estas igualdades se deduce $\frac{\overline{MP}}{MQ} = \frac{\overline{AB}}{AC}$ y la recta MA es, por tanto (v. p. 91), paralela a (Δ_1). El punto M del lugar está sobre (Δ).

Todo punto de (Δ) es un punto del lugar. En efecto, si M por hipótesis pertenece a (Δ), se tendrá $\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ y la igualdad $\overline{AB} = -\overline{AC}$ obliga a que $\overline{MP} = -\overline{MQ}$; M será, por tanto, el punto medio de PQ.

Polar de un punto con relación a dos rectas paralelas. — TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos* M, *conjugados armónicos de un punto dado* A *con relación a dos puntos variables* P *y* Q *en que una secante igualmente variable que pasa por* A *corta dos paralelas* (Δ_1) *y* (Δ_2) *que no pasan por el punto* A *y no equidistan de este punto, es una recta* (Δ) *paralela a las dos rectas dadas.*

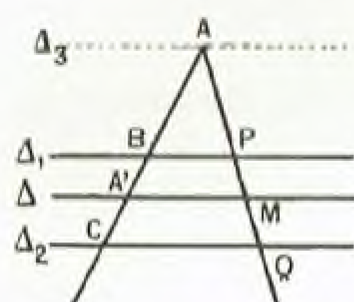


Fig. 110

Tracemos por A (*fig.* 110) una secante fija que corta en B y C las rectas $(\triangle_1)$, $(\triangle_2)$; como por hipótesis A no equidista de las dos rectas, A no es el punto medio de BC: es conjugado armónico de un punto A′ con relación a los puntos B y C. Tracemos por A y A′ puntos fijos, dos paralelas $(\triangle_3)$ y $(\triangle)$ a las rectas $(\triangle_1)$, $(\triangle_2)$.

Las cuatro rectas $(\triangle_1 \cdot \triangle_2 \cdot \triangle_3 \cdot \triangle)$ paralelas, cortadas por una secante en cuatro puntos B, C, A, A′ que forman una división armónica, forman un haz armónico.

Sea M un punto del lugar; la secante AM corta las cuatro rectas $(\triangle_1 \cdot \triangle_2 \cdot \triangle_3 \cdot \triangle)$ de un haz armónico en cuatro puntos P, Q, A, M′, formando una división armónica. Pero M punto del lugar es, por hipótesis, conjugado armónico de A con relación a P y Q; coincide por lo tanto con M′, que está sobre la recta $(\triangle)$.

Sea M un punto de la recta $(\triangle)$; la secante AM corta el haz armónico en los puntos P, Q, A, M, formando una división armónica. Por consiguiente, M es un punto del lugar.

Todo punto del lugar está sobre $(\triangle)$; todo punto de $(\triangle)$ es un punto del lugar, luego la recta $(\triangle)$ es el lugar pedido.

La recta $(\triangle)$ se llama **polar** del punto A con relación a las rectas $(\triangle_1)$, $(\triangle_2)$, y es paralela a estas dos rectas.

Las polares de dos puntos A y A_1 son distintas, excepto si la recta A_1A es paralela a $(\triangle_1)$ y $(\triangle_2)$.

Polar de un punto con relación a dos rectas secantes. — TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos* M, *conjugados armónicos de un punto* A *fijo con relación a los puntos variables* P *y* Q *en que una secante igualmente variable que pasa por* A *corta dos rectas concurrentes* $(\triangle_1)$, $(\triangle_2)$ *que no pasan por* A, *es una recta.*

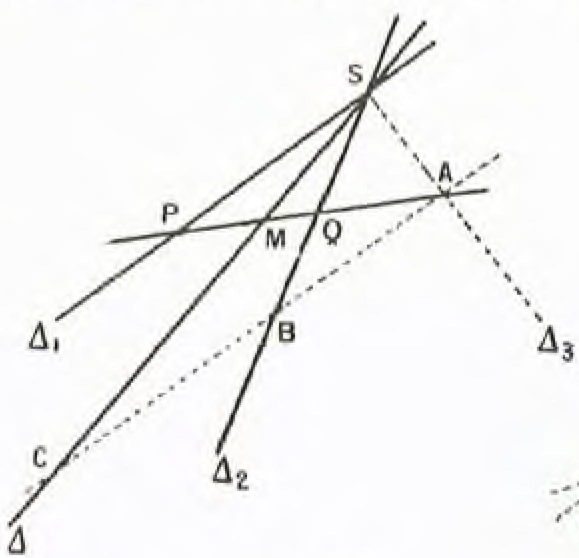


Fig. 111

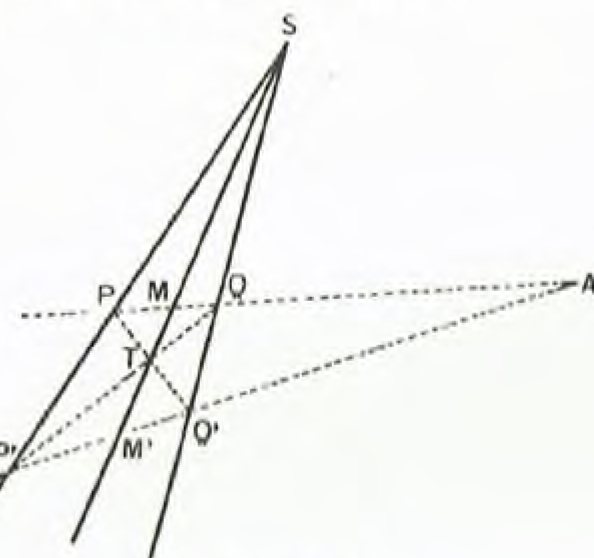


Fig. 112

La paralela trazada por A (*fig.* 111) a la recta $(\triangle_1)$ corta en B la recta $(\triangle_2)$; sea C el punto de la recta AB definido por $\overline{BC} = \overline{AB}$. Sea S el punto común a $(\triangle_1)$ y a $(\triangle_2)$; uniendo S con A y con C resultan las rectas SA que llamaremos $(\triangle_3)$ y SC que llamaremos $(\triangle)$. La recta $(\triangle)$, determinada por el procedimiento ya indicado, es la conjugada armónica de $(\triangle_3)$ con relación a $(\triangle_1)$ y $(\triangle_2)$.

Sea M un punto del lugar que se busca; la secante AM corta el haz armónico $(\triangle_1 \cdot \triangle_2 \cdot \triangle_3 \cdot \triangle)$ en los puntos P, Q, A, M′ que forman una división armónica y como, por hipótesis, M es un punto del lugar, es conjugado armónico de A con relación a P y Q, coincide con M′ y está por tanto sobre la recta $(\triangle)$.

Sea ahora un punto de la recta $(\triangle)$; la secante AM corta el haz $(\triangle_1 \cdot \triangle_2 \cdot \triangle_3 \cdot \triangle)$ armónico en los puntos (P . Q . A . M) y se verifica (P . Q . A . M) = — 1; el punto M es, pues, un punto del lugar. El lugar buscado se compone claramente de la recta $(\triangle)$.

OBSERVACIÓN. Cuando la recta PQ es paralela a una de las rectas $(\triangle_1)$ o $(\triangle_2)$, por ejemplo a $(\triangle_1)$, Q está en B, M en C y P no existe. Se considera este caso como límite, obtenido al tender la secante PQ hacia la recta AB. Se dice que en este movimiento P se aleja indefinidamente, y que en estas condiciones su conjugado armónico Q, con relación a los puntos A y M, tiende hacia el punto medio de las posiciones límites A y C de estos dos puntos.

La recta $(\triangle)$ se llama **polar** del punto A con relación a las rectas $(\triangle_1)$, $(\triangle_2)$ o con relación a los lados del ángulo (de cualquiera de los ángulos) formados por estas dos rectas.

La polar de un punto A *no situado sobre los lados de un ángulo con relación a este ángulo es una recta que pasa por el vértice del ángulo* y que no pasa por el punto A.

Las polares de dos puntos A y B distintos, son también distintas excepto si la recta AB pasa por el vértice del ángulo.

Construcción de la polar de un punto A con relación a los lados de un ángulo. — Se trazan por A dos secantes APQ y AP′Q′ (*fig.* 112). Se unen en cruz PQ′ y P′Q, que se cortan en T. Sea M el conjugado armónico de A con relación al par P, Q; M′ el conjugado armónico con relación al par P′, Q′; M y M′ son por definición dos puntos de la polar de A con relación a los dos lados del ángulo $\widehat{S}$ y a los dos lados del ángulo $\widehat{T}$. La recta MM′ será, por tanto, la polar de A con relación a los dos lados de estos ángulos y deberá pasar por S y por T.

Para construir la polar se unen, pues, sencillamente S y T sin determinar M y M′, que sólo han intervenido para justificar la construcción.

Cuadrilátero completo. — *Se llama* **cuadrilátero completo** *la figura formada por cuatro rectas, llamadas* **lados**, *que concurren dos a dos en seis puntos diferentes llamados* **vértices** (fig. 113).

Se dice que dos vértices A *y* A′ *son* **opuestos** *cuando la recta* AA′ *no es uno de los lados; la recta que une dos vértices opuestos es una* **diagonal.** Por consiguiente, en un cuadrilátero completo hay tres diagonales, AA′, BB′ y CC′.

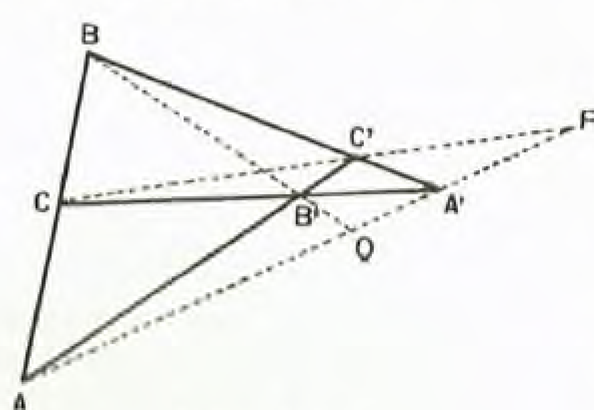


Fig. 113

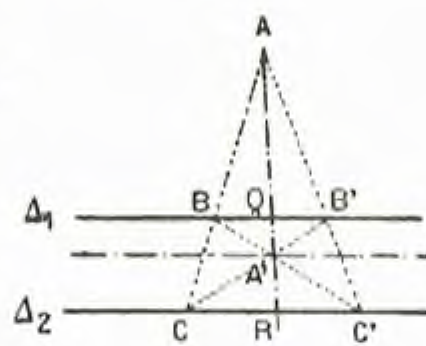


Fig. 114

TEOREMA. *Cada una de las diagonales* AA′ *de un cuadrilátero completo es cortada por las otras dos en dos puntos* Q *y* R, *conjugados armónicos con relación a los vértices* A *y* A′ (fig. 113).

Construyamos la polar de R con relación a los lados del ángulo $\widehat{B}$. Las dos secantes serán RAA′ y RCC′; trazando CA′ y C′A se obtiene el punto B′: la polar buscada es BB′. Esta recta corta la secante AA′ en el punto Q, conjugado armónico de R con relación a los puntos A y A′.

OBSERVACIÓN. Si la figura BB′C′C es un trapecio (*fig.* 114), el teorema precedente se aplica únicamente a la diagonal AA′. En este caso, R es el punto medio de CC′ y Q el de BB′.

En efecto, el haz B(AA′RQ) es armónico, CC′ es paralela a BQ, que es una recta de este haz, y por consiguiente R es el punto medio de CC′ (v. p. 93).

Construcción de la polar de un punto A con relación a dos rectas paralelas. — Tracemos dos secantes ABC y AB′C′, unamos B con C′ y B′ con C (*fig.* 114); por el punto de intersección A′ tracemos la paralela a las rectas BB′ y CC′; esta paralela es la polar buscada. En efecto, el punto A′ es conjugado armónico de A con relación a los puntos Q y R en que la recta AA′ corta $(\triangle_1)$ y $(\triangle_2)$, según la construcción anterior. Por consiguiente, la polar de A con relación a estas dos rectas es la paralela a $(\triangle_1)$ y a $(\triangle_2)$ trazada por el punto A′.

Propiedades de los triángulos

Medianas. Mediatrices. Alturas. Bisectrices. Lugar geométrico de los puntos tales que $\frac{MB}{MC} = k$. Bisectrices de un triángulo. Circunferencia inscrita. Circunferencias exinscritas. Triángulo isósceles. Triángulo rectángulo. Triángulo equilátero. Triángulo rectángulo AA′B cuya hipotenusa es igual al doble de un lado

DEFINICIONES. *Se dice que un triángulo* ABC *es* **escaleno** (*fig.* 115) *cuando sus tres lados son desiguales;* **isósceles,** *cuando dos de sus lados son iguales* (*fig.* 116); **equilátero,** *cuando sus tres lados son iguales* (*fig.* 117).

Supondremos que, salvo en determinados casos, el triángulo ABC es escaleno.

Medianas. — *Se llama* **mediana** *de un triángulo* ABC *cada una de las tres rectas que pasan por un vértice* A *del triángulo y el punto medio* A′ *del lado opuesto* BC. Evidentemente dos medianas AA′ y BB′ se cortan en un punto G (*fig.* 118).

TEOREMA. *El punto de intersección* G *de dos medianas* AA′ *y* BB′, *está situado sobre cada una de ellas,* AA′ *por ejemplo, a los dos tercios de* AA′ *a partir del vértice* A.



Fig. 115



Fig. 116



Fig. 117

Tracemos la recta A′D paralela al lado BB′ del triángulo CBB′; esta recta dividirá (v. p. 91) los lados BC y B′C en vectores proporcionales. Por tanto, tendremos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B'D}}{\overline{DC}}.$$

Como A' es el punto medio de BC, resulta que $\overline{BA'} = \overline{A'C}$, y por consiguiente $\overline{B'D} = \overline{DC}$; luego D será el punto medio de B'C. De lo que se deduce que

$$\overline{B'C} = 2\overline{B'D},$$

y como B es el punto medio de AC, tendremos que $\overline{AB'} = \overline{B'C} = 2\overline{B'D}$, y por consiguiente $\overline{AD} = 3\overline{B'D}$.

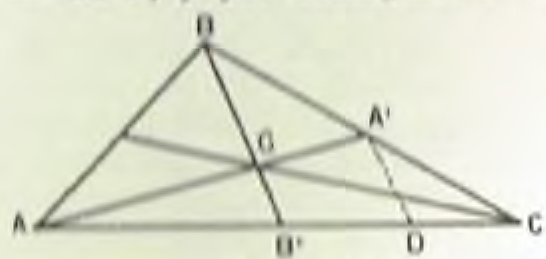


Fig. 118

La recta A'D es también paralela al lado B'G del triángulo AB'G y divide (v. p. 91) los lados AG y AB en vectores proporcionales:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AD}}.$$

Como $\overline{AB'} = 2\overline{B'D}$ y $\overline{AD} = 3\overline{B'D}$, cada una de estas razones tiene un valor igual a $\frac{2}{3}$ y se tiene $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$. Luego el punto G está situado a los dos tercios de AA' a partir del vértice A.

Consecuencia. *Las tres medianas del triángulo concurren en un punto* G *llamado* **baricentro** *o* **centro de gravedad** *del triángulo.*

Cada una de las medianas BB', CC' corta en efecto la mediana AA' en el mismo punto G situado a los $\frac{2}{3}$ de AA' a partir del vértice A.

Mediatrices. — *Se llaman* **mediatrices** *de un triángulo las mediatrices de los lados.* Existe una circunferencia y sólo una (O) de centro O, que pasa por los tres vértices A, B y C del triángulo, y se llama **circunferencia circunscrita al triángulo.** Al ser mediatriz de una cuerda, la mediatriz del lado BC pasará por el punto O, luego será A'O. *Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto* O *que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo* (fig. 119).

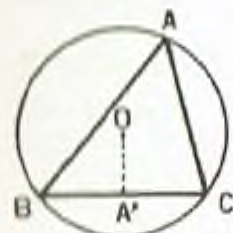


Fig. 119

Alturas. — *Se llama* **altura** *de un triángulo la perpendicular trazada por uno de los vértices al lado opuesto* (fig. 120). Llamaremos H, K, L los **pies** de las alturas AH, BK, y CL.

Teorema. *Las alturas de un triángulo concurren en un punto* I *llamado* **ortocentro** *del triángulo* (fig. 120).

Tracemos por A la paralela B_1C_1 a BC; por B la recta A_1C_1 paralela a AC; por C la recta A_1B_1 paralela a AB.

El punto A es el centro del segmento B_1C_1; en efecto, $AB_1 = BC$ por ser lados opuestos del paralelogramo AB_1CB, y $AC_1 = BC$ por ser lados opuestos del paralelogramo AC_1BC; por consiguiente, $AB_1 = AC_1$. La recta AH que es perpendicular a BC y por tanto a B_1C_1, es la mediatriz del B_1C_1. Por un razonamiento semejante se demuestra que CL y BK son las mediatrices de A_1B_1 y A_1C_1, respectivamente. Estas tres mediatrices del triángulo $A_1B_1C_1$ son rectas concurrentes: luego AH, BK y CL se cortan en un mismo punto I.

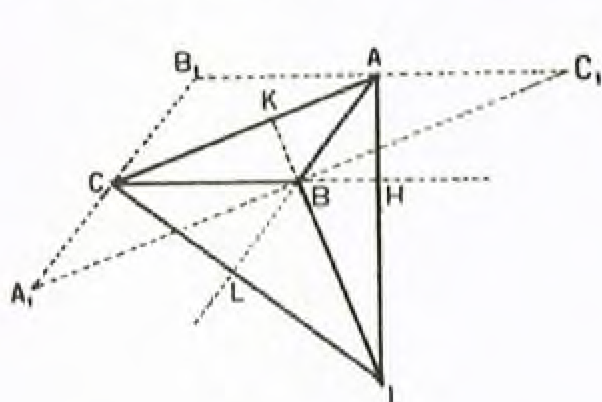


Fig. 120

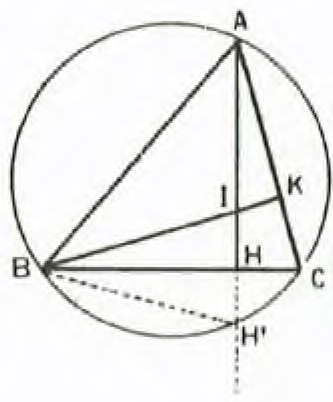


Fig. 121

Teorema. *Los puntos simétricos del ortocentro* I *de un triángulo con relación a sus lados están sobre la circunferencia circunscrita.*

Tracemos la altura AH (*fig.* 121); en general, esta recta corta la circunferencia circunscrita al triángulo en un punto H' distinto de A. Se tiene $\widehat{H'BC} = \widehat{H'AC}$ (por ser ángulos inscritos en un mismo segmento); el angulo $\widehat{H'AC}$, complementario del ángulo $\widehat{C}$ del triángulo rectángulo AHC, es igual a $\widehat{CBK}$, que es ángulo complementario de $\widehat{C}$ en el triángulo rectángulo CKB. Luego se tiene, en definitiva, que $\widehat{H'BC} = \widehat{CBK}$. Los triángulos BHH' y BHI son iguales (primer caso de igualdad de triángulos: BH es común, los ángulos en H son rectos, y $\widehat{H'BH} = \widehat{HBI}$). Luego HI = HH'. El punto H' simétrico del ortocentro I con relación al lado BC pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Bisectrices. — *Se llama* **bisectriz interior** *del ángulo* $\widehat{A}$ *del triángulo, una de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas* AB *y* AC, *precisamente la que corta el lado* BC *en el punto* D (fig. 123). *Se llama* **bisectriz exterior** *la segunda bisectriz de este ángulo;* en general ésta corta en el punto D' una de las prolongaciones de la recta BC.

Cuando la bisectriz exterior AD' no corta el lado BC, es paralela a él (*fig.* 122). Sea AF la prolongación del lado BA del triángulo: la condición necesaria y suficiente para que las rectas AD' y BC sean paralelas es que los ángulos correspondientes $\widehat{D'AF}$ y $\widehat{CBF}$ sean iguales. Ahora bien, AD' divide el ángulo $\widehat{CAF}$ exterior al triángulo ABC en dos ángulos iguales: por tanto, la medida de $\widehat{D'AF}$ es $\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$. La condición de paralelismo se expresa por la igualdad de los ángulos (o de sus medidas)

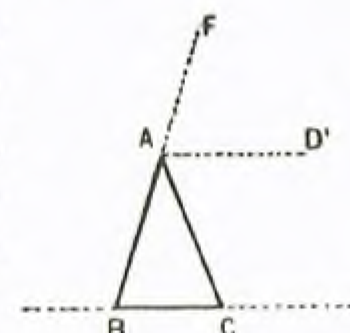


Fig. 122

$$\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \widehat{B}, \text{ es decir, } \widehat{B} = \widehat{C}.$$

Podemos terminar diciendo que la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ corta el lado opuesto en un punto D', excepto si el punto A es el vértice de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son AB y AC.

Teorema. 1° *La bisectriz* AD *de un ángulo* $\widehat{A}$ *de un triángulo* ABC *divide el lado opuesto* BC *en segmentos* DB *y* DC *proporcionales a los lados adyacentes* AB *y* AC. 2° *Cuando la bisectriz exterior* AD' *del ángulo* $\widehat{A}$ *corta el lado opuesto, lo divide en segmentos* D'B *y* D'C *proporcionales a los lados adyacentes* AB, AC (fig. 123).

La paralela al lado AB trazada por C corta en E la bisectriz interior y en E' la bisectriz exterior:

1° Se tiene $\widehat{AEC} = \widehat{BAE}$ (ángulos alternos internos) y $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$ (por hipótesis AE es bisectriz). Por consiguiente, $\widehat{AEC} = \widehat{EAC}$, el triángulo AEC es isósceles y AC = EC. Los lados de los triángulos semejantes ADB y EDC son proporcionales (v. p. 91): por tanto, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{EC}$, y como EC = AC, se tiene $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

2° Sea AF la prolongación de AB. Se tiene $\widehat{AE'C} = \widehat{FAE'}$ (ángulos alternos internos), y $\widehat{FAE'} = \widehat{CAE'}$ (por hipótesis AE' es bisectriz exterior). Por consiguiente, $\widehat{AE'C} = \widehat{CAE'}$. El triángulo ACE' es isósceles y CE' = AC. Los lados de los triángulos semejantes ABD' y E'CD' son proporcionales (v. p. 91): por tanto, $\frac{D'B}{D'C} = \frac{BA}{CE'}$, y como CE' = AC, resulta que $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$.

Recíproco. *Las rectas que unen el vértice* A *de un triángulo con los puntos* D *y* D' *que dividen el lado* BC *en segmentos proporcionales a los lados adyacentes son las bisectrices del ángulo* $\widehat{A}$.

En el lado BC hay dos puntos solamente (v. p. 76), tales que se verifique

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC};$$

el punto D situado entre B y C existe siempre, D' exterior al segmento BC no existe más que si AB ≠ AC, lo que nosotros supondremos. En estas condiciones ABC no es isósceles, las bisectrices de $\widehat{A}$ cortan el lado BC en dos puntos D_1 y D'_1 y se verifica

$$\frac{D_1B}{D_1C} = \frac{D'_1B}{D'_1C} = \frac{AB}{AC}.$$

Como sólo hay dos puntos definidos por esta propiedad, D_1 y D'_1 coincidirán con D y D' respectivamente, y AD, AD' serán las bisectrices del ángulo $\widehat{A}$.

Lugar geométrico de los puntos tales que $\frac{MB}{MC} = k$. —

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos* M *de un plano, tales que la razón de sus distancias a dos puntos fijos* B *y* C *sea una constante* k *diferente de* 1, *es una circunferencia cuyo centro* O *está definido por* $\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = k^2$ *y cuyo radio* R *está definido por* $R^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$ (*fig.* 124).

Señalemos los puntos D, en el segmento BC, y D', en una de sus prolongaciones, que dividen (v. p. 76) este segmento en la razón *k*: $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = k$.

Todo punto M del lugar, es decir, tal que, por hipótesis, $\frac{MB}{MC} = k$, es un punto de la circunferencia (O) de diámetro DD'. En efecto, puesto

que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{DB}{DC}$, la recta MD es una de las bisectrices del ángulo $\widehat{M}$ del triángulo BMC. Puesto que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{D'B}{D'C}$, la recta MD'

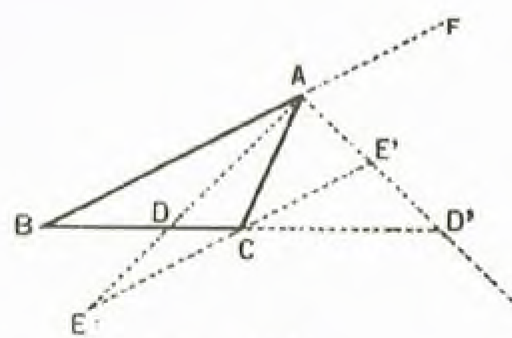


Fig. 123

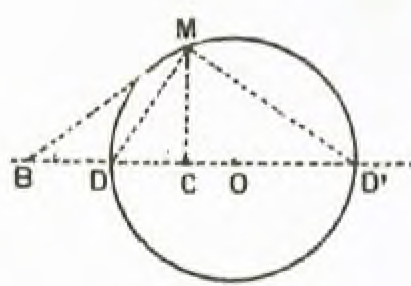


Fig. 124

es la otra bisectriz. Estas dos rectas son perpendiculares; siendo $\widehat{DMD'}$ un ángulo recto, M será un punto de la circunferencia de diámetro DD'.

Todo punto de la circunferencia (O) de diámetro DD' es un punto del lugar, es decir, tal que $\dfrac{MB}{MC} = k$. En efecto, puesto que M es un punto de la circunferencia (O), las rectas MD y MD' son perpendiculares; por otra parte, de la igualdad $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{D'B}{D'C}$ se deduce que $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}$ y los puntos D y D' son conjugados armónicos con relación a los puntos B y C: luego las rectas MD y MD' son a la vez perpendiculares y conjugadas armónicas con relación a las rectas MB y MC. Por tanto son (v. p. 93) las bisectrices de los ángulos formados por estas dos rectas y, por consiguiente, se tiene $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{DB}{DC} = k$.

El lugar geométrico de M es, por tanto, una circunferencia (O). Falta establecer las propiedades que determinan el centro O y el radio R. Orientemos el lado BC desde B hacia C y supongamos $\overline{OB} = \beta$, $\overline{OC} = \gamma$, $\overline{OD} = \rho$. Tendremos $\overline{DB} = \beta - \rho$, $\overline{DC} = \gamma - \rho$, y como $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -k$, resulta que

$$\frac{\beta - \rho}{\gamma - \rho} = -k,$$

es decir:

$$\rho\ (1 + k) = \beta - k\gamma.$$

Siendo O el punto medio de DD', se tiene $\overline{OD'} = -\rho$, $\overline{D'B} = \beta + \rho$, $\overline{D'C} = \gamma + \rho$, y como $\dfrac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = k$, resulta que $\beta + \rho = k\ (\gamma + \rho)$, de donde $\rho\ (k - 1) = \beta - k\gamma$.

De estas ecuaciones obtendremos los valores de ρ:

$$\rho = \frac{\beta - k\gamma}{1 + k} = \frac{\beta - k\gamma}{k - 1}.$$

La igualdad $\dfrac{\beta - k\gamma}{k - 1} = \dfrac{\beta - k\gamma}{k + 1}$ es equivalente a $\beta = k\gamma$, es decir, a $\overline{OB} = k\overline{OC}$. Por consiguiente, el punto O queda bien determinado por $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = k$. El radio R de la circunferencia está definido por la condición de armonía (v. p. 92)

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC}, \text{ es decir: } R^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC}.$$

Teorema. *La mediatriz de un lado* BC *de un triángulo corta las bisectrices del ángulo* $\widehat{A}$ *opuesto a ese lado en puntos de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

Sean E y E' (*fig.* 125) los puntos medios de los arcos que tienen por extremos B y C en la circunferencia circunscrita; hemos visto que EE' era la mediatriz de BC y que AE y AE' eran las bisectrices del ángulo $\widehat{A}$. Por consiguiente, el teorema enuncia una propiedad evidente.

Bisectrices de un triángulo. Circunferencia inscrita. Circunferencias exinscritas. — Hay seis bisectrices en un triángulo, dos por cada ángulo. Las denominaremos A α, A α', B β, B β', C γ, C γ', siendo A α, B β y C γ las bisectrices interiores (*fig.* 127).

Teorema. *Las tres bisectrices interiores* A α, B β *y* C γ *se cortan en un punto* ω, *que es el centro de una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, llamada* **circunferencia inscrita** *en este triángulo.*

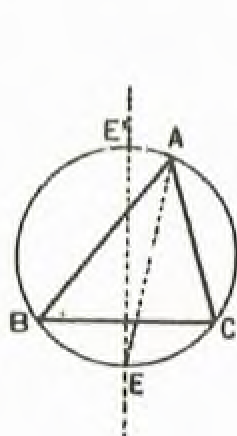


Fig. 125

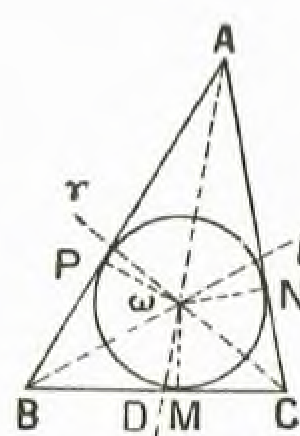


Fig. 126

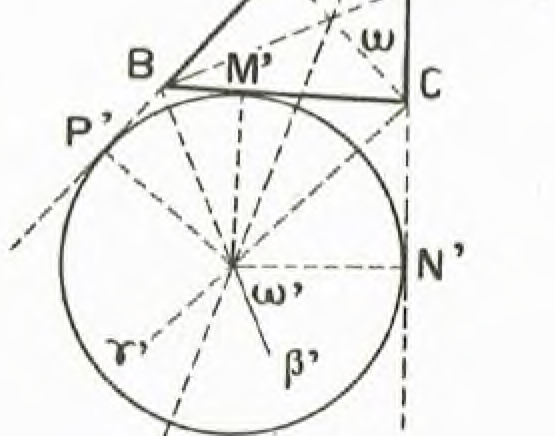


Fig. 127

La bisectriz interior A α corta (*fig.* 126), por hipótesis, el lado BC en un punto D situado entre B y C; los puntos A y D están cada uno a distinto lado de la bisectriz B β. Estas dos rectas AD o A α y B β tienen por tanto un punto común ω. Sean M, N y P las proyecciones ortogonales de ω sobre los lados BC, CA y AB respectivamente.

Puesto que ω es un punto de una bisectriz A α del ángulo $\widehat{A}$, tenemos ω N = ω P (v. p. 83); puesto que es un punto de B β, bisectriz del ángulo $\widehat{B}$, se verifica ω P = ω M: de ambas igualdades se deduce ω M = ω N, y por consiguiente ω es un punto de una de las bisectrices del ángulo C, evidentemente de la bisectriz C γ.

La circunferencia de centro ω y radio ω M = ω N = ω P es tangente a los tres lados en los puntos M, N y P.

Cálculo de AP = AN = x, BP = BM = y, CM = CN = z.

Se verifica que AP = AN porque son dos segmentos de tangentes al círculo (ω) limitados en los puntos de contacto; por idéntica razón BP = BM y CM = CN.

También tenemos que AP + PB = AB, es decir, $x + y = c$; igualmente $y + z = a$, $z + x = b$. Si suponemos que $a + b + c = 2p$, resulta que $x + y + z = p$ y por comparación con cada una de las tres igualdades tendremos:

$$x = p - a, \qquad y = p - b, \qquad z = p - c.$$

La suma $a + b + c$ de los lados de un triángulo se llama **perímetro** del triángulo; luego p es el semiperímetro del triángulo.

Teorema. *Dos bisectrices exteriores* B β', C γ' *y una bisectriz interior* A α *tienen un punto común* ω'. *Este punto es el centro de una circunferencia tangente a un lado* BC *del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos, y se llama* **circunferencia exinscrita** *en el ángulo* $\widehat{A}$ *del triángulo.*

Las dos bisectrices exteriores (*fig.* 127) B β', C γ' no son paralelas, pues si lo fuesen, las dos bisectrices interiores B β y C γ, que les son perpendiculares, también serían paralelas, lo que no es posible.

Sea ω' su punto común, M' la proyección ortogonal de ω' sobre el lado BC, N' y P' las proyecciones de ω' sobre las prolongaciones de AC y AB respectivamente. Puesto que ω' es un punto de B β', se tiene ω'M' = ω'P', y puesto que pertenece a C γ', también se tiene ω'M' = ω'N'; de estas igualdades se deduce que ω'P' = ω'N' y por tanto que ω' pertenece a una bisectriz del ángulo $\widehat{A}$, evidentemente a la bisectriz interior Aα.

La circunferencia de centro ω' y radio ω'M' = ω'P' = ω'N' es tangente al lado BC en M' y a las prolongaciones de los lados AB y AC en P' y N' respectivamente.

Cálculo de AN' = AP' = u, BM' = BP' = v, CN' = CM' = w.

La igualdad	AN' − CN' = AC	se puede escribir	$u - w = b.$
—	AP' − BP' = AB	—	$u - v = c.$
—	CM' + M'B = CB	—	$w + v = a.$

Sumándolas miembro a miembro: $2u = a + b + c = 2p$, de donde $u = p$ y en consecuencia $v = p - c$, $w = p - b$. Observar que el punto medio de MM' es también el de BC, es decir, A'.

Conclusión. *Las seis bisectrices se cortan, sin tener en cuenta los vértices, en cuatro puntos* ω, ω', ω'', ω'''. *Luego dos cualesquiera de ellas son secantes y su punto de intersección pertenecerá también a una tercera bisectriz.*

Hay cuatro circunferencias tangentes a tres rectas que forman un triángulo: la circunferencia inscrita y una circunferencia exinscrita en cada uno de los ángulos (fig. 128). No hay una quinta circunferencia, pues si existiese, su centro pertenecería a una de las bisectrices de $\widehat{A}$

y a una de las bisectrices de $\widehat{B}$, es decir, que sería uno de los cuatro puntos ω hallados, y por consiguiente la circunferencia sería una de las cuatro ya citadas.

TEOREMA. *El punto medio de $\omega\omega'$ es aquel en que la bisectriz $A\alpha$ corta la mediatriz* de BC.

La circunferencia de diámetro $\omega\omega'$ (*fig.* 127) pasa por B y C porque

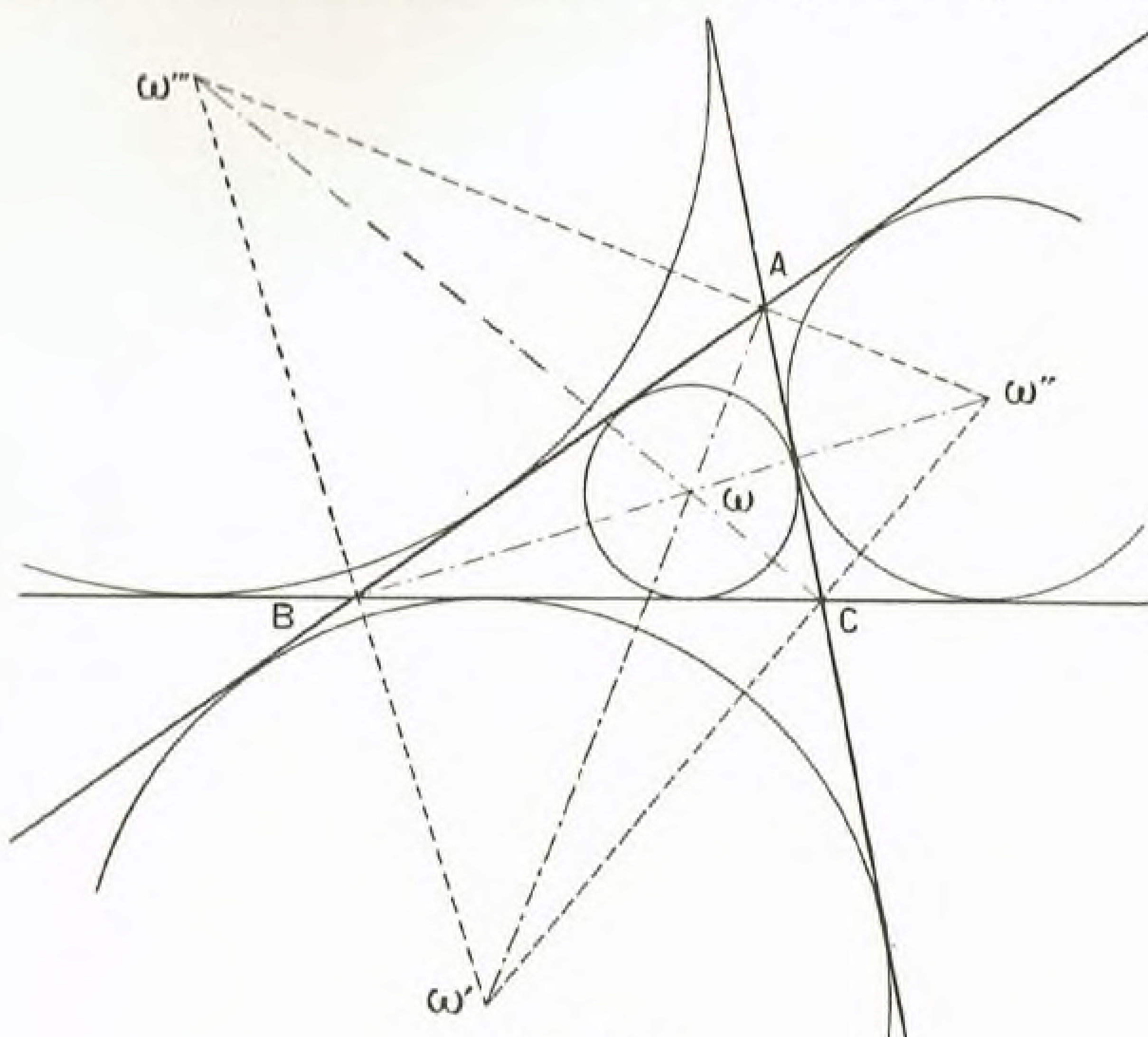


Fig. 128

los ángulos $\widehat{\omega B \omega'}$ y $\widehat{\omega C \omega'}$ que forman las bisectrices de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son rectos. Su centro, que pertenece al diámetro $\omega\omega'$, es decir, a la recta $A\alpha$, será también un punto de la mediatriz de BC. Este punto estará también sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.

Triángulo isósceles. — TEOREMA. *La bisectriz interior, la altura, la mediana y la mediatriz de un triángulo isósceles relativas al vértice* A *coinciden si* AB = AC.

Sea A′ el punto medio de BC (*fig.* 129); la mediatriz de BC cortará la circunferencia circunscrita al triángulo en A y E′; estos puntos son los puntos medios de los arcos BC, luego AE′ es la bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$. La recta AA′ es la mediana y también la altura. Todas estas rectas coinciden.

RECÍPROCO. *Un triángulo* ABC *en el que dos de las cuatro rectas consideradas en el teorema anterior coinciden, es isósceles.*

La mediatriz de BC corta la circunferencia circunscrita al triángulo en E y E′, puntos medios de los arcos BC: la bisectriz interior es AE′ por ejemplo, AH la altura y AA′ la mediana.

1º Si la mediatriz se confunde con una de las otras tres rectas, el punto A está sobre EE′, por tanto AB = AC. El triángulo es isósceles;

2º Si la mediana se confunde con la altura, la altura que pasa por A′, pie de la mediana, es EE′; el punto A está sobre EE′ y el triángulo es isósceles;

3º Si la mediana se confunde con la bisectriz, la mediana es A′E′, es decir, la mediatriz. El triángulo es isósceles;

4º Si la bisectriz y la altura se confunden, la altura es la perpendicular trazada por E′ al lado BC, es decir, la mediatriz. El triángulo es isósceles.

Triángulo rectángulo. — Sea $\widehat{A}$ el ángulo recto. El punto A es el ortocentro y A′, punto medio de BC, es el centro de la circunferencia circunscrita (*fig.* 130). La mediana AA′ es igual a la mitad de la hipotenusa.

Si, en un triángulo, una mediana AA′ *es igual a la mitad del lado opuesto* BC, *ese triángulo es rectángulo en* A.

En efecto, A′B = A′C = A′A. El lado BC es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo, y $\widehat{A}$, que es un ángulo inscrito en una semicircunferencia, será recto.

Triángulo equilátero. — Los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales a $\frac{\pi}{3}$, es decir, a 60 grados sexagesimales. El ortocentro, el baricentro y los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita coinciden. Si en un triángulo ABC, dos de los puntos enumerados coinciden, el triángulo es equilátero.

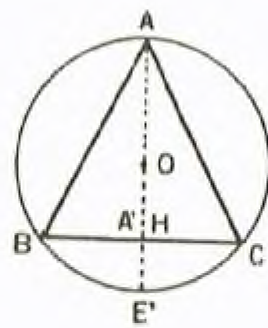


Fig. 129

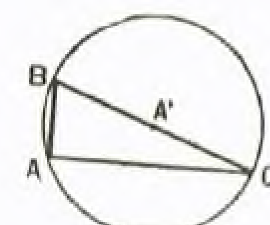


Fig. 130

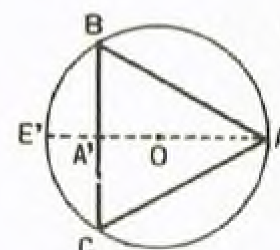


Fig. 131

PROBLEMA. *Construir un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia* (O) *dada y que tenga por vértice un punto dado de esta circunferencia.*

Se prolonga OA en OE′; sea A′ el punto medio de OE′ (*fig.* 131). La perpendicular a AE′ trazada por A′ cortará en B y C la circunferencia (O). El triángulo ABC es equilátero porque el punto O es a la vez el centro de la circunferencia circunscrita (O) y el baricentro, puesto que está situado a los dos tercios de la mediana AA′ a partir del punto A.

Triángulo rectángulo AA′B cuya hipotenusa es igual al doble de un lado. — Sea AA′B un triángulo rectángulo en A′ (*figura* 131), tal que AB = 2BA′. Sea C el simétrico de B con relación a AA′. Tendremos AB = AC porque AA′ es, por construcción, mediatriz de BC; BC = AB, pues AB = 2BA′ = BC. Luego, el triángulo ABC es equilátero y, por consiguiente, el ángulo $\widehat{B}$ de este triángulo tiene por medida $\frac{\pi}{3}$.

Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo AA′B *tiene por medida* $\frac{\pi}{3}$ *y el otro ángulo agudo tiene por medida* $\frac{\pi}{6}$.

Relaciones métricas en el triángulo

Relaciones métricas en un triángulo rectángulo. Relaciones métricas en un triángulo cualquiera. Diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo. Lugar de los puntos M tales que $\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = k$. Suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo. Lugar geométrico de los puntos M tales que $\overline{MB}^2 + MC^2 = k$. Fórmula de Stewart

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. — *Se dice que un segmento es* **medio proporcional** *entre otros dos cuando el cuadrado de la medida de este segmento es igual al producto de las medidas de los otros dos.*

TEOREMA. *En un triángulo* ABC, *rectángulo en* A, *un lado cualquiera* AB *es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección* BH *sobre ella* (fig. 132).

Los triángulos AHB y CAB tienen dos ángulos iguales ($\widehat{HBA} = \widehat{ABC}$ porque son ángulos que se confunden, y $\widehat{AHB} = \widehat{CAB}$ porque son rectos), por tanto, los triángulos son semejantes y sus lados son proporcionales (v. p 91).

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BH}{BA}.$$

De donde $\overline{BA}^2 = BC \cdot BH$.

Bajo esta forma que expresa una propiedad de las longitudes, la relación no caracteriza un triángulo rectángulo. En la figura 133 hemos dibujado un triángulo A′B′C′ en el que B′A′ = BA, B′C′ = BC y B′H′ = BH, que no es, sin embargo, rectángulo, aunque se verifique $\overline{B'A'}^2 = B'C' \cdot B'H'$.

Por el contrario, la relación entre los valores algebraicos

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$$

es característica, como vamos a demostrarlo.

RECÍPROCO. *Si en un triángulo* ABC, *de altura* AH, *se tiene*

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH},$$

el triángulo es rectángulo en A.

Siendo positivo el producto $\overline{BC} \cdot \overline{BH}$, resulta que H y C están a un mismo lado del punto B en la recta BC; los triángulos AHB y CAB tienen, en este caso, un ángulo común (lo que no sucede en los triángulos A′H′B′ y C′A′B′), que es el ángulo $\widehat{B}$, comprendido entre lados proporcionales, puesto que, según la hipótesis, $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BA}}$.

Luego estos triángulos son semejantes y $\widehat{BAC} = \widehat{BHA} = \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, el triángulo ABC es rectángulo en A.

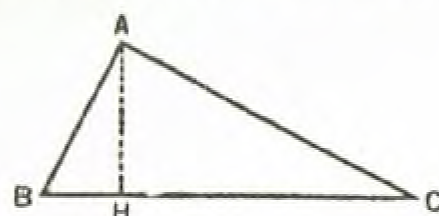


Fig. 132

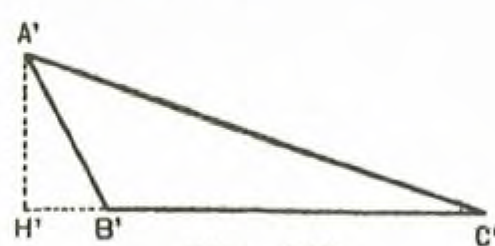


Fig. 133

TEOREMA. *En un triángulo* ABC, *rectángulo en* A, *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

De las igualdades

$$\overline{BA}^2 = BC \cdot BH,$$
$$\overline{CA}^2 = BC \cdot CH$$

se deduce

$$\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = BC \cdot BH + BC \cdot CH = BC(BH + CH) = \overline{BC}^2,$$

puesto que

$$BH + CH = BC.$$

RECÍPROCO. *Si en un triángulo* ABC *se tiene* $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, *el triángulo es rectángulo en* A.

Construyamos un triángulo A'B'C' de modo que $\widehat{A'}$ sea recto, que A'B' = AB y A'C' = AC. Siendo rectángulo este triángulo, $\overline{B'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C'}^2$, $\overline{B'C'}^2$ será igual a $\overline{BC}^2$ y por tanto B'C' = BC. Los dos triángulos ABC y A'B'C' tinen sus tres lados iguales; por tanto, los triángulos son iguales y $\widehat{A} = \widehat{A'} = \frac{\pi}{2}$.

APLICACIÓN. *Calcular la longitud de una cuerda* AB *de un círculo de radio* R, *situada a una distancia* OH = d *del centro.*

El triángulo AOB es isósceles (*fig.* 134); OH es la mediatriz de AB, por tanto $HA = HB = \frac{AB}{2}$. El triángulo AHO es rectángulo en H, por consiguiente, $\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HA}^2$, es decir,

$$R^2 = d^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4},$$
$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}.$$

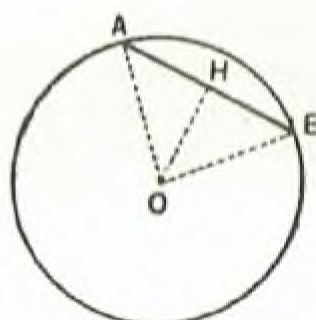


Fig. 134

CONSECUENCIAS. 1° *Toda cuerda es menor que un diámetro:* AB < 2R;

2° *De dos cuerdas desiguales, la mayor es la más próxima al centro, pues si* d *aumenta,* AB *disminuye;*

3° *Las cuerdas* AB *cuya longitud es un número fijo* 2*a*, *son tangentes a un círculo de centro* O *y radio* $OH = \sqrt{R^2 - a^2}$.

TEOREMA. *En un triángulo ABC, rectángulo en* A, *la altura* AH *es media proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa* (fig. 132).

Los triángulos AHB y CHA tienen dos ángulos iguales $\widehat{ABH} = \widehat{CAH}$ (ángulos complementarios del ángulo $\widehat{C}$), y $\widehat{AHB} = \widehat{CHA}$ (ángulos rectos); por tanto, los triángulos son semejantes y sus lados (v. página 91) son proporcionales. Por consiguiente, se tiene

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH},$$

es decir, $\overline{AH}^2 = HC \cdot HB$.

Esta condición no es característica. Por el contrario, la relación

$$\overline{AH}^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC}$$

sí lo es, como lo demuestra el recíproco siguiente.

RECÍPROCO. *Si en un triángulo* ABC, *de altura* AH, *se tiene*

$$\overline{AH}^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC},$$

el triángulo es rectángulo en A (fig. 135).

Puesto que $\overline{HB} \cdot \overline{HC}$ es negativo, H estará situado entre B y C, y por tanto la altura AH cortará la semicircunferencia de diámetro BC en un punto A', situado al mismo lado que A con relación a BC. El triángulo A'BC es rectángulo en A' (el ángulo $\widehat{A'}$ está inscrito en una semicircunferencia), por consiguiente, se tiene $\overline{HA'}^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC} = \overline{HA}^2$. De donde HA = HA' y por tanto A y A' se confunden. El triángulo ABC es rectángulo en A.

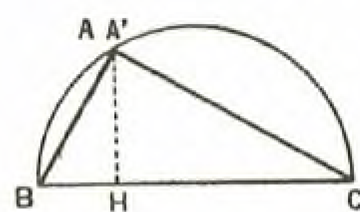


Fig. 135

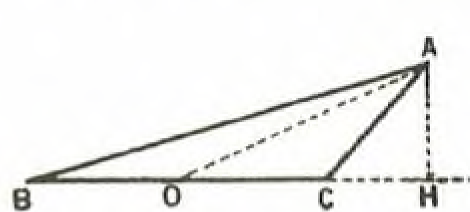


Fig. 136

Relaciones métricas en un triángulo cualquiera. — TEOREMA. *En un triángulo* ABC, *en que su altura es* AH, *se tiene* (fig. 136)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{BH}.$$

Los triángulos AHC y AHB son rectángulos, por tanto:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2,$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2,$$

por consiguiente:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{HB}^2 = (\overline{HC} - \overline{HB})(\overline{HC} + \overline{HB})$$
$$\overline{HC} - \overline{HB} = \overline{HC} + \overline{BH} = \overline{BC} \text{ (fórmula de Chasles)}$$
$$\overline{HC} + \overline{HB} = (\overline{HB} + \overline{BC}) + \overline{HB};$$

luego

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}(2\overline{HB} + \overline{BC}),$$

es decir,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{HB} \cdot \overline{BC}$$

o, sustituyendo $\overline{HB}$ por $-\overline{BH}$,

o $$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{BC}.$$

Diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo. — TEOREMA. *La diferencia de los cuadrados de dos lados* AB *y* AC *de un triángulo* ABC, *en el que* AH *es una altura y* AO *una mediana, es igual a* $2BC \cdot \overline{OH}$ (*fig.* 136).

Anteriormente hemos establecido la igualdad

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = (\overline{HC} - \overline{HB})(\overline{HC} + \overline{HB}),$$

pero $\overline{HC} - HB = \overline{BC}$ y, por otra parte, $\overline{HC} = \overline{HO} + \overline{OC}$ y $\overline{HB} = \overline{HO} + \overline{OB}$, luego $\overline{HC} + \overline{HB} = 2\overline{HO} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Pero siendo O el punto medio de BC, tenemos $\overline{OB} = -\overline{OC}$ y, por consiguiente, $\overline{HC} + \overline{HB} = 2\overline{HO}$. Por tanto, tendremos

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{HO}$$
$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{OH}.$$

Lugar de los puntos M tales que $\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = k$. — TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos* M *de un plano tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos fijos* B *y* C *sea constante, es una recta perpendicular a* BC.

Sea O el punto medio de BC (*fig.* 137), M un punto del plano y H la proyección del punto M sobre BC. Según el teorema precedente:

$$\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{OH}.$$

La condición necesaria y suficiente para que esta diferencia tenga un valor constante *k* es que

$$2\,\overline{BC} \cdot \overline{OH} = k.$$

Esta igualdad prueba que el punto H es un punto fijo de la recta BC, perfectamente determinado sobre esta recta por la igualdad $\overline{OH} = \frac{k}{2\,\overline{BC}}$. Sea HM la recta ilimitada perpendicular a BC en el punto H. Esta recta es fija: ella constituye el lugar geométrico buscado.

Suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo. — TEOREMA. *La suma de los cuadrados de dos lados* AB *y* AC *de un triángulo* ABC, *en el que* AO *es una mediana, es igual al doble del cuadrado de esta mediana aumentado en la mitad del cuadrado del tercer lado* BC (fig. 136).

Sea AH la altura del triángulo ABC que es también la del triángulo ABO y en este último tenemos

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OC} \cdot \overline{OH}.$$

De un modo semejante en el triángulo ACO se tiene

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \cdot OH.$$

Como O es el punto medio de BC, se tiene $\overline{OC} = -\overline{OB}$, y por tanto,

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OB} \cdot \overline{OH}.$$

De estas igualdades se obtiene

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OB}^2,$$

es decir,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{OA}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

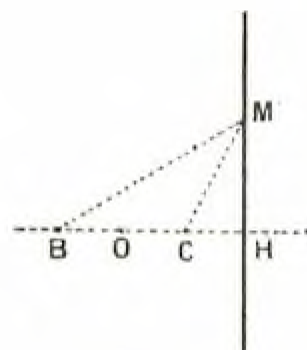


Fig. 137

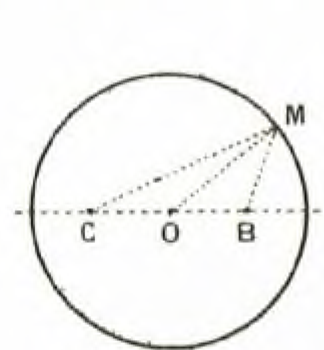


Fig. 138

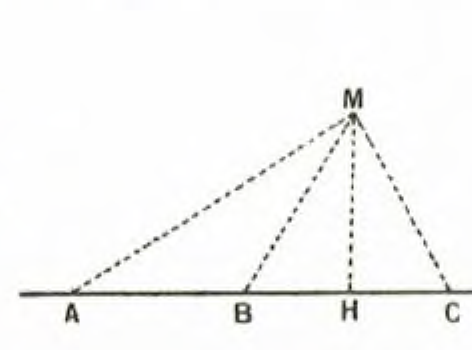


Fig. 139

Lugar geométrico de los puntos M tales que $\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k$.—Teorema. *El lugar geométrico de los puntos M del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias a dos puntos fijos B y C sea constante, es una circunferencia que tiene por centro el punto medio de BC, o no existe.*

En el triángulo MBC (*fig.* 138), se tiene

$$\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 2\overline{OM}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

La condición necesaria y suficiente para que M sea un punto del lugar es, por tanto, que

$$2\overline{OM}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2} = k,$$

es decir, que

$$\overline{OM}^2 = \frac{2k - \overline{BC}^2}{4}.$$

Si $k < \frac{\overline{BC}^2}{2}$, esta condición no se cumple para ningún punto del plano, y por tanto no existe el lugar geométrico.

Si $k = \frac{\overline{BC}^2}{2}$, el único punto del lugar es O.

Si $k > \frac{\overline{BC}^2}{2}$, el lugar es una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{\frac{2k - \overline{BC}^2}{4}}$.

Fórmula de Stewart.—Teorema. *Sean* A, B *y* C *tres puntos distintos, alineados, y* M *un punto del plano. Cualquiera que sea* M *se verifica* (fig. 139)

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

A esta relación se la denomina **fórmula de Stewart.** Sea H la proyección ortogonal del punto M sobre la recta ABC. En el triángulo MAC tenemos

$$\overline{MA}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CA} \cdot \overline{CH};$$

y en el triángulo MBC,

$$\overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{CH}.$$

Con estas dos igualdades hagamos operaciones para obtener $\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{CA}$, lo que equivale a eliminar CH de las dos ecuaciones:

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} = \overline{MC}^2 (\overline{BC} + \overline{CA}) + \overline{CA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{CB}^2 \cdot \overline{CA}$$

$$= \overline{MC}^2 \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{BC}\, (\overline{CA} + \overline{BC})$$

$$= \overline{MC}^2 \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BA}.$$

Sustituyendo en ella $\overline{BA}$ por $-\overline{AB}$, esta relación se escribe:

$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0$$

y constituye, bajo esta forma, la relación de Stewart.

Potencia de un punto respecto a un círculo

Propiedades de las secantes a la circunferencia. Condición para que cuatro puntos de un plano estén en una circunferencia. Condición para que una circunferencia pase por dos puntos y sea tangente a una recta en un punto dado. Potencia de un punto respecto a un círculo. Eje radical de dos circunferencias. Diferencia de las potencias de un punto P respecto a dos círculos. Construcción del eje radical. Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta. Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia dada. Posiciones relativas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo. Posición de los ejes radicales de tres círculos tomados dos a dos. Haces lineales de círculos. Circunferencia de un haz lineal que pasa por un punto. Círculos ortogonales. Círculos ortogonales a dos círculos dados

Propiedades de las secantes a la circunferencia. — Teorema. *Si dos secantes* AM′M *y* APP′ *cortan una circunferencia* (O) *en los puntos* M, M′, P, P′ *se tiene*

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}.$$

Hay que considerar dos casos, según que A sea exterior (*fig.* 140) o interior (*fig.* 140 *bis*) a la circunferencia (O). En los dos casos tracemos MP, M′P′ y elijamos las notaciones de modo que los ángulos $\widehat{PMM'}$ y $\widehat{PP'M'}$ estén ambos inscritos en un mismo segmento y por consiguiente sean iguales (v. p. 86). Para esto basta que P′ y M estén a un mismo lado de la recta PM′.

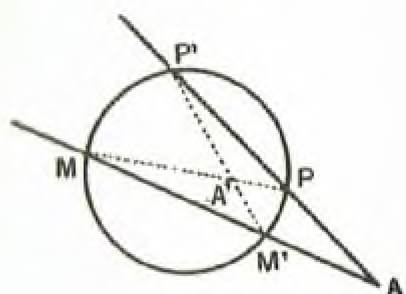


Fig. 140

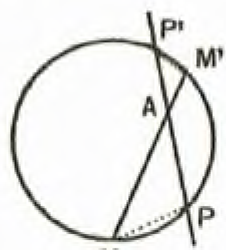


Fig. 140 *bis*

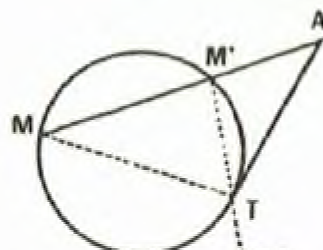


Fig. 141

Los triángulos APM y AM′P′ son semejantes (v. p. 91) porque tienen dos ángulos iguales: el ángulo $\widehat{A}$ común y los ángulos inscritos $\widehat{PMA} = \widehat{M'P'A}$ (v. las figuras). Por consiguiente, sus lados son proporcionales:

$$\frac{AM}{AP'} = \frac{AP}{AM'},$$

es decir, AM · AM′ = AP · AP′. Luego los dos productos $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ y $\overline{AP} \cdot \overline{AP'}$ tienen el mismo valor absoluto: los dos son positivos si A es exterior a la circunferencia y ambos negativos si A es interior. Por tanto, son iguales.

Teorema. *Si una tangente* AT *y una secante* AM′M *cortan una circunferencia* (O) *en los puntos* T, M, M′, *se verifica*

$$AT^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}.$$

Sólo hay que considerar un caso (*fig.* 141): cuando el punto A es exterior al círculo. Elijamos las notaciones de modo que A y M estén a uno y otro lado de la recta TM′. En estas condiciones (v. p. 86), el ángulo inscrito $\widehat{TMM'}$ es igual al ángulo $\widehat{ATM'}$.

En este caso los triángulos ATM y AM′T son semejantes porque tienen dos ángulos iguales (v. p. 91): $\widehat{A}$ común y $\widehat{TMA} = \widehat{M'TA}$. Por consiguiente, sus lados son proporcionales:

$$\frac{AM}{AT} = \frac{AT}{AM'}$$

El producto $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ es positivo, puesto que A es exterior al círculo, luego es igual a $\overline{AT}^2$.

Condición para que cuatro puntos de un plano estén en una circunferencia. — Siempre podremos elegir las letras que designan cuatro puntos distintos P, P′, M, M′, de los que tres no están alineados, de modo que las rectas PP′ y MM′ se corten en un punto A. Supongamos que sucede así.

La condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos P, P′, M *y* M′ *de un plano estén en una circunferencia* (fig. 142) *está expresada por*

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}.$$

En efecto, la condición es necesaria, pues si los cuatro puntos están en una circunferencia, se verifica que

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}.$$

La condición es suficiente. Por hipótesis, $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$. Por los puntos no alineados M, M′ y P pasa una circunferencia (O). La recta AP no es tangente a la circunferencia (O), pues si lo fuese, se tendría $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP}^2$. Luego AP corta esta circunferencia, primero en P y después en Q, y como M, M′, P, Q están en una misma circunferencia, $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$.

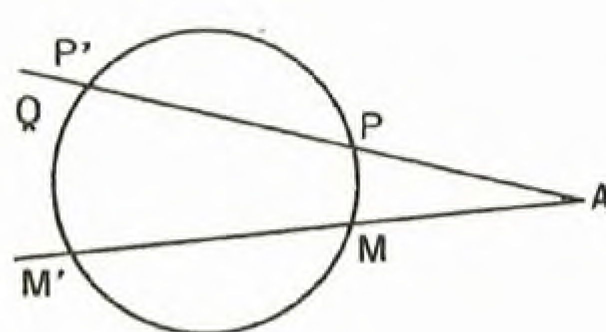


Fig. 142

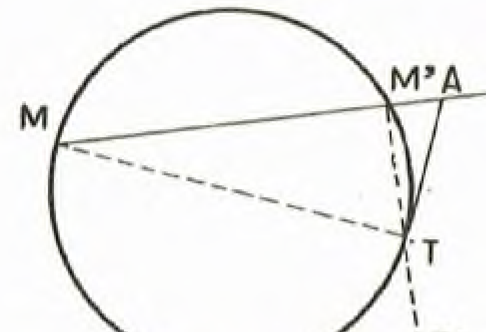


Fig. 143

Comparando esta condición con la hipótesis se deduce que $\overline{AQ} = \overline{AP'}$ y por tanto que los puntos P′ y Q se confunden; por consiguiente, P′ pertenece a la circunferencia (O) que pasa por M, M′ y P.

Condición para que una circunferencia pase por dos puntos y sea tangente a una recta en un punto dado. — *La condición necesaria y suficiente para que una circunferencia pase por dos puntos* M *y* M′ *y sea tangente en* T *a una recta* AT, *es* (fig. 143) *que la mediatriz de* MM′ *sea perpendicular en* T *a la recta* AT *o bien que* MM′ *corte en* A *la recta* AT *y se verifique*

$$\overline{AT}^2 = AM \cdot AM'.$$

Descartaremos el caso evidente en que la mediatriz de MM' es perpendicular en T a la recta AT. Supongamos por tanto que las rectas MM' y AT se cortan en A.

La condición es necesaria. En efecto, si la circunferencia (O) que pasa por M, M' y T es tangente en T a la recta AT, tenemos que $\overline{AT}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}$.

La condición es suficiente. En efecto, por los puntos M, M' y T, que no están en línea recta, pasa una circunferencia (O). La recta AT no es secante a esta circunferencia, pues si la cortase en un punto T' distinto de T, tendríamos que $\overline{AT} \cdot \overline{AT'} = \overline{AM} \cdot AM'$, lo que contradice la hipótesis. La recta AT que no es secante a la circunferencia (O) y la corta en un punto T, es tangente a (O) en este punto.

Potencia de un punto respecto a un círculo. — *Se llama* **potencia** *de un punto* A (fig. 144) *respecto a un círculo* (O) *el producto* $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ *de los segmentos de origen* A *y extremos* M *y* M', *que son los puntos en que una secante, arbitrariamente elegida y que pasa por el punto* A, *corta la circunferencia* (O).

Si el punto A está sobre la circunferencia (O), el producto es nulo.

Si el punto A está en el centro O del círculo de radio R, el producto es $-R^2$.

Si el punto A no está sobre la circunferencia ni en el centro O de ella, la recta OA queda bien determinada y corta la circunferencia en dos puntos P y P', diferentes de A (*fig.* 144). Se tiene $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$; pero $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$ y $\overline{AP'} = \overline{OP'} - \overline{OA}$, y como $\overline{OP'} = -\overline{OP}$ y $\overline{AP'} = -\overline{OP} - \overline{OA}$, el producto $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ será igual a $\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$, es decir, a $\overline{OA}^2 - R^2$.

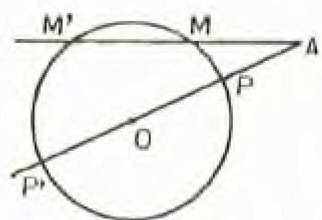


Fig. 144

Se comprueba que, en todos los casos posibles, la potencia del punto A respecto al círculo (O) es independiente de la secante elegida para definirla: su valor no depende más que de la distancia d = OA y del radio R del círculo. *La potencia de un punto respecto a un círculo es igual a* $d^2 - R^2$.

Eje radical de dos circunferencias. — *El lugar geométrico de los puntos* M *del plano que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias* (O) *y* (O'), *no concéntricas, es una recta perpendicular a la línea de los centros* OO'. Esta recta es por definición el **eje radical** de las circunferencias (O) y (O').

La potencia p de M respecto a una circunferencia (O) de radio R (*fig.* 145) es $\overline{MO}^2 - R^2$; la potencia p' de M respecto a la circunferencia (O') de radio R' es $\overline{MO'}^2 - R'^2$.

La condición necesaria y suficiente para que $p = p'$ se expresa por la igualdad

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$$

Siendo I el punto medio de OO', en el triángulo MOO', de altura MH, se verifica: $\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}$ (v. p. 97). De esta igualdad se deduce

$$2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2.$$

Como O y O' son dos puntos distintos conocidos, esta igualdad define un punto H, y sólo uno, de la recta OO'.

La condición necesaria y suficiente para que M sea un punto del lugar buscado es que MH sea perpendicular a OO' en H, siendo H un punto fijo; dicho de otro modo, el lugar geométrico es la perpendicular a OO' en el punto H.

Diferencia de las potencias de un punto P respecto a dos círculos. — Sea P un punto de la figura 145, K su proyección ortogonal sobre OO', p y p' sus potencias respectivas con relación a los círculos (O) y (O'). La diferencia $p - p'$ de las potencias del punto P respecto a los círculos (O) y (O') viene dada por la fórmula

$$p - p' = 2\overline{OO'} \cdot \overline{HK}.$$

En efecto, $p = \overline{PO}^2 - R^2$ y $p' = \overline{PO'}^2 - R'^2$; por consiguiente, $p - p' = \overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 - R^2 + R'^2$. En el triángulo POO' se tiene (v. p. 97). $\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IK}$. En la pregunta anterior hemos visto que H estaba determinado por la igualdad $2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2$.

Por tanto, sustituyendo, por una parte, $\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2$ y, por otra, $R^2 - R'^2$, tendremos para los valores hallados:

$$p - p' = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IK} - 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}$$
$$= 2\overline{OO'} \cdot \overline{HK}.$$

Esta fórmula es de uso frecuente en geometría.

Observación. La diferencia $p - p'$ de las potencias de un punto P respecto a dos circunferencias concéntricas es una constante $R'^2 - R^2$ que no es nula si las circunferencias son diferentes. En el caso de que $R' \neq R$, no será nunca $p = p'$, y por consiguiente no habrá ningún punto que tenga la misma potencia respecto a las dos circunferencias.

Construcción del eje radical. — 1er caso. Las dos circunferencias (O) y (O') se cortan en A y B (*fig.* 145). Los puntos A y B tienen una potencia igual a cero, respecto a los dos círculos: luego son dos puntos del eje radical, que es AB.

2º caso. Las dos circunferencias (O) y (O') son tangentes en A (*figura* 146). El punto de contacto A está sobre OO' y tiene una misma potencia cero respecto a los dos círculos: por tanto, es el pie del eje radical. Este es, por consiguiente, la perpendicular a OO' trazada por el punto A, es decir, la tangente común a los dos círculos.

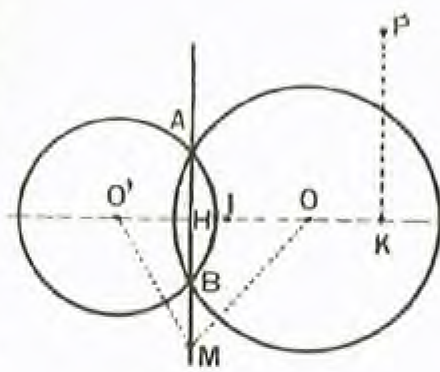


Fig. 145

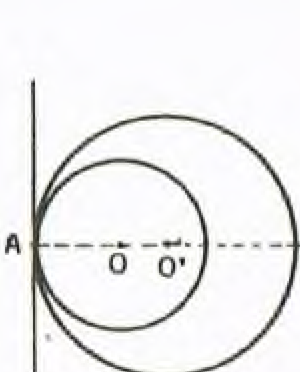


Fig. 146

3er caso. Las dos circunferencias (O) y (O') no tienen ningún punto común (*fig.* 147 y 148). Tracemos una circunferencia auxiliar (ω) que corte (O) en M y M' y que corte también (O') en P y P'. Unamos P con P' y M con M'; las rectas PP' y MM' se cortarán en general en un punto A. Al estar los puntos P, P', M y M' sobre una misma circunferencia (ω), se verifica $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}$: luego el punto A tiene igual potencia respecto a los círculos (O) y (O'); por consiguiente, este punto estará sobre el eje radical buscado, que será la perpendicular trazada por A a la recta OO'.

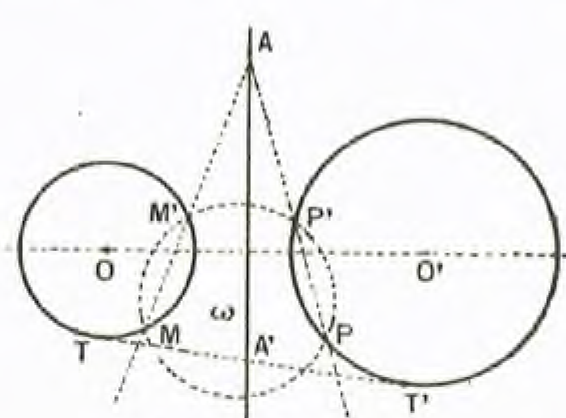


Fig. 147

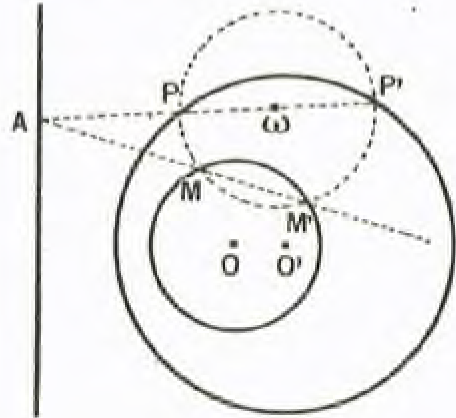


Fig. 148

Observación. Si una recta TT' es tangente común a los círculos (O) y (O'), siendo los puntos de contacto respectivos T y T', el punto A' centro de TT' es un punto del eje radical, pues la potencia de A' respecto al círculo (O) es $\overline{A'T}^2$ y respecto al círculo (O') es $\overline{A'T'}^2$, y estas dos cantidades son iguales (*fig.* 147).

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una recta. — *Hay dos circunferencias y solamente dos, tangentes a una recta dada* (D), *que pasan por dos puntos* A *y* B *situados a un mismo lado de esta recta, si las rectas* AB *y* (D) *son secantes.*

Tracemos una circunferencia (Γ) de radio cualquiera (*fig.* 149), que pase por A y B; tracemos la recta AB, que cortará la recta dada (D) en un punto I. Al estar los puntos A y B, por hipótesis, a un mismo lado de la recta (D), el punto I es exterior a la circunferencia (Γ). Por tanto, se puede trazar una tangente IT al círculo (Γ), y se tiene $\overline{IT}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$. Sean M y M' los dos puntos de la recta (D) definidos por IM = IM' = IT.

1º Hay dos circunferencias que pasan por A y B y son tangentes a la recta (D).

Son las circunferencias (C) y (C'), que pasando por A, B, M y A, B, M', son tangentes en M y M' a la recta (D), porque (v. p. 99 y 100), por construcción, $\overline{IM}^2 = \overline{IM'}^2 = \overline{IT}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$.

2º No existe ninguna otra circunferencia (C_1) que pasando por A y B sea tangente a la recta (D). Si existiese una, tendría un punto de contacto P con la recta (D) y se verificaría $\overline{IP}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$. Por consiguiente, P se confundiría con M o con M', y la circunferencia (C_1) que tendría tres puntos comunes con (C) o con (C'), se confundiría con una de ellas.

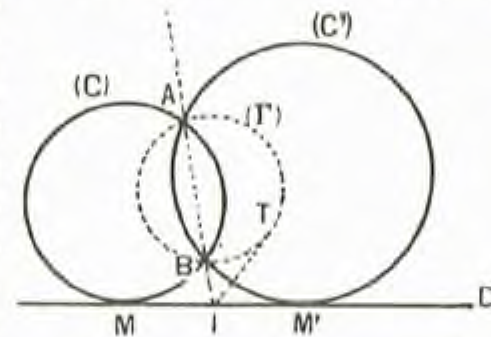


Fig. 149

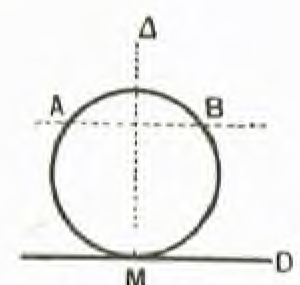


Fig. 150

Observación. Si AB fuese paralela a la recta (D) [*fig.* 150], la mediatriz (△) de AB cortaría en M la recta (D), y la circunferencia ABM, tangente en M a la recta (D), sería la única circunferencia que pasando por A y B fuese tangente a la recta (D).

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangentes a una circunferencia dada. — *Hay dos circunferencias y solamente dos, tangentes a una circunferencia dada* (O), *que pasan por dos puntos dados* A *y* B *situados los dos en el exterior o los dos en el interior de esta circunferencia.*

Se traza una circunferencia (Γ) que pase por A y B (*figura* 151) y que corte la circunferencia (O) en dos puntos distintos E y F; sea I el punto común a las dos rectas AB y EF que suponemos son secantes. Al ser los puntos A y B ambos exteriores o ambos interiores a la circunferencia (O), están por consiguiente sobre la porción de circunferencia (Γ) situada a un cierto lado de la recta EF, y la cuerda AB de (Γ) corta la cuerda EF de la misma circunferencia en I, exte-

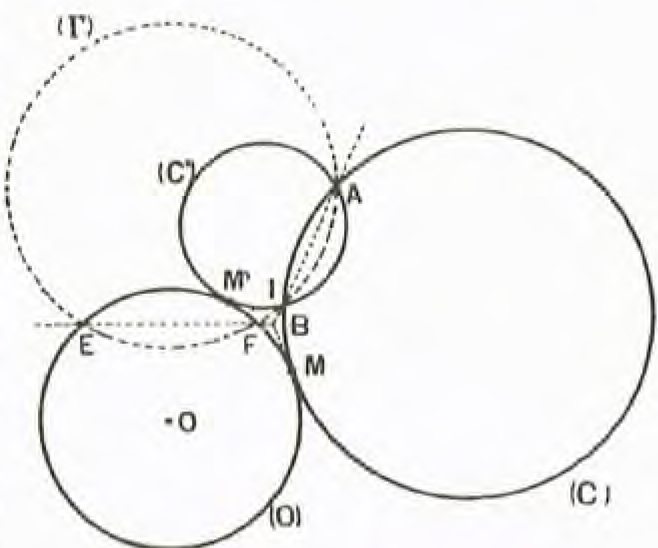


Fig. 151

rior a ella. Luego desde I, exterior a la circunferencia (O), se pueden trazar dos tangentes IM, IM' a (O). Sean M y M' los puntos de contacto de estas dos tangentes.

Hay dos circunferencias que pasando por A y B son tangentes a la circunferencia (O): éstas son (C) y (C'), que pasan por A, B, M y por A, B, M' respectivamente. En efecto, la circunferencia (C), por ejemplo, pasa por A y B: será tangente en M a la recta IM, porque $\overline{IM}^2 = \overline{IE} \cdot \overline{IF}$ [potencia de I respecto al círculo (O)] y porque $\overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$ [potencia de I respecto al círculo (Γ)] y, por consiguiente, $\overline{IM}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$. Siendo la recta IM tangente en M a los dos círculos (O) y (C), éstos serán también tangentes por definición. El círculo (C') es también tangente en M' al círculo (O).

No existe ninguna otra circunferencia (C_1) que pasando por A y B sea tangente en un punto P a la circunferencia (O). Si (C_1) existiese, AB sería el eje radical de (C_1) y (Γ); siendo EF el eje radical de (Γ) y (O), el punto común a estas dos rectas tendrá la misma potencia respecto a (O) y (C_1); IP será el eje radical de (O) y (C_1), porque I tiene la misma potencia con respecto a estas dos circunferencias y porque P es un punto común a estas últimas. Puesto que (C_1) y (O) serían, por hipótesis, tangentes en P, el eje radical IP sería tangente en P a cada una de ellas y en particular a la circunferencia (O). Luego P se confundiría con M o con M', porque hay solamente dos tangentes, IM, IM', trazadas desde I al círculo (O). La circunferencia (C_1), que tiene tres puntos comunes con (C) o con (C'), se confundiría con una de estas últimas.

OBSERVACIÓN. Si las rectas EF y AB fuesen paralelas, la mediatriz (△) de AB (*fig.* 152) y la mediatriz de EF serían dos diámetros paralelos del círculo (Γ), luego se confundirían. Ahora bien, la mediatriz de EF es también un diámetro de la circunferencia (O); por consiguiente, la mediatriz (△) de AB sería un diámetro de extremos M y M', que son puntos de la circunferencia (O).

Las circunferencias (C) y (C'), que pasan por A, B, M y por A, B, M' respectivamente, son tangentes al círculo (O) en M y M', y son las únicas circunferencias que pasando por A y B son tangentes a (O).

Posiciones relativas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo. — *La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias (O), de centro O y radio R, y (ω), de centro ω y radio r ≤ R, sean respectivamente las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo ABC es que se verifique*

$$\overline{O\omega}^2 = R^2 - 2Rr.$$

La condición es necesaria. Por hipótesis existe un triángulo ABC (*fig.* 153) inscrito en el círculo (O) y circunscrito al círculo (ω). Sea ω' el centro de la circunferencia exinscrita en el ángulo $\widehat{A}$: la circunferencia (E), de diámetro ωω', pasa por B y C, y su centro E es el punto medio de un arco BC (v. p. 96). La potencia de ω respecto al círculo (O) es $\overline{O\omega}^2 - R^2$, y su potencia respecto al círculo (E) es cero.

Si designamos por H el pie, sobre la línea de los centros OE, del eje radical BC de los dos círculos (O) y (E) y por K la proyección del punto ω sobre OE, la diferencia $\overline{O\omega}^2 - R^2$ de las potencias de este punto respecto a los dos círculos será también igual a $2\overline{OE} \cdot \overline{HK}$ (v. p. 100), es decir, a $-2Rr$, y tendremos

$$\overline{O\omega}^2 = R^2 - 2Rr.$$

Fig. 152

Fig. 153

La condición es suficiente. Por hipótesis $\overline{O\omega}^2 = R^2 - 2Rr$. En primer lugar observaremos que $O\omega < R - r$ implica que el círculo (ω) sea interior al círculo (O). Elijamos arbitrariamente un punto A sobre la circunferencia (O). Tracemos Aω; sea E el otro punto de intersección con la circunferencia (O). Tracemos la circunferencia (E) con centro en E y que pasa por ω; ésta corta (O) en los puntos B y C. La circunferencia circunscrita al triángulo ABC es (O); el centro de la circunferencia inscrita a este triángulo está sobre la circunferencia (E) y sobre la bisectriz AE del ángulo $\widehat{A}$, luego es ω o ω': pero sólo ω es interior a la circunferencia circunscrita (O), por consiguiente es ω. El radio x de la circunferencia inscrita viene dado por la fórmula

$$\overline{O\omega}^2 = R^2 - 2Rx,$$

por consiguiente es r. Luego la circunferencia inscrita al triángulo es (ω).

CONCLUSIÓN. Como el punto A ha sido elegido arbitrariamente, *hay una infinidad de triángulos que admiten (O) y (ω) como circunferencias circunscrita e inscrita, si se verifica* $\overline{O\omega}^2 = R^2 - 2Rr$.

Posición de los ejes radicales de tres círculos tomados dos a dos. — *Los ejes radicales de tres círculos (O), (O') y (C), cuyos centros O, O' y C forman un triángulo, son rectas concurrentes.*

Estos ejes radicales existen, puesto que dos cualesquiera de las circunferencias citadas no son concéntricas. El eje radical (D) de (O) y (O') [*fig.* 154] corta el eje radical (△) de (C) y (O) en un punto A, pues estos ejes radicales, perpendiculares a los lados OO' y OC de un ángulo, no son paralelos. El punto A tiene la misma potencia respecto a (O) y (O'), propiedad del eje radical (D), y con relación a (O) y (C), propiedad de (△): luego tiene la misma potencia respecto a (O') y (C), y pertenece por consiguiente al eje radical (△') de estos dos círculos. Por tanto, los tres ejes radicales concurren y su punto de intersección es, por definición, el **centro radical** de los tres círculos.

Fig. 154

Los ejes radicales de tres círculos (O), (O') y (C), cuyos centros O, O' y C son distintos y están en línea recta, son, en general, paralelos.

En efecto, son perpendiculares a la recta que pasa por los tres centros y que se llama línea de los centros. Si, excepcionalmente, los ejes radicales (D) y (△) se confundiesen, todo punto de esa recta tendría la misma potencia respecto a los círculos (O), (O'), (C) y por consiguiente sería un punto de (△'). Los tres círculos (O), (O'), (C) tendrían entonces el mismo eje radical. Vamos a estudiar este caso, que es muy interesante

Haces lineales de círculos. — *Se dice que un círculo (C) pertenece al* **haz lineal (O · O')** *de círculos definido por dos círculos distintos (O) y (O') no concéntricos, cuando los tres círculos (O), (O'), (C) tienen el mismo eje radical.*

1er CASO. Supongamos que (O) y (O') tienen dos puntos comunes A y B. Toda circunferencia que pase por A y B es una circunferencia del haz (O · O'). Evidentemente el eje radical de dos cualesquiera de los tres círculos (O), (O') y (C) es AB (*fig.* 155).

Fig. 155

Fig. 156

Toda circunferencia (C) del haz (O · O') pasa por A y B. En efecto, el punto A del eje radical común tiene la misma potencia (cero) respecto a (O) y (C): luego la circunferencia (C) pasa por A y también por B. Se dice que A y B son los **puntos fijos** del haz.

2º CASO. Supongamos que (O) y (O') son tangentes en A (*fig.* 156). Toda circunferencia (C) tangente en A a los dos círculos dados es una circunferencia del haz. Evidentemente el eje radical de dos cualesquiera de los tres círculos es la tangente común en el punto A.

Toda circunferencia (C) del haz (O · O') pasa por A; su centro C es un punto de la recta OO': luego (C) es tangente en A a los dos círculos dados.

3er CASO. Supongamos que (O) y (O') no son secantes (*fig.* 157). Sea H el pie del eje radical, A y B los puntos en que la circunferencia (O) corta OO' y A', B' los puntos en que OO' es cortado por la circunferencia (O'). Todo punto del eje radical de las dos circunferencias (O) y (O') es exterior a ellas: luego podemos trazar desde H una tangente HT a una de las circunferencias. Señalemos en OO' los dos puntos I y J definidos por HI = HJ = HT.

Tendremos $\overline{HT}^2 = \overline{HA'} \cdot \overline{HB'}$ [potencia de H respecto a (O')] y $\overline{HA'} \cdot \overline{HB'} = \overline{HA} \cdot \overline{HB}$ [H está sobre el eje radical (D)]; por con-

Fig. 157

siguiente, como $HT = HI$, resulta que

$$\overline{HI}^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HA'} \cdot \overline{HB'}.$$

Los puntos I y J dividen armónicamente los segmentos AB y A'B'.
Sean P y Q dos puntos de la recta OO', conjugados armónicos respecto a I y J, es decir, tales que

$$\overline{HI}^2 = \overline{HP} \cdot \overline{HQ}.$$

Todo círculo (C) de diámetro PQ es un círculo del haz. En efecto, siendo el punto H tal que $\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HA'} \cdot \overline{HB'} = \overline{HP} \cdot \overline{HQ}$, pertenece a los tres ejes radicales de los círculos (O), (O') y (C) tomados dos a dos: estos ejes radicales son perpendiculares a OO', luego se cunfunden.

Toda circunferencia del haz corta OO' en P y Q, conjugados armónicos respecto a I y J. En efecto, H, que es un punto de (D), tiene la misma potencia respecto a los círculos (O), (O') y (C); por consiguiente, $\overline{HA} \cdot \overline{HB} = \overline{HP} \cdot \overline{HQ}$, lo que implica $\overline{HI}^2 = \overline{HP} \cdot \overline{HQ}$.

Los puntos I y J, conjugados armónicos de todos los pares de puntos (A, B), (A', B'), (P, Q), se denominan **puntos de Poncelet del haz (O · O')**.

OBSERVACIÓN. Entre los círculos del haz figuran en particular aquellos que tienen como centros los puntos I y J y su radio es igual a cero. Se les denomina **círculos puntos** del haz.

Circunferencia de un haz lineal que pasa por un punto. — TEOREMA. *Por un punto* M *situado fuera del eje radical* (D) *pasa una circunferencia, y sólo una, del haz* (O · O').

La proposición expuesta en el 1er caso (p. 101, *fig.* 155) equivale a la siguiente, que ya se demostró anteriormente: por tres puntos A, B, M no situados en línea recta pasa una circunferencia y sólo una.

En el 2º caso (*fig.* 156) hay una circunferencia y sólo una que pasando por dos puntos A y M sea tangente en A a una recta (D) dada.

Examinemos el 3er caso. Tracemos HM (*fig.* 157). Esta recta corta la circunferencia buscada en un punto M' que puede ser o no diferente de M. Este punto queda definido por $\overline{HM} \cdot \overline{HM'} = \overline{HT}^2$. Está bien determinado. La mediatriz de MM' corta la línea de los centros en C. La circunferencia (C) de centro C y que pasa por M, pasa también por M' y corta en P y Q la recta OO'. Se tiene $\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = \overline{HM} \cdot \overline{HM'}$ [potencia de H respecto al círculo (C)] y $\overline{HM} \cdot \overline{HM'} = \overline{HT}^2$, por construcción. Por consiguiente, $\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = \overline{HT}^2$. El círculo (C) es el único del haz que pasa por el punto M.

OBSERVACIÓN. Se comprueba que MP y MQ, rectas perpendiculares conjugadas armónicas de MI y MJ, son las bisectrices del ángulo $\widehat{IMJ}$.
Por tanto, $\frac{MI}{MJ} = \frac{PI}{PJ}$. Cada circunferencia del haz puede ser definida como el lugar de los puntos tales que la razón de sus distancias a los puntos de Poncelet tiene un valor constante dado.

Círculos ortogonales. — *Se dice que dos círculos* (O) *y* (O') *son* **ortogonales** *cuando son secantes y sus tangentes en uno de los puntos de intersección son perpendiculares.*

Mediante un volvimiento alrededor de la línea de los centros OO' se comprueba que las tangentes en el otro punto de intersección B son también perpendiculares (*fig.* 158).

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos círculos* (O) *y* (O') *de radios* R *y* R' (fig. 158) *sean ortogonales es*

$$\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2.$$

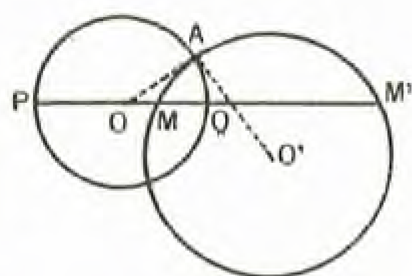


Fig. 158

La condición es necesaria. Los círculos (O) y (O') son ortogonales por hipótesis: luego el radio OA, perpendicular por definición a la tangente en A al círculo (O), es, por hipótesis, tangente al círculo (O'). El triángulo OAO' es rectángulo y se verifica $\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2$.

La condición es suficiente. Por hipótesis, $\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2$. Esta es la condición necesaria y suficiente para que exista un triángulo OAO', de lados OA = R, O'A = R' y rectángulo en A. Por consiguiente, los círculos (O) y (O') tienen un punto común A y en este punto son ortogonales.

La condición enunciada es equivalente a esta otra:
La condición necesaria y suficiente para que dos círculos sean ortogonales es que la suma de las potencias del centro de uno de ellos respecto a estos círculos sea nula.

Y equivale también a la siguiente:
La condición necesaria y suficiente para que dos círculos sean ortogonales es que todo diámetro de uno de ellos, secante al otro, sea cortado armónicamente por él.

En efecto, si un diámetro PQ del círculo (O) corta en M y M' el círculo (O'), la condición de armonía

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}$$

es también la condición para que la suma de las potencias del punto O respecto al círculo (O), $-\overline{OP}^2$, y respecto al círculo (O'), $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$, sea nula.

Círculos ortogonales a dos círculos dados. — Sean (O) y (O') los dos círculos dados.

1er CASO. Supongamos que (O) y (O') tienen dos puntos A y B comunes (*fig.* 159). Todos los círculos del haz lineal en que A y B son los puntos de Poncelet cortan en P y Q la recta AB, y se tiene por definición:

$$(P \cdot Q \cdot A \cdot B) = -1.$$

El diámetro PQ de estos círculos es dividido armónicamente por los puntos A y B, por lo que estos círculos son ortogonales a todos los que pasan por A y B, y en particular a los círculos (O) y (O').

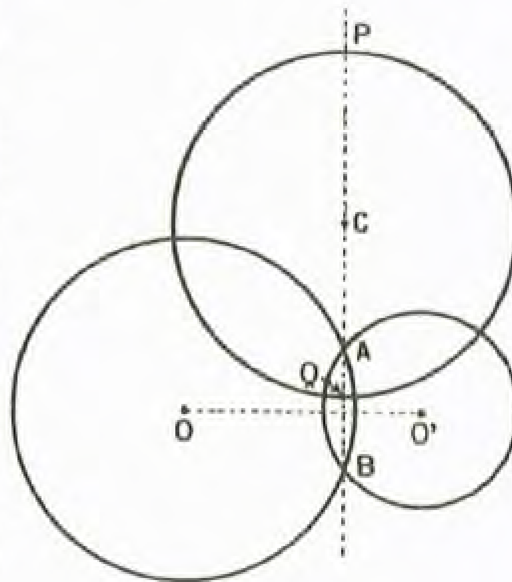


Fig. 159

Recíprocamente, si (C) es un círculo ortogonal a (O) y (O'), su centro C tiene la misma potencia con relación a estos dos círculos [el cuadrado del radio del círculo (C)]: luego está sobre su eje radical AB. Éste corta el círculo (C) en P y Q y al ser ortogonales los círculos (O) y (C), resulta que (P · Q · A · B) = —1. Por consiguiente, el círculo (C) forma parte del haz en que A y B son los puntos de Poncelet.

2º CASO. Supongamos que (O) y (O') son tangentes en A (*fig.* 160).

Todos los círculos tangentes a OO' en A son ortogonales a los círculos (O) y (O') y también a todos los del haz (O · O'). Recíprocamente, todo círculo (C) ortogonal a los círculos (O) y (O') tiene su centro en el eje radical (D), que es la tangente común a estos dos círculos. Su radio es CA. El círculo (C) es, por consiguiente, tangente a OO' en A. Todos los círculos (C) son círculos de un haz lineal.

3er CASO. Supongamos que (O) y (O') no se cortan (*fig.* 161); notaciones ya utilizadas para los haces de círculo.

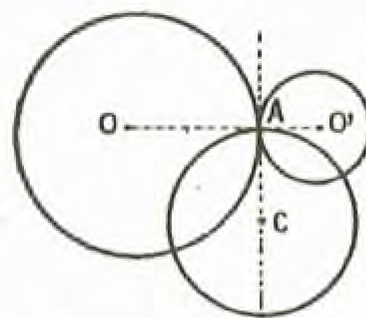


Fig. 160

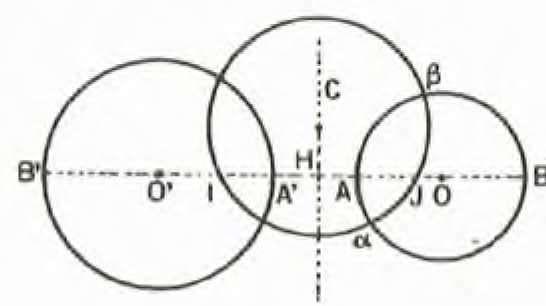


Fig. 161

Todos lo círculos (C) que pasan por los puntos de Poncelet I, J del haz (O · O') son ortogonales a los círculos (O) y (O'), porque estos círculos cortan armónicamente en I y J los diámetros AB y A'B' de los círculos (O) y (O') respectivamente.

Recíprocamente, si (C) es ortogonal a (O) y (O'), su centro C tiene la misma potencia respecto a estos dos círculos, luego es un punto del eje radical (D) que corta en H la línea de los centros. El círculo de diámetro CO pasa por H y por los puntos α, β comunes a los círculos (C) y (O): resulta que H, punto exterior al círculo (O), es interior al (C) y que, por consiguiente, este círculo corta en I' y J' el diámetro OO'. Luego lo corta armónicamente. Siendo H el punto medio de la cuerda I'J', se tiene HI' = HJ' y $HI'^2 = \overline{HA} \cdot \overline{HB}$. Por tanto, I' y J' se confunden con los puntos de Poncelet I y J.

Se observará que, en los tres casos, todo círculo ortogonal a dos círculos no concéntricos es ortogonal a todos los círculos del haz determinado por estos dos círculos.

Este estudio se resume diciendo:
Los círculos ortogonales a dos círculos (O) *y* (O') *no concéntricos son todos los círculos de un haz lineal que se denomina* **haz conjugado** (O · O'). *Estos círculos son ortogonales a todos los círculos del haz* (O · O').

Cuando los círculos (O) *y* (O') *no son tangentes, los puntos fijos de uno cualquiera de los dos haces son los puntos de Poncelet del segundo haz.*

Polar de un punto con relación a una circunferencia

Puntos conjugados con relación a una circunferencia. Polar de un punto con relación a una circunferencia. Polo de una recta con relación a una circunferencia. Posiciones relativas del polo y de la polar. Construcción de la polar de un punto con relación a una circunferencia. Rectas conjugadas con relación a una circunferencia. Cuadrilátero armónico

Puntos conjugados con relación a una circunferencia. — *Se dice que dos puntos* A *y* M *son* **conjugados con relación a una circunferencia (O),** *cuando la recta* AM *es cortada por la circunferencia en dos puntos* P *y* Q (fig. 162), *conjugados armónicos con*

relación a A *y* M. Esta definición es independiente del orden en que se enuncien los dos puntos.

Las condiciones necesarias y suficientes para que A y M sean conjugados con relación a la circunferencia (O) son:

1º que AM corte la circunferencia;

2º que la circunferencia de diámetro AM sea ortogonal a la circunferencia (O), porque la condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias sean ortogonales es que un diámetro de una de ellas, AM por ejemplo, sea cortado armónicamente por la otra en P y Q.

De estas dos condiciones, se omite la primera; se justifica esta omisión por consideraciones de geometría analítica, fuera de nuestro estudio. Se admite, pues, que *dos puntos* A *y* M *son conjugados, con relación a una circunferencia* (O), *cuando la circunferencia de diámetro* AM *es ortogonal a la circunferencia* (O).

Polar de un punto con relación a una circunferencia. — TEOREMA. *El lugar de los puntos* M *conjugados de un punto fijo* A *con relación a una circunferencia* (O) *es una recta* (D), *excepto en el caso de que el punto* A *sea el centro de la circunferencia* (O). *Esta recta se* **llama polar del punto A con relación a la circunferencia (O)** [*fig.* 162].

Fig. 162

Siendo A distinto del punto O, la recta OA queda determinada: ella corta en B y C la circunferencia (O) [OB = OC = R]; sea H el conjugado armónico de A con relación a los puntos B y C. H es un punto de OA bien determinado por la condición

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$$

Sea (D) la perpendicular a OA en el punto H.

Si el punto M es conjugado del punto A, la circunferencia de diámetro AM, que por definición es ortogonal a la circunferencia (O), corta el diámetro BC de esta circunferencia en dos puntos conjugados armónicos con relación a B y C; uno de estos puntos es A, el otro es H. Por consiguiente, el ángulo $\widehat{AHM}$, inscrito en una semicircunferencia, es recto y el punto M está sobre la recta (D).

Si M es un punto tomado al azar sobre la recta (D), la circunferencia de diámetro AM pasa por A y por H, luego corta armónicamente el diámetro BC de la circunferencia (O) y por tanto es ortogonal a esta circunferencia. Por consiguiente, el punto M es conjugado del punto A.

La recta indefinida (D) constituye el lugar de los conjugados de A, es decir, la polar del punto A con relación a la circunferencia (O).

Polo de una recta con relación a una circunferencia. — La polar de un punto A (*fig.* 162) con relación a una circunferencia (O) es una recta (D) perpendicular a la recta OA en el punto H de esta recta definido por la relación $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$, siendo R el radio de la circunferencia (O).

Recíprocamente, si (D) es una recta del plano que no pasa por el centro O de la circunferencia (O), hay un punto A y uno sólo, obtenido bajando desde O la perpendicular OH sobre la recta (D) y eligiendo sobre esta recta el punto A definido por la igualdad

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2.$$

Este punto A tiene por polar la recta dada (D).

DEFINICIÓN. *Se llama* **polo** *de una recta* (D), *que no pasa por el centro* O *de una circunferencia, con relación a esta circunferencia, el punto* A *cuya polar con relación a esta circunferencia es la recta* (D).

Posiciones relativas del polo y de la polar. — *La condición necesaria y suficiente para que una recta* (D) *sea tangente a una circunferencia* (O) *es que el polo de esta recta esté sobre la recta* (D) *o sobre la circunferencia* (O).

Fig. 163

En efecto, esta condición equivale a que la distancia OH del centro O de la circunferencia a (D) sea igual a R. Puesto que $OA \cdot OH = R^2$, dicha condición equivale a OA = R, igualdad que expresa que A está sobre la recta (D) o que está sobre la circunferencia (O).

La condición necesaria y suficiente para que una recta (D) *corte una circunferencia* (O) *en dos puntos*, T *y* T′ *es que el polo de esta recta sea exterior a la circunferencia* (O) [fig. 164].

En efecto, la condición necesaria y suficiente para que (D) corte la circunferencia es que la distancia OH del centro O a la recta sea menor que R, radio de la circunferencia (O). La desigualdad $OH < R$ equivale a $OA > R$, puesto que $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$. Ella expresa que el punto A, polo de la recta, es exterior a la circunferencia (O).

El punto A es, en este caso, exterior a la circunferencia (O) y se pueden trazar desde A dos tangentes a esta circunferencia: vamos a comprobar que estas son las rectas AT y AT′.

Puesto que el punto T está sobre la polar del punto A, la circunferencia de diámetro AT es, por definición, ortogonal a la circunferencia (O); por consiguiente, el diámetro AT y el radio OT de la circunferencia (O) son perpendiculares y como consecuencia AT es sin duda una de las dos tangentes trazadas desde A a la circunferencia (O). La otra tangente es AT′.

Los puntos T *y* T′ *en que la polar de un punto* A, *exterior a una circunferencia* (O), *corta la circunferencia* (O) *son los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el punto* A *a la circunferencia.*

Si la polar de un punto A *con relación a una circunferencia* (O) *pasa por un punto* B, *la polar de* B *con relación a la circunferencia pasa por* A (fig. 163).

En efecto, puesto que la polar de A pasa por B, la circunferencia de diámetro AB es ortogonal a la circunferencia (O); por consiguiente, la polar del punto B pasa por el punto A, conjugado armónico de B con relación a P y Q.

Construcción de la polar de un punto con relación a una circunferencia. — Si el punto A está sobre la circunferencia, la polar es la perpendicular a OA en el punto A.

Si A no está sobre la circunferencia (*fig.* 165), se trazan dos secantes APQ, AP′Q′. Se unen P y Q′, P y P′, Q y P′, Q y Q′. Sean B y C los dos últimos vértices del cuadrilátero completo así formado; la recta BC es (v. p. 93) la polar del punto A con relación al ángulo en C y corta PQ en M y P′Q′ en M′, de tal manera que (A . M . P . Q) = (A . M′ . P′ . Q′) = —1.

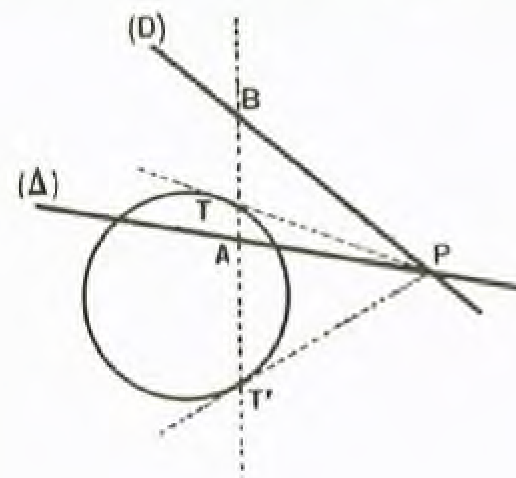


Fig. 164

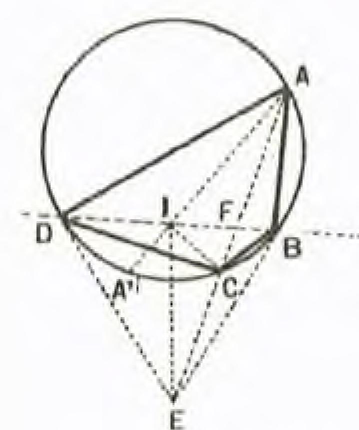


Fig. 165

Luego M y M′ son conjugados de A con relación a la circunferencia (O); por definición, estos son dos puntos de la polar de A con relación a esta circunferencia. Como conclusión se tiene que la recta BC es la polar de A con relación a la circunferencia (O).

Rectas conjugadas con relación a una circunferencia. — *Se dice que dos rectas* (D) *y* (△) *son* **conjugadas con relación a una circunferencia** (O), *cuando el polo* A *de una de ellas* (D) *se encuentra sobre la otra.*

Sea B (*fig.* 166) el polo de la recta (△). La polar (△) del punto B pasa por A, luego la polar (D) de A pasa por B. Por tanto, si el

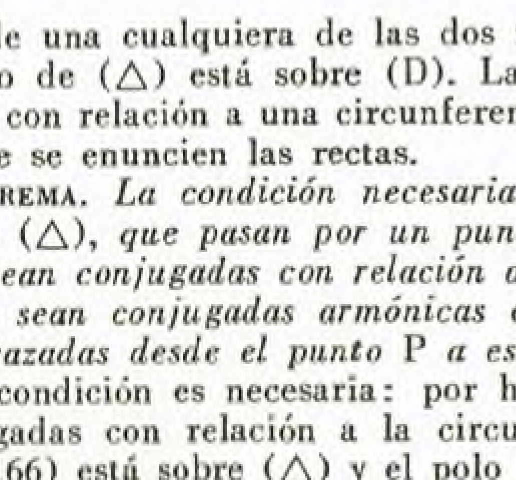


Fig. 166

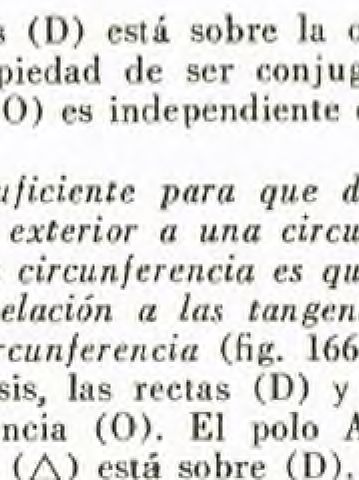


Fig. 167

polo de una cualquiera de las dos rectas (D) está sobre la otra (△), el polo de (△) está sobre (D). La propiedad de ser conjugadas dos rectas con relación a una circunferencia (O) es independiente del orden en que se enuncien las rectas.

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas* (D) *y* (△), *que pasan por un punto* P *exterior a una circunferencia* (O), *sean conjugadas con relación a esta circunferencia es que las dos rectas sean conjugadas armónicas con relación a las tangentes* PT *y* PT′ *trazadas desde el punto* P *a esta circunferencia* (fig. 166).

La condición es necesaria: por hipótesis, las rectas (D) y (△) son conjugadas con relación a la circunferencia (O). El polo A de (D) (*fig.* 166) está sobre (△) y el polo B de (△) está sobre (D). Al pasar la polar de A y la polar de B por el punto P, la polar de P es la recta AB. Esta recta corta la circunferencia (O) en los puntos T y T′. Los puntos A y B son conjugados con relación a la circunferencia (O).

Se tiene, por tanto, (A . B . T . T′) = —1 y las rectas (D) y (△) son ciertamente conjugadas armónicas con relación a las dos tangentes PT y PT′.

La condición es suficiente: por hipótesis (△) y (D) son conjugadas armónicas de las tangentes PT y PT′. Cortan en A y B la recta TT′ y se tiene que

$$(A \cdot B \cdot T \cdot T') = -1.$$

La polar del punto A de la recta (△) con relación al círculo (O) pasa pues por el punto B, conjugado armónico de A con relación a T y a T′. Pero como la polar de P es TT′, que pasa por A, la polar de A pasa por P. Ella pasa por tanto por P y por B; es la recta (D). Al estar sobre (△) el polo A de (D), las rectas (D) y (△) son conjugadas con relación a la circunferencia (O).

Cuadrilátero armónico. — *Se dice que un* **cuadrilátero** ABCD (fig. 167) **inscrito** *en una circunferencia* (O) *es* **armónico,** *cuando sus diagonales* AC *y* BD *son conjugadas con relación a la circunferencia* (O).

El polo E de la diagonal BD está sobre la diagonal AC: E es conjugado armónico de F, punto común de las diagonales, con relación a los puntos A y C. Sea I el punto medio de BD. El haz de cuatro rectas IA, IC, IE, IF es armónico, y puesto que IE, IF son perpendiculares

por construcción, los ángulos formados por las rectas IA, IC tienen por bisectrices las rectas IE, IF (v. p. 92 y 93). Este resultado se expresa diciendo:

La diagonal BD de un cuadrilátero armónico es la bisectriz del ángulo $\widehat{AIC}$ formado por las rectas que unen el punto medio de esta diagonal con los otros dos vértices.

Prolonguemos IA hasta el punto A′ donde esta recta encuentra de nuevo la circunferencia (O); se tendrá IA′ = IC, como segmentos simétricos con relación al diámetro IE; se tendrá IA · IA′ = $\overline{IB}^2$, potencia de I con relación a la circunferencia (O) y por consiguiente $\overline{IB}^2$ = IA · IC.

En un cuadrilátero armónico, el cuadrado de una semidiagonal es igual al producto de las distancias del punto medio de esta diagonal a los otros vértices.

Traslaciones - Giros - Simetría

Giro de una semirrecta. Fórmula de adición de ángulos orientados. Ángulo orientado de dos vectores. Ángulo orientado de dos rectas $\widehat{(D, D')}$. Condición para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia. Transformaciones. Traslación. Figuras transformadas de figuras elementales por una traslación. Giro. Figuras transformadas de figuras elementales por un giro. Desplazamientos. Simetría con relación a una recta (D). Producto de dos simetrías. Igualdad de dos figuras. Simetría con relación a un punto. Simetría oblicua

Giro de una semirrecta. — *Se llama* **giro** *de una semirrecta* OM *que gira alrededor de un punto* O, *la operación que lleva la recta* OM *desde una posición inicial* OA *a una posición final* OB, *engendrando uno de los dos ángulos* $\widehat{AOB}$ *(es necesario especificar cuál) y girando siempre en el mismo sentido* (fig. 168).

Se admite que un observador, colocado en una región bien determinada del plano, es capaz de distinguir el sentido del giro de la recta OM para engendrar un ángulo $\widehat{AOB}$ en el movimiento de giro OA, OB y en el movimiento OB, OA. Este hecho se expresa diciendo que **el plano está orientado.**

Uno de los dos sentidos se llama positivo, por definición; el otro se llama negativo.

El sentido puede estar indicado en la figura por una flecha, o bien colocando un reloj sobre el dibujo y llamando positivo o negativo, a elección, el sentido en que se desplazan las agujas, o puede emplearse cualquier otro procedimiento. No precisaremos, dejando al lector el cuidado de elegir a su gusto en cada figura.

Sea θ la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ engendrado por la recta OM girando alrededor de O en el sentido positivo, desde OA a OB; si el movimiento de OM en el sentido positivo continúa más allá de OB, esta recta engendra todo el plano, es decir, dos ángulos llanos, antes de volver a pasar por la posición OB; es cómodo decir que el ángulo engendrado en estas condiciones está medido por $\theta + 2\pi$. Esta definición está relacionada con la definición de suma de dos ángulos, dada en el capítulo segundo.

Si el movimiento de la recta OM en el sentido positivo continúa, esta recta pasa un número entero de veces k por la posición OB y convenimos en decir que ella ha engendrado un ángulo cuya medida es $\theta + 2k\pi$.

Si el movimiento de OM se verifica con relación a OA en el sentido negativo hacia OB, el ángulo engendrado cuando OM coincide con OB la primera vez, es $2\pi - \theta$, y cuando el movimiento se continúa en el mismo sentido hasta coincidir por k^{esima} vez, el ángulo engendrado es $2\pi - \theta + 2k\pi$.

Se conviene en llamar **ángulo de giro,** que lleva la semirrecta OA sobre la semirrecta OB, *uno cualquiera de los números que miden el ángulo engendrado por la recta* OM, *precedido del signo + si el sentido de giro es positivo y del signo — si es negativo.* Este ángulo se representa por la notación $\widehat{(OA,OB)}$, que se enuncia **"ángulo orientado** OA, OB". Por consiguiente, por definición se tiene

$$\widehat{(OA,OB)} = \theta + 2k\pi$$

o bien

$$\widehat{(OA,OB)} = -(2\pi - \theta + 2k\pi).$$

Estas dos fórmulas se resumen escribiendo

$$\widehat{(OA,OB)} = \theta + 2k\pi,$$

siendo k un número entero positivo, negativo o nulo.

Llamamos la atención del lector sobre la palabra ángulo utilizada en la expresión "ángulo de giro": esta palabra no designa, como en la lección segunda, una porción de plano. Como el giro tiene por objeto llevar una semirrecta OM desde OA sobre OB, poco importa en geometría si OM ha engendrado el ángulo saliente o el ángulo entrante: sólo interesa que ha partido de OA para terminar en OB. La igualdad

$$\widehat{(OA,OB)} = \alpha,$$

siendo α un número positivo, negativo o nulo completamente arbitrario, define la operación geométrica que regula el paso de OA a OB y también define el giro. La igualdad

$$\widehat{(OA,OB)} = \alpha + 2k\pi$$

define una operación diferente de hecho, cuyo resultado es el mismo. También conviene no diferenciarlas y considerar como equivalentes las dos igualdades expuestas.

Fórmula de adición de ángulos orientados. — Teorema. *Sean* OA, OB, OC *tres semirrectas concurrentes en un plano orientado; entre los ángulos de giro* $\widehat{(OA,OB)}$, $\widehat{(OB,OC)}$, $\widehat{(OC,OA)}$ *se tiene la relación*

$$\widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OC)} + \widehat{(OC,OA)} = 0.$$

Una semirrecta OM girando en el sentido positivo a partir de OA coincide con OB antes que con OC o con OC antes que con OB. Examinemos estos dos casos.

1º El orden de coincidencia es OB, OC (*fig.* 168).

Sean α, β, γ las medidas de los ángulos engendrados por OM: $\widehat{AOB} = \gamma$, $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{AOC} = \beta$. Se tiene $\beta = \alpha + \gamma$.

Hemos visto que $\widehat{(OA,OB)} = \gamma$, $\widehat{(OB,OC)} = \alpha$, $\widehat{(OC,OA)} = -\beta$ *por definición* (recordemos aquí que el $2k\pi$ no se escribe en las igualdades en que sólo intervienen ángulos de giro).

Por consiguiente,

$$\widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OC)} + \widehat{(OC,OA)} = \gamma + \alpha - \beta = 0.$$

2º El orden de coincidencia es OC,OB (*fig.* 169).

Se tendrá $\widehat{(OA,OB)} = \gamma$, $\widehat{(OB,OC)} = -\alpha$, $\widehat{(OC, OA)} = -\beta$; pero en este caso se tiene $\gamma = \alpha + \beta$. Resulta también.

$$\widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OC)} + \widehat{(OC,OA)} = 0.$$

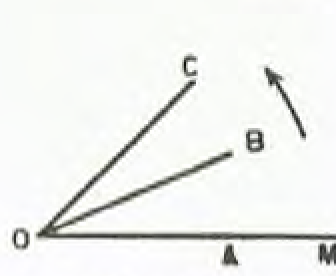


Fig. 168

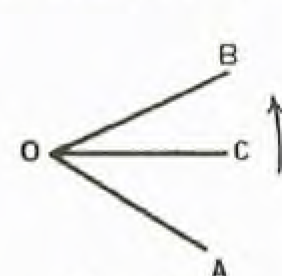


Fig. 169

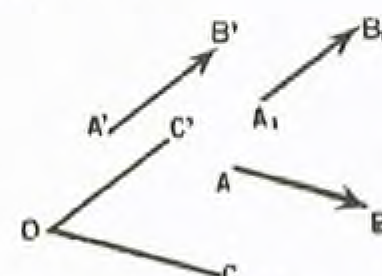


Fig. 170

Corolario. Se tiene $\widehat{(OA,OC)} = \widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OC)}$.

Ángulo orientado de dos vectores. — Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ dos vectores en un plano orientado; *se llama* **ángulo orientado de estos dos vectores** $\widehat{(AB,A'B')}$ *el ángulo de giro que lleva una semirrecta* OC, *paralela a* $\overrightarrow{AB}$ *y del mismo sentido, sobre una semirrecta* OC′ *paralela a* $\overrightarrow{A'B'}$ *y del mismo sentido que ésta* (fig. 170).

Insistimos una vez más que la palabra ángulo que figura en la expresión "ángulo orientado" no lleva consigo ya la idea de superficie como en el capítulo segundo, sino la de movimiento que lleva OC sobre OC′ engendrando uno de los ángulos $\widehat{COC'}$, lo que puede llevarse a efecto de cualquier manera.

De esta definición resulta que si $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ son dos vectores paralelos y del mismo sentido $\widehat{(AB,A'B')} = \widehat{(AB,A_1B_1)}$, puesto que la semirrecta OC′, paralela a $\overrightarrow{A'B'}$ y del mismo sentido, es también paralela a $\overrightarrow{A_1B_1}$ y del mismo sentido que ésta (*fig.* 170).

Resulta igualmente que si $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ son paralelas (*fig.* 171), pero de sentido contrario, $\widehat{(AB,A'B')} = \widehat{(AB,A_1B_1)} + \pi$, puesto que OC′ debe ser sustituida por su opuesta OC_1 cuando se sustituye $\overrightarrow{A'B'}$ por $\overrightarrow{A_1B_1}$.

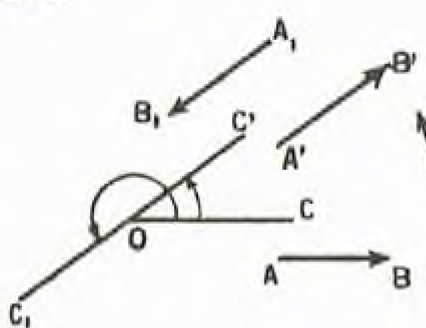


Fig. 171

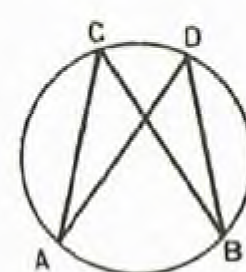


Fig. 172

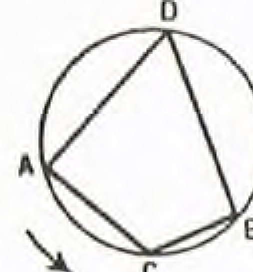


Fig. 173

La condición necesaria y suficiente para que $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A_1B_1}$ sean paralelas y del mismo sentido es $\widehat{(A'B',A_1B_1)} = 0$, lo que quiere decir que

$\widehat{(A'B',A_1B_1)}$ es igual a cero o a $2k\pi$. La condición para que estos vectores sean opuestos es $\widehat{(A'B',A_1B_1)} = \pi$, lo que quiere decir: $\widehat{(A'B',A_1B_1)}$ igual a π o a $(2k + 1)\pi$.

Ángulo orientado de dos rectas $\widehat{(D,D')}$. — Se llama ángulo orientado $\widehat{(D,D')}$ de la recta (D) con la recta (D') uno cualquiera de los ángulos orientados que se ha de girar la recta (D) para llevarla sobre (D'). Si θ es uno de estos ángulos, los otros son $\theta + k\pi$.

Condición para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia. — Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos* A, B, C, D *estén sobre una circunferencia es*

$$\widehat{(CA,CB)} = \widehat{(DA,DB)} + k\pi.$$

Si C y D están a un mismo lado de AB (*fig.* 172), los ángulos $\widehat{ACB}$ y $\widehat{ADB}$ inscritos en un mismo arco de circunferencia son iguales; por otra parte, el sentido de AC hacia CB es el de DA hacia DB. Se tiene por tanto $\widehat{(CA,CB)} = \widehat{(DA,DB)}$.

Si C y D están a distinto lado de AB (*fig.* 173), uno sólo de los ángulos orientados $\widehat{(CA,CB)}$, $\widehat{(DA,DB)}$ es positivo, por ejemplo $\widehat{(DA,DB)}$. Sea θ su valor. El ángulo $\widehat{ACB}$ es suplementario del $\widehat{ADB}$ y su medida es $\pi - \theta$. Se tiene $\widehat{(CA,CB)} = -(\pi - \theta) = \theta - \pi$ y, por consiguiente, $\widehat{(CA,CB)} = \widehat{(DA,DB)} - \pi$.

Transformaciones. — *Se llama* **transformación punto por punto** (T) *una operación geométrica que hace corresponder a un punto* M, *arbitrariamente elegido en un plano, un punto* M', *llamado homólogo o transformado de* M. Limitaremos nuestro estudio a las transformaciones (T) que hacen corresponder a un punto M un punto M' y uno sólo bien determinado, salvo cuando el punto M ocupe excepcionalmente ciertas posiciones particulares en el plano.

Se llama **idéntica** la transformación que hace corresponder a un punto M un punto M' confundido con M, cualquiera que sea M.

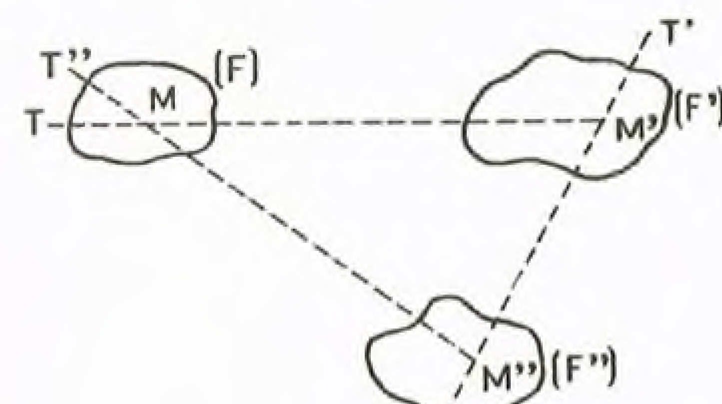


Fig. 174

Los puntos M' transformados de los diferentes puntos M de una figura (F) forman una figura (F'), que se llama homóloga o transformada de (F). De las figuras (F) que coinciden con sus transformadas (F') se dice que son **invariables** en la transformación.

Si M' es el transformado de M (*fig.* 174) en una transformación (T), y si M'' es el transformado de M' en otra transformación (T'), el conjunto de las operaciones que comprenden la transformación (T) y las efectuadas a continuación, que componen la transformación (T'), constituye una transformación (T'') que hace corresponder al punto M el punto M''. Esta transformación se llama **producto de las dos transformaciones (T) y (T')**.

Traslación. — *Se llama* **traslación** $\overrightarrow{PQ}$, *siendo* P *y* Q *dos puntos fijos dados, la transformación que hace corresponder a un punto* M *de un plano el punto* M' *definido por*

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PQ}.$$

La traslación hace corresponder a un punto M cualquiera un punto M' y uno sólo.

Teorema. *La traslación* PQ *hace corresponder a un par de puntos* A, B *el par* A', B', *de tal manera que*

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$$

(*Fig.* 175). *Por hipótesis,* $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{PQ}$, los vectores AA' y BB' son paralelos, iguales y del mismo sentido y la figura ABB'A' es por tanto un paralelogramo; por consiguiente, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, puesto que estos dos vectores son paralelos, iguales y del mismo sentido (propiedades de los lados de un paralelogramo).

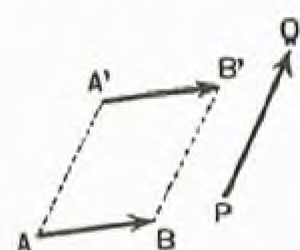


Fig. 175

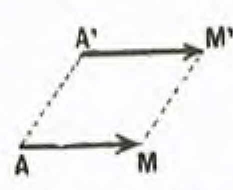


Fig. 176

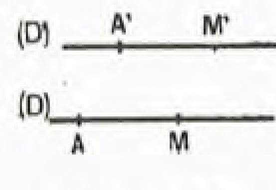


Fig. 177

Recíproco. *Sean* A *y* A' *dos puntos fijos; la transformación definida por la igualdad*

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$$

es una traslación $\overrightarrow{AA'}$ (fig. 176).

Por la misma razón que antecede, la figura A'M'MA es un paralelogramo; se tendrá pues $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, igualdad que define la traslación $\overrightarrow{AA'}$.

Figuras transformadas de figuras elementales por una traslación. — *La transformada de una recta* (D) *es una recta paralela* (D') [fig. 177].

Sea A un punto de (D), A' su transformado; la igualdad $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ indica que M' describe la paralela (D') trazada por A' a la recta (D) y que la describe completa cuando M describe completa la recta (D).

La transformada de una circunferencia (O) *es una circunferencia igual* (O').

Sea O' el transformado del centro O de la circunferencia (O); la igualdad $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM}$ implica que O'M' = OM; por tanto, si M describe la circunferencia (O) de radio R, M' describe la circunferencia (O') de centro O' y radio R, igual a la circunferencia (O). El paralelismo de O'M' y de OM lleva consigo que si M describe la circunferencia (O) completa, M' describe la circunferencia (O') completa. Dejamos al lector el trabajo de hacer las figuras y de establecer que la tangente M'T' a la circunferencia (O') en M' es paralela a la tangente en M a la circunferencia (O).

La transformación que permite pasar de M' *a* M *es la traslación* $\overrightarrow{QP}$ (es decir, la inversa de la traslación $\overrightarrow{PQ}$).

El producto de dos traslaciones $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}$ *es la traslación* $\overrightarrow{PR}$.

Sea M un punto cualquiera y M' su transformado en la traslación $\overrightarrow{PQ}$ (*fig.* 179); se tendrá $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QM'}$, porque el transformado de P es Q. Sea M'' el transformado de M' en la traslación $\overrightarrow{QR}$; se tendrá $\overrightarrow{QM'} = \overrightarrow{RM''}$; de donde $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{RM''}$. Esta igualdad define la traslación $\overrightarrow{PR}$.

El producto de un número cualquiera de traslaciones es una traslación o una identidad.

Giro. — *Se llama* **giro** $(O \cdot \theta)$ *la transformación* (fig. 178) *que hace corresponder en un plano orientado a un punto* M *cualquiera el punto* M' *definido por*

$$\widehat{(OM,OM')} = \theta \text{ y } OM = OM'.$$

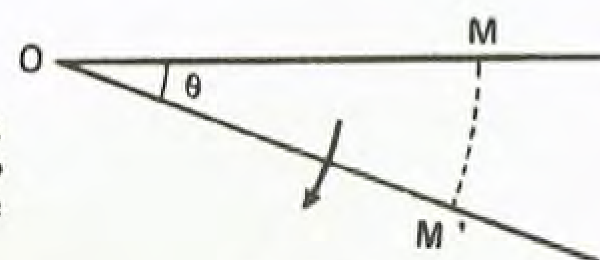


Fig. 178

(El punto O dado se denomina **centro de giro;** θ, un número dado cualquiera y que no es múltiplo de 2π, se llama **ángulo de giro.**)

La igualdad $\widehat{(OM,OM')} = \theta$ define una semirrecta OM' y una sola deducida de OM por el giro θ; sobre esta semirrecta, OM' = OM define un punto M' y uno sólo deducido del punto M.

Teorema. *El giro* $(O \cdot \theta)$ *hace corresponder a un par de puntos* (A . B) *el par* (A' . B') *de tal manera que*

$$A'B' = AB$$

$$\widehat{(AB,A'B')} = \theta.$$

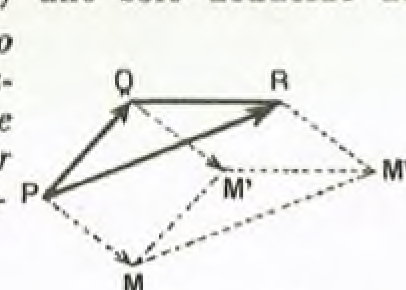


Fig. 179

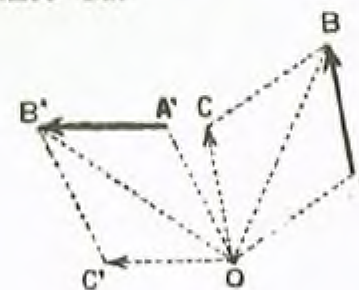


Fig. 180

Únase (*fig.* 180) el punto O con los puntos A, B, A' B'. Por construcción, | OA = OA', OB = OB' | y $\widehat{(OA,OA')} = \widehat{(OB > OB')} = \theta$.

De esta igualdad se deduce (v. p. 103):

$$\widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OA')} = \widehat{(OB,OA')} + \widehat{(OA',OB')}.$$

De donde $\widehat{(OA,OB)} = \widehat{(OA',OB')}$ y, en particular, los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB'}$ de los triángulos AOB y A'OB' son iguales. De esto resulta que los triángulos AOB, A'OB' son iguales (segundo caso de igualdad: OA = OA', OB = OB', $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$): los terceros lados serán iguales y A'B' = AB.

Sea $\overrightarrow{OC}$ un vector equipolente a $\overrightarrow{AB}$. El transformado de C en el giro $(O \cdot \theta)$ es C', definido por OC' = OC, $\widehat{(OC,OC')} = \theta$. Según la primera parte de la demostración, se tiene A'B' = AB y B'C' = BC; ahora bien, la figura OABC es un paralelogramo por construcción, de donde AB = OC, BC = OA. De estas igualdades resulta que A'B' = AB = OC = OC' y B'C' = BC = OA = OA'. El cuadrilátero convexo OA'B'C' que tiene sus lados opuestos iguales es un paralelogra-

mo: el vector $\overrightarrow{OC'}$ es, pues, equipolente al vector $\overrightarrow{A'B'}$. De ello resulta que, por definición,

$$\widehat{(AB,A'B')} = \widehat{(OC,OC')}.$$

y como $\widehat{(OC,OC')} = \theta$, se tiene también $\widehat{(AB,A'B')} = \theta$.

RECÍPROCO. *Sean A y A' dos puntos dados y θ un número dado diferente de $2k\pi$; la transformación que hace corresponder al punto M el punto M' definido por*

$$A'M' = AM, \quad \widehat{(AM,A'M')} = \theta$$

es un giro.

1er caso. θ no es múltiplo de π, las rectas AM y A'M' se cortan en I (*fig.* 181). La mediatriz de AA' corta la circunferencia circunscrita al triángulo AIA' en dos puntos; para uno sólo de estos puntos, O, se tiene $\widehat{(OA,OA')} = \theta$.

En efecto, sea θ' el valor absoluto de θ; el ángulo $\widehat{AIA}$ es igual a θ' (*fig.* 181), o a $\pi - \theta'$ (*fig.* 182); si es igual a θ', se toma O al mismo lado que I con relación a AA'; si es igual a $\pi - \theta'$, se toma I a un lado y O al otro de AA'; en los dos casos se tiene $\widehat{AOA} = \theta'$. El valor absoluto de $\widehat{(OA,OA')}$ es por tanto igual al de θ; se comprueba sobre las figuras que los signos de los dos números son claramente iguales.

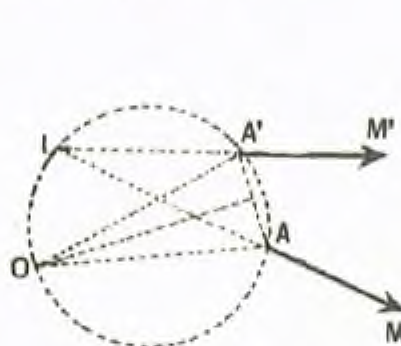


Fig. 181

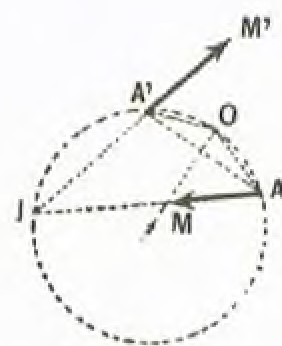


Fig. 182

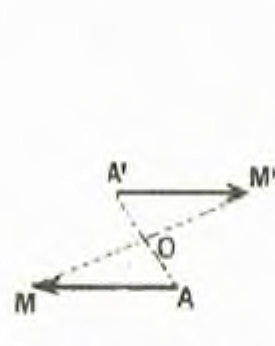


Fig. 183

El giro (O . θ) transforma, pues, el punto A en un punto A' y transforma el punto M en un punto M'_1, tal que se verifique

$$A'M'_1 = AM \quad \widehat{(AM,A'M'_1)} = \theta.$$

Estas igualdades definen un punto y uno sólo, que es M'; luego M' y M'_1 se confunden. El punto M' se deduce, pues, de M por el giro (O θ).

2º caso. θ es múltiplo impar de π.

$\overrightarrow{A'M'}$ y $\overrightarrow{AM}$ (*fig.* 183) son dos vectores opuestos, la figura AMA'M' es un paralelogramo; sea O el punto de intersección de las diagonales, punto medio de AA'. Éste es un punto fijo, y las igualdades OM' = = OM, $\widehat{(OM,OM')} = \pi$ definen el giro (O . π) en el cual M' es el transformado de M.

Este giro particular se llama también **simetría con relación al punto O.**

Figuras transformadas de figuras elementales por un giro. — *La transformada de una recta* (D) *es una recta* (D').

Si la recta (D) pasa por el centro, la igualdad $\widehat{(OM,OM')} = \theta$ pone de manifiesto que M' está sobre una recta (D') deducida de (D) por un giro θ alrededor de O. Supongamos que (D) no pasa por el centro O. Bajemos desde O la perpendicular OA (*fig.* 184) sobre la recta (D); A es su pie y A' el transformado de A en el giro. Se ha visto

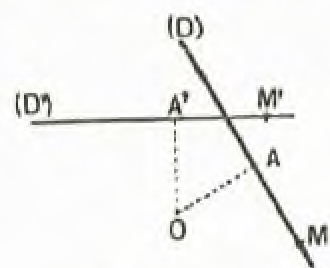


Fig. 184

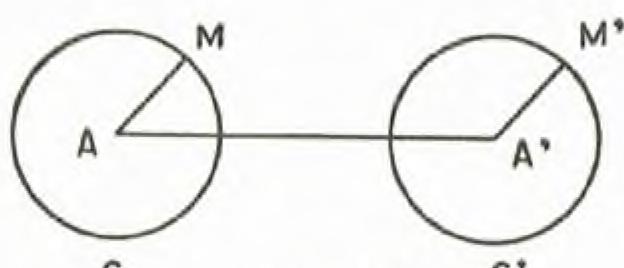


Fig. 185

que los triángulos OAM, OA'M' son iguales; como el ángulo $\widehat{OAM}$ es recto, $\widehat{OA'M'}$ es también recto. El punto M' está sobre la recta (D') perpendicular en A' a la recta OA'. Es evidente que si M describe la recta (D), M' describirá la recta (D').

La transformada de una circunferencia (C) *es una circunferencia igual* (C').

Sea A el centro de la circunferencia (C) y R su radio (*fig.* 185); sea A' el transformado de A; se tendrá A'M' = AM = R. Por consiguiente, M' será un punto de la circunferencia (C') de centro A' y radio R. Dicho punto la describe completa cuando M describe la circunferencia (C).

El producto de una traslación $\overrightarrow{AA'}$ por un giro (O . θ) es un giro (fig. 186).

Sea M' el transformado de M en una traslación; se tendrá $\overrightarrow{A'M'} =$ $= \overrightarrow{AM}$. Sean A'' y M'' los transformados de A' y M' en el giro A''M'' = = A'M', $\widehat{(A'M',A''M'')} = \theta$.

De estas igualdades se deduce A''M'' = AM, $\widehat{(AM,A''M'')} = \theta$, lo que es suficiente para definir un giro en el cual M'' es el transformado de M.

El producto de dos giros (O . θ), (O' . θ') *es un giro si $\theta + \theta'$ no es un múltiplo de 2π y es una traslación cuando $\theta + \theta'$ es un múltiplo de 2π* (fig. 187).

Sea A un punto fijo, M un punto arbitrario, A' y M' sus transformados en el primer giro, A'' y M'' los transformados de A' y M' en el segundo giro.

Se tendrá (1er giro): A'M' = AM, $\widehat{(AM,A'M')} = \theta$.

— (2º giro): A''M'' = A'M', $\widehat{(A'M',A''M'')} = \theta'$.

y como consecuencia, A''M'' = AM y $\widehat{(AM,A''M'')} = \widehat{(AM,A'M')} +$ $+ \widehat{(A'M',A''M'')} = \theta + \theta'$.

Si $\theta + \theta'$ es diferente de un múltiplo de 2π, estas igualdades definen un giro en el cual M'' es el transformado de M. Si $\theta + \theta' = 2k\pi$, los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{A'M'}$ son equipolentes; estas fórmulas definen la traslación $\overrightarrow{AA'}$, en la cual M'' es el transformado de M.

Desplazamientos. — *Se llama* **desplazamiento** *en un plano a una traslación o a un giro.* El desplazamiento es la transformación de la que hemos admitido, en el primer capítulo, la existencia y ciertas propiedades para definir la igualdad de dos figuras.

El producto de dos desplazamientos es un desplazamiento. Se expresa esta propiedad diciendo que los desplazamientos son transformaciones de un mismo **grupo.**

Simetría con relación a una recta (D). — *Se llama* **simetría** *con relación a una recta* (D) [fig. 188], *llamada* **eje de simetría,** *la transformación que hace corresponder a un punto* M *del plano el simétrico* M' *de ese punto con relación al pie* H *de la perpendicular bajada desde* M *a la recta.*

Si el punto M está sobre la recta (D), M' coincide con M. Si el punto M está fuera del eje de simetría (D), M' es distinto de M y la recta (D) es mediatriz de MM'.

La figura transformada por simetría de una figura (F) se llama figura simétrica (ha de especificarse en qué clase de simetría). Cuando una figura (F) es simétrica de sí misma con relación a una recta (D), se dice que (D) es un **eje de simetría de la figura.**

La simetría y el semigiro definido en las páginas 76 y 77 son dos operaciones idénticas. La transformada por simetría de una recta ($\triangle$) es pues una recta ($\triangle'$) [*fig.* 188]. Si una de estas rectas corta al eje de simetría, la segunda lo corta en el mismo punto y la figura formada por (D) y ($\triangle$) se pueden superponer con la que forman (D) y ($\triangle'$) mediante un semigiro, por lo que la recta ($\triangle$) y su simétrica ($\triangle'$) forman ángulos iguales con el eje de simetría.

Si ($\triangle$) no tiene ningún punto común con el eje, tampoco lo tendrá ($\triangle'$): de donde si una recta ($\triangle$) es paralela al eje de simetría, la simétrica ($\triangle'$) es también paralela al eje y por consiguiente a ($\triangle$).

La figura simétrica de un segmento AB es un segmento A'B' igual al segmento AB.

Producto de dos simetrías. — *El producto de dos simetrías con relación a dos rectas* (D) *y* (D') *concurrentes en un punto* O *es un giro* (O . 2θ), *siendo θ el ángulo orientado de la recta* (D) *con la recta* (D').

Sea M un punto cualquiera (*fig.* 189), M' su simétrico con relación a la recta (D), M'' el simétrico de M' con relación a la recta (D'), H el punto medio de MM', H' el punto medio de M'M''.

Siendo (D) la mediatriz de MM', se tiene OM = OM', y siendo (D') la mediatriz de M'M'', se tiene OM' = OM''. De donde se deduce OM'' = OM. Además $\widehat{(OM,OM')} = 2\,\widehat{(OH,OM')}$ y $\widehat{OM'OM''} =$ $= 2\,\widehat{(OM',OH')}$; por tanto, $\widehat{(OM,OM'')} = \widehat{(OM,OM')} + \widehat{(OM',OM'')} =$ $2\,\widehat{(OH,OM')} + 2\,\widehat{(OM'OH')} = 2\,\widehat{(OH,OH')}$. El ángulo $\widehat{(OH,OH')}$ es

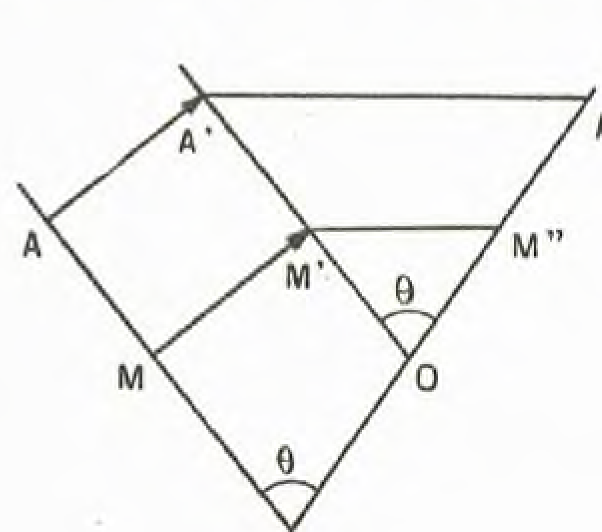


Fig. 186

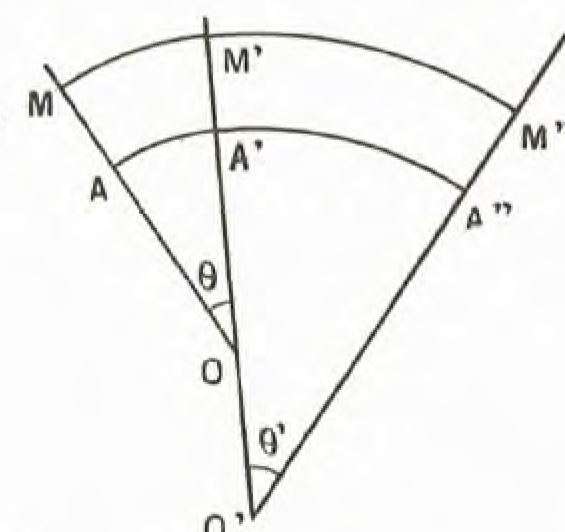


Fig. 187

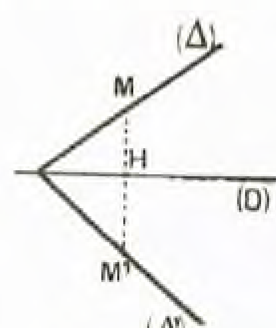


Fig. 188

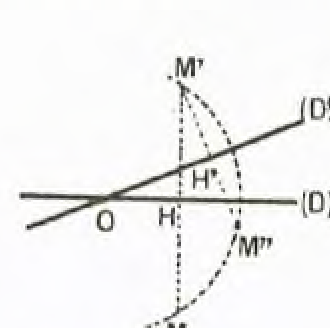


Fig. 189

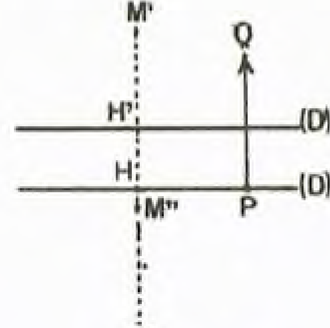


Fig. 190

igual, siguiendo los casos de la figura, a θ o a $\theta + \pi$; por consiguiente, en cualquier caso, $\widehat{(OM,OM'')} = 2\theta$.

Las fórmulas $\widehat{(OM,OM'')} = 2\theta$, $OM'' = OM$ definen claramente (v. p. 105) el giro $(O \cdot 2\theta)$.

RECÍPROCO. *Un giro* $(O \cdot 2\theta)$ *es el producto de dos simetrías.*

Se traza una recta (D), elegida arbitrariamente, que pase por el centro de giro O; se hace girar esta recta alrededor de O, un ángulo igual a θ; sea (D') la recta obtenida. La simetría con relación a (D) seguida de la simetría con relación a (D') equivale al giro dado.

TEOREMA. *El producto de dos simetrías con relación a dos rectas paralelas* (D) *y* (D') *es una traslación.*

Con las mismas notaciones que para el teorema precedente (*fig.* 190),

$\overline{MM'} = 2\overline{HM'}$, $\quad \overline{M'M''} = 2\overline{M'H'}$.

Se tiene $\overline{MM''} = \overline{MM'} + \overline{M'M''} = 2(\overline{HM'} + \overline{M'H'}) = 2\overline{HH'}$.

El vector $\overrightarrow{HH'}$ es equipolente a un vector fijo perpendicular a las rectas (D) y (D'); el vector $\overrightarrow{MM''}$ es, pues, equipolente a un vector fijo y se pasa de M a M'' por una traslación.

RECÍPROCO. *Una traslación* $\overrightarrow{PQ}$ *es el producto de dos simetrías* (*fig.* 190).

Se traza una perpendicular cualquiera (D) a la recta PQ; se efectúa la traslación $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$; sea (D') la recta obtenida. La simetría con relación a (D), seguida de una simetría con relación a (D'), equivale a la traslación dada.

DEFINICIÓN. *Se llama* **volvimiento** *el producto de un desplazamiento por una simetría.*

Igualdad de dos figuras. — *Se dice que dos figuras* (F) *y* (F') *son iguales cuando se puede hacer corresponder a cada punto* M *de la primera un punto* M' *homólogo de la segunda, de manera que la distancia de dos puntos sea igual a la distancia entre sus homólogos.*

El desplazamiento y el volvimiento hacen corresponder a un par de puntos A,B otro par A'B' tal que entre otras propiedades se tenga A'B' = AB. Por consiguiente, transforman una figura (F) en una figura igual (F').

Podemos establecer que, recíprocamente, dos figuras iguales son transformadas la una de la otra, sea en un desplazamiento, sea en un volvimiento.

TEOREMA. *Cuando tres puntos* A, B, C, *no alineados, de dos figuras iguales, son cada uno de ellos su propio homólogo, todo punto* M *de una de las figuras se confunde con su homólogo* M'.

Por hipótesis, M'A = MA, M'B = MB, M'C = MC. Si M y M' no se confunden, la mediatriz de MM' pasará por A, B, C no alineados. Luego M y M' se confunden.

TEOREMA. *Cuando dos puntos* A *y* B *de dos figuras iguales son cada uno de ellos su propio homólogo, todo punto* M *de una de las dos figuras se confunde con su homólogo* M' *o es simétrico de éste con relación a* AB.

Sea C un punto de (F) no situado sobre la recta AB y C' su homólogo. Si C' y C se confunden, M' y M también, según el teorema precedente. Si C' y C son distintos, M' y M lo son también (toda vez que M no está sobre AB), y como MA = M'A y MB = M'B, AB será la mediatriz de MM'. Estos puntos son, pues, simétricos con relación a AB.

TEOREMA. *Dos figuras* (F) *y* (F') *iguales se deducen una de otra por un desplazamiento o por un volvimiento.*

Sean A y B dos puntos de una de las figuras, A' y B' sus homólogos. El desplazamiento que lleva A sobre A' y B sobre B', transforma (F) en (F') o en (F_1), simétrica de (F') con relación a AB. Se pasa, pues, de (F) a (F'), sea por un desplazamiento, sea por un desplazamiento seguido de una simetría, es decir, un volvimiento.

Se dice que dos figuras (F) y (F') son *directamente iguales* cuando se pasa de una a otra por un desplazamiento. Se dice que son *inversamente iguales* cuando se pasa de una a otra por un volvimiento.

Simetría con relación a un punto. — *Se llama* **simetría con relación a un punto O,** *llamado centro de simetría, el giro* $(O \cdot \pi)$. Ella hace corresponder a M un punto M' tal que M, O, M' estén alineados y sea O el punto medio de MM'.

TEOREMA. *El producto de dos simetrías de centros* O *y* O' *es la traslación* $2\overrightarrow{OO'}$ (*fig.* 191).

Esto es el producto de dos giros $(O \cdot \pi)$, $(O' \cdot \pi)$; como la suma de los ángulos de giro es 2π, el producto será una traslación. Se sitúa el punto M en O; su transformado M' en el primer giro es O, el transformado M'' de M' en el segundo giro es el punto O'', simétrico de O con relación a O'; la traslación será, pues, $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{OO''} = 2\overrightarrow{OO'}$

Simetría oblicua. — *Se llama* **simetría oblicua con relación a una recta (D)** *la transformación que hace corresponder a un punto* M *de la recta* (D) *este mismo punto, a un punto* M *situado fuera de la recta* (D) [*figura* 192] *el punto* M' *tal que* MM' *sea paralela a una dirección fija* ($\triangle$), *no paralela ni perpendicular a* (D), *y que el punto medio* H *de* MM' *esté sobre* (D).

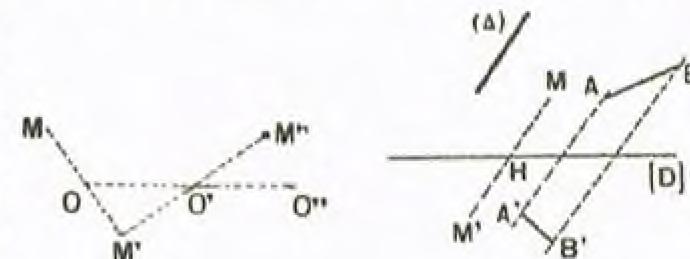


Fig. 191

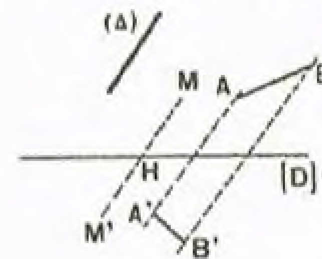


Fig. 192

La longitud del segmento A'B' transformado de AB, no es igual a la longitud de AB, excepto si AB es paralela a la recta (D).

Homotecia

Homotecia. Figuras homotéticas. Circunferencias homotéticas. Propiedades de las tangentes en puntos homotéticos. Tangente a una curva. Curvas tangentes. Tangentes comunes a dos circunferencias. Producto de homotecias y de traslaciones. Circunferencia de Euler o de los nueve puntos. Teorema de Menelao

Homotecia. — *Se llama* **homotecia** $(O \cdot k)$ *la transformación que hace corresponder a un punto* A *arbitrario un punto* A', *de manera que:*

1° *Los puntos* A, A' *y un punto* O *fijo estén alineados;*

2° *La igualdad* $\overline{OA} = k \cdot \overline{OA'}$ *quede satisfecha, siendo* k *un número dado fijo, que no es nulo ni igual a uno.*

El punto O se llama **centro** y el número k **razón de homotecia.**

A cada punto A distinto del punto O corresponde un punto A' y uno sólo, diferente de A.

Se admite que el punto O se corresponde a sí mismo. Si $k > 0$ (*fig.* 193) **la homotecia es positiva** por definición y si $k < 0$ (*fig.* 194) **la homotecia es negativa.**

Si $k = -1$ (*fig.* 195) la homotecia es una **simetría con relación al centro O.**

Si k, supuesto diferente de 1, fuera igual a 1, la transformación no sería una homotecia, sino una igualdad.

TEOREMA. *La homotecia* $(O \cdot k)$ *transforma el par de puntos* A, B *en un par* A', B' (fig. 193), *de manera que se tenga:*

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

De las igualdades $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$, $\quad \overline{OB'} = k \cdot \overline{OB}$ *resulta* $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ y, por consiguiente, la semejanza de los triángulos OAB y OA'B'.

De esta semejanza se deduce el paralelismo de AB, A'B' y la igualdad $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$. Estas dos propiedades se traducen por la igualdad $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

RECÍPROCO. *Sean* A *y* A' *dos puntos fijos, distintos o no* (fig. 196), *y un número* k *diferente de* 1, *no nulo. La transformación que hace que a un punto cualquiera* M *le corresponda el punto* M' *definido por*

$$\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$$

es una homotecia.

El centro de homotecia es el punto de la recta AA' *determinado por* $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$.

Uniendo MM', se tiene una recta que no es paralela a AA' y que por tanto corta ésta en un punto O.

El punto O es un punto fijo. En efecto, los triángulos OAM y OA'M' son semejantes, por tanto $\dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$. Sobre una recta AA' existe un punto O y uno sólo, definido por la igualdad $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$. Por consiguiente, este punto es fijo y los puntos M, M' y O están alineados.

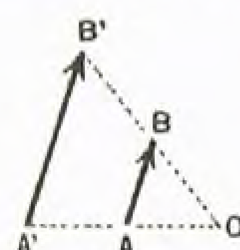


Fig. 193



Fig. 194

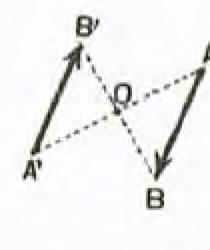


Fig. 195

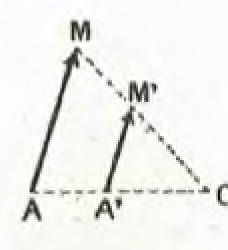


Fig. 196

La razón $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$ es constante; triángulos OAM y OA'M' seme-

jantes, de donde $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{A'M'}}{\overline{AM}} = k.$

Las dos condiciones requeridas para que la transformación que permite pasar de M a M' sea una homotecia quedan satisfechas.

Figuras homotéticas. — *Se dice que dos figuras son* **homotéticas** *cuando una de ellas es la transformada de la otra en una homotecia.*

La figura homotética de una recta (D) *que pasa por el centro* O *de homotecia es la misma recta.*

La figura homotética de una recta (D) *que no pasa por el centro de homotecia es una recta paralela* (D') [fig. 197].

Sea A un punto de la recta (D), A' su homotético, es decir, su transformado en una homotecia (O · k). El homotético M' de un punto M de la recta (D) debe ser tal que el vector $\overrightarrow{A'M'}$ sea paralelo al vector $\overrightarrow{AM}$. El punto M' está, pues, sobre la recta (D') trazada por A' y paralela a (D).

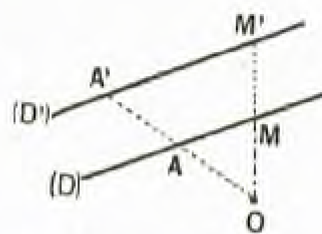


Fig. 197

Todo punto M' de la recta (D') es el homotético del punto M de la recta (D) situado sobre OM'.

La recta (D') es en toda su extensión la homotética de (D).

Dos rectas paralelas (D) *y* (D') *son homotéticas de infinitas maneras.*

Sea O un punto cualquiera del plano, no situado en (D) ni en (D'), A un punto de (D), A' el punto en que la recta OA corta (D'), k la razón $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. La recta (D') es homotética de (D) en la homotecia (O · k) y en tantas homotecias como puntos O haya.

Circunferencias homotéticas. — *La figura homotética de una circunferencia* (C), *de centro* A *y radio* R (fig. 198), *en una homotecia* (O · k) *es una circunferencia* (C'). *El centro* A' *de la circunferencia* (C') *es homotético del centro* A *de la circunferencia* (C) *y el radio* R' *de la circunferencia* (C') *es igual a* | k | R.

El homotético del centro A de (C) es un punto fijo A'. El homotético de un punto M de la circunferencia (C) es un punto M'. Se tiene $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$. Esta igualdad implica: A'M' = | k | R. Luego el punto M' es un punto de la circunferencia (C').

Todo punto M' de la circunferencia (C') es homotético de un punto M de la circunferencia (C) definido por $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k}\,\overrightarrow{A'M'}$. La homotética de la circunferencia (C) es, por tanto, la circunferencia (C') completa.

Una circunferencia (C'), *de centro* A' *y radio* R', *es homotética de una circunferencia* (C), *de centro* A *y radio* R, *de dos maneras si* R' $\neq$ R (fig. 198). *Las dos razones de homotecia son opuestas y su valor absoluto es* $\dfrac{R'}{R}$: *los dos centros de homotecia* O *y* O' *dividen al segmento* AA' *en la relación* $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{O'A'}{O'A} = \dfrac{R'}{R}$.

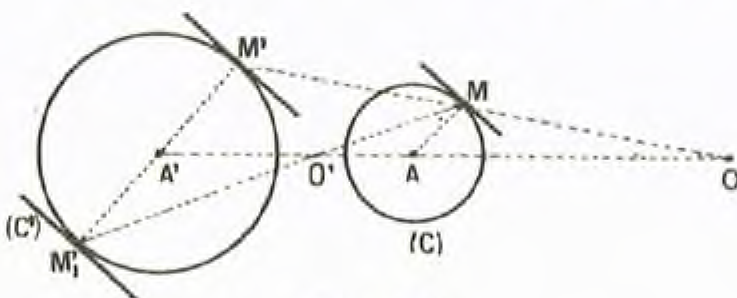


Fig. 198

Sea M un punto de la circunferencia (C); se traza por A' la paralela a la recta AM, que corta la circunferencia (C') en M' y en M'1; elegimos las notaciones de modo que M y M' estén a un mismo lado de AA'.

(C') es homotética de (C) en las dos homotecias definidas, la primera por $\dfrac{\overrightarrow{A'M'}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{R'}{R}$, la segunda por $\dfrac{\overrightarrow{A'M'_1}}{\overrightarrow{AM}} = -\dfrac{R'}{R}$. Siendo A, A' fijos y $\dfrac{R'}{R}$ constante y diferente de 1, tenemos dos homotecias y (C') es homotética de (C) en estas dos homotecias.

Se determinan los centros de homotecia uniendo M con M', M con M'1 y señalando los puntos O y O' en que estas rectas cortan AA'. Estos dos puntos son fijos y además se ha visto que $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{O'A'}{O'A} = \dfrac{R'}{R}$. O se denomina **centro de homotecia positiva** de las dos circunferencias y O' **centro de homotecia negativa.**

(C') no es homotética de (C) en ninguna otra homotecia. En efecto, de la proposición directa resulta que si (C') es homotética de (C'), A' es homotético de A. Por consiguiente, la homotecia buscada debe hacer corresponder a $\overrightarrow{AM}$ un vector paralelo de origen A' que tiene su extremo en (C'); éste no puede ser otro que $\overrightarrow{A'M'}$ o $\overrightarrow{A'M'_1}$. La homotecia buscada es pues una de las dos homotecias

$$\left(O \cdot \frac{R'}{R}\right) \quad \text{o} \quad \left(O' \cdot -\frac{R'}{R}\right)$$

Se verifica, en particular, que dos circunferencias tangentes son homotéticas en una homotecia cuyo centro es el punto de contacto de las dos circunferencias.

Dos circunferencias iguales son homotéticas de una sola manera, en una homotecia cuyo centro es el punto medio de la línea de los centros y la razón —1.

Esta homotecia es una simetría y la segunda está reemplazada por una traslación $\overrightarrow{AA'}$.

Adoptando (*fig.* 199) las notaciones del párrafo precedente, la igualdad $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ define no una homotecia, sino una traslación, y la igualdad $\overrightarrow{A'M'_1} = -\overrightarrow{AM}$, una simetría con relación al punto medio de AA'.

Propiedades de las tangentes en puntos homotéticos. —

1º *Las tangentes en dos puntos* M *y* M' *homólogos en una homotecia que transforma la circunferencia* (C) *en la circunferencia* (C') *son paralelas.*

Las dos tangentes son perpendiculares a los radios AM, A'M', paralelos, de estas circunferencias.

2º *Los puntos* M *y* M' *de contacto de tangentes paralelas con las circunferencias* (C) *y* (C'), *se corresponden en una de las homotecias o excepcionalmente en una traslación que transforma* (C) *en* (C').

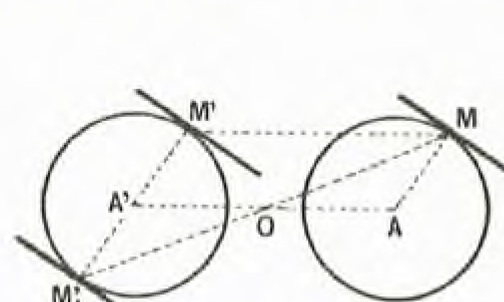


Fig. 199

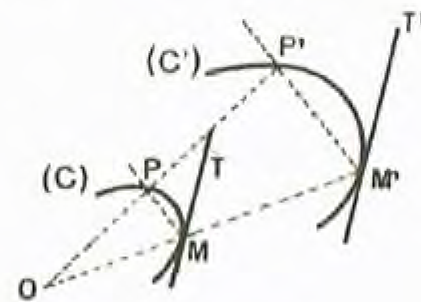


Fig. 200

En efecto, los puntos de la circunferencia (C') en que la tangente es paralela a la tangente en M a la circunferencia (C) son, bien M', bien M'1, puntos homólogos de M en las transformaciones indicadas.

Tangente a una curva. — *Se llama* **tangente a una curva** *en un punto* M *la posición límite, si existe, de una recta* MP, *cuando permaneciendo fijo* M, *el punto* P *se aproxima al punto* M *de modo que la distancia de estos dos puntos tiende a cero.*

Observación. De la definición dada para la tangente resulta que la tangente a una recta es esta misma recta.

Teorema. *Si una curva* (C) *tiene una tangente* MT *en un punto* M, *la curva homotética* (C') *tiene una tangente* M'T' *en el punto* M' *homólogo de* M *y esta tangente es paralela a* MT.

Uniendo el punto M (*fig.* 200) con un punto próximo P, M' homólogo de M con P' homólogo de P, M'P' homóloga de MP será paralela a MP. Cuando P tiende hacia M, punto fijo, P' tiende también hacia M', punto fijo: si, por hipótesis, MP tiene una posición límite MT, M'P' recta paralela a MP tiene una posición límite M'T' paralela a MT.

Curvas tangentes. — Se dice que dos curvas que tienen un punto común M son tangentes en este punto, cuando tienen en ese punto la misma tangente.

Del teorema precedente resulta que *la figura transformada por homotecia de dos curvas tangentes en un punto* M *se compone de dos curvas tangentes en el punto* M' *homólogo de* M.

Tangentes comunes a dos circunferencias. — Supongamos las dos circunferencias desiguales (*fig.* 201).

1º *Toda tangente a una circunferencia* (C) *en un punto* M *y a una circunferencia* (C') *en un punto* M' *pasa por uno de los centros de homotecia de las dos circunferencias.*

Es un caso particular de la proposición 2 del epígrafe: *Propiedades de las tangentes en puntos homotéticos.*

2º *Toda recta que pase por un centro de homotecia* O *de dos circunferencias y que sea tangente a una circunferencia* (C) *es también tangente a la circunferencia* (C').

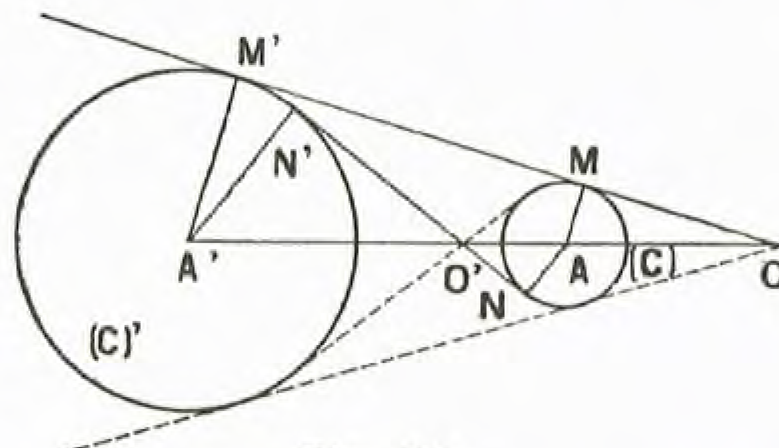


Fig. 201

Es un caso particular de la proposición 1 del epígrafe antes citado; las tangentes en M y en M' son paralelas a OM y por tanto coinciden.

Se comprueba sin dificultad que si las dos circunferencias son iguales, las proposiciones precedentes se modifican del modo siguiente:

1º Toda recta MM' tangente a dos circunferencias pasa por el centro de homotecia O, o es paralela a la línea de los centros.

2º Toda recta que pasando por O o siendo paralela a la línea de los centros sea tangente a la circunferencia (C), es tangente a la circunferencia (C′).

CONCLUSIÓN. *Las tangentes comunes a dos circunferencias* (C) *y* (C′) *son las tangentes trazadas a una de ellas por uno de los centros de homotecia de estas dos circunferencias. Excepcionalmente, si las dos circunferencias son iguales, el centro O de homotecia se aleja al infinito y las tangentes que pasan por este punto son paralelas a la línea de los centros.*

El número máximo de tangentes comunes a dos circunferencias (C) y (C′) es igual a cuatro.

Producto de homotecias y de traslaciones. — Sea M′ el homotético de M en la homotecia (O · k). *La transformación que permite pasar de M′ a M es una homotecia* (O · $\frac{1}{k}$).

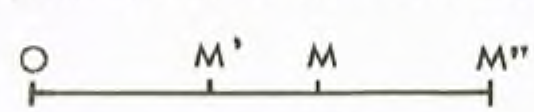


Fig. 202

El producto de dos homotecias del mismo centro (O · k), (O · k') *es una homotecia* (O · kk'), *si* $kk' \neq 1$, *y es una igualdad si* $kk' = 1$ (*fig.* 202).

Sea M′ el homotético de M [homotecia (O · k)] Sea M″ el homotético de M′ [homotecia (O · k')].

Los puntos O, M, M′ están alineados por hipótesis y los puntos O, M′, M″ también; por tanto, los puntos O, M, M″ estarán alineados. Por hipótesis, se tiene $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$, $\overline{OM''} = k' \overline{OM'}$, de donde $\overline{OM''} = kk' \cdot \overline{OM}$. Estas dos propiedades justifican la proposición.

El producto de dos homotecias de centros diferentes (O · k) (O′ · k') *es una homotecia, si* $kk' \neq 1$. *El centro de esta homotecia* O″ *está alineado con los centros* O, O′ *y la razón de esta homotecia es* kk' (*fig.* 203).

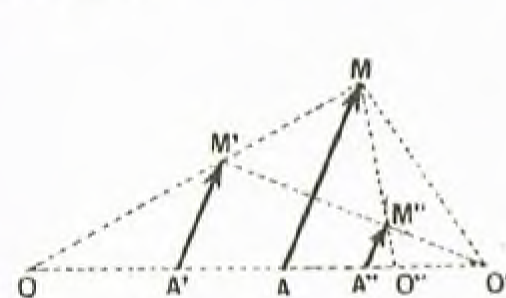


Fig. 203

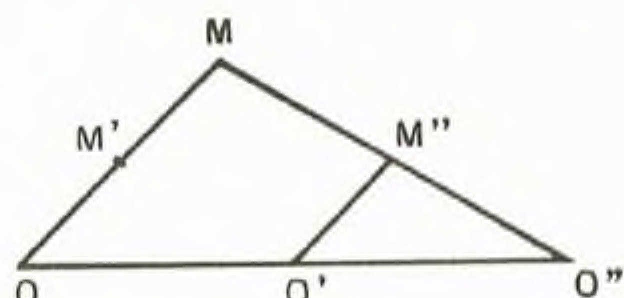


Fig. 204

Se elige sobre OO′ un punto fijo A; sea A′ su homotético en la primera homotecia, A″ el homotético de A′ en la segunda homotecia. Sea M un punto cualquiera; su homólogo M′ en la primera homotecia está definido por $\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$; el homólogo M″ de M′ en la segunda homotecia está definido por $\overrightarrow{A''M''} = k \cdot \overrightarrow{A'M'}$. Estas igualdades entre vectores implican el paralelismo de las rectas AM, A′M′, A″M″ y la igualdad $\overrightarrow{A''M''} = kk' \cdot \overrightarrow{AM}$.

Siendo A y A″ fijos y kk' diferente de 1, la última igualdad define una homotecia cuya razón es kk'.

El centro de esta homotecia es el punto O″, punto en que la recta MM″ corta la recta AA″; como A y A″ son dos puntos de OO′, O″ está alineado con estos dos puntos.

El producto de una homotecia y una traslación es una homotecia (fig. 204).

La homotecia (O · k) transforma el vector $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

La traslación $\overrightarrow{OO'}$ transforma el vector $\overrightarrow{OM'}$ en $\overrightarrow{O'M''} = k \cdot \overrightarrow{OM}$; O y O′ son fijos, k constante; esta igualdad define una homotecia de razón k y cuyo centro está sobre OO′ en su intersección con MM″.

Circunferencia de Euler o de los nueve puntos. — Se emplean las siguientes notaciones: triángulo ABC; A′, B′, C′, puntos medios de los lados; O, centro de círculo circunscrito; H, K, L, pies de las alturas; G, baricentro (punto de concurso de las medianas); I, ortocentro (*fig.* 205).

Se llama **circunferencia de Euler,** *la circunferencia circunscrita al triángulo* A′B′C′. Su centro es E.

El punto G está situado sobre cada mediana, a los dos tercios de cada una a partir del vértice. Por tanto, se tiene

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}} = -\frac{1}{2}$$

La homotecia (G · $-\frac{1}{2}$) transforma A en A′, B en B′ y C en C′ y la circunferencia (O) circunscrita a ABC en la circunferencia de Euler (E) circunscrita a A′B′C′. El punto E está pues sobre la recta GO y se tiene $\overline{GE} = -\frac{\overline{GO}}{2}$. La paralela EE′ a OA′ corta AA′ en E′ y se tiene (GOA′ y GEE′ semejantes)

$$\frac{\overline{GE'}}{\overline{GA'}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GO}} = -\frac{1}{2},$$

y como

$$\overline{GA'} = \frac{\overline{AA'}}{3}, \qquad \overline{GE'} = -\frac{1}{6}\overline{AA'}$$

$$\overline{A'E'} = \overline{GE'} - \overline{GA'} = -\frac{\overline{AA'}}{2}.$$

El punto E′ es el punto medio de AA′; la recta EE′, paralela a OA′, es, como esta recta, perpendicular a BC y por tanto paralela a AH; puesto que E′ es el punto medio de AA′, el punto F en que EE′ corta BC es el punto medio de A′H, luego EE′ es la mediatriz de A′H y por consiguiente $\overline{EA'} = \overline{EH}$. *La circunferencia de Euler pasa por tanto por los pies* H, K, L *de las tres alturas.*

La recta OE corta la altura AH en un punto I; siendo F el punto medio de A′H, el punto medio de OI es E; se tiene $\overline{IE} = \frac{\overline{IO}}{2}$.

Esta igualdad determina el punto I independientemente de la altura elegida AH; este punto pertenece a las tres alturas: es el ortocentro I del triángulo.

Como E y O son los centros de dos circunferencias cuyos radios están en la relación de homotecia $\frac{1}{2}$ de estas dos circunferencias, la igualdad $\frac{\overline{IE}}{\overline{IO}} = \frac{1}{2}$ determina el segundo centro de homotecia de las dos circunferencias (E) y (O). De donde, *los centros de homotecia de la circunferencia de Euler y de la circunferencia circunscrita al triángulo son el centro de gravedad y el ortocentro de este triángulo.* De aquí resulta que: *El centro de gravedad* G *y el ortocentro* I *de un triángulo son dos puntos de la recta que une el centro de la circunferencia circunscrita* (O) *con el centro* E *de la circunferencia de Euler, que dividen al segmento* OE *en la relación* $\frac{1}{2}$.

El punto A es un punto de la circunferencia circunscrita; el homotético de este punto en la homotecia (I · ($\frac{1}{2}$)) es un punto de la circunferencia de Euler. Por consiguiente:

La circunferencia de Euler pasa por los puntos medios de los segmentos IA, IB, IC, *por los pies* H, K, L *de las alturas y por los puntos medios* A′, B′, C′ *de los lados. Por esta razón se llama* **circunferencia de los nueve puntos.**

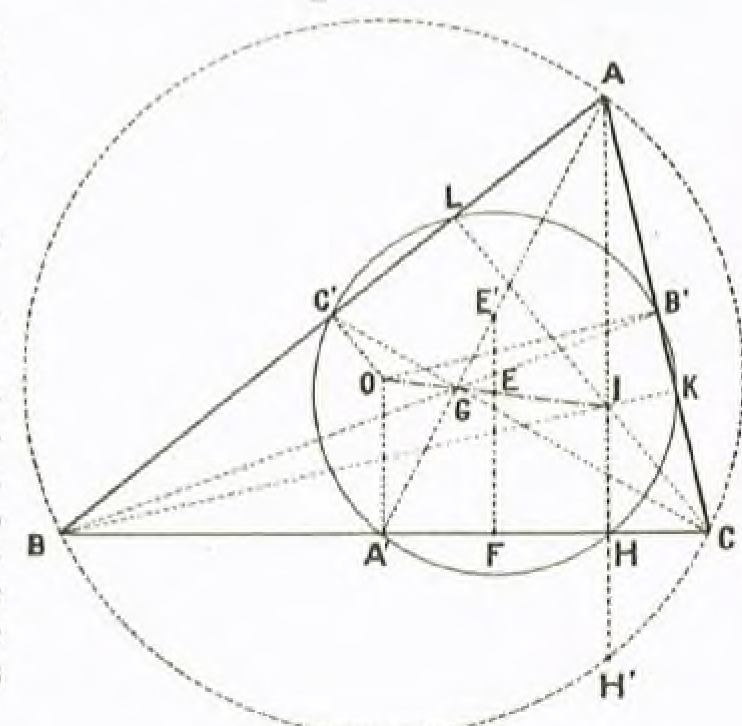


Fig. 205

Por último, puesto que la circunferencia de Euler pasa por H, K, L, la circunferencia circunscrita pasará por H′, K′, L′, transformados de H, K, L en la homotecia (I · 2). Por consiguiente, se tendrá $\overline{IH'} = 2\overline{IH}$ y H′ será el simétrico del ortocentro I con relación a BC. Por tanto:

Los simétricos del ortocentro I *con relación a los lados de un triángulo están sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.*

Teorema de Menelao. — Cortemos un triángulo ABC por una recta (D) que encuentre los lados o sus prolongaciones en M, N, P (*fig.* 206).

El punto B es homotético de A en la homotecia $\left(P \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}\right)$ y el punto C es el homotético de B en la homotecia $\left(M \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}\right)$ de donde C es el homotético de A en una homotecia cuyo centro está sobre AC (definición de homotecia) y sobre MP (producto de dos homotecias de centros M y P), es decir, de centro N y razón de homotecia $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$. Se tiene por consiguiente:

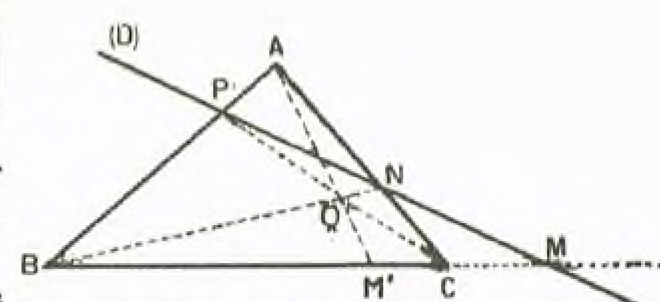


Fig. 206

$$\overline{NC} = \overline{NA} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}},$$

de donde

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = 1.$$

Con este resultado se demuestra el teorema de Menelao, que se enuncia así:

La condición necesaria y suficiente para que 3 puntos M, N, P *tomados sobre los lados de un triángulo* BC, CA, AB *estén alineados es*

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 1.$$

La condición es necesaria. Si los tres puntos están alineados por hipótesis, esta condición queda satisfecha, según la demostración precedente.

La condición es suficiente. Por hipótesis, la condición queda satisfecha. La recta MN corta la recta AB, en general, en un punto P_1 y, al estar alineados M, N, P_1, se tiene

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{P_1B}}{\overline{P_1A}} = 1.$$

Esta igualdad lleva consigo $\frac{\overline{P_1B}}{\overline{P_1A}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$; luego P_1 y P coinciden y P está alineado con M y N.

Unamos B con N y C con P; estas rectas se cortan en general en un punto Q. Tracemos AQ que corta BC en M'. La polar del punto M con relación a los lados del ángulo en A (construcción de la polar) es AQ; por tanto se tiene (M . M' . B . C) = —1, es decir,

$$\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}.$$

La relación de Menelao lleva consigo la siguiente:

$$\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -1,$$

que demuestra el teorema enunciado.

Semejanza

Semejanza. Propiedad fundamental de la semejanza. Figuras transformadas. Centro de semejanza. Teorema de Simson. Recta de Simson. Figuras semejantes

Semejanza. — *Se llama* **semejanza** *el producto de una homotecia positiva por un desplazamiento.*

En este capítulo se designa por k, número positivo y diferente de 1, la razón de homotecia; por θ, el ángulo de giro si el desplazamiento es un giro. El ángulo θ será nulo o múltiplo de 2π si el desplazamiento es una traslación.

Observación. Una homotecia negativa (O . —k) es el producto de una homotecia positiva (O . k) por un giro (O . π).

La homotecia (O . k) transforma M en M'_1 (*fig.* 207), de tal modo que se verifique $\overrightarrow{OM'_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, y el giro (O . π) transforma M'_1 en M' verificándose $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM'_1} = -k \cdot \overrightarrow{OM}$. El producto de las dos operaciones es una homotecia (O . —k).

El producto de una homotecia negativa de potencia —k y de un desplazamiento de ángulo θ puede ser reemplazado por una homotecia positiva de potencia k, seguida de dos desplazamientos de ángulos θ y π; estos dos desplazamientos pueden sustituirse por un desplazamiento único $\theta + \pi$.

Fig. 207

Vemos en definitiva que *el producto de una homotecia negativa por un desplazamiento es también una semejanza.*

Propiedad fundamental de la semejanza. — Teorema. *La semejanza transforma dos puntos A y B cualesquiera en dos puntos A' y B' de tal manera que se verifique* (fig. 208).

$$A'B' = k \cdot AB, \qquad \widehat{(AB,A'B')} = \theta.$$

La homotecia (O . k) transforma el vector $\overrightarrow{AB}$ en un vector $\overrightarrow{A_1B_1}$ definido por $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. El desplazamiento transforma el vector $\overrightarrow{A_1B_1}$ en un vector $\overrightarrow{A'B'}$ y se tiene

$$A'B' = A_1B_1, \qquad \widehat{(A_1B_1,A'B')} = \theta.$$

Puesto que k es positivo, la igualdad $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ lleva consigo, de una parte, que AB y A_1B_1 sean paralelas del mismo sentido; por otra parte, que

$$A_1B_1 = k \cdot AB.$$

Por ser $\overrightarrow{A_1B_1}$ y $\overrightarrow{AB}$ paralelas y del mismo sentido se tiene

Fig. 208

$$\widehat{(AB,A'B')} = \widehat{(A_1B_1,A'B')} = \theta.$$

Por ser $A_1B_1 = k \cdot AB$ se tiene $A'B' = A_1B_1 = k \cdot AB$.

Recíproco. *Sean A y A' dos puntos fijos de un plano, k un número positivo diferente de* 1, θ *un número cualquiera; la transformación definida por*

$$\widehat{(AM,A'M')} = \theta, \qquad A'M' = k \cdot AM$$

es una semejanza.

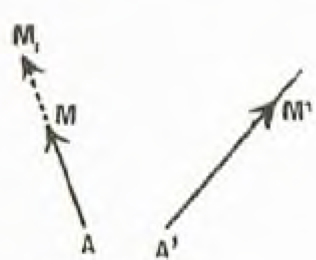


Fig. 209

La homotecia positiva (A . k) transforma el vector $\overrightarrow{AM}$ en un vector $\overrightarrow{AM_1}$ (*fig.* 209). Al ser $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AM_1}$ del mismo sentido, se tiene $\widehat{(AM,A'M')} = \widehat{(AM_1,A'M')} = \theta$. Por otra parte, $AM_1 = k \cdot AM$; por consiguiente, $AM_1 = A'M'$.

La transformación definida por $AM_1 = A'M'$, $\widehat{(AM_1,A'M')} = \theta$ es una traslación (v. p. 105), si θ es nulo o múltiplo de 2π, y es un giro de ángulo θ, cuando no sea así (v. p. 105 y 106). En todos los casos, se pasa de M a M' por una homotecia seguida de un desplazamiento; por consiguiente, la transformación que permite pasar de M a M' es una semejanza.

Figuras transformadas. — Puesto que la semejanza es una homotecia seguida de un desplazamiento, *la figura transformada de una recta* (D) *es una recta* (D') y uno de los ángulos (D, D') es igual a θ.

La figura transformada de un triángulo ABC es, por tanto, un triángulo A'B'C'. Siendo A' el transformado de A, B' el de B, C' el de C, se tiene $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, puesto que cada una de estas razones es igual a k. El triángulo A'B'C' es pues semejante al triángulo ABC,

La figura transformada de un triángulo, por una semejanza, es un triángulo semejante.

La figura transformada de un círculo de radio R *es un círculo de radio* k . R.

Centro de semejanza. — Teorema. *Existe un punto* O *y sólo uno que sea el transformado de sí mismo en una semejanza dada.*

Este punto se llama **centro de semejanza** o también **punto doble** de la transformación.

Sean A y A' dos puntos fijos dados; sean k, positivo y diferente de 1, y θ igualmente dados (*fig.* 210). La semejanza está definida por

$$A'M' = k \cdot AM \qquad \text{y} \qquad \widehat{(AM,A'M')} = \theta.$$

La condición necesaria y suficiente para que el transformado de O sea O es que $A'O = k \cdot AO$ y $\widehat{(AO,A'O)} = \theta$.

El lugar geométrico de los puntos tales que $A'O = k \cdot AO$, siendo k diferente de 1, es una circunferencia (C) de diámetro DD', siendo D y D' los puntos que dividen al segmento AA' en la razón dada.

El lugar geométrico de los puntos tales que $\widehat{(AO,A'O)} = \theta$, si θ no es un múltiplo de π, se compone de dos arcos de circunferencia de extremos A y A' que cortan la circunferencia (C) en dos puntos O y O' simétricos con relación a AA'. Para uno sólo de estos dos puntos el signo de $\widehat{(AO,A'O)}$ es el de θ. Hay pues, en este caso, un punto O y uno sólo, obtenido por la construcción anterior, que es el transformado de sí mismo en la semejanza dada.

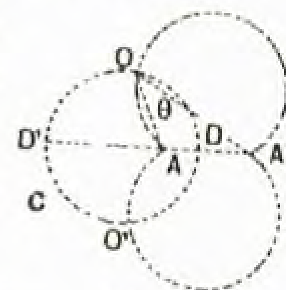


Fig. 210

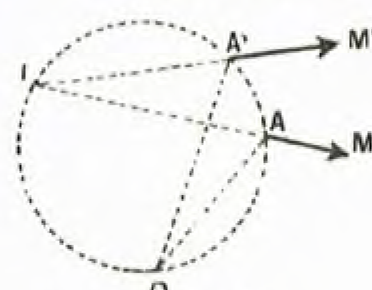


Fig. 211

Si θ fuese igual a un múltiplo de π, el punto O sería D o D' y para uno sólo de estos puntos el ángulo $\widehat{(AO,A'O)}$ tendría el valor dado. Por consiguiente, la conclusión no varía.

Teorema. *Cuando dos rectas* AM *y* A'M' *homólogas en una semejanza se cortan, el punto de intersección* I, *el centro de semejanza* O *y dos puntos homólogos cualesquiera* A *y* A' *de las dos rectas están en una circunferencia* (fig. 211).

Para llevar la recta AM sobre A'M' es preciso hacer un giro igual a θ: el ángulo $\widehat{(IA.IA')}$ es igual a θ o $\theta + \pi$; como $\widehat{(OA,OA')} = \theta'$ la diferencia $\widehat{(OA,OA')} - \widehat{(IA,IA')}$ es un múltiplo de π. De lo cual resulta que A, A', I, O están sobre una misma circunferencia.

El centro O *de la semejanza* (S) *es el punto de intersección de las*

circunferencias IAA′, IBB′, *si* AB *y* A′B *se cortan en un punto* I (fig. 212).

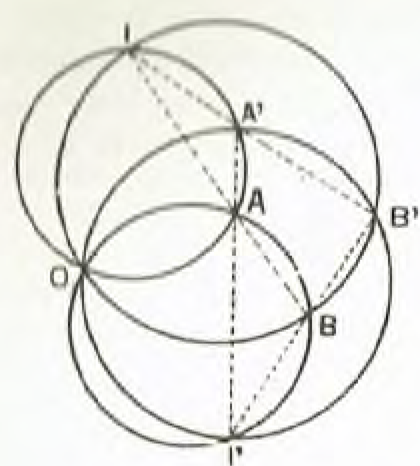


Fig. 212

Se ha demostrado que I,O,A,A′ están en una circunferencia; por la misma razón I,O,B,B′ están también sobre una circunferencia: el punto O es el punto de intersección de las circunferencias IAA′, IBB′. Estas dos circunferencias tienen un punto común I; tendrán, en general, un segundo punto común O. Si las dos circunferencias son tangentes en I, el punto O coincide con el punto I.

La semejanza (S′) *de centro* O, *en la que* A *corresponde a* B, *también hace que* A′ *corresponda a* B′ (fig. 212).

En la semejanza (S) los puntos homólogos de O,A,B son O,A′B′. Se tendrá:

$$OA' = k \cdot OA, \quad OB' = k \cdot OB, \quad \widehat{(OA,OA')} = \widehat{(OB,OB')} = \theta,$$

teniendo k y θ los valores determinados en la página 110.

De las igualdades $OA' = k \cdot OA$, $OB' = k \cdot OB$ se deduce $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OB'}{OA'}$, y la igualdad $\widehat{(OA,OA')} = \widehat{(OB,OB')}$ puede escribirse

$$\widehat{(OA,OB)} + \widehat{(OB,OA')} = \widehat{(OB,OA')} + \widehat{(OA'OB')},$$

es decir, $\widehat{(OA,OB)} = \widehat{(OA',OB')}$.

La semejanza (S′) en que A y B se corresponden está definida por las igualdades

$$OM' = k' \cdot OM, \quad \widehat{(OM,OM')} = \theta',$$

estando definidos k' y θ' por la condición de que B es el transformado de A, es decir, por

$$OB = k' \cdot OA, \quad \widehat{(OA.OB)} = \theta'.$$

Para que B′ sea el transformado de A′ en esta semejanza, es condición necesaria y suficiente que

$$OB' = k' \cdot OA', \quad \widehat{(OA'OB')} = \theta',$$

y reemplazando k' y θ' por sus valores se tiene

$$OB' = OA' \cdot \frac{OB}{OA}, \quad \widehat{(OA',OB')} = \widehat{(OA,OB)}.$$

Antes hemos visto que estas condiciones se cumplen.

Las circunferencias circunscritas a los triángulos formados por tres de las rectas que forman un cuadrilátero completo tienen un punto común O.

Sean A,B′ y A′,B y I,I′ los vértices opuestos de un cuadrilátero completo (*fig.* 212). Las circunferencias definidas por el enunciado son las cuatro circunferencias circunscritas a los triángulos IAA′, IBB′, I′AB, I′A′B′. Las dos primeras se cortan en un punto O, diferente de I en general, que es el centro de la semejanza (S) definido anteriormente: al ser este mismo punto O centro de la semejanza (S′) definida en el párrafo precedente, los puntos O,I′,A,B, están en una misma circunferencia y los puntos O,I′A′,B′ también. Las cuatro circunferencias del enunciado tienen el punto común O.

Teorema de Simson. — *La condición necesaria y suficiente para que las proyecciones ortogonales* α, β, γ *de un punto* P *sobre tres rectas que forman un triángulo* ABC *estén alineadas, es que* P *esté sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.*

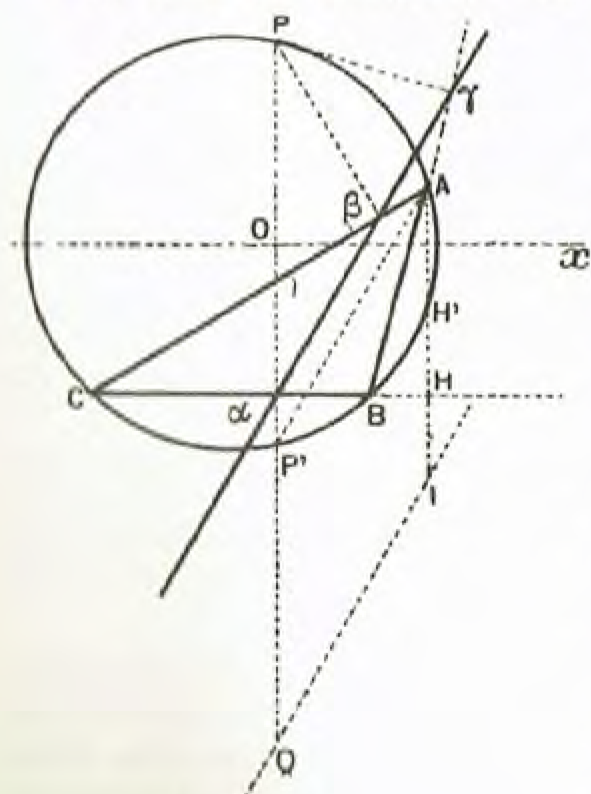


Fig. 213

La condición es necesaria (*fig.* 213). Hipótesis: α, β, γ están alineados. Consideremos el cuadrilátero completo formado por las cuatro rectas AB, BC, CA, $\alpha\beta\gamma$.

Las circunferencias circunscritas a los triángulos $A\beta\gamma$, $B\alpha\gamma$, $C\alpha\beta$, ABC tienen un punto común. La primera de estas circunferencias tiene por diámetro AP, la segunda BP, la tercera CP. Por consiguiente, el punto común es P, que pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

La condición es suficiente. Hipótesis: P está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La recta $\alpha\beta$ corta en un punto γ' la recta AB. Consideremos el cuadrilátero formado por las cuatro rectas AB, BC, CA, $\alpha\beta\gamma'$. Las circunferencias circunscritas a los triángulos $A\beta\gamma'$, $B\alpha\gamma$, $C\alpha\beta$, ABC tienen un punto común: la circunferencia $C\alpha\beta$, de diámetro PC, y la circunferencia ABC tienen dos puntos comunes C y P. No siendo C común a las dos primeras circunferencias, estas dos circunferencias pasarán, pues, por el punto P. Como el ángulo $\widehat{P\beta A}$ es recto, la circunferencia circunscrita al triángulo $A\beta\gamma'$ que pasa por P, tiene como diámetro AP: el ángulo $\widehat{P\gamma' A}$ es por tanto recto, γ' es la proyección ortogonal de P sobre AB, este punto coincide con γ y α, β, γ son tres puntos alineados.

Recta de Simson. — *Se llama* **recta de Simson** *del punto* P *de la circunferencia circunscrita a un triángulo* ABC, *la recta* $\alpha\beta\gamma$ *que une las proyecciones ortogonales del punto* P *sobre los tres lados del triángulo o sobre sus prolongaciones* (*fig.* 213).

Sea P′ el segundo punto de intersección de $P\alpha$ con la circunferencia circunscrita, I el ortocentro, AH una altura, H su pie, H′ el simétrico de I con relación al lado BC (H′ es el punto en que la altura AH corta la circunferencia circunscrita). Q es el simétrico de P con relación al lado BC; Ox es el diámetro de la circunferencia paralelo a BC y es perpendicular a las cuerdas PP′ y AH′ en sus puntos medios.

La recta de Simson es paralela a AP′.

En efecto, en la circunferencia (no dibujada) de diámetro CP y limitándose al caso de la figura considerada se tiene $\widehat{P\alpha\beta} = \widehat{PC\beta}$ (ángulos inscritos en el mismo arco). En la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, $\widehat{PCA} = \widehat{PP'A}$ (ángulos inscritos en el mismo arco). Por tanto se tiene $\widehat{P\alpha\beta} = \widehat{PC\beta} = \widehat{PCA} = \widehat{PP'A}$. Como los ángulos correspondientes $\widehat{P\alpha\beta}$, $\widehat{PP'A}$ son iguales, $\alpha\beta$ (recta de Simson) y AP′ son paralelas.

La recta de Simson es paralela a IQ.

La simétrica de AP′ con relación a Ox es H′P; la simétrica de H′P con relación a BC es IQ. El producto de dos simetrías con relación a dos rectas paralelas es una traslación; de donde IQ es paralela a AP′ y por tanto a la recta de Simson.

La recta de Simson del punto P *pasa por el punto medio del segmento que une el ortocentro* I *con el punto* P.

Se tiene $PQ = 2P\alpha$ por construcción; la recta de Simson es, pues, la homotética de la recta IQ en la homotecia $\left(P \cdot \dfrac{1}{2}\right)$. El punto medio de PI está pues sobre la recta de Simson. Este punto medio de PI está sobre la circunferencia de los nueve puntos, puesto que esta circunferencia es homotética de la circunferencia circunscrita en la homotecia $\left(I \cdot \dfrac{1}{2}\right)$.

Figuras semejantes. — *Se dice que dos figuras* (F) *y* (F′ *son* **semejantes** (fig. 214), *si se puede hacer corresponder a todo punto* M *de la figura* (F) *un punto* M′ *de la figura* (F′) *llamado homólogo de* M, *de manera que la razón de las distancias de dos puntos cualesquiera de la figura* (F) *y de dos puntos homólogos de la figura* (F′) *sea constante*

$$M'P' = k \cdot MP.$$

Construyamos una homotecia $(O \cdot k)$ de centro cualquiera O y de razón k. La figura homotética de un segmento MP cualquiera de la figura (F) es un segmento M_1P_1 de una figura homotética (F_1): y se tiene $M_1P_1 = k \cdot MP$. De esta igualdad resulta $M_1P_1 = M'P'$. Por consiguiente, se puede hacer que a cada punto M_1 de la figura (F_1) corresponda un punto homólogo M′ de la figura (F′), de manera que M_1P_1, distancia de estos dos puntos, sea igual a M′P′, distancia de los puntos homólogos. Las dos figuras (F_1) y (F′) son por tanto iguales (v. p. 107) y se pasa de una a otra por un desplazamiento o por un volvimiento.

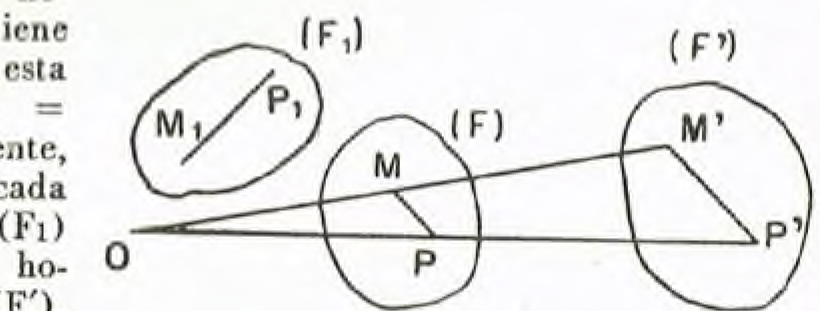


Fig. 214

Por consiguiente, *cuando dos figuras son semejantes, una de ellas es igual a la homotética de la otra.*

Se dice que dos figuras son **directamente semejantes** *cuando una de ellas es directamente igual a una homotética de la otra.*

Se dice que dos figuras son **inversamente semejantes** *cuando una de ellas es inversamente igual a una homotética de la otra.*

Sean A, B, C tres puntos cualesquiera de una figura (F), A′, B′,C′, sus homólogos en una figura (F′) semejante (*fig.* 215). De las proposiciones precedentes resulta que los triángulos ABC y A′B′C′ son semejantes y que, por consiguiente, el ángulo $\widehat{ABC}$ es igual a su homólogo $\widehat{A'B'C'}$.

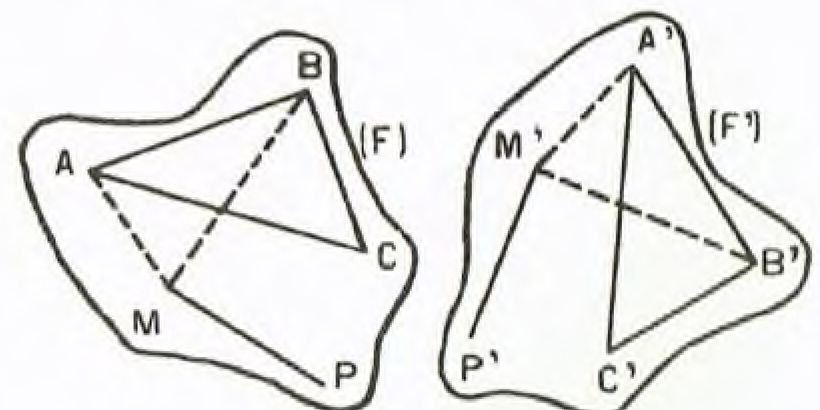


Fig. 215

Recíprocamente, si se puede hacer corresponder a todo punto de la figura (F) un punto homólogo en la figura (F'), de manera que cualesquiera que sean los puntos A,B,C, los ángulos homólogos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ sean iguales, las dos figuras (F) y (F') serán semejantes. La igualdad de los ángulos implica la semejanza de los triángulos y la semejanza de los triángulos lleva consigo la igualdad de las razones $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Sean M y P dos puntos de la figura (F) y M',P' sus homólogos. De la semejanza de los triángulos MAB y M'A'B' tendremos

$$\frac{M'A'}{MA} = \frac{A'B'}{AB},$$

y de la semejanza de los triángulos PMA y P'M'A',

$$\frac{P'M'}{PM} = \frac{M'A'}{MA}.$$

De estas dos igualdades se deduce que $\frac{P'M'}{PM} = \frac{A'B'}{AB}$. Si AB y A'B' permanecen fijos $\frac{A'B'}{AB}$ es constante y la igualdad obtenida demuestra que las figuras (F) y (F') son semejantes.

Inversión

Inversión. Propiedades de un par de puntos inversos. Propiedades de las tangentes a curvas inversas. Inversa de una recta. Posiciones relativas de una recta (D), de su inversa, de la circunferencia (C) y del centro de inversión. Inversiones que transforman una circunferencia dada (C) en una recta dada (D). Circunferencias tangentes a una recta (D) y a una circunferencia (C). Construir una circunferencia tangente a una recta (D) y a una circunferencia (C) y que pase por un punto dado S. Inversa de una circunferencia (C) que no pasa por el centro de inversión O. Posiciones relativas de dos circunferencias inversas y del centro de inversión. Inversiones que transforman una circunferencia (C) dada en una circunferencia (C') dada. Circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas (C) y (C'). Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias (C) y (C') dadas y que pase por un punto dado S. Ángulos de curvas inversas. Curvas ortogonales. Construcción de circunferencias ortogonales a una circunferencia (Γ) dada. Distancia de dos puntos, A' y B', inversos de dos puntos dados A y B. Teorema de Ptolomeo

Inversión. — *Se llama* **inversión** (O . *k*) *la transformación que hace corresponder a un punto* M, *diferente del punto* O, *el punto* M' *definido por las dos condiciones siguientes:*

1° M' *está sobre la recta* OM;

2° $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

k es un número dado diferente de cero, que se llama **potencia de la inversión.** El punto O dado se llama **centro de inversión.**

La figura transformada de una figura (F) por una inversión se llama inversa de la figura (F) [abreviación de *figura inversa*].

A un punto M diferente de O corresponde un punto M' inverso de M bien determinado y diferente de O. La transformación que permite pasar de M' a M es la inversión (O . *k*), idéntica a la inversión dada. Por esto se dice en la práctica que dos figuras son inversas sin especificar cuál es la transformada de la otra.

El inverso M' es distinto de M si *k* es negativo, puesto que, si M' y M se confunden, se verifica que $\overline{OM}^2 = +k$. En cambio, si *k* es positivo, todos los puntos de la circunferencia (Γ), de centro O y radio $\sqrt{k}$, se confunden con sus transformados. Esta circunferencia se denomina **circunferencia de inversión.**

Se dice que dos puntos M y M' son **inversos con relación a una circunferencia** (Γ) [*fig.* 216] cuando son inversos en una inversión que tiene esta circunferencia por circunferencia de inversión. La recta MM' pasa entonces por el centro O de esta circunferencia.

Fig. 216

Notemos que estas condiciones llevan consigo que toda circunferencia (C) que pasa por M y M' es ortogonal a la circunferencia (Γ), puesto que la potencia del centro de (Γ) con relación a (C) es igual al cuadrado del radio de (C).

La inversión es una transformación menos sencilla que las precedentes. Una de las numerosas razones de este hecho es que la inversa de una recta no es una recta en general, como se demuestra más adelante, y que, por consiguiente, un vector no se transforma en otro vector. También, el estudio de esta transformación se hace por procedimientos completamente diferentes de los empleados en los capítulos que anteceden.

Propiedades de un par de puntos inversos. — Teorema. *Dos pares de puntos,* A' *inverso de* A, B' *inverso de* B, *en una misma inversión, están sobre una misma circunferencia* (*fig.* 217).

En efecto, los cuatro puntos A,A',B,B' están situados sobre dos rectas secantes que parten de O y se tiene $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, puesto que cada uno de estos productos es igual a la potencia de inversión. Lo que prueba la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos (v. p. 99) A,A'B,B' estén sobre una misma circunferencia.

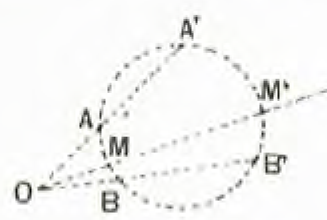


Fig. 217

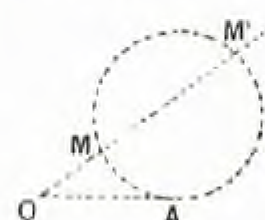


Fig. 218

Recíproco. *Sean* A,A',O *tres puntos dados, alineados y distintos; la transformación que cambia el punto* M *en un punto* M', *segundo punto de intersección de la circunferencia* AA'M *con la recta* OM, *es una inversión* (figura 217).

En efecto, M',M y O están alineados por hipótesis; por otra parte, M',M,A,A' están sobre una circunferencia; se tiene pues $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Este producto es una misma constante *k*. La transformación es, por tanto, una inversión.

Corolario. *Sean* A *y* O *dos puntos distintos; la transformación que cambia el punto* M *en un punto* M', *segundo punto de intersección de la circunferencia que pasa por* M, *y es tangente en* A *a la recta* OA, *con la recta* OM, *es una inversión* (fig. 218).

En efecto, M',M,O están alineados y $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA}^2$.

Observación. Los recíprocos precedentes hacen corresponder a un punto M del plano un punto M' bien determinado y distinto de M, excepto en dos casos:

1° La recta OM es tangente en M a la circunferencia utilizada para definir M'. En este caso se tiene $\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. El punto M está sobre la circunferencia de inversión y su inverso M' se confunde con M.

2° El punto M está sobre OA. En este caso la construcción que debe dar el punto M' no se aplica. Es preciso determinar un par de puntos inversos B, B' distintos de A,A' y definir el inverso de M por medio de estos puntos.

Propiedades de las tangentes a curvas inversas. — Teorema. *Si una curva* (C) *admite en un punto* A *una tangente* AT, *la curva inversa* (C') *admite en el punto inverso* A' *una tangente* A'T' *simétrica de* AT *con relación a la mediatriz de* AA'.

Sea O el centro de inversión (*fig.* 219), M un punto de la curva (C), M' su inverso, (Γ) la circunferencia que pasa por los cuatro puntos A,A',B,B' (v. *Propiedades de un par de puntos inversos)*, P el centro de esta circunferencia. El punto P está sobre la mediatriz de AM y sobre la mediatriz de AA', puesto que AM y AA' son dos cuerdas de la circunferencia (Γ).

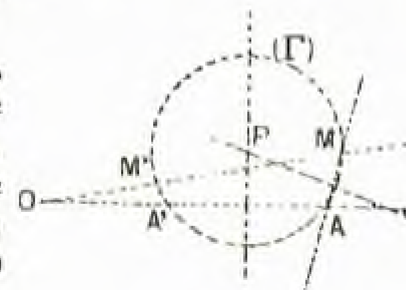


Fig. 219

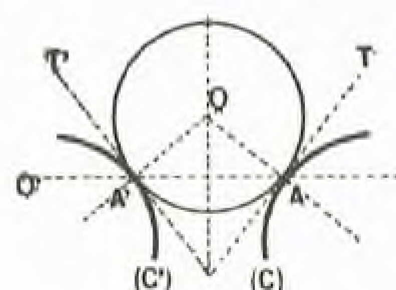


Fig. 220

Por hipótesis, cuando M tiende hacia el punto A, la recta AM tiende hacia una posición límite AT (*fig.* 220) [definición de la tangente en A a la curva (C), v. p. 108]; la mediatriz de AM tiende hacia la perpendicular a la recta AT en A, el centro P de la circunferencia (Γ) tenderá, pues, hacia Q, punto de intersección de la mediatriz fija de AA' y de la perpendicular a la recta AT en A.

Cuando M tiende hacia A, M' tiende hacia A' y P tiende hacia Q. La mediatriz de A'M' tiende pues hacia A'Q. La recta A'M', que le es perpendicular, tiende hacia la perpendicular en A' a A'Q, es decir, hacia la tangente A'T'. Siendo los puntos A y A' y las rectas AQ y A'Q simétricos con relación a la mediatriz de AA', las tangentes AT y A'T' serán también simétricas con relación a esta recta. Ellas cortan, pues, en el mismo punto la mediatriz de AA' (caso de la figura 220) o bien son las dos perpendiculares a AA'.

Corolario. *Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos* A *y* A' *de dos curvas inversas* (C) *y* (C') *y es tangente en uno de estos dos puntos a una de las curvas, es también tangente a la otra* (fig. 220).

El centro de una circunferencia que pasa por A, A' y es tangente en A a la curva (C) se encuentra sobre la mediatriz de AA' y sobre la perpendicular en A a la tangente AT; éste es por tanto el punto Q. La circunferencia de centro Q y de radio QA pasa por A' y es tangente en A' a la recta A'T'; por tanto, es tangente en este punto a la curva (C').

Inversa de una recta. — *La inversa de una recta* (D), *que pasa por el centro de inversión* O, *es la misma recta* (D).

La inversa de una recta (D), *que no pasa por el centro de inversión* O, *es una circunferencia* (C) *que pasa por el punto* O.

Sea A (*fig.* 221) el pie de la perpendicular OA bajada desde el centro de inversión O sobre la recta (D). Sea M un punto cualquiera de esta recta; sean A′ y M′ los inversos de A y M. La figura 221 y el razonamiento se hacen suponiendo que A′ es distinto de A.

Los cuatro puntos A,A′,M,M′ están sobre una misma circunferencia (Γ). El ángulo $\widehat{MAA'}$ es recto, por construcción, puesto que A es el pie de la perpendicular bajada desde O a la recta (D); A′M es, por consiguiente, un diámetro de la circunferencia (Γ), y el ángulo $\widehat{A'M'M}$, inscrito en la semicircunferencia (Γ), es recto. El ángulo $\widehat{OM'A'}$, suplementario de un ángulo recto, es también recto y, por consiguiente, el punto M′ es un punto de la circunferencia (C) de diámetro OA′.

Para establecer que la circunferencia (C) completa es descrita por el punto M′, se demuestra la proposición siguiente:

La inversa de una circunferencia (C) *que pasa por el centro de inversión* O *es una recta* (D).

Sea A′ (*fig.* 221) el punto diametralmente opuesto al punto O sobre la circunferencia (C), M′ un punto cualquiera de esta circunferencia, A y M sus inversos. Los cuatro puntos A,A′,M,M′ están sobre una misma circunferencia (Γ). El ángulo $\widehat{A'M'O}$ inscrito en una semicircunferencia es recto: A′M es, por consiguiente, un diámetro de la circunferencia (Γ) y el ángulo $\widehat{A'AM}$ es recto. El punto M es, pues, un punto de la recta (D) perpendicular en A a la recta OA.

Posiciones relativas de una recta (D), de su inversa, de la circunferencia (C) y del centro de inversión. — *El centro de inversión* O *es un punto de la circunferencia* (C); *la tangente en este punto a la circunferencia* (C) *es paralela a la recta* (D).

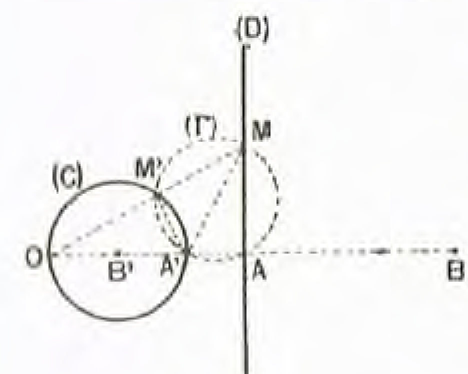


Fig. 221

El diámetro de la circunferencia (C) que pasa por O es perpendicular a la recta (D).

Sea B′ el centro de la circunferencia (C) y B su inverso.

Se tiene $\overline{OA'} = 2\overline{OB'}$ (*fig.* 221), $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$; de estas igualdades se deduce $\overline{OB} = 2\overline{OA}$.

El centro B′ *de la circunferencia* (C), *inversa de una recta* (D), *es el inverso del simétrico* B *del centro de inversión* O *con relación a esta recta.*

Inversiones que transforman una circunferencia dada (C) en una recta dada (D). — *Hay dos inversiones que transforman la circunferencia* (C) *en la recta* (D) [*fig.* 221].

Sea OA′ el diámetro de la circunferencia (C), perpendicular a la recta (D). Sea A el punto donde este diámetro corta la recta (D).

La inversión de centro O y potencia $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ transforma la circunferencia (C) en una recta perpendicular en A a OA y responde a la pregunta.

La inversión de centro A′ y potencia $\overline{A'O} \cdot \overline{A'A}$ transforma la circunferencia (C) en una recta perpendicular a AA′ en el punto A y responde también a la pregunta.

Ninguna otra inversión transforma la circunferencia (C) *en la recta* (D) [*fig.* 221].

Se ha visto que el centro de toda inversión que transforma la recta (D) en una circunferencia (C) es un punto de intersección de la circunferencia (C) con el diámetro de esta circunferencia perpendicular a la recta (D). Estos puntos pueden ser O y A′. Si es O, la inversión debe transformar A′ en A y su potencia es, por tanto, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Si es A′, la inversión transforma O en A y su potencia es, pues, $\overline{A'O} \cdot \overline{A'A}$. Es una de las dos inversiones del párrafo precedente.

Circunferencias tangentes a una recta (D) y a una circunferencia (C). — *Hay dos familias de circunferencias tangentes a una recta dada* (D) *en un punto* M *y a una circunferencia* (C) *dada en un punto* M′. *Para todas las circunferencias de una misma familia, la recta* MM′ *pasa por un punto fijo* O *y el producto* $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$, *potencia del punto* O *con relación a las circunferencias de la familia, es constante.*

Hay dos inversiones que transforman la circunferencia (C) en la recta (D). Sea O el centro de una de estas inversiones, M′ y M un par de puntos inversos, M′ sobre la circunferencia (C), M sobre la recta (D).

La circunferencia (Γ) [*fig.* 222] tangente en M a la recta (D) y que pasa por M′, es tangente en M′ a la circunferencia (C).

Las circunferencias (Γ) constituyen una familia de circunferencias tangentes; la recta MM′ pasa por O, centro de inversión, punto de la circunferencia (C) donde la tangente es paralela a la recta (D) y el producto $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ es constante e igual a la potencia de inversión.

El centro de la segunda inversión es A′; P y P′ son dos puntos inversos; las circunferencias (Γ′) que pasan por P′ y son tangentes en P a la recta (D) constituyen la segunda familia de las circunferencias tangentes a la circunferencia (C) en P′ y a la recta (D) en P.

Fig. 222

Si una circunferencia (Γ) *es tangente en* M *a una recta* (D) *y en* M′ *a una circunferencia* (C), *los puntos* M *y* M′ *son dos puntos inversos en una de las inversiones que transforman* (C) *en* (D). *La circunferencia* (Γ) *pertenece pues a una de las dos familias definidas en el párrafo precedente.* En efecto, la recta MM′ que corta en M′ la circunferencia (C), la corta en un segundo punto I. La circunferencia (C) y la circunferencia (Γ) tangentes en M′ son (v. p. 108) homotéticas en una homotecia de centro M′. Las tangentes a estas dos circunferencias en los puntos M y O que se corresponden en esta homotecia son (v. p. 108) paralelas. La tangente en I a la circunferencia (C) es, pues, paralela a la recta (D) y el punto I es uno de los centros de inversión; dicho punto estará a A′ o en O (v. *Posiciones relativas de una recta, de su inversa y del centro de inversión*).

Si está en O, por ejemplo, los puntos M y M′ son inversos en la inversión que transforma (D) en (C), y la circunferencia tangente es una de las circunferencias de la familia (Γ).

Si está en A′ (sobre la figura 222 los puntos de contacto son en este caso P y P′), los puntos P y P′ son inversos en la segunda inversión que tranforma (D) en (C) y la circunferencia tangente pertenece a la familia (Γ′).

Construir una circunferencia tangente a una recta (D) y a una circunferencia (C) y que pase por un punto dado S. — Vamos a demostrar (*fig.* 222) que por un punto S del plano, que no esté situado sobre la recta (D) ni sobre la circunferencia (C), pasan dos circunferencias de cada familia o ninguna.

Sea (Γ) una circunferencia de la familia que corresponde (*fig.* 222) a la inversión de centro O, puntos de contacto M,M′. Si la circunferencia (Γ) pasa por el punto S, la recta OS cortará la circunferencia (Γ) en un segundo punto S′, generalmente distinto de S. Se tendrá $\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}$, potencia del punto O con relación a la circunferencia (Γ) y $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$, puesto que M y M′ son dos puntos inversos. Por consiguiente, $\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Esta igualdad define el punto S′, segundo punto de intersección de la recta OS con la circunferencia SAA′ (no trazada en la figura).

No estando situado el punto S sobre la circunferencia (C) ni sobre la recta (D), lo mismo ocurre con S′. Si los puntos S y S′ están a un mismo lado de la recta (D), existen dos circunferencias [v. p. 100], (Γ_1) y (Γ_2), tangentes a la recta (D), y que pasan por S y S′; si S y S′ están a uno y otro lado de la recta (D), no existe ninguna.

Vamos a demostrar que si existen dos circunferencias (Γ_1) y (Γ_2), son de la misma familia de las circunferencias (Γ), es decir, que no solamente son tangentes a la recta (D), sino que también lo son a la circunferencia (C). En efecto, si una de las circunferencias (Γ_1) toca en M a la recta (D), corta la recta OM en un punto M′, definido por $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OS} \cdot \overline{OS'}$, potencia de O con relación a la circunferencia (Γ_1), y como $\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$, se tendrá $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$. Los puntos M y M′ son inversos en la inversión de centro O, y (Γ_1), que pasa por M,M′ y es tangente en M a la recta (D), será también tangente (v. p. 112) en M′ a la circunferencia (C).

Por consiguiente, por el punto S *pasan en total, ninguna, dos o cuatro circunferencias tangentes a la circunferencia* (C) *y a la recta* (D).

Inversa de una circunferencia (C) que no pasa por el centro de inversión O. — *La inversa de una circunferencia* (C) *que no pasa por el centro de inversión* (fig. 223) *es una circunferencia* (C′).

Si el punto O es el centro E de la circunferencia (C), la proposición es evidente. Supongamos O y E distintos. El diámetro OE de la circunferencia (C) tiene por extremos A y B.

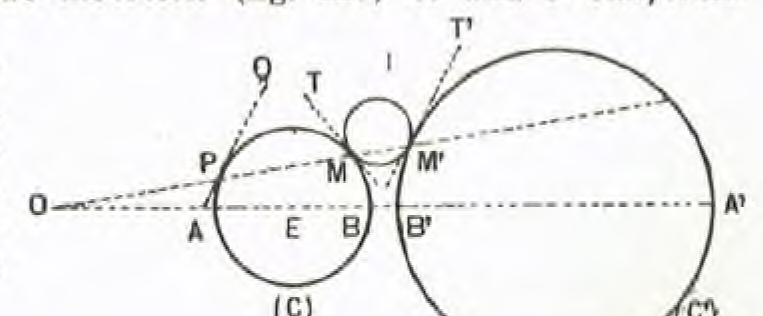


Fig. 223

Sea M un punto cualquiera de la circunferencia (C). Sean M′, A′, B′ los inversos de los puntos M, A, B. La recta OM corta la circunferencia (C) en M y en otro punto P, definido por la igualdad

$$\overline{OM} \cdot \overline{OP} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}.$$

Siendo, por hipótesis, el punto M′ inverso de M, se tendrá

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}.$$

De estas dos igualdades se deduce

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA'}}{OB}.$$

Los puntos M′, P, O están alineados y la relación $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OP}}$ es constante; luego el punto M′ se obtiene del P por una homotecia de centro O. Cuando el punto M describe la circunferencia (C), el punto P describe también la circunferencia (C) y el punto homotético M′ describe la circunferencia homotética (C′) de diámetro A′B′ (v. p. 108).

Cálculo del radio R′ *de la circunferencia* (C′).

Sea R el radio de la circunferencia (C), p la potencia de O con relación a la circunferencia dada (C) y k la potencia de inversión; se tiene

$$\frac{R'}{R} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \frac{k}{p}.$$

Posiciones relativas de dos circunferencias inversas y del centro de inversión. — *El centro de inversión de dos circunferencias* (C) *y* (C′) *inversas, es un centro de homotecia de estas circunferencias.*

Esta propiedad es consecuencia de la demostración dada anteriormente.

Todo centro de homotecia de dos circunferencias (C) *y* (C′) *es un centro de inversión, en una inversión que transforme* (C) *en* (C′).

Sean (C) y (C′) dos circunferencias (*fig.* 223) y O uno de sus centros de homotecia. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia (C), M′ el punto homotético de P en la homotecia (O . k') que transforma la circunferencia (C) en la circunferencia (C′). La recta OP corta en un segundo punto M la circunferencia (C) y si p es la potencia del punto O con relación a esta circunferencia, se tiene

$$\overline{OM} \cdot \overline{OP} = p.$$

Por hipótesis $\overline{OM'} = k' \cdot \overline{OP}$; de estas igualdades se deduce:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = pk'.$$

Los puntos M y M′ son inversos en una inversión (O . pk') de centro O.

Es evidente que ninguna otra inversión de centro O transforma (C) en (C′).

Inversiones que transforman una circunferencia (C) dada en una circunferencia (C′) dada. — *Hay dos inversiones y solamente dos que transforman una circunferencia* (C) *en una circunferencia* (C′) *de radio diferente.*

Toda inversión que goza de esta propiedad tiene por centro un centro de homotecia. Ahora bien, si (C) y (C′) son diferentes, hay dos centros de homotecia y a cada uno de ellos corresponde una inversión y sólo una que responda a la pregunta.

Hay una inversión y sólo una que transforma una circunferencia dada (C) *en una circunferencia igual* (C′); *la segunda inversión es reemplazada por una simetría* (fig. 224).

Dos circunferencias (C) y (C′), de radios iguales, tienen un solo centro de homotecia O, punto medio de la línea de los centros EF′. A esta homotecia corresponde una sola inversión. Pero estas dos circunferencias son simétricas con relación a la mediatriz del segmento EF′.

Se llaman **puntos antihomólogos de dos circunferencias** (C) *y* (C′) *un punto* M *de una de ellas y un punto* M′ *de la otra que se correspondan en una de las inversiones* (fig. 223) *que permiten pasar de* (C) *a* (C′), *o en la simetría* (fig. 224), *cuando existe, que también permite pasar de* (C) *a* (C′).

Circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas (C) y (C′). — *La circunferencia* (Γ) *que pasa por dos puntos antihomólogos* M,M′ *y es tangente en uno de estos puntos* M *a una de las dos circunferencias* (C) *también es tangente a la otra en el punto* M′.

Si M y M′ son dos puntos inversos en una de las inversiones que transforma (C) en (C′), es una consecuencia del corolario del párrafo "Propiedades de las tangentes a curvas inversas" (v. p. 112). Si M y M′ son simétricos, en la simetría que transforma (C) en (C′) [*fig.* 224], la circunferencia (Γ) tiene su centro I sobre el eje de simetría, si es tangente en M a la circunferencia (C); IM pasa por el centro E del círculo (C) y la simétrica IM′ de esta recta pasará por el centro (F′) de (C′): por consiguiente, las circunferencias (C′) y (Γ) son tangentes en el punto M′.

Hay dos familias de circunferencias tangentes a una circunferencia (C) *en un punto* M *y a una circunferencia dada* (C′) *en un punto* M′. *Para todas las circunferencias de una misma familia la recta* MM′ *pasa por un punto fijo* O, *y en este caso* $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ *es un producto constante, o bien la recta* MM′ *es paralela a la línea de los centros.*

Si las circunferencias (C) y (C′) son desiguales (*fig.* 223), hay dos inversiones que transforman (C) en (C′). Sea O el centro de una de ellas, M y M′ un par de puntos inversos. Las circunferencias que pasan por M y M′ y que son tangentes en M a la circunferencia (C), son tangentes en M′ a la circunferencia (C′) y forman una de las dos familias citadas en el enunciado.

Si los círculos (C) y (C′) son iguales (*fig.* 224), hay una sola inversión, a la cual corresponde una familia de circunferencias. La segunda está formada por las circunferencias tangentes a (C) y a (C′) en dos puntos simétricos con relación a la línea de los centros.

Si una circunferencia (Γ) *es tangente en* M *a la circunferencia* (C) *y en* M′ *a la circunferencia* (C′), *pertenece a una de las dos familias de circunferencias tangentes definidas en el párrafo precedente.*

Fig. 224

La recta MM′ (*fig.* 223 y 224) corta en un segundo punto P la circunferencia (C). Las tangentes MT y M′T′ a la circunferencia (Γ) son simétricas con relación a la mediatriz de MM′, cuerda de esta circunferencia. Las tangentes MT y PQ a la circunferencia (C) son simétricas con relación a la mediatriz de MP, cuerda de esta circunferencia. Se pasa pues de PQ a M′T′ por el producto de dos simetrías con relación a dos rectas paralelas, es decir, por una traslación. Estas dos rectas son por tanto paralelas. Se pasa, pues, de P a M′ por una homotecia o por una traslación: por consiguiente, M y M′ son antihomólogos. La circunferencia (Γ) pertenece a una de las familias definidas en el párrafo precedente.

Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias (C) y (C′) dadas y que pase por un punto dado S. — Vamos a demostrar que por un punto S del plano que no está sobre (C) ni sobre (C′) pasan dos circunferencias de cada familia o ninguna (*fig.* 225).

1° Supongamos en primer lugar que los puntos de contacto M y M′ de la circunferencia buscada sean inversos en una inversión de centro O y potencia $\overline{OB} \cdot \overline{OB'}$.

Si una circunferencia (Γ) de esta familia pasa por un punto dado S, también pasará por su inverso S′ en esta inversión. Se determina S′, por ejemplo, trazando la circunferencia (de puntos) que pasa por S,B,B′, y cuya intersección con OS determina S′. La circunferencia (Γ) pasa, pues, por S,S′ y es tangente a la circunferencia (C). Se construyen (v. p. 100 y 101) las circunferencias (Γ) que responden a estas condiciones: la circunferencia de puntos corta (C) en B y G; la recta BG corta SS′ en I; se trazan desde I las tangentes IM,IP a la circunferencia (C). Las circunferencias (Γ) son las circunferencias que pasan por S, S′, M y S, S′, P; hay dos o ninguna.

Fig. 225

Estas circunferencias, que pasan por S, son tangentes a la circunferencia (C) en un punto M, por ejemplo; vamos a demostrar que ellas son también tangentes a la circunferencia (C′). En efecto, por construcción se tiene, $\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$: la recta OM corta la circunferencia (Γ) en un punto M′ definido por $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OS} \cdot \overline{OS'}$. De estas igualdades se deduce $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, lo que demuestra en primer lugar que M′ es un punto de la circunferencia (C′), inversa de (C), y además que M′ es antihomólogo de M. La circunferencia (Γ), que pasa por M,M′ y es tangente en M a la circunferencia (C), también es tangente en M′ a la circunferencia (C′).

2° Supongamos ahora (*fig.* 226) que los puntos de contacto M y M′ se corresponden en una simetría. Toda circunferencia que responda a la pregunta y que pase por S pasará por S′, simétrico de S con relación a la recta (△), mediatriz del segmento EF′ que une los centros. Por S y S′ pasan dos circunferencias (Γ) tangentes a la circunferencia (C). Para determinarlas (v. p. 100 y 101), se traza una circunferencia auxiliar cualquiera que pase por S y S′; ésta corta la circunferencia (C) en G y H; la recta GH corta SS′ en I; se trazan IM y IP tangentes a la circunferencia (C). Las circunferencias (Γ) buscadas son las circunferencias SMS′ y SS′P. Sus centros están sobre el eje de simetría (△), son tangentes a la circunferencia (C) y por tanto lo son igualmente a la circunferencia simétrica (C′). Hay dos o ninguna.

Fig. 226

Conclusión. *Por un punto* S *del plano pasan dos circunferencias de cada familia o ninguna; por tanto, en total serán cuatro, dos o ninguna circunferencia tangente a las dos circunferencias dadas.*

Ángulos de curvas inversas. — *Se llama* **ángulo de dos curvas** (C) *y* (Σ), *que pasan por un punto* A *y que tienen en este punto las*

tangentes AT, $A\theta$, *el menor de los ángulos formados por las tangentes* AT *y* $A\theta$ *a estas dos curvas.*

Si una de las dos curvas, (C) por ejemplo, es una recta, la tangente AT es esta misma recta. Se verificará que dos circunferencias o una circunferencia y una recta que tienen dos puntos comunes se cortan en estos dos puntos bajo el mismo ángulo.

Sean (C′) y (Σ′) las inversas de dos curvas (C) y (Σ) secantes en A, y que tienen en A las tangentes AT,$A\theta$: las curvas inversas (C′) y (Σ′) se cortan en A′, inverso de A, y tienen en A′ dos tangentes A′T′, $A'\theta'$ (v. p. 112), simétricas de AT, $A\theta$ con relación a la mediatriz de AA′. *Por consiguiente, el ángulo de dos curvas en* A *es igual al ángulo de las curvas inversas en* A′. Este hecho se expresa diciendo que la **inversión conserva los ángulos.**

Curvas ortogonales. — *Se dice que dos curvas son* **ortogonales** *cuando se cortan en un punto* A *en el que sus tangentes son perpendiculares. La figura inversa de la figura constituida por dos curvas ortogonales está formada por dos curvas ortogonales.*

Las figuras siguientes: 1º dos rectas perpendiculares; 2º una circunferencia y un diámetro de la misma; 3º dos circunferencias ortogonales, están formadas por dos curvas ortogonales. Si se transforma una de estas tres figuras por inversión, la figura transformada es una de las tres figuras citadas.

APLICACIÓN. *El inverso del pie* F *de la polar de un punto* O *con relación a una circunferencia* (C) *se transforma, en una inversión de centro* O, *en un punto* F′, *centro de la circunferencia* (C′), *inversa de* (C) [fig. 227].

Sea (Σ) una circunferencia que pasa por O y F. Como F es el pie de la polar de O con relación a la circunferencia (C), F será conjugado armónico de O con relación a los extremos A y B de un diámetro de esta circunferencia: por tanto (v. p. 108), la circunferencia (C) y la circunferencia (Σ) son dos curvas ortogonales. Las curvas inversas (C′) y (Σ′) también son ortogonales; ahora bien, (Σ′), inversa de una circunferencia que pasa por O, es una recta; será por tanto un diámetro de la circunferencia (C′) y, por consiguiente, cortará OF en el punto F′, centro de la circunferencia (C′) e inverso del punto F, pie de la polar de O con relación a la circunferencia (C).

Construcción de circunferencias ortogonales a una circunferencia (Γ) dada. — Sea (C) una circunferencia ortogonal a una circunferencia (Γ) dada, de centro O y radio R: la potencia de O con relación a la circunferencia (C) es igual a R^2 y, por consiguiente, la circunferencia (C) es la inversa de sí misma en la inversión $(O \cdot R^2)$.

Si la circunferencia (C) goza de una propiedad cualquiera, también gozará de la misma propiedad la transformada por la inversión $(O \cdot R^2)$.

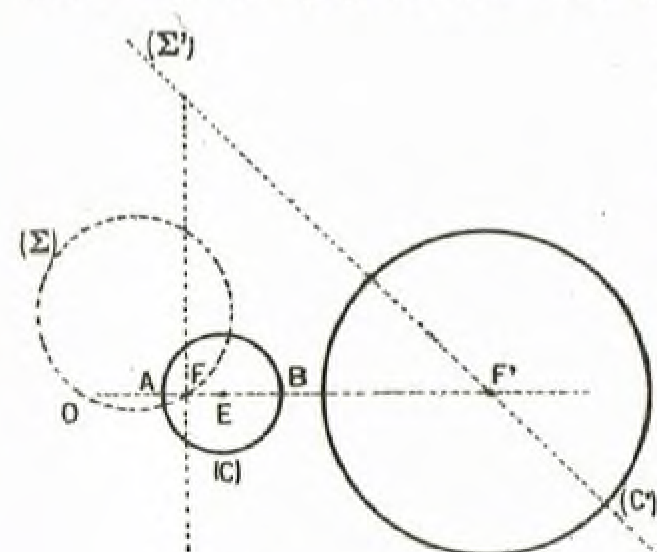


Fig. 227

Distancia de dos puntos, A′ y B′, inversos de dos puntos dados A y B. — *La distancia* A′B′ *de dos puntos inversos de dos puntos dados* A,B *en una inversión* $(O \cdot k)$ *está definida por la fórmula*

$$A'B' = \frac{AB \cdot |k|}{OA \cdot OB}.$$

Los cuatro puntos inversos A,B,A′,B′ están sobre una misma circunferencia (*fig.* 228). Se tiene pues $\widehat{BAO} = \widehat{OB'A'}$, y como $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, los triángulos AOB, B′OA′ son semejantes y sus lados proporcionales,

$$\frac{A'B'}{BA} = \frac{OA'}{OB},$$

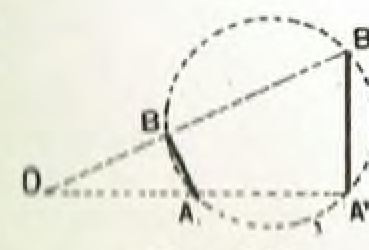


Fig. 228

Fig. 229

Como, por hipótesis, $OA' \cdot OA = |k|$, esta igualdad lleva consigo

$$A'B' = AB \frac{|k|}{OA \cdot OB}.$$

Teorema de Ptolomeo. — *La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero* ABCD *sea inscriptible es que el producto de las diagonales sea igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB.$$

Sea ABCD un cuadrilátero inscrito (*fig.* 229). Tomemos A por centro de la inversión $(A \cdot k)$. Los inversos de B,C,D son B′,C′,D′, puntos alineados sobre una perpendicular al diámetro trazado por A. Se tiene por tanto $B'D' = B'C' + C'D'$.

Ahora bien, según la fórmula de la pregunta precedente se tiene

$$B'D' = BD \frac{k}{AB \cdot AD};$$

$$B'C' = BC \frac{k}{AB \cdot AC};$$

$$C'D' = CD \frac{k}{AC \cdot AD}.$$

De donde se obtiene

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD},$$

es decir,

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + CD \cdot AB.$$

Dejamos al lector el trabajo de demostrar las propiedades siguientes:

El producto de una inversión $(O \cdot k)$ por una homotecia $(O \cdot k')$ de igual centro es una inversión $(O \cdot kk')$.

El producto de dos inversiones $(O \cdot k) \cdot (O \cdot k')$ de igual centro O es una homotecia

$$(O \cdot \frac{k'}{k}).$$

La circunferencia de Euler (v. p. 109) **de un triángulo ABC** (*figura* 205) **es tangente a las circunferencias inscrita y exinscritas en este triángulo.**

Geometría del Espacio

Planos y rectas paralelas

Plano. Diferentes modos de determinar un plano. Posiciones relativas de dos rectas. Rectas paralelas. Intersección de dos planos. Posiciones relativas de una recta y un plano. Recta paralela a un plano. Plano paralelo a una recta. Planos paralelos. Posiciones relativas de dos planos. Posiciones relativas de tres planos (P), (Q), (R). Posiciones relativas de dos planos (P) y (Q) y de una recta (D). Posiciones relativas de tres rectas. Algunas consecuencias importantes a tener en cuenta

Plano. — *Se llama* **plano** *a una superficie tal que cualquier recta* AB *que tenga con ella dos puntos comunes, está toda ella contenida en dicha superficie.*

Se admite sin demostración que *existen planos* (P); que *un plano es ilimitado;* que *divide el espacio en dos regiones* (I) *y* (II); que *toda recta que une dos puntos situados a una y otra parte del plano, corta necesariamente el plano* (P) *en un punto* y sólo en uno, ya que no está contenida en el plano (P), y que, recíprocamente, toda recta que no está contenida en el plano (P) y que corta dicho plano en un punto A, está dividida por A en dos semirrectas, situada una en la región I y otra en la región II.

Igualmente se admite que *por tres puntos* A, B, C *no situados en*

línea recta, pasa un plano; el siguiente teorema demuestra que por ellos no pasan dos planos.

TEOREMA. *Dos planos* (P) *y* (P′) *que tienen comunes tres puntos* A, B, C *no situados en línea recta, se confunden.*

Cualquier punto de las rectas AB, BC, CA, que tienen dos puntos comunes con el plano (P) [*fig.* 230] y con el plano (P′), pertenece por definición a esos dos planos. Sea M un punto del plano (P) que no pertenece a ninguna de esas tres rectas; tracemos en el plano (P) una recta que corte las rectas AB y AC en E y F respectivamente: los puntos E y F, que pertenecen a AB y AC, están en el plano (P′); el punto M de la recta EF está, pues, también en el plano (P′). En resumen, todo punto de (P) es un punto de (P′). Igualmente se demostraría que todo punto de (P′) es un punto de (P). Por tanto, los planos (P) y (P′) se confunden.

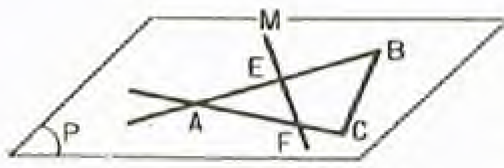


Fig. 230

Luego, *por tres puntos* A, B, C, *no situados en línea recta, pasa un plano y sólo uno.*

Este plano contiene dos puntos de la recta AB, dos puntos de la recta BC y dos puntos de la recta CA; contiene, pues, por definición, todo los puntos de las rectas AB, BC, CA.

Diferentes modos de determinar un plano. — 1° *Por tres puntos* A, B, C, *no situados en línea recta,* pasa un plano y sólo uno;

2° *Por una recta* BC *y un punto* A, exterior a ella, pasa un plano y sólo uno. Por ellos pasa el plano ABC, que contiene la recta BC y el punto A, y sólo uno, porque todo plano que cumpla lo enunciado pasa por A, B, C y se confunde, por consigueiente, con el plano citado;

3° *Por dos rectas* AB, AC *que se cortan,* pasa un plano y sólo uno. Por igual razón que en el caso anterior determinan el plano ABC.

Posiciones relativas de dos rectas. Rectas paralelas. — Sean (D) y (△) dos rectas distintas, es decir (*fig.* 231) tales que haya por lo menos un punto A de la recta (△) que no esté situado en la recta (D). La recta (D) y el punto A determinan un plano (P). Se consideran dos casos:

1° La recta (△) corta el plano (P) en el punto A solamente (*figura* 231). Por tanto, aquélla no corta la recta (D), ya que, por hipótesis, la recta (D) está contenida en el plano (P) y todos los puntos de la recta (△) distintos de A están fuera de dicho plano. Las rectas (D) y (△) no tienen, pues, ningún punto común;

2° La recta (△) está contenida en el plano (P). Al estar las rectas (D) y (△) en un mismo plano, o bien tienen un punto común, o bien son paralelas. Se dice que son **concurrentes** o que son **paralelas,** haciendo extensivas al espacio las denominaciones adoptadas para el plano.

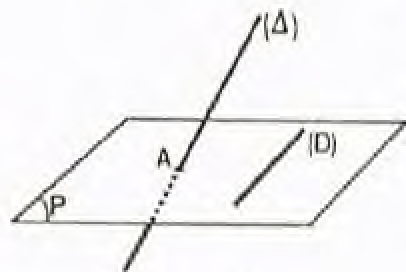


Fig. 231

Hay que hacer notar que *en el espacio dos rectas que no se cortan* (1er caso) *no son, generalmente, paralelas, y decir que dos rectas son paralelas supone:* 1°, *que están en un mismo plano;* 2°, *que no se cortan.*

En particular, *dos rectas paralelas determinan un plano y sólo uno.*

TEOREMA. *Por un punto* A *exterior a una recta* (D) *se puede trazar una paralela a esta recta y sólo una.*

La recta (D) y el punto A determinan un plano (P). La recta buscada es la paralela a la recta (D) trazada por el punto A en el plano (P). Se ha demostrado, en geometría plana, que por dicho punto se puede trazar una paralela y se ha admitido (postulado de Euclides) que sólo hay una.

COROLARIO. *Las rectas* A′B′, A′C′ *paralelas a dos rectas secantes* AB, AC, *también son secantes.*

En efecto, si A′B′, A′C′ se confundiesen, las paralelas AB, AC, trazadas por el punto A a esa recta única, coincidirían, lo que es contrario a la hipótesis.

Intersección de dos planos. — TEOREMA. *Dos planos* (P) *y* (P′) *que tienen un punto común* A, *tienen comunes todos los puntos de una recta* (D).

En efecto, el plano (P) divide el espacio en dos regiones (I) y (II): tracemos por A, en el plano (P′), una recta BB′ (*fig.* 232); si dicha recta está contenida en el plano (P), queda demostrado el teorema; en otro caso, una parte AB de esta recta estará en la región (I); tracemos por A, en el plano (P′), una recta CC′ y, si no está en el plano (P), designemos por AC la parte de esta recta que quede en la región (II). Tracemos BC; esta recta, al unir un punto B de la región (I) con un punto C de la región (II), corta al plano (P) en un punto E distinto del punto A; el punto E situado en la recta BC que une dos puntos del plano (P′) está, por definición, en dicho plano. La recta AE une, pues, dos puntos que están a la vez en el plano (P) y en el plano (P′); todo punto de esta recta es, por definición, común a los dos planos.

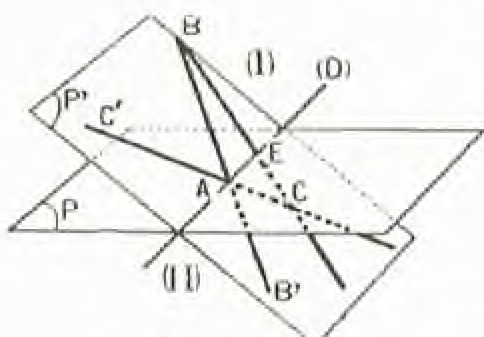


Fig. 232

COROLARIO. *Dos planos* (P) *y* (P′) *que tienen común una recta* (D), *no tienen común ningún punto que no esté situado en esa recta.*

Si tuvieran uno, C, tendrían comunes dos puntos cualesquiera A y B de la recta (D) y el punto C, que no está situado en línea recta con A y B; luego los planos (P) y (P′) no serían distintos.

Posiciones relativas de una recta y un plano. — Sea (△) una recta y (P) un plano (*fig.* 233 y 234). Elijamos en el plano un punto B que no esté situado en (△). Este punto y la recta (△) determinan un plano (Q). Al tener los planos (P) y (Q) común el punto B, o coinciden, o se cortan según una recta BC.

1° Si (P) y (Q) coinciden, la recta (△) del plano (Q) estará contenida en el plano (P);

2° Si (P) y (Q) son secantes, las rectas BC y (△) situadas en un mismo plano (Q) se cortan o son paralelas.

Si se cortan (*fig.* 233) en un punto A, la recta (△) atraviesa al plano (P) en ese punto A, que es el único común a recta y plano.

Si son paralelas (*fig.* 234), la recta (△) no tiene ningún punto común con el plano (P), y por tanto recta y plano son paralelos.

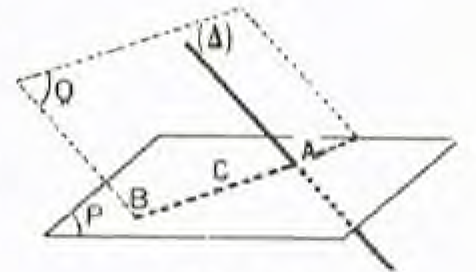


Fig. 233

Recta paralela a un plano. Plano paralelo a una recta. — *Se dice que una recta* (△) *es* **paralela a un plano** (P) *o que un plano* (P) *es* **paralelo a una recta** (△) *cuando recta y plano no tienen ningún punto común.*

De las construcciones hechas anteriormente resulta (*fig.* 234):

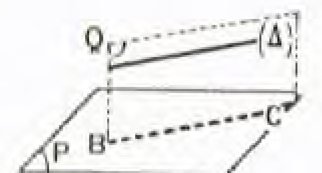


Fig. 234.

1° Que existen rectas (△) paralelas a un plano dado (P);

2° Que *toda recta* (△) *paralela a otra* BC, *contenida en el plano* (P), *es paralela a dicho plano;*

3° Que todo plano que pase por la recta (△), paralela al plano (P), y por un punto B del mismo plano corta ese plano (P) según una recta paralela a la recta (△).

4° Que *la recta* BC, *paralela a la recta* (△), *que a su vez es paralela al plano* (P), *trazada por un punto* B *del plano* (P), *está contenida en el plano* (P).

La recta (△) y el punto B definen un plano (Q); este plano corta el plano (P) según una recta BC paralela a (△). Ahora bien, por el punto B se puede trazar una paralela, y sólo una, a la recta (△). Esta paralela coincide, pues, con la recta BC del plano (P).

Planos paralelos. — TEOREMA. *El plano* (P′) *definido por dos rectas* A′B′, A′C′ *que se cortan, paralelas a un plano dado* (P), *no tiene ningún punto común con el plano* (P).

Observemos, en primer lugar, que es posible trazar en el plano (P) dos rectas secantes AB, AC (*fig.* 235); las paralelas a estas dos rectas, A′B′, A′C′, trazadas por un punto A′ exterior al plano (P), también se cortan y son paralelas al plano (P). Luego determinan un plano (P′).

Los planos (P) y (P′) no tienen ningún punto común. Si tuviesen uno, se cortarían según una recta (△), que, al estar situada en el plano (P′), cortaría A′B′, A′C′, o las dos. Supongamos que esa recta corta A′B′ en un punto B′. Este punto B′, situado en (△), **intersección de los planos (P) y (P′),** estaría, por consiguiente, en el plano (P); ahora bien, la recta A′B′, **paralela al plano (P),** no tiene ningún punto B′ situado en dicho plano. Luego los planos (P′) y (P) no tienen ningún punto común.

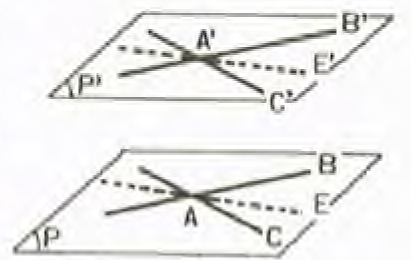


Fig. 235

Posiciones relativas de dos planos. — Sean (P) y (P′) dos planos dados. Sean A′B′, A′C′ dos rectas concurrentes trazadas en el plano (P′).

1° Si ninguna de estas dos rectas corta el plano (P), los planos (P) y (P′) no tienen, según el teorema anterior, ningún punto común;

2° Si una de esas rectas, por lo menos, corta el plano (P) en un sólo punto, los planos (P) y (P′) tienen una recta común. Se dice que los dos planos son **secantes;**

3° Si las dos rectas están situadas en el plano (P), los dos planos coinciden.

DEFINICIÓN. *Se dice que dos planos* (P) *y* (P′) *son* **paralelos** *cuando no tienen ningún punto común.*

De las consideraciones anteriores resulta:

1° Que existen planos (P′) paralelos a un plano dado (P);

2° Que por un punto A′, exterior a un plano (P), se puede trazar un plano que pase por ese punto y sea paralelo al plano (P);

Además, se verifica que:

Toda recta (D′) *contenida en un plano* (P′), *paralelo a un plano dado* (P), *es paralela al plano* (P).

Pues si (D′) y (P) tuviesen un punto común, ese punto sería común a los planos (P) y (P′).

TEOREMA. *Las rectas* AB *y* A′B′, *intersecciones de un plano* (Q) *con dos planos paralelos* (P) *y* (P′), *son paralelas entre sí* (fig. 236).

Comprobemos primeramente que un plano (Q) [*fig.* 236] que pase

por los puntos A y A′, elegidos arbitrariamente en los planos (P) y (P′) respectivamente, cortará estos dos planos. Si las rectas AB A′B′, de intersección, tuviesen un punto común, este punto estaría situado en AB, y por tanto en el plano (P), y por otra parte en A′B′, y por tanto en el plano (P′); luego sería común a estos dos planos. Ahora bien, dichos planos, paralelos, no tienen ningún punto común. Luego las rectas AB, A′B′ no tienen ningún punto común: como están, por hipótesis, en el mismo plano (Q), dichas rectas son paralelas.

Fig. 236

COROLARIO. *Los segmentos* AA′ *y* BB′ *determinados sobre dos rectas paralelas por dos planos* (P) *y* (P′) *paralelos son iguales.*

Sea (Q) [*fig.* 236] el plano que contiene las rectas paralelas AA′ y BB′: está cortado por los planos paralelos (P) y (P′) según rectas AB, A′B′ paralelas. La figura plana ABB′A′ es un cuadrilátero convexo de lados opuestos paralelos; es, pues, un paralelogramo, y los lados opuestos AA′, BB′ son iguales.

TEOREMA. *Por un punto* A′ *exterior a un plano* (P) *sólo se puede trazar un plano* (P′) *paralelo a* (P).

Tracemos en el plano (P) dos rectas secantes AB, AC (*fig.* 235). Sea (P′) el plano determinado por las rectas A′B′ y A′C′ paralelas a esas dos rectas. El plano (P′) será paralelo al plano (P). Supongamos que existe otro plano (Q) que pase por A′ y sea paralelo a (P). Sea M un punto del plano (Q). El plano AA′M corta el plano (P) según una recta AE, el plano (P′) según una recta A′E′, y el plano (Q) según una recta A′M. Según el teorema anterior, A′M, A′E′ y AE son rectas paralelas. Como por el punto A′ no se puede trazar más que una paralela a la recta AE, resulta que A′M coincide con A′E′. El punto M del plano (Q) es, pues, un punto del plano (P′). Los planos (P′) y (Q) se confunden. Por A′ pasa un solo plano (P′) paralelo al plano (P).

CONSECUENCIA. *El lugar geométrico de las rectas* A′M′, *paralelas a un plano* (P), *trazadas por un punto* A′ *exterior a* (P), *es el plano* (P′), *que pasa por el punto* A′ *y es paralelo al plano* (P).

Fig. 237 *Fig.* 238

Si A′M′ es paralela al plano (P) [*fig.* 237], estará contenida en el plano (P′).

Si A′M′ está contenida en el plano (P′), será paralela al plano (P).

Posiciones relativas de tres planos (P), (Q), (R). — 1º Supongamos que dos de ellos, (P) y (Q) por ejemplo, sean paralelos.

Si el plano (R) es paralelo al plano (P) [*fig.* 238], no tendrá con el plano (Q) ningún punto común, pues si tuviera uno, A, se podrían trazar por A dos planos (Q) y (R), ambos paralelos al plano (P), lo que es imposible. Luego los tres planos (P), (Q) y (R) serán paralelos dos a dos.

Si el plano (R) corta el plano (P) [*fig.* 239], cortará también el plano (Q), pues si fuese paralelo a (Q), sería también, según lo que precede, paralelo al plano (P). Las rectas de intersección, (D) y (△), del plano (R) con los planos paralelos (P) y (Q) son rectas paralelas;

2º Alguno de los planos (P), (Q) o (R) no es paralelo a otro de ellos.

Si la recta de intersección de los planos (P) y (Q) está contenida en el plano (R), los tres planos estarán dispuestos como las hojas de un libro. Los tres pasarán por una misma recta (*figura* 240).

Si la recta de intersección corta el plano (R) en un solo punto S, éste será el único punto común a los tres planos; sus intersecciones serán tres rectas distintas SA, SB, SC (*fig.* 241).

Fig. 239 **Fig.** 240 *Fig.* 241

Si la recta de intersección de los planos (P) y (Q) no tiene ningún punto común con el plano (R), los tres planos tampoco tendrán ningún punto común. Sus intersecciones serán tres rectas distintas, situadas dos a dos en un mismo plano, y no tendrán ningún punto común, luego serán paralelas dos a dos (*fig.* 242).

De este estudio resulta:

1º *Que dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí;*

2º *Que todo plano que corte el plano* (P) *según una recta* (D) *cortará también cualquier plano paralelo a* (P) *según una recta* (△) *paralela a* (D).

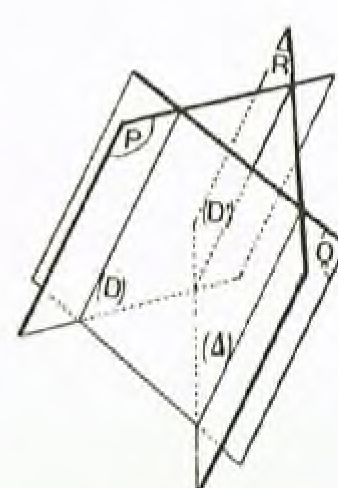


Fig. 242

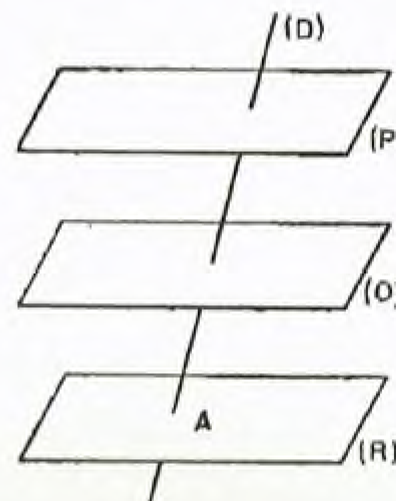


Fig. 243

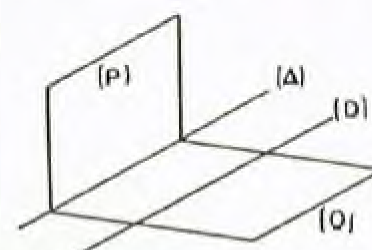


Fig. 244

Posiciones relativas de dos planos (P) y (Q) y de una recta (D). — Limitaremos nuestro estudio a los casos particulares siguientes:

1º *Los dos planos* (P) *y* (Q) *son paralelos* (fig. 243).

Se traza por un punto A, de la recta (D), un plano (R) paralelo a la vez a los planos (P) y (Q).

Si la recta (D) es paralela al plano (P), estará contenida en el plano (R), y como el plano (R) es paralelo al plano (Q), la recta (D) será también paralela al plano (Q).

2º *Los dos planos* (P) *y* (Q) *tienen una recta común* (△) [fig. 244].

Si la recta (D) es paralela a la recta (△), al mismo tiempo será paralela a los planos (P) y (Q).

Si la recta (D) es paralela a los planos (P) y (Q), la paralela a la recta (D), trazada por el punto A de la recta (△), se encuentra en el plano (P), puesto que A está en dicho plano, y en el plano (Q) por la misma razón; luego será la recta de intersección de esos dos planos. Las rectas (D) y (△) serán por tanto paralelas.

De este estudio resulta que:

1º *Si dos planos son paralelos, toda recta paralela a uno de ellos es paralela al otro; toda recta que corte uno de ellos cortará también el otro;*

2º *Toda recta paralela a dos planos secantes es paralela a su intersección.*

Posiciones relativas de tres rectas. — Nos limitaremos a comprobar que: *dos rectas* (D) *y* (D′) *paralelas a una tercera* (△) *son paralelas entre sí.*

Sea (P) el plano que pasa por la recta (D) [*fig.* 242] y por un punto de la recta (D′). Dicho plano contiene la recta (D) paralela a (△), por tanto será paralelo a la recta (△); como la recta (D′) es paralela a la recta (△), será por consiguiente paralela al plano (P); pero, por hipótesis, (D′) pasa por un punto del plano (P), luego estará situada en dicho plano. Las rectas (D) y (D′) están, pues, en un mismo plano.

Sea (Q) el plano de las rectas paralelas (D) y (△); sea (R) el plano de las rectas paralelas (D′) y (△). Los tres planos (P), (Q) y (R) se cortarán, dos a dos, según las rectas (D), (D′) y (△), y estas rectas serán, o concurrentes, o paralelas dos a dos. Como (D) y (△) son paralelas, no serán concurrentes, y (D) y (D′) serán también paralelas.

Algunas consecuencias importantes a tener en cuenta. — Por un punto A se puede trazar:

1º Un plano paralelo a otro dado, y sólo uno;

2º Un plano paralelo a dos rectas dadas, y sólo uno, si las dos rectas no son paralelas.

Por una recta AB se puede trazar un plano, y sólo uno, paralelo a otra recta que no sea paralela a la AB.

Por una recta AB sólo se puede trazar un plano paralelo a otro dado (P) cuando la recta AB sea paralela a (P).

Para determinar una recta que pasa por un punto A no basta con decir que es paralela a un plano, ni para determinar un plano que pasa por un punto A basta con decir que es paralelo a una recta. Hay, en particular, infinidad de planos que pasan por un punto y son paralelos a una recta dada; estos planos pasan por la paralela a dicha recta, trazada por el punto dado.

APLICACIONES. *Determinar una recta que corte dos rectas dadas* (D) *y* (△), *que no son secantes ni paralelas, y que cumpla además una de las siguientes condiciones:*

1º *Pasar por un punto dado* A;

2º *Ser paralela a una recta dada* BC.

En el primer caso se verifica que sólo la recta de intersección de los planos que pasen por el punto A y las rectas (D) y (△) cumple con las condiciones del problema.

En el segundo caso es la recta de intersección de los planos que pasen por esas dos rectas y sean paralelos a BC.

Rectas y planos perpendiculares

Ángulo de dos semirrectas. Ángulo de dos rectas. Rectas perpendiculares. Lugares geométricos en el espacio. Plano perpendicular a una recta en un punto. Plano perpendicular a un segmento en su punto medio. Recta y plano perpendiculares. Distancia de un punto a un plano. Distancia entre dos planos paralelos. Distancia de un punto a una recta. Perpendicular común a dos rectas. Rectas perpendiculares. Teorema de las tres perpendiculares

Ángulo de dos semirrectas. Ángulo de dos rectas. — Dos semirrectas paralelas OA y O'A' están, por definición, en un mismo plano: se dice que son **del mismo sentido** cuando están en ese plano a un mismo lado de OO'. Cuando esto es así, la traslación $\overrightarrow{OO'}$ efectuada en dicho plano lleva OA sobre O'A'.

Dos semirrectas secantes OA y OB determinan un plano y en él un ángulo (saliente o entrante) que se denomina ángulo de dos semirrectas y se designa por la notación $\widehat{AOB}$ ya empleada.

Teorema. *Los ángulos salientes (o entrantes) formados por dos semirrectas* O'A, O'B' *y por otras dos* OA, OB, *paralelas y del mismo sentido, son iguales* (fig. 245).

Si se efectúa simultáneamente la traslación $\overrightarrow{OO'}$ en cada uno de los planos AOO' y BOO', se llevará OA sobre O'A', y OB sobre O'B'.

Por tanto, los ángulos salientes $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ son iguales y los ángulos entrantes también lo son.

Definiciones. *Se llama* **ángulo de dos semirrectas no concurrentes** *uno de los ángulos* (si no se especifica lo contrario se considera el ángulo saliente) *que forma otras dos semirrectas paralelas y del mismo sentido, trazadas por un mismo punto.*

Se llama **ángulo de dos rectas** *uno cualquiera de los ángulos que forman dos semirrectas paralelas a aquéllas.* Si sólo se consideran ángulos salientes, el valor del ángulo de dos rectas ha de ser uno de los números positivos θ o $\pi - \theta$; de no especificarse lo contrario, se toma como valor el menor de esos dos números.

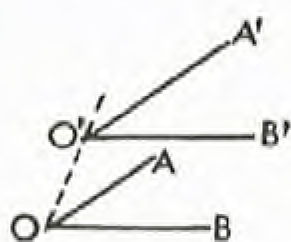


Fig. 245.

Rectas perpendiculares. — *Se dice que dos rectas son* **perpendiculares** *cuando forman un ángulo recto. Si una recta* (D) *es perpendicular a otra* ($\triangle$), *es perpendicular a toda recta* ($\triangle'$) *paralela a* ($\triangle$).

Se dice que dos rectas son **ortogonales** *cuando se quiere especificar que son perpendiculares, pero que no se cortan.*

Teorema. *Si una recta* (D) *es perpendicular en un punto* A *de un plano* (P) *a dos rectas* AC *y* AE *de dicho plano, que pasan por el punto* A, *es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por* A (fig. 246).

Tomemos sobre la recta (D) dos longitudes AB, AB' iguales (AB = AB'). Tracemos en el plano (P) una recta cualquiera AF; tracemos por F en el plano (P) una recta que corte en C y E las rectas dadas AC y AE. Unamos C, E, y F con los puntos B y B' (*fig.* 246).

Fig. 246

Por hipótesis AC y AE son perpendiculares a BB': la recta AC es, por tanto, la altura y la mediana (AB = AB' por construcción) del triángulo BCB': por tanto, este triángulo es isósceles y BC = = B'C. De igual modo se demuestra que BE = B'E. Los dos triángulos BEC y B'EC tienen sus tres lados iguales (BC = B'C, BE = B'E, EC común). Si estuviesen en un mismo plano, se podría hacer que coincidiesen y serían por consiguiente iguales. Admitiremos que lo mismo sucede en el espacio y que podemos aplicar un plano sobre otro como se superpone un calco sobre una hoja de papel.

Al ser iguales los triángulos BEC y B'EC, sus ángulos $\widehat{BCE}$ y $\widehat{B'CE}$ serán por consiguiente iguales. De ello resulta que los triángulos BCF y B'CF son iguales (BC = B'C, según la demostración anterior, CF común, $\widehat{BCF} = \widehat{B'CF}$). Los lados BF y B'F de estos triángulos son pues iguales. El triángulo BFB' es, por tanto, isósceles. Su mediana AF es también su altura y, por consiguiente, la recta BB' es perpendicular a la recta AF. Al ser ésta una recta cualquiera, queda demostrado el teorema.

Lugares geométricos en el espacio. — *Se llama* **lugar geométrico** *de un punto* M *o de una curva variable* (C), *que satisfacen ciertas condiciones, el conjunto de las posiciones tomadas por ese punto o por dicha curva cuando esas condiciones quedan cumplidas.* Limitaremos nuestro estudio a los siguientes casos:

1º Si se trata de un punto M, el número de condiciones ha de ser el suficiente para que el punto M determine una superficie;

2º Si se trata de un punto M, el número de condiciones ha de ser el necesario para que el punto M describa una curva;

3º Si se trata de una curva, el número de condiciones ha de ser el suficiente para que esta curva engendre una superficie.

En los tres casos, para demostrar la existencia de un lugar, es preciso establecer que:

a) Si M satisface las condiciones impuestas, es un punto del lugar;

b) Si M es un punto del lugar, satisface las condiciones impuestas.

Veamos a continuación dos ejemplos de lugares geométricos en el espacio.

Plano perpendicular a una recta en un punto. — *El lugar geométrico de las perpendiculares a la recta* (D) *en un punto* A *de la misma es un plano* (P).

Este plano se denomina **plano perpendicular** a la recta (D) en el punto A.

Este primer ejemplo corresponde a un lugar geométrico formado por rectas: las condiciones impuestas bastan para que todo punto M del lugar esté en una superficie, en este caso en un plano (*fig.* 246).

En primer lugar hagamos pasar dos planos distintos por la recta (D); en cada uno de estos planos se traza una perpendicular a la recta (D) en el punto A: AC en el primer plano considerado y AE en el segundo. Estas dos rectas determinan un plano (P). Este plano es el lugar pedido. Para demostrarlo, vamos a establecer las proposiciones siguientes:

1º Si M es un punto de la recta AF que cumple las condiciones enunciadas, es decir, perpendicular a la recta (D) en A, el punto M está en el plano (P).

En primer lugar hagamos pasar dos planos distintos por la recta (D); en cada uno de estos planos se traza una perpendicular a la recta (D) en el punto A: AC en el primer plano considerado y AE en el segundo. Estas dos rectas determinan un plano (P). Este plano es el lugar pedido. Para demostrarlo, vamos a establecer las proposiciones siguientes:

siguiente el punto M de AF está en AF', y por tanto en el plano (P);

2º Si M es un punto del plano (P), la recta AM cumple las condiciones del enunciado. Dicha recta es, en efecto, perpendicular a la recta (D) en el punto A.

El lugar buscado es, por consiguiente, el plano (P).

Plano perpendicular a un segmento en su punto medio. —Teorema. *El lugar geométrico de los puntos* M *equidistantes de dos puntos distintos* B *y* B' *es el plano* (P) *perpendicular a la recta* BB' *en su punto medio* A.

Este plano es, por definición, el **plano perpendicular en el punto medio** *del segmento* BB' (*fig.* 247).

Este segundo ejemplo corresponde a un lugar geométrico de puntos constituido por una superficie.

1º Si M es un punto del lugar, se tiene que MB = = MB'. El triángulo BMB' es isósceles y la mediana AM es también la altura. La recta AM, perpendicular a BB' en su punto medio A, está en el plano (P) perpendicular a dicha recta en A;

2º Si el punto M está en el plano (P), el ángulo $\widehat{MAB}$ es recto; la altura y la mediana del triángulo BMB' coinciden. Este triángulo es, por consiguiente, isósceles y MB = MB'. El punto M es un punto del lugar.

Luego el lugar geométrico se compone del plano (P) en toda su extensión.

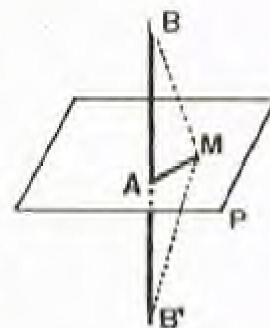


Fig. 247

Recta y plano perpendiculares. — El lugar geométrico de las rectas perpendiculares en A a una recta AB es un plano (P) único y bien determinado (*fig.* 248).

Esto se expresa diciendo que **el plano (P) es perpendicular a la recta AB** en el punto A, o que **la recta AB es perpendicular al plano (P)** en el punto A, que se llama **pie** de la perpendicular.

1º *Existe un plano y sólo uno perpendicular en* A *a una recta* AB.

2º *Existe una recta y sólo una perpendicular a un plano* (P), *en un punto* A *de este plano.*

En efecto, el plano (P) puede estar definido por dos rectas secantes AC y AE. Existe un plano (Q) perpendicular en A a la recta AC, y un plano (R) perpendicular en A a la recta AE. Estos planos son distintos, pues si coincidiesen, cortarían el plano (P) según una recta única a la que serían perpendiculares en el punto A las rectas AC y AE; por tanto, estas rectas no serían distintas, lo que no es admisible. Estos planos distintos (Q) y (R) tienen común un punto A; por consiguiente, se cortan según una recta ($\triangle$). La recta ($\triangle$), situada en un plano perpendicular en A a la recta AC, es perpendicular a esta recta y por idéntica razón también lo es a la recta AE. Luego el plano (P) está definido por dos rectas perpendiculares a la recta ($\triangle$): por consiguiente, es perpendicular a dicha recta.

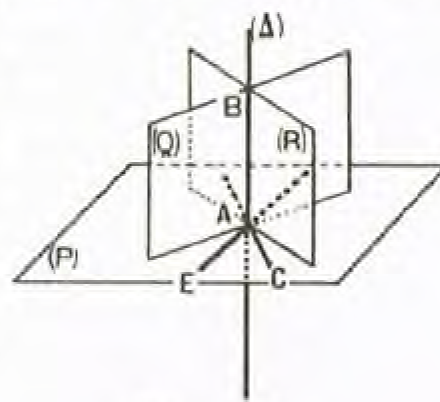


Fig. 248

Existe, pues, una recta AB perpendicular en A al plano (P); es la recta ($\triangle$).

No existen otras rectas en esas condiciones, pues si AB es perpendicular al plano (P), también lo es a las rectas AC y AE; luego está en los planos (Q) y (R) perpendiculares en A a estas dos rectas. Ahora bien, estos planos no tienen más que una sola recta común ($\triangle$). Por consiguiente, la recta AB coincide con la recta ($\triangle$).

3° De la demostración precedente resulta que:
Toda recta perpendicular en un punto A de un plano a dos rectas distintas de ese plano, que pasen por A, es perpendicular a dicho plano.

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que una recta* AB *sea perpendicular a un plano* (P) *es que lo sea a dos rectas concurrentes de ese plano* (fig. 249).

La condición es necesaria. Por hipótesis la recta AB es perpendicular al plano (P); vamos a demostrar que AB es perpendicular a todas las rectas de ese plano.

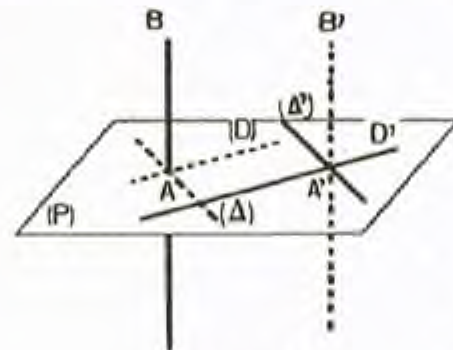


Fig. 249

En primer lugar, dicha recta es por definición perpendicular a todas las rectas (D) de ese plano que pasan por su pie. Sea (D′) una recta del plano (P) que no pase por el punto A; la paralela (D) a esta recta trazada por A es una recta del plano (P); por hipótesis la recta AB es perpendicular a la recta (D) y, por consiguiente, también lo es a la recta (D′) paralela a (D).

La condición es suficiente. Por hipótesis, la recta AB es perpendicular a dos rectas (D′) y (△′) del plano (P), distintas y secantes. La paralela A′ B′ a la recta AB, trazada por el punto A′ común a estas dos rectas, es también perpendicular a dichas rectas: luego es perpendicular al plano (P). La recta A′B′, perpendicular al plano (P), corta este plano; la recta AB, paralela a aquélla, cortará también (P) en un punto A. Las paralelas (D) y (△) trazadas por el punto A a las rectas (D′) y (△′) del plano (P) están en dicho plano y son perpendiculares a la recta AB. Esta recta es, por consiguiente (ver el párrafo 3° que precede), perpendicular al plano (P).

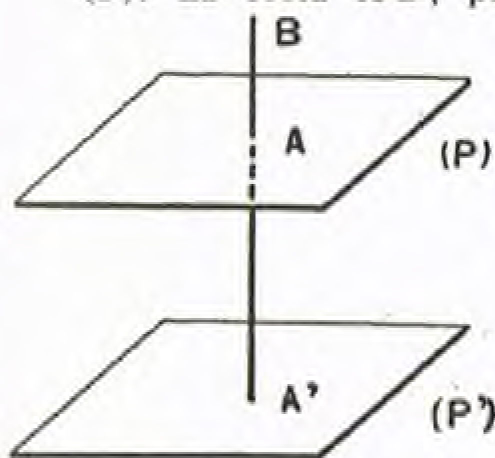


Fig. 250

COROLARIO. *Sea* (P) *el plano perpendicular en* A *a la recta* AB *y* (P′) *el plano perpendicular en* A′ *a la recta* A′B′. *La condición necesaria y suficiente para que* (P) *y* (P′) *sean paralelos es que* AB *y* A′B′ *sean paralelas.*

APLICACIONES. 1° *Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos* (fig. 250).

En efecto, si AB y A′B′ se confunden, (P′) y (P) son paralelos.

2° *Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.*

En efecto, si (P) y (P′) se confunden, AB y A′B′ son paralelas.

4° *Si un plano* (P) *es perpendicular a una recta* AB, *es también perpendicular a todo plano* (P′) *paralelo a* (P).

En efecto, la recta AB que atraviesa al plano (P) también atraviesa el plano paralelo (P′) en un punto A′. Al ser por hipótesis paralelos (P) y (P′), la perpendicular A′B′ al plano (P′) es paralela a AB; como A′ es un punto de AB, resulta que A′B′ se confunde con AB, y el plano (P′) es también perpendicular a la recta AB.

4° *Si un plano* (P) *es perpendicular a una recta* AB, *es también perpendicular a toda recta paralela* A′B′.

En efecto, al cortar el plano (P) la recta AB (*fig.* 251) cortará también la paralela A′B′ en el punto A′. El plano (P′), perpendicular en A′ a la recta A′B′, es paralelo al plano (P): como (P′) pasa por un punto A′ del plano (P), se confunde con él. Luego la recta A′B′ es perpendicular al plano (P).

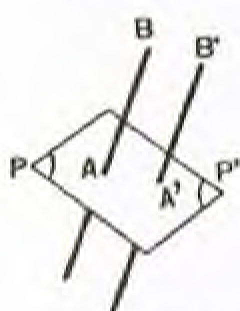


Fig. 251

Las proposiciones 1 y 3 se resumen diciendo:

La condición necesaria y suficiente para que un plano (P) *sea perpendicular a una recta* AB *es que sea paralelo a un plano* (P′) *perpendicular a dicha recta.*

Por consiguiente:

Por un punto O *exterior a una recta* AB *se puede trazar un plano perpendicular a dicha recta y sólo uno.*

Éste es el único plano que pasando por el punto dado O es paralelo a un plano cualquiera (P′) perpendicular a la recta AB. Este plano contiene, en particular, todas las rectas que pasen por O y sean paralelas a (P′), es decir, que sean perpendiculares a la recta AB.

Las proposiciones 2 y 4 se resumen diciendo:

La condición necesaria y suficiente para que una recta AB *sea perpendicular a un plano* (P) *es que sea paralela a una recta* A′B′ *perpendicular a dicho plano.*

Por consiguiente:

Por un punto exterior a un plano se puede trazar una recta AB *perpendicular a dicho plano y sólo una.*

Ésta es la única paralela a una recta cualquiera A′B′ perpendicular a ese plano, trazada por el punto A.

Distancia de un punto a un plano. — Sea A un punto exterior a un plano (P); desde este punto se puede trazar una perpendicular AH, y sólo una, al plano (P).

Se llama **distancia del punto A al plano (P)** *la que hay desde dicho punto al pie* H *de la perpendicular* AH *trazada desde el punto* A *al plano* (P). Se demostrará sin ninguna dificultad que la distancia del punto A a un punto del plano diferente de H es mayor que AH.

Distancia entre dos planos paralelos. — Sean (P) y (Q) dos planos paralelos (*fig.* 252), A y A′ dos puntos del plano (Q), H y H′ los pies de las perpendiculares trazadas desde A y A′ al plano (P). Las rectas AH y A′H′, perpendiculares a un mismo plano (P), son paralelas y por tanto estarán situadas en un mismo plano (R): el plano (R) corta los planos paralelos (P) y (Q) según las rectas paralelas AA′ y HH′. El cuadrilátero AA′H′H es una figura plana, convexa, cuyos lados son paralelos dos a dos; por consiguiente, es un paralelogramo (o bien un rectángulo) y AH = A′H′.

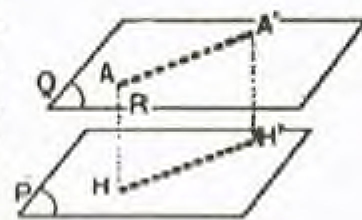


Fig. 252

La distancia de un punto cualquiera de un plano (Q) *a un plano* (P) *paralelo a* (Q) *es una constante que se llama* **distancia entre dos planos paralelos.**

Al ser la recta AH perpendicular al plano (P) es también perpendicular al plano (Q) y por consiguiente la distancia del punto H al plano (Q) es también AH: *luego la distancia entre dos planos es independiente del orden en que sean considerados dichos planos.*

Distancia de un punto a una recta. — Una recta BC y un punto A exterior a ella determinan un plano. En geometría plana se ha definido lo que se entiende por perpendicula AH trazada por A a BC y por distancia AH. Estas definiciones son válidas en el espacio (*fig.* 253). Señalaremos solamente que *el plano* (P), *trazado por* A *perpendicularmente a* BC, *contiene todas las perpendiculares a* BC *que pasan por* A *y en particular la recta* AH.



Fig. 253

Perpendicular común a dos rectas. — Sean (D) y (△) dos rectas que no son paralelas ni concurrentes (*fig.* 254); existe una recta y sólo una que encuentre a (D) y (△) en puntos A y B respectivamente, y que sea perpendicular a esas dos rectas.

La recta AB es, por definición, la **perpendicular común** a esas dos rectas, y la longitud AB es la **distancia entre las dos rectas.**

Tracemos por un punto cualquiera O una paralela OA′ a la recta (D), una paralela OB′ a la recta (△) y la perpendicular OC′ al plano A′OB′.

La recta AB buscada debe ser perpendicular a las rectas OA′, que es paralela a la recta (D), y OB′, que es paralela a la recta (△): por consiguiente, AB debe ser perpendicular al plano A′OB′ y por tanto paralela a OC′.

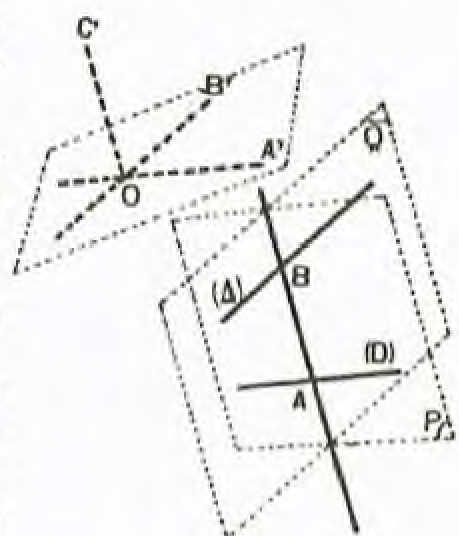


Fig. 254

El plano que pase por (D) y contenga la recta AB debe ser paralelo a OC′. Por consiguiente, ese plano es el definido por la recta (D) y una paralela cualquiera a OC′ que corte (D); sea (P) dicho plano. De igual modo se demuestra que el plano que pase por (△) y por AB no puede ser otro que el plano (Q) definido por la recta (△) y una paralela cualquiera a OC′ que corte (△).

Luego la recta AB será la recta común a los planos (P) y (Q). Ahora bien, estos dos planos paralelos a los planos A′OC′ y B′OC′ secantes se cortan según una recta AB paralela a OC′: su intersección AB corta en ángulo recto (D) y (△) y por tanto AB es la perpendicular común a las dos rectas.

Se verifica que la distancia entre dos rectas (D) y (△) es igual a la distancia entre dos planos trazados uno por la recta (D) y que sea paralelo a (△), y otro por la recta (△) y que sea paralelo a (D).

Rectas perpendiculares. — *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares es que una cualquiera de ellas esté en un plano perpendicular a la otra.*

La condición es necesaria. Por hipótesis (D) y (△) son perpendiculares. Por un punto A de la recta (D) (*fig.* 255) tracemos un plano (P) perpendicular a la recta (△); dicho plano contiene, por definición, todas las rectas que pasan por A y son perpendiculares a (△). Por tanto, contiene la recta (D): luego dicha recta está en un plano (P) perpendicular a (△).

La condición es suficiente. Por hipótesis la recta (D) está en un plano (P) perpendicular a (△). Por consiguiente, la recta (△), perpendicular al plano (P) por hipótesis, es perpendicular a todas las rectas del plano (P) y por lo tanto a la recta (D).

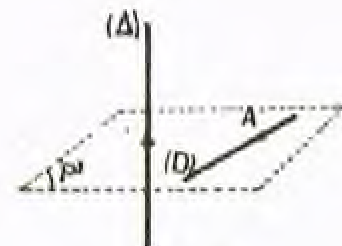


Fig. 255

Esta propiedad de las rectas perpendiculares es muy importante. Ella pone de manifiesto que hay una condición para que por una recta se pueda trazar un plano perpendicular a otra recta y que de no cumplirse no es posible esta operación. Esto permite enunciar algunas propiedades sencillas, conocidas con el nombre de teorema de las tres perpendiculares.

Teorema de las tres perpendiculares. — *La perpendicular* AH *trazada al plano* (Q) *por el punto* A *exterior a dicho plano, la perpendicular* HK *trazada por el pie* H *de* AH *sobre una recta* (△) *del plano* (Q), *y la perpendicular* AK′ *trazada desde el punto* A *sobre la recta* (△) *están en un mismo plano* (fig. 256).

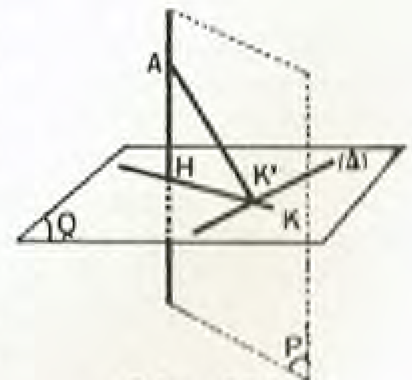


Fig. 256

El plano (P) trazado por A perpendicularmente a la recta (△) contiene todas la rectas perpendiculares a (△) que pasen por el punto A, luego contiene las rectas AK′, perpendicular a (△) por construcción, y AH

perpendicular a la recta (△) del plano (Q), porque AH es perpendicular a dicho plano: el plano (P) será el que pase por la recta AH y sea perpendicular a la recta ortogonal (△). Dicho plano es también el plano perpendicular a la recta (△) trazado por H; luego contiene la perpendicular HK trazada por H a la recta (△).

De donde resulta que los puntos K y K', en que el plano (P) corta la recta (△), no son distintos. Por tanto, el teorema de las tres perpendiculares puede enunciarse bajo una de la dos formas siguientes (*siendo* (△) *una recta de un plano* (Q), A *un punto exterior al plano* (Q) *y* H *el pie de la perpendicular trazada a dicho plano por el punto* A):

Si K *es el pie, sobre la recta* (△), *de la perpendicular* AK *a dicha recta* HK *es también perpendicular a* (△);

Si K *es el pie, sobre la recta* (△), *de la perpendicular* HK *a dicha recta,* AK *es también perpendicular a* (△).

Planos perpendiculares

Diedro. Ángulo plano de un diedro AB. Comparación de dos diedros. Diedros adyacentes. Medida de un diedro. Planos perpendiculares. Proyección ortogonal sobre un plano. Plano que pasa por una recta AB y es perpendicular a otro plano dado. Proyecciones ortogonales de rectas paralelas. Proyección oblicua de un punto A sobre un plano (P). Proyección ortogonal de un ángulo recto $\widehat{BAC}$. Ángulo de una recta y un plano. Planos bisectores del ángulo formado por dos rectas

Diedro. — *Se llama* **semiplano** *la porción de plano situada a un mismo lado de una recta* AB *de dicho plano.*

Se llama **diedro AB** *una de las dos porciones del espacio comprendidas entre dos semiplanos limitados por una misma recta* AB. La recta AB se llama **arista** del diedro. Cuando la notación diedro AB es insuficiente para determinarlo, se añaden delante y detrás de AB unas letras que identifiquen los semiplanos que limitan el diedro; estos semiplanos se llaman **caras del diedro.** Se dice, por ejemplo, diedro (PABQ) para designar el diedro de arista AB limitado por los semiplanos (P) y (Q), o por los semiplanos que pasan por los puntos P y Q.

Ángulo plano de un diedro AB. — Sea AB la arista de un diedro formado por dos semiplanos (P) y (Q); el plano perpendicular en el punto A a la arista corta los semiplanos (P) y (Q) según las semirrectas AC y AE que son a su vez perpendiculares en A a la arista AB. Estas dos semirrectas determinan en dicho plano dos ángulos: los puntos de uno de estos dos ángulos y sólo de uno de ellos están situados en el diedro AB. A este ángulo lo llamaremos **ángulo plano del diedro** en el punto A.

TEOREMA. *Los ángulos planos de un diedro en los diferentes puntos de su arista son iguales* (fig. 257).

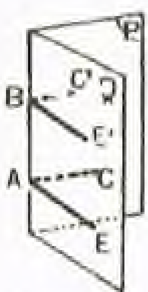


Fig. 257

Sean $\widehat{CAE}$ y $\widehat{C'BE'}$ los ángulos planos en A y B correspondientes a un diedro AB (*fig.* 257); las semirrectas CA y C'B están en un mismo semiplano (P) y son perpendiculares a la misma recta AB; por consiguiente, son semirrectas paralelas y del mismo sentido. De modo semejante, AE y BE' son también paralelas y del mismo sentido: luego resulta (véase página 118) que los ángulos $\widehat{CAE}$ y $\widehat{C'BE'}$ formados por estas semirrectas son iguales, a condición de ser los dos salientes o los dos entrantes. Por consiguiente, los dos ángulos planos del diedro son iguales.

Comparación de dos diedros. — 1° Supondremos en primer lugar (*fig.* 258) que los dos diedros (PABQ) y (PABQ₁) tienen una arista AB común, una cara (P) común y que están colocados de modo que los puntos de uno de ellos, próximos al semiplano (P), pertenecen también al otro diedro.

Si los semiplanos (Q) y (Q₁) se confunden, los diedros son iguales por definición; si dichos semiplanos son distintos, los diedros son desiguales. Cuando dos diedros son desiguales, los puntos de uno de ellos, por ejemplo (PABQ₁), están contenidos en el otro; entonces se dice que el diedro (PABQ₁) es menor que el diedro (PABQ).

Fig. 258

Los ángulos planos de los dos diedros son $\widehat{CAE}$ y $\widehat{CAE_1}$; estos dos ángulos están en un mismo plano (el plano perpendicular a la recta AB en el punto A). Dichos ángulos tienen un lado AC común y no son adyacentes. Se deduce que *los ángulos planos de dos diedros iguales son iguales,* y que *el ángulo plano del menor de dos diedros desiguales es menor que el ángulo plano del mayor de esos dos diedros.*

2° Supondremos a continuación que dos diedros (PABQ) y (P'A'B'Q') no tienen la posición señalada en 1°. Sean $\widehat{CAE}$ y $\widehat{C'A'E'}$ sus ángulos planos. Se admite como un hecho evidente que existe una operación, llamada **desplazamiento,** que permite llevar el diedro (P'A'B'Q') a ocupar la posición (PABQ₁) definida en 1°, sin alterar la distancia y la posición de los diferentes puntos de este diedro y de modo que su ángulo plano $\widehat{C'A'E'}$ coincida con el ángulo plano $\widehat{CAE_1}$ del nuevo diedro (PABQ₁). Se conviene en decir que el diedro (P'A'B'Q') es igual al diedro (PABQ) o bien que es mayor o menor que él, según que el diedro transportado (PABQ₁) sea igual, mayor o menor que el diedro (PABQ).

Por lo cual, la proposición expuesta en 1° (escrita en cursiva) se aplica a dos diedros cualesquiera.

Diedros adyacentes. — *Se dice que dos diedros* (PABQ) *y* (PABQ₁) *son* **adyacentes** *cuando tienen una cara y la arista comunes y los puntos de estos diedros próximos al semiplano* (P) *están a uno y otro lado de dicho plano* (fig. 259).

Se llama **suma de los diedros adyacentes** (PABQ) *y* (PABQ₁) *el diedro* (QABQ₁) *cuando existen puntos del espacio que no pertenecen a ninguno de esos dos diedros. Si no se cumple esta condición, se llama* **suma** *el diedro* (QABQ₁) *aumentado en todo el espacio.*

Sean $\widehat{CAE}$ y $\widehat{CAE_1}$ los ángulos planos de los diedros adyacentes (PABQ) y (PABQ₁). Estos ángulos están situados en el plano perpendicular en el punto A a la arista común AB: evidentemente estos ángulos son adyacentes. Se deduce que *la suma de los ángulos planos* $\widehat{CAE}$ *y* $\widehat{CAE_1}$ *de los dos diedros es igual al ángulo plano de la suma de estos dos diedros,* si se conviene que añadir todo el espacio a un diedro lleva consigo que se añada 2π a su ángulo plano.

Se llama **suma de dos diedros** (PABQ) *y* (P'A'B'Q') *la suma de uno de ellos* (PABQ) *y de un diedro adyacente* (PABQ₁) *igual al otro* (P'A'B'Q').

De esta definición resulta que *el ángulo plano de la suma de dos diedros es igual a la suma de los ángulos planos de esos dos diedros.*



Medida de un diedro. — Un diedro y uno cualquiera de sus ángulos planos son, según lo que precede, magnitudes que se corresponden. Por tanto:

Fig. 259

Si se toma como unidad para medida de diedros el diedro cuyo ángulo plano se tome como unidad de ángulos, la medida de un diedro es la misma que la de su ángulo plano.

Planos perpendiculares. — *Se llama* **recto** *todo diedro cuyo ángulo plano es un ángulo recto.*

Dos planos secantes (P) y (Q) forman cuatro diedros. *Se dice que dichos planos son* **perpendiculares** *si uno cualquiera de esos diedros es recto.* Si uno de ellos es recto, lo son también los otros tres.

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos planos sean perpendiculares es que toda recta perpendicular a uno de ellos sea paralela al otro o esté situada en él* (fig. 260).

La condición es necesaria. Hipótesis: el plano (P) es perpendicular al plano (Q). Luego por hipótesis, el ángulo plano $\widehat{CAE}$ de uno de los diedros formados por los dos planos es recto.

Ahora bien, la recta AE es un lado de ese ángulo plano y por construcción es perpendicular en el punto A a la arista AB del diedro; por tanto, AE es perpendicular a dos rectas del plano (P): a la recta AB por construcción y a la recta AC por hipótesis. Por ser estas dos rectas perpendiculares son distintas, y por tanto la recta AE es perpendicular al plano (P).

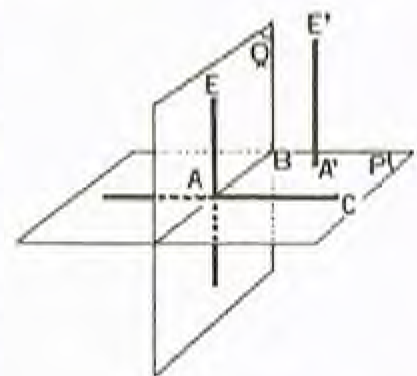


Fig. 260

Toda recta A'E' perpendicular al plano (P) es paralela a AE, y por tanto es paralela al plano (Q) o está contenida en él.

La condición es suficiente. Hipótesis: la recta A'E' es a la vez perpendicular al plano (P) y paralela al plano (Q).

Por un punto E del plano (Q) se traza AE paralela a la recta A'E'; como A'E' es paralela al plano (Q), la recta AE está contenida en dicho plano; por otra parte, como el plano (P) corta la recta A'E', corta también en A la paralela AE. Los planos (P) y (Q) tienen, pues, un punto común A: dichos planos no se confunden, por consiguiente son secantes y se cortan según una recta AB. Sea AC la perpendicular en A a la recta AB situada en el plano (P).

La recta AE paralela a la A'E', que es perpendicular al plano (P), será también perpendicular a dicho plano y por consiguiente a las dos rectas AB y AC del mismo. Por tanto, el ángulo $\widehat{CAE}$ es recto, y como AC y AE son perpendiculares a AB, dicho ángulo es el ángulo plano de uno de los diedros formados por los planos (P) y (Q). Luego estos planos son perpendiculares.

APLICACIONES. 1° *Los planos que pasan por un punto* A *y son perpendiculares a un plano dado* (P), *contienen la perpendicular* AH *trazada por dicho punto al plano* (P) [fig. 261].

En efecto, la recta AH es paralela a los planos perpendiculares al plano (P) o está contenida en ellos: está contenida en aquellos planos que siendo perpendiculares a (P) pasan por el punto A.

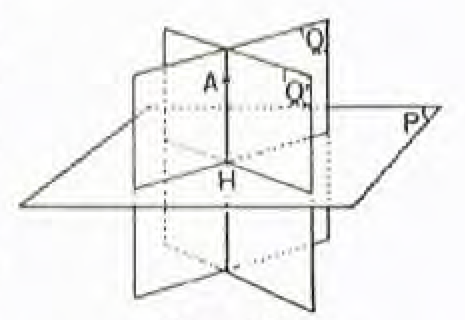


Fig. 261

2° *La intersección de dos planos* (Q) *y* (Q') *secantes, perpendiculares a un mismo plano* (P), *es perpendicular al plano* (P).

Sea A un punto común a (Q) y (Q'); estos dos planos pasan por

la perpendicular AH trazada por A al plano (P): por tanto, esta recta es su intersección.

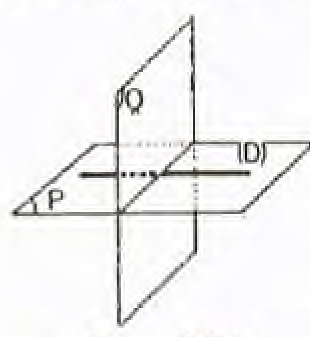


Fig. 262

3º *Todo plano* (Q) *perpendicular a una recta* (D) *situada en un plano* (P) *o paralela a él* (fig. 262), *es perpendicular al plano* (P).

Siendo la recta (D) perpendicular a (Q) y paralela al plano (P) o situada en él, los planos (P) y (Q) son perpendiculares.

Proyección ortogonal sobre un plano. — *Se llama* **proyección ortogonal de un punto** A **sobre un plano** (P) *el pie* A′ *de la perpendicular* AA′ *trazada por el punto* A *sobre el plano* P. Esta perpendicular AA′ se llama **proyectante** del punto A (*fig.* 263).

Se llama **proyección ortogonal de una recta** AB **sobre un plano** (P) *el lugar de las proyecciones ortogonales* M′ *de los puntos* M *de la recta sobre el plano.*

TEOREMA. *La proyección ortogonal sobre un plano de una recta* AB, *que no sea perpendicular a dicho plano, es una recta* A′B′.

Fig. 263

Las proyectantes (*fig.* 263) AA′ y MM′ son dos perpendiculares a un mismo plano: luego son rectas paralelas y por consiguiente están situadas en un mismo plano (Q).

Éste es un plano determinado, ya que contiene las rectas AA′ y AB que son rectas definidas, y corta el plano (P) según una recta determinada A′B′, puesto que (P) y (Q) tienen común el punto A′. El punto M′, proyección ortogonal de M, está en la recta A′B′: es evidente que todo punto M′ de esta recta es la proyección ortogonal de un punto M de la recta AB.

Por tanto, la recta A′B′ es el lugar geométrico de los puntos M′, es decir, la proyección ortogonal de la recta AB.

Plano que pasa por una recta AB y es perpendicular a otro plano dado. — El plano (Q), el AA′B en la demostración precedente, es un plano perpendicular a otro (P), puesto que contiene la recta AA′ perpendicular al plano (P). Se le denomina **plano proyectante ortogonal de la recta AB.** Lo enunciaremos diciendo:

Por una recta AB *que no sea perpendicular a un plano* (P) *se puede trazar un plano perpendicular al plano* (P) *y sólo uno.*

Proyecciones ortogonales de rectas paralelas. — TEOREMA. *Las proyecciones* A′B′ *y* C′D′ *de dos rectas paralelas* AB *y* CD *sobre un plano* (P), *que no sea perpendicular a ellas, son rectas paralelas.* (fig. 264).

Los planos que proyectan ortogonalmente AB y CD están definidos, uno de ellos (Q) por las rectas AB y AA′ (esta última proyectante del punto A), el otro (Q′) por CD y CC′ (la cual es proyectante del punto C). Las rectas AB y CD son paralelas por hipótesis; las rectas AA′ y CC′, perpendiculares a un mismo plano (P), son también paralelas: por consiguiente, los dos planos proyectantes son paralelos, y las intersecciones A′B′ y C′D′ de estos planos paralelos con un tercero (P) son también paralelas (v. p. 116).

Proyección oblicua de un punto A sobre un plano (P). — Sea (D) una dirección dada que corta el plano (P). *Se llama* **proyección de un punto A sobre el plano (P), paralelamente a la dirección (D),** *o sencillamente* **proyección oblicua de A** *(cuando no cabe confusión posible y no se trata de una proyección ortogonal) el punto* A′ *en que la paralela* AA′ *a la recta* (D) *atraviesa el plano* (P). La recta AA′ se llama **proyectante** de A (*fig.* 265).

Se llama **proyección oblicua de una recta AB** *el lugar de las proyecciones* M′ *de los puntos* M *de la recta* (D). Se demuestra sin dificultad que la proyección de una recta que no sea paralela a la dirección (D) es también una recta, y que las proyecciones de dos rectas paralelas son igualmente rectas paralelas.

Proyección ortogonal de un ángulo recto $\widehat{BAC}$. — TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un ángulo recto* $\widehat{BAC}$ *se proyecte sobre un plano* (P) *según otro ángulo recto* $\widehat{B'A'C'}$ *es que uno de los lados de dicho ángulo sea paralelo al plano de proyección* (P).

Hemos enunciado este teorema en la forma habitual, que necesita algunas explicaciones (*fig.* 266). Se supone implícitamente que los lados AB y AC del ángulo recto no son perpendiculares al plano (P); A′B′ y A′C′ son sus proyecciones respectivas en dicho plano. Se llama proyección del ángulo saliente $\widehat{BAC}$ el ángulo saliente $\widehat{B'A'C'}$.

La condición es necesaria. Hipótesis: $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 1$ recto. Si el lado AC es paralelo a A′C′, será paralelo al plano (P), que contiene A′C′, y la condición es necesaria.

Supongamos que AC y A′C′ no sean paralelas. Según la definición de plano perpendicular, la recta A′C′ del plano (P) es perpendicular a la recta AA′, ya que ésta lo es al plano (P); A′C′ es perpendicular a A′B′ por hipótesis. Por consiguiente, A′C′ es perpendicular al plano AA′B′ (plano proyectante de AB), que contiene AB: luego A′C′ es perpendicular a AB.

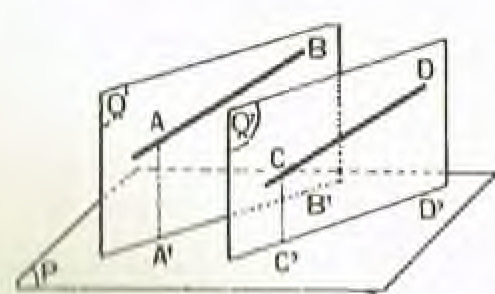


Fig. 264

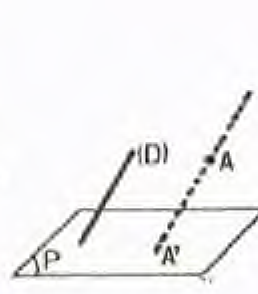


Fig. 265

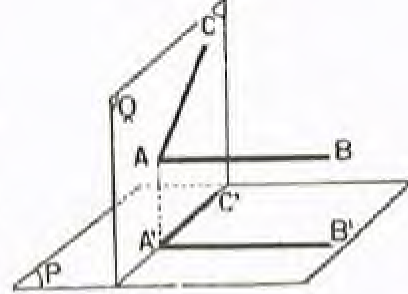


Fig. 266

Según acabamos de demostrar, la recta AB es perpendicular a A′C′ y también lo es a AC por hipótesis; luego AB es perpendicular a dos rectas AC y A′C′ que no son paralelas por hipótesis y que están en el plano (Q) proyectante de la recta AC. Por tanto, AB es perpendicular a dicho plano (v. p. 117).

La recta A′B′ es perpendicular a AA′, recta del plano (Q) [por definición de plano perpendicular a una recta en un punto], y a A′C′, que pertenece al plano (Q) por hipótesis; por tanto, A′B′ es perpendicular a dicho plano.

Las dos rectas AB y A′B′, perpendiculares a un mismo plano (Q), son paralelas entre sí; luego la recta AB, paralela a la recta A′B′ del plano (P), es paralela a (P).

La condición es suficiente. Hipótesis: el ángulo $\widehat{BAC}$ es recto y uno de sus lados AB es paralelo al plano de proyección (P); siendo AB paralela a (P), la intersección de dicho plano con el AA′B, que pasa por AB, es paralela a AB (v. p. 116).

Por hipótesis la recta AB es perpendicular a la recta AC y paralela al plano (P); siendo AB paralela a (P), será perpendicular a la recta AA′, que es perpendicular a dicho plano. La recta AB, que es perpendicular a cada una de las rectas AC y AA′, que son distintas, es perpendicular al plano (Q) que las contiene, y la recta A′B′, paralela a AB, también es perpendicular a dicho plano. Al ser A′B′ perpendicular al plano (Q), es perpendicular a la recta A′C′ de dicho plano. Por tanto, el ángulo $\widehat{C'A'B'}$ es recto.

COROLARIO. *Si la proyección de un ángulo* $\widehat{BAC}$ *sobre un plano paralelo a uno de sus lados es un ángulo recto, dicho ángulo es recto.*

Dejamos que el lector deduzca la demostración, muy sencilla, de esta proposición.

Ángulo de una recta y un plano. Planos bisectores del ángulo formado por dos rectas. — *Se llama* **ángulo de una recta y un plano** *el ángulo agudo que forma dicha recta con su proyección ortogonal sobre el plano.*

Dos rectas paralelas forman con un plano dado el mismo ángulo.

Se llama **planos bisectores del ángulo formado por dos rectas secantes** AB *y* AC *a los dos planos que pasan por una de las bisectrices* AE *y* AE′ *de dicho ángulo y que son perpendiculares al plano* BAC *determinado por las dos rectas consideradas* (fig. 267).

TEOREMA. *El lugar geométrico de las rectas* AM *que pasan por el punto* A *de intersección de dos rectas* AB *y* AC *y que forman con estas dos rectas ángulos iguales son los planos bisectores del ángulo formado por* AB *y* AC (fig. 268).

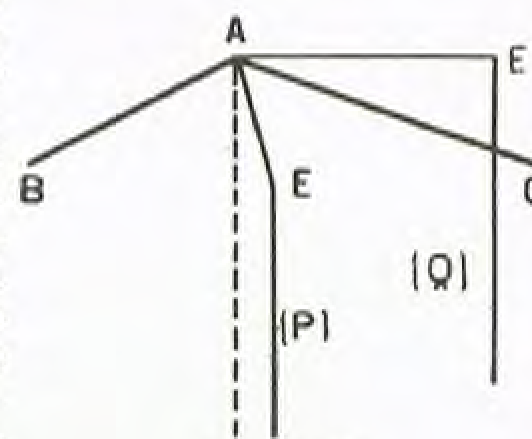


Fig. 267

En este enunciado, al decir ángulo de las rectas AB y AM nos referimos a uno cualquiera de los ángulos que forman dichas rectas. Cuando se dice que AM forma con AB y AC ángulos iguales, quiere decirse que uno de los ángulos de AM con AB es igual a uno de los ángulos de AM con AC.

Sea M′ (*fig.* 268) la proyección ortogonal del punto M sobre el plano (P) determinado por AB y AC; B′ la proyección ortogonal de M′ sobre AB; C′ la proyección ortogonal de M′ sobre AC. Según el teorema de las tres perpendiculares (v. p. 119), MB′ es perpendicular a AB y MC′ a AC.

Si el punto M es un punto del lugar, se tendrá que $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ por hipótesis.

Los triángulos AMB′ y AMC′, rectángulos en B′ y C′ por construcción, son iguales (hipotenusa AM común, ángulos agudos $\widehat{B'AM}$ y $\widehat{C'AM}$ iguales por hipótesis); por tanto, MB′ = MC′. Los triángulos MM′B′ y MM′C′, rectángulos en M′, son, por consiguiente, iguales (hipotenusas iguales, MB′ = MC′, según lo que precede, y un lado MM′ común), luego M′B′ = M′C′. El punto M′ está a igual distancia de las rectas AB y AC, luego está en una de las dos bisectrices del ángulo $\widehat{BAC}$, y, por consiguiente, el punto M está en uno de los dos planos bisectores del ángulo formado por AB y AC.

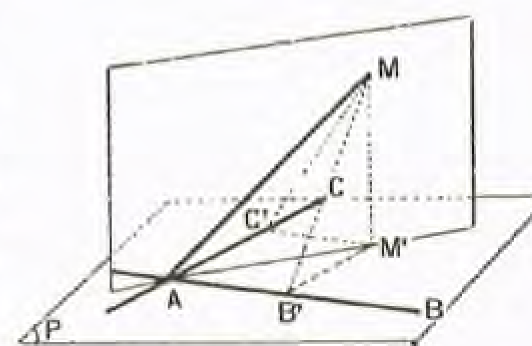


Fig. 268

Si el punto M está en uno de los planos bisectores de $\widehat{BAC}$, M está sobre una de las bisectrices de dicho ángulo y, por tanto, M′B′ = M′C′. Los triángulos rectángulos MM′B′ y MM′C′ son iguales (tienen un ángulo recto comprendido entre lados iguales: MM′ común, M′B′ = M′C′), por tanto, las hipotenusas son iguales, MB′ = MC′. Luego los triángulos rectángulos AMB′ y AMC′ son iguales (hipotenusa AM común, lados iguales MB′ = MC′) y los ángulos $\widehat{MAB}$ y $\widehat{MAC}$ son iguales.

El lugar se compone, por tanto, de dos planos bisectores.

La demostración pone en evidencia que el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan (MB′ = MC′) de dos rectas dadas secantes AB y AC, se compone de los dos planos bisectores del ángulo formado por esas rectas.

Traslaciones - Giros

Teorema de Thales. Traslación. Figuras transformadas por traslación. Giro. Simetría con relación a un plano. Producto de dos simetrías. Semigiro. Desplazamiento. Volvimiento. Igualdad de dos figuras

Las definiciones de vector, vectores paralelos, razón de dos vectores, equipolencia y valor algebraico estudiadas en geometría plana se hacen extensivas al espacio sin modificación. (V. VECTORES, p. 89.)

Teorema de Thales. — *Los vectores determinados por planos paralelos sobre dos rectas cualesquiera son proporcionales (fig. 269).*

Supongamos que cuatro planos paralelos (P_1), (P_2) (P_3) y (P_4) cortan dos rectas dadas (D) y (D′) en los puntos A y A′, B y B′, C y C′, E y E′. La paralela (D_1), trazada a la recta (D′) por el punto A, corta los cuatro planos en los puntos A B_1, C_1 y E_1.

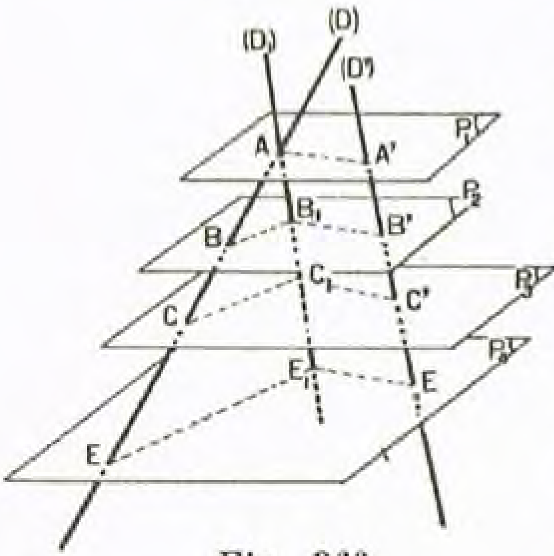


Fig. 269.

Las rectas (D_1) y (D′) son paralelas y, por consiguiente, determinan un plano que corta los cuatro planos (P) según las rectas paralelas AA′, B_1B′, C_1C′ y E_1E′. Las figuras AA′-B′B_1 y C_1C′E′E_1 son, por tanto, paralelogramos y se verifica que $\overline{AB_1} = \overline{A'B'}$ y $\overline{C_1E_1} = \overline{C'E'}$.

Las rectas (D) y (D_1), concurrentes en A, determinan un plano (Q) que corta los planos (P) según las rectas paralelas BB_1, CC_1 y EE_1; en el plano (Q), las dos secantes (D) y (D_1) están cortadas por rectas paralelas, y según el teorema de Thales (v. p. 91), demostrado en geometría plana y aplicado a la figura plana formada por las rectas (D) y (D_1), se verifica que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{C_1E_1}}.$$

De esta igualdad y de

$$\overline{AB_1} = \overline{A'B'}, \qquad \overline{C_1E_1} = \overline{C'E'},$$

se deduce que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'E'}},$$

lo que demuestra la proposición enunciada.

Traslación. — *En el espacio, lo mismo que en el plano, se llama* **traslación** PQ *la transformación por la cual a un punto* M *del espacio corresponde otro punto* M′, *de modo que* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PQ}$.

La traslación $\overrightarrow{PQ}$ hace que al par de puntos A, B corresponda otro par A′, B′ de tal manera que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ y recíprocamente, si A y A′ son dos puntos dados, la transformación definida por $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ es una traslación.

Es inútil hacer nuevas demostraciones de esta proposición en el espacio, pues repetirían palabra por palabra las estudiadas anteriormente en el plano.

Figuras transformadas por traslación. — *La figura transformada de una recta* (D) *es una recta paralela* (D′) [fig. 270] (véase página 105).

Esto es consecuencia de la propiedad resumida por la igualdad $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$; si A′ es el homólogo de un punto fijo A de la recta (D), A′ será también un punto fijo y M′ será un punto de la paralela (D′) trazada por el punto A′ a la recta (D).

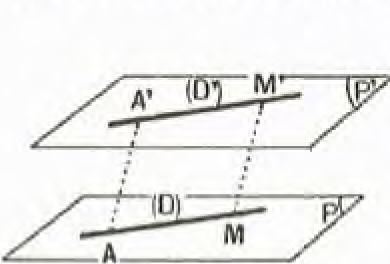


Fig. 270

La figura transformada de un plano (P) *es un plano paralelo* (P′).

Sea A′ el transformado de un punto A del plano (P) [*fig.* 270]. La recta (D′), transformada de una recta (D) que pasa por el punto A′ y está situada en el plano (P), es una recta que pasa por el punto A′ y es paralela a dicho plano. Por consiguiente, estará situada en el plano (P′) que pasa por el punto A′ y es paralelo al (P).

El producto de dos traslaciones $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{QR}$ *es la traslación* $\overrightarrow{PR}$ (definición análoga a la dada en geometría plana) [v. p. 105].

Giro. — En el espacio un giro se define por un vector $\overrightarrow{\omega}$ y por un ángulo θ. Sea (△) [*fig.* 271] la recta soporte del vector $\overrightarrow{\omega}$. Dicha recta se llama **eje de giro.**

El transformado de un punto M en el giro ($\overrightarrow{\omega} \cdot \theta$) está definido por las reglas siguientes:

1º Si el punto M está en el eje de giro, su transformado M′ se confunde con M;

2º Si M no está en el eje de giro (*fig.* 271), su transformado M′ se obtiene de M mediante un giro efectuado en el plano (P) que pasa por M y es perpendicular al eje de giro (△). El centro de giro es el punto O en que el eje (△) corta el plano (P); el ángulo de giro es θ; el sentido positivo queda determinado por un observador que situado sobre el vector $\overrightarrow{\omega}$, con sus pies en el origen O y la cabeza en el extremo, sea capaz de distinguir su derecha de su izquierda.

Se admite que este observador, capaz de discernir en qué sentido se desplaza un semiplano, que pase por (△) y el punto M, para llegar a superponerse sobre el semiplano definido por (△) y el punto M′, es también capaz de discernir si dicho sentido es positivo o negativo (según se haya adoptado que el sentido positivo sea de derecha a izquierda o de izquierda a derecha). El ángulo de giro θ es, por consiguiente, el valor de un ángulo orientado.

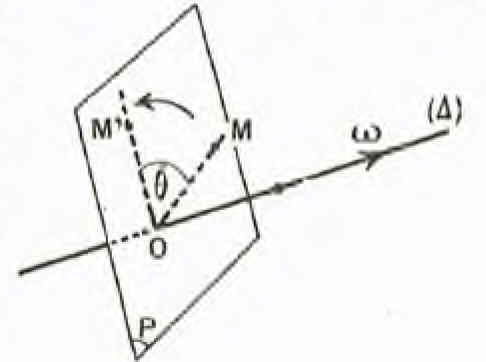


Fig. 271

Siendo bastante difíciles las cuestiones de orientación en el espacio, consideramos los giros como el resultado de dos simetrías sucesivas. En los párrafos siguientes estudiaremos las simetrías.

Simetrías con relación a un plano. — *Se llama* **simetría respecto a un plano (P)** *la transformación por la que a un punto* M *corresponde otro punto* M′ *con las dos condiciones siguientes:*

1º *La recta* MM′ *es perpendicular al plano* (P);

2º *El punto medio* H *de* MM′ *está en el plano* (P) [fig. 272]. Esta transformación hace que a un punto M corresponda otro punto M′ y sólo uno, distinto de M, excepto si M está en el plano (P). En este caso se admite que el punto M′ se confunde con M.

Los puntos o las figuras transformadas de un punto M o de una figura (F) por una simetría se denominan puntos simétricos o figuras simétricas respectivamente.

Sea (Q) un plano perpendicular a otro (P) y sea (D) la recta de intersección de ambos. Sea M (*fig.* 272) un punto del plano (Q); la perpendicular MM′ al plano (P) trazada por M está situada en (Q) [v. p. 120]. El punto H, en que la recta MM′ atraviesa el plano (P), está situado en la recta (D) y M′ es el simétrico de M con relación al punto H. La recta MM′ es perpendicular al plano (P) por construcción y, por tanto, perpendicular a la recta (D) situada en dicho plano, y la transformación M, M′ es una transformación plana en el plano (Q), estudiada anteriormente con el nombre de simetría con relación a la recta (D) [v. p. 106].

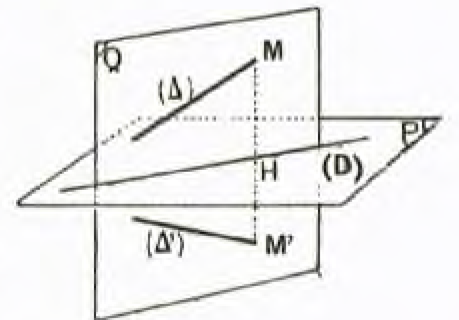


Fig. 272

De ello se deduce:

1º *Que el simétrico de un plano* (Q), *perpendicular a otro* (P), *es el mismo plano* (Q);

2º *Que la simétrica de una recta* MH, *perpendicular al plano* (P), *es esta misma recta;*

3º *Que la simétrica de una recta* (△) *que no sea perpendicular al plano* (P), *es otra recta* (△′).

En efecto, la recta (△′) es la simétrica de (△) con relación a la recta (D), intersección del plano (P) con el plano (Q) que proyecta ortogonalmente la recta (△) sobre (P).

4º *Que el simétrico de un segmento* AB *es un segmento igual* A′B′.

Además:

Una recta (△) *y su simétrica* (△′) *están en un mismo plano* (Q) *perpendicular al plano* (P);

Si una de ellas (△) *corta el plano* (P) *en un punto* A, *la otra* (△′) *cortará también dicho plano en el mismo punto y las dos rectas formarán igual ángulo con el plano* (P);

Si una de ellas (△) *es paralela al plano* (P), *la otra* (△′) *será también paralela a* (P);

La figura simétrica de un plano (R) *que corta el plano* (P) *según una recta* BC *es el plano* (R′) *que pasa por* BC *y que forma con el plano* (P) *un ángulo igual al que forman los planos* (R) *y* (P).

Sea A un punto del plano (R) que no esté situado en la recta BC (*fig.* 273); su simétrico A′ es un punto determinado que tampoco pertenece a BC. Una recta AM variable que una el punto A fijo con el punto variable M de la recta BC, engendra el plano (R); su simétrica es A′M, que une A′ (simétrico de A) con M′ (simétrico de M). El plano (R′) engendrado por A′M está definido por el punto A′ y la recta BC. Dicho plano es el simétrico del plano (R).

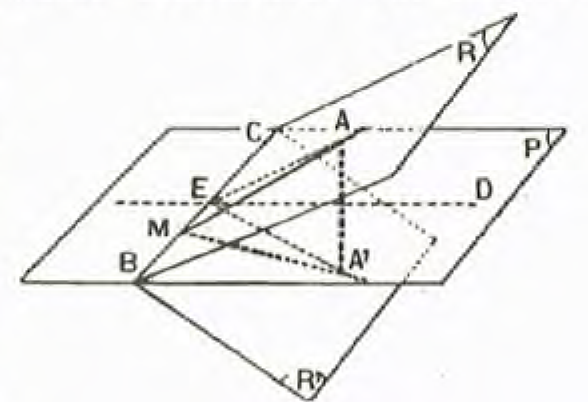


Fig. 273

Siendo AA′ perpendicular a la recta BC del plano (P), existe (véase pág. 119) un plano (Q) que pasa por AA′ y es perpendicular a BC. Este plano (Q) cortará los planos (R), (R′) y (P) según las rectas AE, A′E y ED respectivamente.

Estas tres rectas son perpendiculares a BC. Por tanto, los ángulos $\widehat{AED}$ y $\widehat{A'ED}$ son los ángulos planos de los diedros (PBCR y (PBCR'). Dichos ángulos son iguales, pues las rectas AE y A'E son simétricas en el plano (Q) respecto a la recta ED. Resulta, pues, que los planos (R) y (R') forman ángulos iguales con el plano (P).

Producto de dos simetrías. — El producto de dos transformaciones en el espacio se define de forma análoga que en el plano. Sea M un punto, M' su transformado según una transformación dada (T) y M'' el transformado de M' según otra transformación dada (T'). Por definición el punto M'' es el transformado de M en el producto de las dos transformaciones (T) (T').

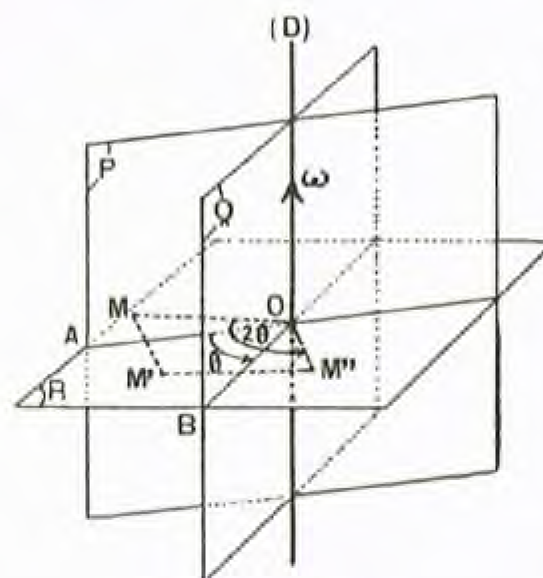


Fig. 274

Teorema. *El producto de dos simetrías respecto a dos planos* (P) *y* (Q) *secantes, es un giro alrededor de la recta* (D) *intersección de dichos planos.*

Sea M un punto del espacio (*figura* 274) y (R) el plano que pasando por M es perpendicular a la recta (D). Dicho plano corta (D) en el punto O, y los planos (P) y (Q) según las rectas OA y OB respectivamente. Situemos en la recta (D) un observador representado por el vector $\vec{\omega}$. Sea θ uno cualquiera de los ángulos de que es preciso girar el plano (P) para llevarle sobre el plano (Q). Para el observador $\vec{\omega}$ dicho ángulo puede estar determinado en magnitud y en signo: es evidente que un giro $(O \cdot \theta)$ en el plano (R) con el sentido indicado por el observador $\vec{\omega}$, llevará OA sobre OB.

La recta MM' es, por construcción, perpendicular al plano (P); la recta M'M'' es perpendicular al plano (Q); por tanto, el plano MM'M'', definido por estas dos rectas, es perpendicular a (D), intersección de (P) y (Q): luego MM'M'' es el plano (R). En este plano se pasa de M a M' por una simetría respecto a OA y de M' a M'' por una simetría respecto a OB: el producto de estas dos simetrías planas es el giro $(O \cdot 2\theta)$ en el plano (R) [v. p. 106]. Por tanto, se pasa del punto M al punto M'' por el giro $(\vec{\omega} \cdot 2\theta)$ definido en el espacio por el vector $\vec{\omega}$ y el ángulo orientado 2θ.

Recíproco. *Un giro en el espacio* $(\vec{\omega} \cdot 2\theta)$ *es el producto de dos simetrías.*

Elijamos un plano cualquiera (P) que pase por la recta soporte del vector $\vec{\omega}$; hagamos girar el plano (P) alrededor de $\vec{\omega}$ un ángulo θ estando el observador en $\vec{\omega}$: sea (Q) el plano obtenido. El producto de simetrías sucesivas respecto a (P) y a (Q) es un giro $(\vec{\omega} \cdot 2\theta)$.

Teorema. *El producto de dos simetrías respecto a los planos paralelos* (P) *y* (Q) *es una traslación* (fig. 275).

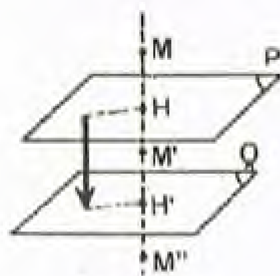


Fig. 275

Sea M un punto cualquiera, M' su simétrico respecto a (P), M'' el simétrico de M' respecto a (Q), H el punto medio de MM' y H' el punto medio de M'M''. Como en el plano, tenemos que $\overline{MM''} = 2\overline{HH'}$ (*fig.* 275).

El vector $\vec{MM''}$ es, por tanto, equipolente de un vector fijo perpendicular a los planos (P) y (Q). Luego se pasa de M a M'' por una traslación.

Dejamos que el lector demuestre que toda traslación es el producto de dos simetrías.

Semigiro. — *Se llama* **semigiro** (antes se decía simetría respecto a una recta) *alrededor de una recta* (D) *la transformación por la que a un punto* M *corresponde su simétrico respecto al pie* H *de la perpendicular trazada desde* M *a la recta* (D).

Teorema. *El producto de dos semigiros alrededor de dos rectas concurrentes* OA *y* OB *es un giro cuyo eje es perpendicular al plano* AOB *en el punto* O.

Sea (P) el plano AOB y OC la perpendicular a dicho plano en el punto O (*fig.* 276). Se sustituye el semigiro alrededor de OA por el producto de dos simetrías: la primera respecto al plano AOC, la segunda respecto al plano (P); el resultado es un giro alrededor de OA, y como dichos planos son perpendiculares, el ángulo de este giro es π: es un semigiro. Se sustituye el semigiro alrededor de OB por dos simetrías: la primera respecto al plano (P), la segunda respecto al plano BOC. Las dos simetrías sucesivas respecto al plano (P) se anulan, quedando, en definitiva, para el producto de los dos semigiros, dos simetrías sucesivas respecto a los dos planos AOC y BOC. Hemos visto que el producto de estas dos simetrías es un giro $(\vec{\omega} \cdot 2\theta)$; $\vec{\omega}$ es un vector sobre la recta OC y θ es el ángulo orientado por ese vector, del que es necesario girar OA para llevarla sobre OB.

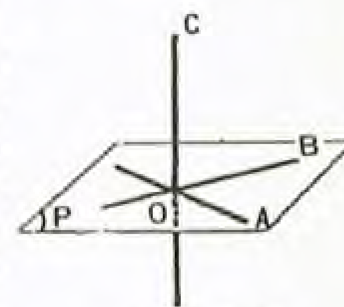


Fig. 276

El recíproco es cierto: un giro $(\vec{\omega} \cdot 2\theta)$ es el producto de dos semigiros.

Teorema. *El producto de dos semigiros respecto a las rectas paralelas* (D) *y* (D') *es una traslación.*

Sea (P) [*fig.* 277] el plano de las rectas paralelas (D) y (D'); sean (Q) y (Q') los planos que pasando por las rectas (D) y (D'), respectivamente, son perpendiculares a (P). Los planos (Q) y (Q') son paralelos.

Se sustituye el semigiro alrededor de (D) por el producto de dos simetrías: la primera respecto al plano (Q), la segunda respecto al plano (P); se reemplaza el semigiro alrededor de (D') por el producto de dos simetrías, la primera respecto al plano (P) y la segunda respecto al plano (Q'). Las dos simetrías sucesivas respecto al plano (P) se anulan y, por tanto, el producto de los dos semigiros equivale al producto de dos simetrías respecto a los planos paralelos (Q) y (Q'), es decir, que equivale a un giro.

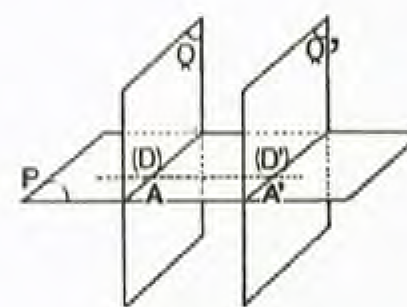


Fig. 277

Tracemos en el plano (P) una perpendicular a (D) y (D') que las corte en A y A' respectivamente. La traslación que resulta es $2\vec{AA'}$.

Recíproco. *Una traslación* $2\vec{AA'}$ *es el producto de dos semigiros; el primero alrededor de una recta* (D) *que sea perpendicular a una dirección cualquiera* AA' *y el segundo alrededor de una recta* (D') *obtenida de* (D) *por la traslación* $\vec{AA'}$.

Desplazamiento. Volvimiento. Igualdad de dos figuras. — *Se llama* **desplazamiento** *el producto de traslaciones y giros.* Este producto no es, en general, un giro, como sucedía en el plano.

Se llama **volvimiento** *el producto de un desplazamiento y una simetría respecto a un plano.*

Se dice que dos figuras en el espacio son **iguales** *cuando se puede hacer que a todo punto* M *de una de ellas corresponda un punto homólogo* M' *de la segunda, de manera que la distancia* AB *entre dos puntos cualesquiera de la primera figura sea igual a la distancia* A'B' *de los puntos homólogos.*

Se dice que dos figuras son **directamente iguales** *cuando se puede pasar de una a otra mediante un desplazamiento.*

Se dice que son **inversamente iguales** *cuando mediante un desplazamiento se puede pasar de una de ellas a una simétrica de la otra respecto a un plano.*

Poliedros, cilindro y cono

Angulo triedro. Triedros suplementarios. Empleo de los triedros suplementarios. Igualdad de triedros. Angulo poliedro. Poliedros. Pirámide. Tetraedro. Tetraedro regular. Prisma. Propiedades del cubo. Cilindro. Plano tangente a un cilindro. Cilindro de revolución. Cono. Plano tangente a un cono. Cono de revolución

Angulo triedro. — *Se llama* **triedro** *la figura formada por tres semirrectas de origen común,* OA, OB, OC, *no pertenecientes a un mismo plano.*

Se llaman **caras** *del triedro* OABC *los ángulos salientes que forman entre sí dos de estas tres semirrectas.* Por tanto, hay tres caras: denominaremos *a* la medida de $\widehat{BOC}$, *b* la de $\widehat{COA}$ y *c* la de $\widehat{AOB}$.

Se llama **diedro A** *el diedro de arista* OA *formado por los semiplanos* BOA *y* COA, *que contiene los puntos del ángulo* $\widehat{BOC}$. Hay tres diedros cuyas medidas son A, B, C y sus aristas OA, OB, OC. Se dice indistintamente **aristas del triedro** o aristas de los diedros del triedro.

El estudio de los triedros no es importante; lo que atrae la atención sobre ellos es su analogía con los triángulos, que también dependen de seis elementos. No podemos dejar de considerar algunas propiedades de los números *a, b, c,* A, B, C, que figuran en todos los tratados. Seguiremos, pues, la tradición enunciándolas; reduciremos las demostraciones a algunas indicaciones esenciales.

Teorema. *En todo triedro, una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos.*

Si se verifica que $a < b < c$, la proposición es evidente para las caras menores. Así, pues, basta con demostrarla para la cara mayor $\widehat{AOB}$. Se traza en el plano AOB (*fig.* 278) la semirrecta OD, de modo

que $\widehat{AOD} = \widehat{AOC}$; como $\widehat{AOB}$ es la cara mayor, OD será una semirrecta del ángulo $\widehat{AOB}$. Se traza en el plano AOB la recta ADB (D está situado entre A y B) y se toma $OC = OD$. Los triángulos AOC y AOD son iguales (OA común, $OD = OC$, $\widehat{AOC} = \widehat{AOD}$ por construcción); por consiguiente, $AC = AD$.

En el triángulo ABC se verifica que $AB < AC + CB$; pero también se verifica que $AB = AD + DB$, puesto que D está entre A y B, y como $AD = AC$, resulta que $DB < CB$. Los triángulos DOB y COB tienen dos lados iguales ($OD = OC$ y OB común); los terceros son desiguales, $DB < CB$, por tanto (v. p. 79), los ángulos $\widehat{DOB}$ y $\widehat{COB}$ comprendidos entre lados iguales son desiguales y a menor lado se opone menor ángulo, luego $\widehat{DOB} < \widehat{COB}$.

Como por construcción $\widehat{DOA} = \widehat{COA}$, la desigualdad citada implica $\widehat{DOA} + \widehat{DOB} < \widehat{AOC} + \widehat{COB}$, y como OD está entre OA y OB, $\widehat{DOA} + \widehat{DOB} = c$ y por consiguiente $c < a + b$.

Corolario. *La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro ángulos rectos.*

Sea OA′ la prolongación de OA. Las caras del triedro OA′BC tienen por medida a, $\pi - b$, $\pi - c$: una cara cualquiera a es menor que la suma de las otras dos $\pi - b + \pi - c$.

$$a < 2\pi - b - c,$$

por consiguiente:

$$a + b + c < 2\pi.$$

Triedros suplementarios. — Sea OA′ una semirrecta perpendicular al plano BOC (*fig.* 279) y situada, respecto a dicho plano, al mismo lado que OA; sea OB′ una semirrecta, perpendicular al plano AOC y situada, respecto a este plano, al mismo lado que OB; sea OC′ una semirrecta perpendicular al plano BOA y que se encuentra al mismo lado que OC con relación al plano BOA. El triedro OA′B′C′ se llama **triedro suplementario** del triedro dado OABC; sus caras tienen por medidas a', b', c' y sus diedros A′, B′, C′.

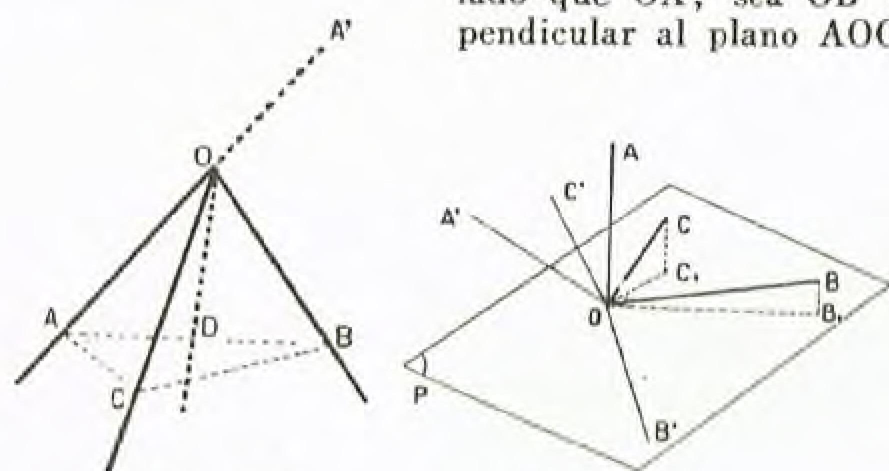


Fig. 278 *Fig.* 279

Al ser OA perpendicular a la vez a OB′ y a OC′ será perpendicular al plano determinado por estas dos rectas. Sea (P) dicho plano. Proyectemos ortogonalmente sobre este plano las aristas OB y OC en OB_1 y OC_1. Se verifica que en el plano (P) la recta OB_1 es perpendicular a OC′ (ya que OC′ es perpendicular al plano $AOBB_1$) y que la recta OC_1 es perpendicular a OB′. Por tanto, el ángulo $\widehat{B'OC'}$ es suplementario del ángulo $\widehat{B_1OC_1}$, que no es otro que el ángulo diedro OA. Así pues, se tiene

$$a' = \pi - A.$$

Se infiere que una cara de un diedro suplementario es igual al suplemento del diedro opuesto en el triedro dado.

$$a' = \pi - A, \qquad b' = \pi - B, \qquad c' = \pi - C.$$

Nota. Basta considerar cómo se ha pasado del triedro OABC al triedro OA′B′C′ para observar que el triedro suplementario del OA′B′C′ no es otro que el triedro OABC. Lo que nos lleva a las igualdades siguientes:

$$a = \pi - A', \qquad b = \pi - B', \qquad c = \pi - C'.$$

Empleo de los triedros suplementarios. — Los triedros suplementarios sirven para duplicar todas las propiedades de los triedros.

Se ha demostrado que en todo triedro se tiene $c < a + b$. Aplicando esta propiedad al triedro suplementario, la desigualdad $c' < a' + b'$ implica esta otra, $\pi - C < \pi - A + \pi - B$, es decir:

$$A + B < \pi + C.$$

A la propiedad que dice: en todo triedro una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos, le corresponde la propiedad siguiente, que se llama correlativa: *en todo triedro la suma de dos diedros es menor que el tercero aumentado en dos rectos.*

Se verifica que la propiedad que dice que la suma de las caras de un triedro es menor que cuatro ángulos rectos, implica esta otra: *la suma de los diedros de un triedro es mayor que dos rectos.*

Igualdad de triedros. — Sea OABC un triedro cuyos seis elementos son a, b, c, A, B, C y $O_1A_1B_1C_1$ otro triedro cuyos seis elementos son a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1 (*fig.* 280).

Teorema. *Dos diedros* OABC *y* $O_1A_1B_1C_1$ *son iguales si se verifica una de las hipótesis expresadas por las igualdades siguientes:*

1º $a = a_1$, $b = b_1$, $C = C_1$;
2º $A = A_1$, $B = B_1$, $c = c_1$;
3º $a = a_1$, $b = b_1$ $c = c_1$;
4º $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$.

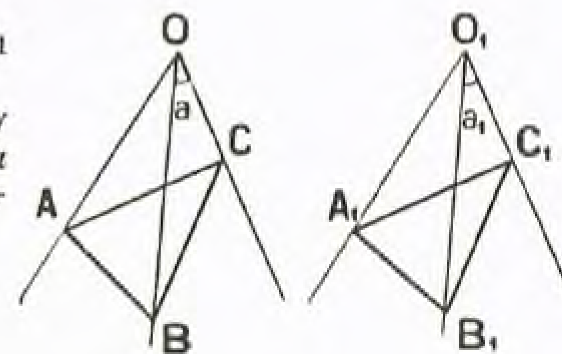


Fig. 280

1^er^ caso: Hipótesis $a = a_1$, $b = b_1$, $C = C_1$. Se eligen sobre las aristas OC y O_1C_1 dos puntos C y C_1, de modo que $OC = O_1C_1$. El plano perpendicular en C a la arista OC corta el triedro OABC según un triángulo ABC, y el plano perpendicular en C_1 a O_1C_1 corta el triedro $O_1A_1B_1C_1$ según un triángulo $A_1B_1C_1$.

Las hipótesis $b = b_1$, $OC = O_1C_1$ suponen la igualdad de los triángulos AOC y $A_1O_1C_1$ y, en consecuencia, las de $AC = A_1C_1$ y $OA = O_1A_1$.

Como el plano CAB es perpendicular a OC, el triángulo ACO es rectángulo en C. Por la misma razón, también es rectángulo el triángulo $A_1C_1O_1$. Como $OC = O_1C_1$ y $\widehat{AOC} = \widehat{A_1O_1C_1}$ por hipótesis, los triángulos rectángulos ACO y $A_1C_1O_1$ son iguales. Por tanto, $AC = A_1C_1$. Por igual razonamiento se deduce que $AB = A_1B_1$ y $BC = B_1C_1$. Por consiguiente, los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales.

Existe (v. p. 123) un desplazamiento que lleva los puntos A_1 y B_1 sobre A y B respectivamente, y puesto que los triángulos ACB y $A_1C_1B_1$ son iguales, llevará también C_1 sobre el punto C. Este desplazamiento lleva O_1 a ω. Si ω se confunde con O, queda demostrado el teorema; si ω es diferente de O, los puntos O y ω son simétricos respecto al plano ABC y los triedros OABC y $O_1A_1B_1C_1$ son inversamente iguales.

2º caso. Hipótesis $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$. Si se designan con letras acentuadas los elementos de los triedros suplementarios de los triedros dados, se verifica que las hipótesis consideradas implican estas otras: $a' = a'_1$, $b' = b'_1$, $C' = C'_1$. Por tanto, los triedros suplementarios de los triedros dados son iguales y, en consecuencia, éstos también son iguales.

3^er^ caso. Hipótesis $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$. Existe un desplazamiento que lleva el ángulo $\widehat{B_1O_1C_1}$ a coincidir con el ángulo igual $\widehat{BOC}$; este desplazamiento lleva O_1A_1 sobre $O\alpha$. Si $O\alpha$ coincide con OA, queda demostrado el teorema. Si $O\alpha$ es diferente de OA, las hipótesis $b = b_1$, $c = c_1$ hacen que OB y OC estén en uno de los dos planos bisectores del ángulo $\widehat{AO\alpha}$ (v. p. 123). Por tanto, las rectas OA y $O\alpha$ son simétricas respecto al plano BOC, lo que prueba que los triedros OABC y $O_1A_1B_1C_1$ son inversamente iguales.

4º caso. Hipótesis $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$. De estas igualdades se deducen, utilizando las notaciones del segundo caso, estas otras: $a' = a'_1$, $b' = b'_1$, $c' = c'_1$, y, en consecuencia, la igualdad de los triedros suplementarios y, por consiguiente, de los triedros dados.

Ángulo poliedro. Poliedros. — *Se llama* **ángulo poliedro** *la figura formada por tres o más semirrectas concurrentes enunciadas en cierto orden* OA, OB, OC, etc. *El punto común* O *es el* **vértice;** *las semirrectas* OA, OB, etc., *son las* **aristas;** *los ángulos* $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, etc., *formados por dos aristas consecutivas, son las* **caras;** *los diedros formados por los semiplanos que se cortan según una arista son los* **diedros** *del ángulo poliedro.*

Se dice que un ángulo poliedro es **convexo** *si la figura que forma está situada toda ella a un mismo lado del plano de cada una de las caras.*

Se llama **poliedro** (fig. 281) *la superficie o el volumen determinados por planos que se cortan. Las porciones de plano que limitan el volumen son las* **caras,** *las rectas que limitan las caras son las* **aristas,** *y los puntos que limitan las aristas son los* **vértices** *del poliedro.*

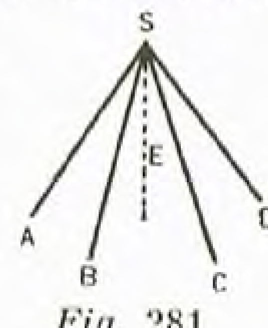


Fig. 281

No estudiaremos más que los poliedros convexos, es decir, aquellos que están situados a un mismo lado del plano de cada cara.

Pirámide. — Sea ABCD (*fig.* 282) un polígono situado en un plano (P). Sea S un punto exterior a (P). *Se llama* **pirámide** *el poliedro cuyas aristas son, por una parte las rectas* SA, SB, SC, SD, *y por otra los lados del polígono* ABCD.

El punto S *es el* **vértice** *de la pirámide; el polígono* ABCD *su* **base;** SA, SB, SC *y* SD *las* **aristas laterales;** *las caras, como la* BSA, *limitadas por dos aristas laterales consecutivas, son las* **caras laterales.** *Se llama* **altura** *de la pirámide la perpendicular* SH *trazada desde el vértice* S *al plano de la base; también se llama altura la medida del segmento* SH *limitado por el vértice* S *y el pie* H *de la perpendicular al plano* (P).

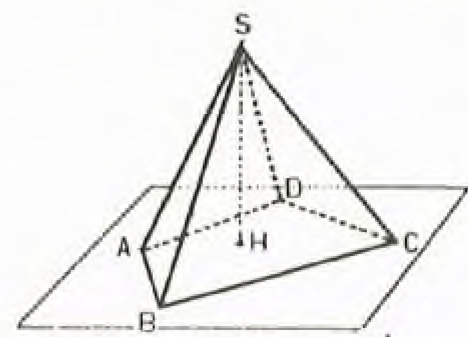


Fig. 282

Tetraedro. — *Se llama* **tetraedro** *una pirámide cuya base es un triángulo.* No hay razón alguna para llamar vértice especialmente a uno de los cuatro vértices del tetraedro, puesto que los cuatro desempeñan el mismo papel.

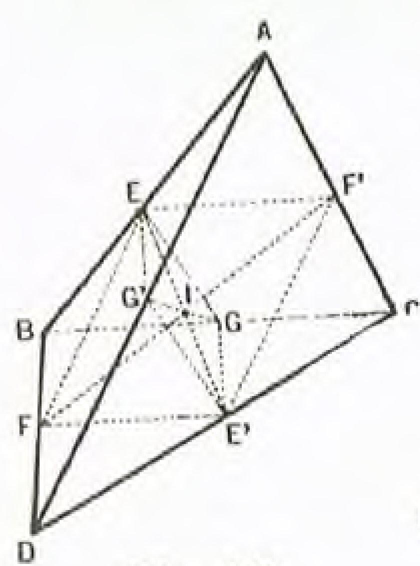


Fig. 283

En un tetraedro las aristas no concurrentes son llamadas **aristas opuestas.**

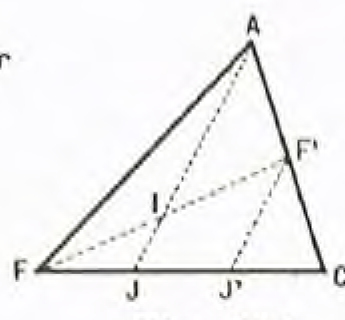


Fig. 284

Teorema. *Las rectas* EE', FF' *y* GG', *que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro, se cortan en su punto medio.*

El segmento EF' (*figura* 283), que une los puntos medios de AB y AC, es paralelo a BC e igual a su mitad; el segmento FE', que une los puntos medios de DB y DC, es paralelo a BC e igual a su mitad; en consecuencia, $\overrightarrow{EF'} = \overrightarrow{FE'}$ y la figura EFE'F' es un paralelogramo cuyas diagonales EE' y FF' se cortan en su punto medio I.

Por igual razonamiento, siendo G el punto medio de BC y G' el de AD, se tiene que $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{E'G'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, y la figura EGE'G' es un paralelogramo y GG' pasa por el punto medio I de EE'. Por consiguiente, las tres rectas EE', FF' y GG' se cortan en su punto medio I.

Corolario. *Las rectas que unen un vértice* A *con el punto* I *anteriormente hallado pasan por el centro de gravedad* J *de la cara opuesta, y el segmento* IJ *es la cuarta parte de* AJ.

La figura 284 representa el triángulo AFC de la figura 283: F' e I son los puntos medios de AC y FF' respectivamente. Se traza F'J' paralela a la recta AI. Puesto que F' es el punto medio de AC, se tiene que $\overrightarrow{F'J'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$, y por ser I el punto medio de FF' se verifica que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F'J'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AJ}$. Además, J' y J son respectivamente los puntos medios de JC y FJ'; el segmento FJ es la tercera parte de la mediana FC del triángulo BCD, a partir de la base; por tanto, J es el centro de gravedad de dicho triángulo. La recta AI pasa por el punto J, y el segmento IJ es la cuarta parte de AJ.

Tetraedro regular. — *Se llama* **tetraedro regular** ABCD *un tetraedro que tiene todas las aristas iguales entre sí.*

El plano perpendicular en el punto medio a un lado cualquiera AB *del tetraedro pasa por el lado opuesto* CD.

En efecto, las igualdades CA = CB y DA = DB implican que C y D estén en el plano perpendicular a AB en su punto medio. Resulta que *las aristas opuestas de un tetraedro regular son ortogonales.*

La recta EE' (fig. 285), *que une los puntos medios de los lados opuestos, es la perpendicular común a dichos lados.*

Esta recta EE', situada en el plano perpendicular a AB en su punto medio, es perpendicular a AB. Por igual razón EE', situada en el plano perpendicular a CD en su punto medio, es perpendicular a CD. Por tanto, EE' es la perpendicular común a AB y CD.

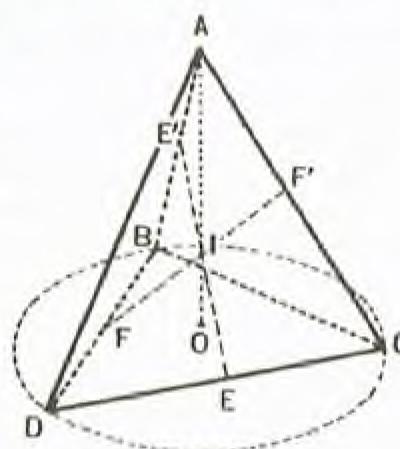


Fig. 285

La altura del tetraedro trazada por A *pasa por el punto medio* I *común a las tres rectas* EE' *y por el centro* O *de la circunferencia circunscrita al triángulo* BCD.

El plano perpendicular a CD en su punto medio pasa por A (AC = AD), pasa por I que es el punto medio de EE' y pasa por el centro O de la circunferencia circunscrita al triángulo BCD (OC = OD). Además es perpendicular al plano BCD.

El plano perpendicular a BD en su punto medio pasa por A (AB = = AD), pasa por I, punto medio de FF' que es una recta de este plano y pasa por O (OB = OD). Además es perpendicular al plano BCD.

Por consiguiente, estos dos planos se cortan según una recta que pasa por los puntos A, I, O; dicha recta es la altura del tetraedro con origen en A.

Prisma. — Sea ABCD (*fig.* 286) un polígono situado en un plano (P). Una recta paralela a una dirección dada AA', que no sea paralela al plano (P), al desplazarse apoyándose en los lados del polígono ABCD engendra una superficie constituida por porciones de planos paralelos a la recta AA'. *Esta superficie se llama* **superficie prismática.** Se obtiene la imagen de una superficie prismática plegando una hoja de papel de modo que los pliegues sean paralelos entre sí.

Sean BB', CC' y DD' las paralelas a la dirección considerada AA' trazadas por los vértices B, C, D del polígono ABCD. Cortemos las cuatro rectas AA', BB', CC' y DD' por un plano (Q) paralelo al plano (P); sean A', B', C' y D' los puntos de intersección. Los segmentos AA', BB', CC' y DD', determinados sobre rectas paralelas por los planos (P) y (Q), son iguales (v. p. 116).

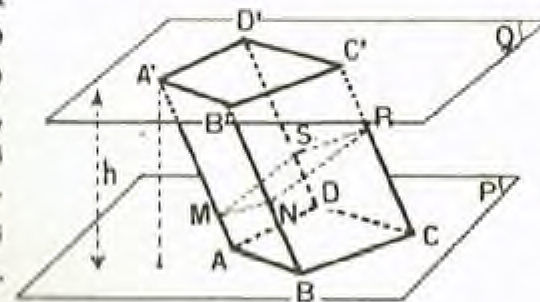


Fig. 286

Se llama **prisma** *el volumen limitado por la superficie prismática* AA'BB'CC'DD' *y por los planos* (P) *y* (Q) *a que pertenecen los polígonos* ABCD *y* A'B'C'D'.

El prisma es un poliedro cuyas **aristas laterales** son los segmentos iguales y paralelos AA', BB', CC', DD' y cuyas **caras laterales** son los paralelogramos ABB'A', BCC'B', CDD'C' y DAA'D'. Las **bases** de este prisma son los dos polígonos ABCD y A'B'C'D'; estas bases se obtienen una de otra mediante la traslación $\overrightarrow{AA'}$ o $\overrightarrow{A'A}$. Por tanto, las bases de un prisma son iguales.

Se llama **altura** *h* de un prisma la distancia entre los planos paralelos (P) y (Q), que contienen las bases del prisma. Se llama **sección recta** de un prisma el polígono MNRS obtenido al cortar todas las aristas laterales AA', BB', CC' y DD' del prisma por un plano que les sea perpendicular.

Se dice que **un prisma es recto** cuando sus bases son secciones rectas, o, lo que viene a ser lo mismo, cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases. Cuando un prisma no es recto, se dice que es **oblicuo.**

Se llama **paralelepípedo** (fig. 287) *un prisma cuya base* ABCD *es* un paralelogramo. Un paralelepípedo es un poliedro que tiene ocho vértices, doce aristas y seis caras; las cuatro caras laterales son paralelogramos como en todos los prismas, y las bases son paralelogramos por definición: por consiguiente, todas las caras de un paralelepípedo son paralelogramos. Así, pues, es completamente arbitrario denominar "bases" a dos cualesquiera de ellas, y "caras laterales" a las demás.

De dos caras cuyos planos son paralelos se dice que son **opuestas;** las aristas comunes a caras opuestas son llamadas **aristas opuestas:** los vértices comunes a las aristas opuestas son llamados **vértices opuestos.** Las rectas que unen dos vértices opuestos se llaman **diagonales.**

Teorema. *Todas las diagonales de un paralelepípedo pasan por el punto medio de cualquiera de ellas.*

Sea I (*fig.* 287), el punto medio de una diagonal cualquiera BD' y sea AC' otra diagonal; los segmentos AB y D'C, aristas laterales, son paralelos e iguales: la figura plana ABC'D' es, por tanto, un paralelogramo y sus diagonales AC' y BD' se cortan en su punto medio I.

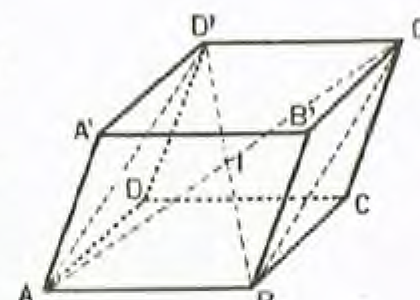


Fig. 287

Se llama **paralelepípedo recto** aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares al plano de una de las caras elegidas como base; **paralelepípedo rectángulo** es un paralelepípedo recto cuya base es un rectángulo, y **cubo** es un paralelepípedo rectángulo cuyos lados son iguales.

Todas las caras de un paralelepípedo rectángulo son rectángulos; todas las caras de un cubo son cuadrados. Todos los diedros de estos dos sólidos son rectos y todas sus aristas son perpendiculares o paralelas.

Propiedades del cubo. — Sea ABCDA'B'C'D' (*fig.* 288) un cubo; supongamos AB = *a*. La diagonal AC de una cara es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. Por tanto, se tiene

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

y como AB = BC, AC = $a\sqrt{2}$.

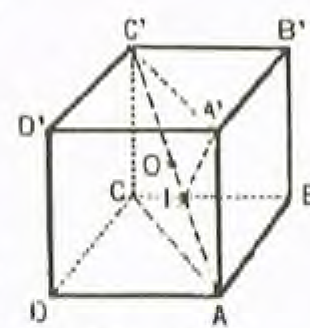


Fig. 288

La diagonal AC' del cubo es la hipotenusa del triángulo ACC', rectángulo en C, puesto que CC' es perpendicular al plano ABC: por consiguiente, se tiene

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2,$$

es decir: AC' = $a\sqrt{3}$.

Por tanto, todas las diagonales del cubo son iguales.

Sea O el punto medio de la diagonal AC'; O es también el punto medio de todas las diagonales; por tanto, se tiene

$$OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

El punto en que se cortan las diagonales del cubo equidista de los ocho vértices. Dicho punto es un **centro de simetría** para el cubo.

Los vértices A', B, D, extremos de las tres aristas del cubo que tienen su origen en A, son los vértices de un triángulo equilátero, pues las diagonales A'B, BD y DA' de las caras son iguales. Sea (P) el plano de dicho triángulo: de las igualdades de los lados AA' = AB = AD y de las diagonales de las caras C'A' = C'B = C'D se deduce que los puntos A y C' están a la vez en el plano perpendicular a A'B en su punto medio y en el plano perpendicular a A'D en su punto medio. Estos dos planos son perpendiculares a las rectas A'B y A'D del plano (P), luego (v. p. 120) son perpendiculares a (P) y, por consiguiente, su intersección AC' es también perpendicular al plano (P). Luego esta diagonal del cubo corta el plano (P) en un punto I.

El triángulo AA'C' es rectángulo en A': la recta A'I, que pertenece al plano (P) perpendicular a AC', es perpendicular a la hipotenusa AC'. Por tanto, se tiene que $\overline{AA'}^2 = \overline{AI} \cdot \overline{AC'}$, y como $AC' = a\sqrt{3}$, resulta que $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, de donde $\overline{AI} = \dfrac{1}{3}\,\overline{AC'}$. Estos resultados se resumen diciendo:

Los extremos A', B, D *de los lados de un cubo que tienen su origen en un vértice* A *determinan un plano* (P) *perpendicular en el punto* I *a la diagonal* AC' *que pasa por* A, *siendo* AI *la tercera parte de dicha diagonal. Los puntos* A', B, D *son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de centro* I *y de radio* $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cilindro. — *Se llama* **cilindro,** *o superficie cilíndrica, la superficie engendrada por una recta variable, llamada* **generatriz,** *que se mueve paralelamente a una dirección fija y apoyándose en una curva* (C) *llamada* **directriz.** Nos limitaremos a estudiar el caso en que la curva (C) sea una curva plana cerrada, que entonces se llama **base del cilindro.**

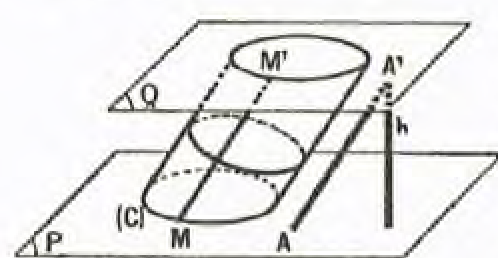


Fig. 289

La sección producida en el cilindro por un plano (Q) *paralelo al plano* (P) *de la base es una curva igual a la base.* En efecto (*fig.* 289), la generatriz MM', que pasa por el punto M de la base y que corta el plano (Q) en M', es paralela a una recta fija AA' que atraviesa los planos (P) y (Q) en los puntos A y A' respectivamente. Los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{MM'}$, determinados por dos planos paralelos (P) y (Q) sobre dos rectas paralelas son equipolentes, y la transformación que permite pasar de M a M' es una traslación. La sección producida por el plano (Q) se deduce de la base mediante una traslación, luego la base y dicha sección son iguales.

También se llama **cilindro** *el volumen limitado por la superficie cilíndrica y por los planos* (P) *y* (Q) *paralelos. Se llama* **base del cilindro** *una de las dos curvas iguales situadas en los planos* (P) *y* (Q), *y* **altura del cilindro** *la distancia entre dichos planos. Se llama* **sección recta** *toda sección producida en el cilindro por un plano que corte perpendicularmente todas las generatrices: las secciones rectas son curvas iguales.*

Se dice que **un cilindro es recto** *cuando sus bases son secciones rectas.*

Plano tangente a un cilindro. — Teorema. *Las tangentes* AT *a las curvas trazadas en un cilindro y que pasan por un punto* A *del mismo, están en un mismo plano.*

En un cilindro dado se traza una curva cualquiera (Σ) que pase (*figura* 290) por un punto dado A. Sea AB la generatriz que pasa por A, y MN una generatriz próxima a ella, siendo B y N puntos de la base (C) del cilindro. Las rectas AB y MN son paralelas por hipótesis y por tanto están situadas en un mismo plano: este plano (π) es variable y pasa por la recta fija AB.

Fig. 290

Por hipótesis, cuando M tiende a confundirse con el punto A, la recta AM tiende hacia una posición límite AT; además, supondremos que AT y AB son rectas distintas. Puesto que AM tiende hacia una posición límite AT distinta de AB, al plano (π) tiende hacia una posición límite (Q), definida por la recta fija AB y por AT; la recta BN, intersección del plano (π) con el plano de base fija, tiende, pues, hacia una posición límite BT', intersección del plano de la base con el plano (Q).

Ahora bien, cuando M se aproxima al punto A, N se aproxima al punto B; en estas condiciones, llegamos a la consecuencia de que BN tiende hacia BT' y por consiguiente hemos demostrado que en el punto B hay una tangente a la base y que esta tangente es BT'. Pero si por el punto B se puede trazar una tangente a la base, dicha tangente es fija y su posición no depende más que de la base y del punto B; el plano (Q), definido por dos rectas fijas, es fijo y el teorema queda demostrado; la recta AT está situada en un plano fijo (Q).

De esta demostración se deduce:

1° Que si no hay una tangente a la base en el punto B, tampoco hay plano tangente en A;

2° Que el plano tangente en A está definido por la generatriz AB y la tangente BT' a la base;

3° Que los planos tangentes en dos puntos diferentes de una misma generatriz se confunden en un solo plano.

Cilindro de revolución. — *Se llama* **cilindro de revolución** *el cilindro cuya base es un círculo y cuyas generatrices son perpendiculares al plano del círculo.* Si O es el centro del círculo, se llama **eje del círculo** o **eje del cilindro** la perpendicular en O al plano del círculo. El radio del círculo es llamado también **radio del cilindro.**

El cilindro de revolución es la superficie engendrada por una recta paralela a un eje y que gire alrededor de dicho eje.

El plano tangente en un punto A *de una generatriz de un cilindro de revolución es perpendicular al plano* (R) *que pasa por el punto de contacto y por el eje del cilindro.*

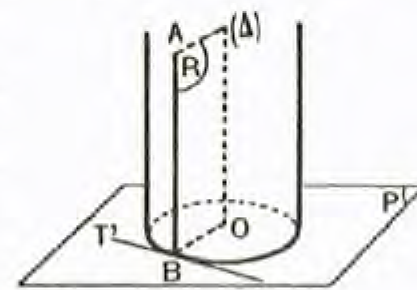


Fig. 291

En efecto, si B es un punto de la circunferencia de la base (*fig.* 291), la recta BT', tangente a la misma, es perpendicular al radio BO de dicha circunferencia. Esta recta es también perpendicular al eje (Δ) del cilindro, puesto que está contenida en el plano (P) de la base que es perpendicular a (Δ); luego BT' es perpendicular al plano (R) que contiene estas dos rectas; como BT' está contenida en el plano tangente, dicho plano también es perpendicular al plano (R).

Cono. — *Se llama* **cono,** *o superficie cónica, la superficie engendrada por una recta* SM (fig. 292), *llamada* **generatriz,** *que se mueve pasando por un punto fijo* S, *llamado* **vértice,** *y apoyándose en una curva fija llamada* **directriz.** Nos limitaremos a estudiar el caso en que la directriz del cono es una curva plana, que se llama entonces **base del cono.**

También se llama **cono** *el volumen limitado por la superficie llamada cono y por el plano de la base.* En este caso la **altura** del cono es la perpendciular SH trazada desde el vértice al plano (P) de la base.

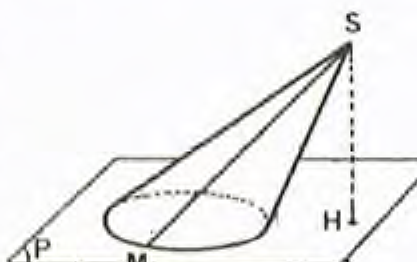


Fig. 292

Plano tangente a un cono. — Teorema. *Las tangentes* AT *a las curvas trazadas en un cono y que pasan por un punto* A *del mismo, distinto del vértice, están en un plano fijo.*

Sea (Σ) [*fig.* 293] una curva trazada en el cono y que pase por el punto A; la generatriz SA del cono, que pasa por el punto A, corta en B la base (C) de dicho cono. La generatriz SM, que pasa por un punto M de la curva (Σ) próximo al punto A, corta en N la base (C). Las rectas AM y BN están en un mismo plano.

Fig. 293

Cuando M tiende a confundirse con el punto A, la recta AM tiende a confundirse con AT. El plano (π), definido por la recta fija SA y la recta variable AM, tiende hacia una posición límite (Q), definida por las rectas SA y AT. La recta BN, intersección del plano fijo (P) con el plano variable (π), tiende, por tanto, hacia una posición límite BT' intersección del plano (P) de la base con el plano (Q); esta posición BT' es por definición la tangente a la base en el punto B. Luego el plano (Q) definido por las rectas fijas SA y BT' es un plano fijo y, por tanto, la recta AT está situada en un plano fijo.

De esta demostración se deduce:

1° Que si no hay una tangente a la base en el punto B, tampoco hay plano tangente en A;

2° Que el plano tangente en A está definido por la generatriz SA y la tangente BT' a la base;

3° Que los planos tangentes en dos puntos diferentes de una misma generatriz se confunden en un solo plano.

Cono de revolución. — *Se llama* **cono de revolución** *el cono cuya base es un círculo y cuyo vértice* S *está en el eje del círculo* (O), *perpendicular al plano de dicho círculo en su centro* O.

Esta superficie es la engendrada por una recta SB que corta en el punto S un eje dado y que gira alrededor de dicho eje. Las porciones de las generatrices comprendidas entre el vértice S y el punto B de la base son todas iguales: estos segmentos iguales se llaman **apotemas.**

El plano tangente a un cono de revolución en un punto A, *diferente del vértice, es perpendicular al plano que pasa por* A *y por el eje del cono.*

En efecto, la tangente BT' (notaciones del **párrafo precedente** [*fig.* 294]) a la base del cono es perpendicular al radio OB; por otra parte, BT' es perpendicular al eje SO de dicho cono, puesto que este eje es perpendicular al plano (P). La recta BT' es, por tanto, perpendicular al plano (R) definido por las dos rectas citadas: luego el plano que pasa por BT' y es tangente al cono a lo largo de SB, es perpendicular al plano (R) definido por el eje del cono y el punto A.

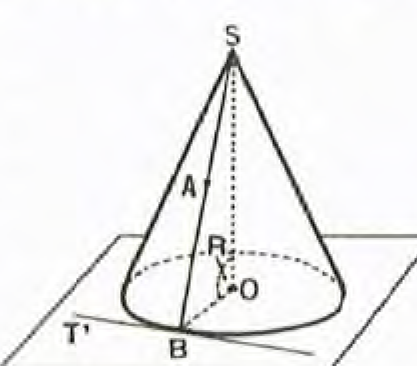


Fig. 294

Esfera

Definición de esfera. Diámetros. Planos diametrales. Propiedades de los diámetros. Plano tangente a la esfera. Posiciones relativas de un plano (P) y una esfera (S) de radio (R). Posiciones relativas de una recta (D) y una esfera (S). Posiciones relativas de dos esferas (S) y (S'). Esfera determinada por cuatro puntos. Esfera tangente a un plano en un punto dado y que pase por otro punto también dado. Potencia de un punto respecto a una esfera. Plano radical de dos esferas. Construcción del plano radical. Esferas que pasan por dos o tres puntos dados y son tangentes a un plano o a una recta. Planos radicales de tres esferas. Haz lineal de esferas. Centro radical de cuatro esferas. Esferas ortogonales. Esferas (Σ) ortogonales a otras dos (S) y (S') que no son concéntricas. Plano polar de un punto respecto a una esfera. Polo de un plano respecto a una esfera. Cono circunscrito a una esfera (S). Propiedades del cono circunscrito. Rectas conjugadas respecto a una esfera. Construcción de la recta conjugada (Δ). Propiedades de las rectas conjugadas (D) y (Δ). Circunferencias trazadas sobre una misma esfera. Planos conjugados respecto a una esfera. Plano diametral conjugado de una dirección dada. Cilindro circunscrito a una esfera (S)

Definición de esfera. Diámetros. Planos diametrales. — *Se llama* **superficie esférica** *el lugar geométrico de los puntos* M *del espacio que están a una distancia dada* R, *llamada* **radio**, *de un punto fijo* O *llamado* **centro.**

Esfera *es el cuerpo limitado por una superficie esférica.*

Se dice que un punto M es **interior a la esfera** si OM es menor que R, y M es **exterior a la esfera** si OM es mayor que R.

Se llama **diámetro** *toda recta que pasa por el centro* O *de la esfera, y* **plano diametral** *todo plano que pasa por dicho centro.*

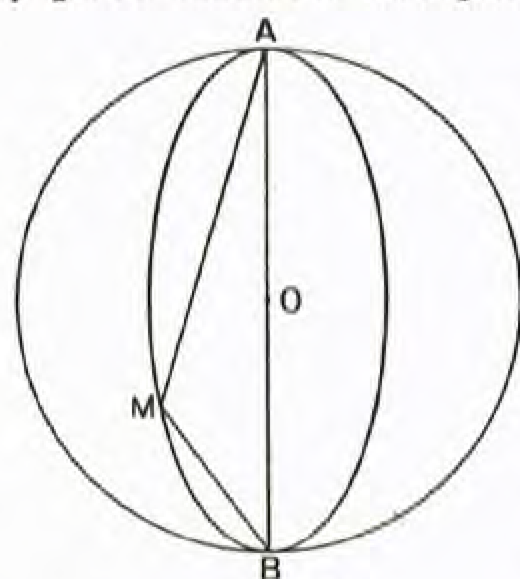


Fig. 295

Un diámetro corta la superficie esférica en dos puntos A y B definidos por OA = OB = R: un plano diametral corta dicha superficie según una infinidad de puntos M, definidos por OM = = R. Luego estos puntos estarán en una circunferencia de centro O y radio R; el círculo correspondiente se llama **círculo máximo** de la esfera.

En general la notación diámetro AB designa el diámetro cuyos extremos A y B están en la superficie esférica.

Propiedades de los diámetros. — Por un diámetro AB de una esfera (S) pasan infinidad de círculos máximos que son las secciones producidas en la esfera (S) por los planos que pasan por AB. La recta AB es un diámetro de cada uno de estos círculos.

Recíprocamente, todos los círculos de diámetro AB pertenecen a la esfera que tiene AB por diámetro, pues la distancia de un punto M, perteneciente a la circunferencia de uno de estos círculos, al punto medio O de AB es igual a OA.

Aplicaciones. 1° *El lugar geométrico de los puntos* M *desde los que un segmento* AB *se ve bajo un ángulo recto, es la superficie esférica* (S) *de diámetro* AB (fig. 295).

En efecto, si el ángulo $\widehat{AMB}$ es recto, OM = OA y el punto M pertenece a la superficie esférica de diámetro AB; si el punto M pertenece a la superficie esférica de diámetro AB, OM = OA y el ángulo $\widehat{AMB}$ es recto.

2° *El lugar geométrico de los puntos* M *tales que la razón* $\frac{MB}{MC}$ *de sus distancias a dos puntos fijos* B *y* C *sea constante y diferente de* 1, *es una superficie esférica cuyo centro está en la recta* BC (fig. 296).

Sean D y D′ los dos puntos que dividen el segmento BC en la razón dada. Se ha demostrado en geometría plana (v. p. 95) que el lugar de los puntos M buscado es también el lugar de los puntos M desde los que se ve el segmento DD′ bajo un ángulo recto; por tanto, en el espacio este lugar es la superficie esférica de diámetro DD′.

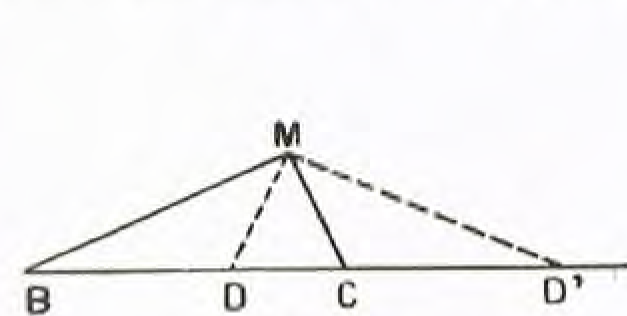


Fig. 296

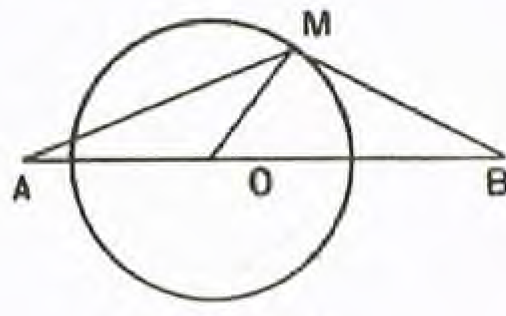


Fig. 297

3° *El lugar geométrico de los puntos* M *tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos* A *y* B *sea una constante* k *es, en general, una superficie esférica cuyo centro* O *es el punto medio de* AB (fig. 297).

En el triángulo MAB se tiene

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2 + 2\overline{OA}^2.$$

De esta ecuación se obtiene $\overline{OM}^2 = \dfrac{k - 2\overline{OA}^2}{2}$. Si el segundo miembro de esta igualdad es positivo determina OM que será constante y O un punto fijo. Luego el lugar de los puntos M es una superficie esférica de centro O.

Plano tangente a la esfera. — Teorema. *Las tangentes* AT *a las curvas trazadas en la superficie de una esfera* (S), *que pasan por un punto* A *de ella y que admiten una tangente en dicho punto, están en el plano perpendicular al radio* OA *en el punto* A.

Luego este plano es por definición el **plano tangente a la esfera en el punto A.**

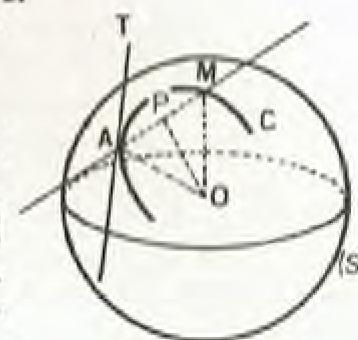


Fig. 298

Sea M un punto de una curva (C) que pasa (*fig.* 298) por el punto A y está trazada en la superficie esférica (S): por hipótesis la recta MA tiende hacia una posición límite AT. Estando el punto M en la superficie de la esfera, OM = OA y el triángulo AOM es isósceles; sea P el punto medio de AM: la mediana OP de dicho triángulo es también su altura y por consiguiente es perpendicular a AM. Cuando M tiende a confundirse con A, el punto medio P de AM tiende también a confundirse con A, la recta OP tiende hacia OA y puesto que, en estas condiciones, AM tiende hacia AT, el ángulo recto formado por OP y AM tenderá hacia el que forman OA y AT, permaneciendo recto el ángulo. Dicho de otro modo, AT es perpendicular a OA y por consiguiente está contenida en el plano perpendicular a la recta OA en el punto A.

Cuando se hace variar la curva (C) que pasa por A, la tangente AT, que permanece siempre perpendicular a OA, describe el plano tangente a la esfera en el punto A.

Posiciones relativas de un plano (P) y una esfera (S) de radio R. — Sea H (*fig.* 299) el pie de la perpendicular trazada desde el centro O de la esfera (S) al plano (P) y sea M otro punto de este plano. En el plano OHM las rectas OH y OM son respectivamente la perpendicular y una oblicua a la recta HM; por tanto, se tiene

$$OM > OH.$$

Consideraremos tres casos.

1° OH > R. De las desigualdades OM > OH y OH > R se deduce que OM > R. Por consiguiente:

Cuando la distancia del centro de la esfera al plano (P) *es mayor que el radio, todos los puntos del plano son exteriores a la esfera.*

2° OH = R. De la desigualdad OM > OH se deduce también que OM > R. Por consiguiente:

Cuando la distancia del centro O *de la esfera al plano* (P) *es igual al radio, el plano es tangente a la esfera en el punto* H, *que es la proyección ortogonal del centro de la esfera sobre el plano. Todos los puntos del plano* (P) *excepto el punto de contacto* H *son exteriores a la esfera.*

3° OH < R. Tracemos en el plano (P) una recta AB (*fig.* 299) que pase por el punto H. Esta recta determina con el punto O, que supondremos exterior al plano (P), un plano diametral que corta la superficie esférica según una circunferencia de círculo máximo (C), y como OH es la distancia del centro O de este círculo a la recta AB, de la desigualdad OH < R se deduce que la recta AB cortará la circunferencia (C) y en consecuencia, la superficie esférica (S) en dos puntos M y M′. Como la recta AB ha sido elegida arbitrariamente en el plano (P), habrá infinitos puntos de intersección tales como M y M′. Veamos cuál es su lugar geométrico. Siendo rectángulo en H el triángulo MOH, se tiene que $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HM}^2$; si llamamos d la distancia OH del centro O al plano (P), dicha igualdad implica esta otra: $\overline{HM}^2 = R^2 - d^2$. Como $d < R$, resulta que $R^2 - d^2$ es positivo y existe un número $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$; la medida de HM es igual a este número. Por tanto, los puntos como el M están en una circunferencia de centro H y radio ρ. Todos los puntos de esta circunferencia son evidentemente comunes al plano (P) y a la esfera (S). Por consiguiente:

Cuando la distancia d *del centro de la esfera* (S) *al plano* (P) *es menor que el radio* R *de la misma, el plano corta la esfera según un círculo* (Γ). *El centro de* (Γ) *es la proyección ortogonal* H *del centro de la esfera sobre el plano* (P), *y su radio es* $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Posiciones relativas de una recta (D) y una esfera (S). — Sea H el pie de la perpendicular trazada desde el centro O de la esfera (S) a la recta (D); sea M otro punto de esta recta. Siendo OM una oblicua y OH la perpendicular, se tiene OM > OH.

Por tanto, si OH, distancia del centro O de la esfera a la recta, es mayor que el radio R de la esfera, de OH > R se deduce que OM > R y todos los puntos de la recta serán exteriores a la esfera.

Si OH = R, el punto H está en la superficie de la esfera, y la recta (D), que es perpendicular a OH, estará en el plano tangente a la esfera en el punto H; para todos los puntos M distintos de H se tiene que OM > R. Todos los puntos de la recta excepto el punto H son exteriores a la esfera.

Si OH es menor que R, tomemos como plano de la figura (*fig.* 300) el plano diametral que pasa por la recta (D). Este plano corta la superficie de la esfera según una circunferencia de círculo máximo C, y de la desigualdad OH < R se deduce que la recta (D) cortará (C) y por tanto (S) en dos puntos M y M'.

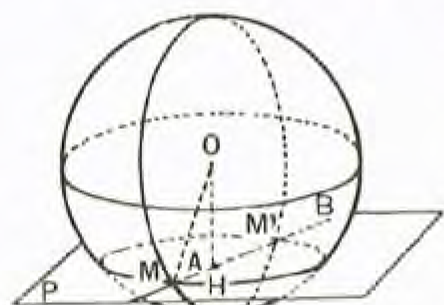


Fig. 299

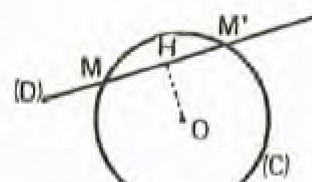


Fig. 300

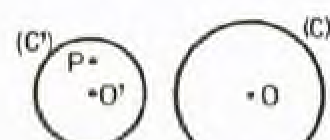


Fig. 301

Posiciones relativas de dos esferas (S) y (S'). — Supongamos que la esfera (S) tiene por centro O y por radio R, y que la esfera (S') tiene por centro O' y por radio R'. Supongamos también que R > R'. Sea P un punto por el que pasan uno o varios planos diametrales (habrá varios si P está en la recta OO') comunes a las dos esferas; este plano diametral, o uno de ellos en el caso de haber varios, corta la esfera (S) según un círculo máximo (C) de centro O y radio R, y la esfera (S') según un círculo máximo (C') de centro O' y radio R'. El punto P está situado respecto a las esferas (S) y (S') tal como lo está respecto a los círculos (C) y (C'). Luego por el estudio hecho en geometría plana (v. p. 84) podemos enunciar las siguientes conclusiones:

1° Sea OO' > R + R' (*fig.* 301). Todo punto P interior a una de las esferas es exterior a la otra. Las esferas (S) y (S') son **exteriores** cada una respecto a la otra.

2° Sea OO' = R + R' (*fig.* 302). Las esferas tienen un solo punto común A, situado en el segmento OO': los planos tangentes a las dos esferas en dicho punto son todos perpendiculares a OO' y por tanto se confunden. Se dice que las esferas son **tangentes exteriormente** en A y este punto es llamado punto de contacto de las dos esferas. Todo punto interior a una de las esferas es exterior a la otra.

Fig. 302

3° Sea OO' < R — R' (*fig.* 303). Todo punto interior a la esfera (S') es también interior a la esfera (S). Se dice que la esfera (S') es **interior** a la otra.

4° Sea OO' = R — R' (*fig.* 302). Las dos esferas tienen un punto común A, y los puntos A, O, O' están en línea recta. Por tanto, los planos tangentes a las dos esferas en el punto A se confunden. Se dice que las dos esferas son **tangentes interiormente** en A, que se llama punto de contacto de las dos esferas. Todo punto interior a (S') es también interior a (S).

Fig. 303 *Fig.* 304

5° Sea R — R' < OO' < R + R'. En todo plano diametral (*fig.* 304) hay dos puntos M y M' que son comunes a las circunferencias de los círculos máximos (C) y (C'), luego también serán comunes a las dos esferas (S) y (S'). Tracemos por M la perpendicular MH a la línea de los centros OO' y sea I el punto medio de OO'. El punto H queda determinado por la igualdad

$$\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = 2\overline{IH} \cdot \overline{OO'},$$

establecida en geometría plana (v. p. 100). De esta igualdad se obtiene $\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$, lo que prueba que H es un punto fijo de la recta OO'.

Sea (π) el plano perpendicular a OO' en el punto H; estando por hipótesis el punto M sobre la esfera (S), estará situado en la circunferencia (σ), que corresponde a la intersección de la esfera (S) con el plano (π).

Recíprocamente, sea M un punto común a la superficie de (S) y al plano (π). Puesto que dicho punto está sobre la esfera (S), se tiene OM = R; como también pertenece al plano (π), su proyección ortogonal sobre OO' es H, y se tiene

$$\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}.$$

Como por hipótesis $2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2$, de ambas igualdades se deduce $\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = R^2 - R'^2$, y en consecuencia O'M = R'. Todo punto de (σ) está, por tanto, sobre la esfera (S').

Por consiguiente, se llega a la conclusión de que en la hipótesis

$$R - R' < OO' < R + R'$$

la intersección de las esferas (S) y (S') es un círculo (σ) cuyo plano es perpendicular a la línea de los centros OO'. En este caso se dice que las esferas son **secantes.** El lector comprobará que el plano (π), definido por la igualdad $R^2 - R'^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}$, es secante a las dos esferas.

Se dice que dos esferas son **concéntricas** cuando tienen el mismo centro y sus radios son diferentes.

Dos esferas que tienen el mismo centro y sus radios son iguales se confunden.

Esfera determinada por cuatro puntos. — TEOREMA. *Por cuatro puntos* A, B, C *y* D *que determinen un tetraedro, se puede hacer pasar una superficie esférica y sólo una.*

La esfera correspondiente es llamada **esfera circunscrita** *al tetraedro* ABCD.

Los tres puntos A, B, C, no están en línea recta; por lo tanto existe una circunferencia (σ) y sólo una (*fig.* 305) que pase por estos tres puntos. Sea ($\triangle$) el eje de dicha circunferencia. El plano perpendicular a CD en su punto medio corta la recta ($\triangle$) en un punto O, pues si fuese paralelo a ella la recta CD estaría en el plano ABC y la figura ABCD no sería un tetraedro.

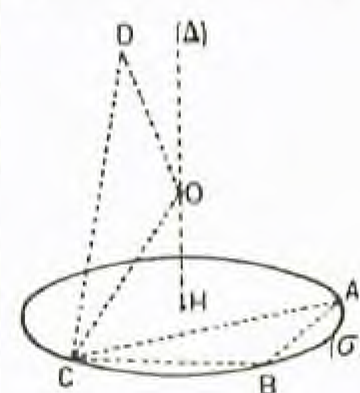


Fig. 305

Existe una esfera cuya superficie pasa por A, B, C y D; es la esfera (S) de centro O y radio OC. En efecto, el plano ABC corta la superficie esférica según una circunferencia que pasa por C y que tiene por centro el pie H de la recta ($\triangle$), es decir, la circunferencia (σ). Por consiguiente, la superficie de la esfera (S) pasa por A y B, y pasará también por D, pues perteneciendo O al plano perpendicular a CD en su punto medio, OC = OD.

No existe otra esfera (S') de centro O' cuya superficie pase por A, B, C y D, pues si existiese una distinta de (S), las superficies de (S) y (S') tendrían común una circunfernecia (σ) y sólo una. Ahora bien, las superficies esféricas de (S) y (S') deben pasar por los puntos A, B, C, D, y como el punto D no pertenece a la circunferencia (σ) que pasa por A, B y C, resulta que las esferas (S) y (S') no son distintas.

Esfera tangente a un plano en un punto dado y que pase por otro punto también dado. — TEOREMA. *Existe una esfera y sólo una que sea tangente a un plano* (P) *en un punto dado* A *y cuya superficie esférica pase por otro punto dado* B *exterior a dicho plano.*

La perpendicular ($\triangle$) al plano (P) en A (*fig.* 306) corta en O el plano que sea perpendicular a la recta AB en su punto medio, pues si ($\triangle$) fuese paralela a dicho plano, la recta AB estaría en el plano (P), lo que es contrario a la hipótesis.

Existe una esfera que responde a las condiciones del enunciado: es la esfera de centro O y radio OA, la cual es evidentemente tangente al plano (P) en el punto A y cuya superficie pasa por B, pues OB = OA (propiedad del plano perpendicular a una recta en su punto medio).

No hay otra esfera (S') que pase por A y B y que sea tangente al plano (P) en el punto A, pues si hubiese una distinta de (S) sería tangente exterior o interiormente a la esfera (S) y no la cortaría en ningún otro punto distinto de A.

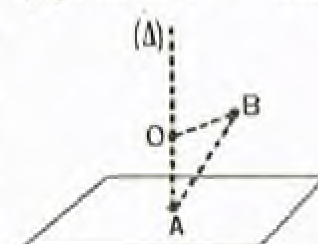


Fig. 306.

Potencia de un punto respecto a una esfera. — TEOREMA. *Si dos secantes* AMM' *y* APP' *cortan una superficie esférica* (S) *en los puntos* M, M', P *y* P' (fig. 307), *se tiene:*

$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$.

Si una recta AT *es tangente en el punto* T *a una esfera* (S) *y una secante* AMM' *corta la superficie esférica en los puntos* M *y* M', *se tendrá:*

$$\overline{AT}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}.$$

1° Las dos secantes AMM' y APP' son rectas concurrentes que determinan un plano: este plano corta la superficie esférica según una circunferencia que pasa por M, M', P y P'; por consiguiente, $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AP} \cdot \overline{AP'}$ (v. p. 99).

2° La secante AMM' y la tangente AT determinan un plano; este plano corta la superficie esférica según una circunferencia (σ) que pasa por T, M y M'. Todos los puntos de la tangente, con excepción del punto T, son exteriores a la esfera y por tanto exteriores a la circunferencia (σ); luego la recta AT es tangente a dicha circunferencia y se tiene que $\overline{AT}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ (v. p. 99).

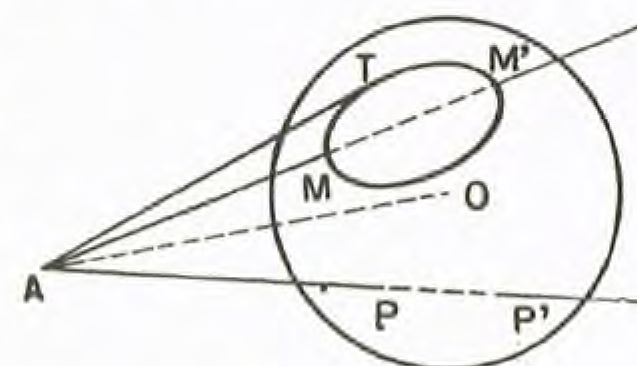


Fig. 307

Se llama **potencia** *de un punto* A *respecto a una esfera el producto constante* $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$ *de los segmentos que tienen su origen en* A *y sus extremos son los puntos* M *y* M' *en que una secante, arbitrariamente elegida, que pase por el punto* A *corta la superficie esférica.*

Si *d* es la distancia OA del punto A al centro O de la esfera y R el radio de ésta, la potencia *p* del punto A respecto a la esfera también se expresa por la fórmula

$$p = d^2 - R^2.$$

La potencia *p* es igual al cuadrado de la longitud de una tangente AT trazada desde A a la esfera, cuando por este punto se puede trazar una tangente a la esfera.

Plano radical de dos esferas. — *El lugar geométrico de los puntos* M *del espacio que tienen la misma potencia respecto a dos esferas* (S) *y* (S') *de centros* O *y* O', *que no sean concéntricas, es un*

plano perpendicular a la línea de los centros OO′ *que se llama plano radical de las dos esferas* (fig. 308).

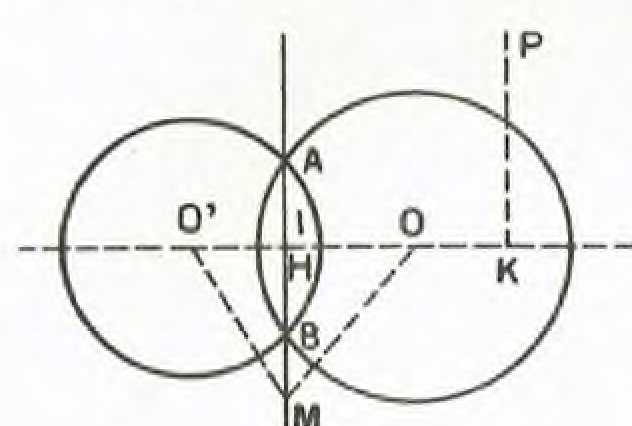


Fig. 308

La demostración repite palabra por palabra la que se ha estudiados para dos circunferencias (véase pág. 99); siendo I el punto medio de OO′, el pie H de la altura MH del triángulo MOO′ queda determinado por la igualdad

$$2\overline{OO'} \cdot \overline{IH} = R^2 - R'^2,$$

que expresa la condición necesaria y suficiente para que el punto M tenga la misma potencia respecto a las dos esferas. Esta igualdad prueba que H es un punto fijo y determina su posición. Por consiguiente, el lugar del punto M es el plano perpendicular a la recta OO′ en el punto H.

Si P es un punto del espacio que no pertenece al plano radical de las dos esferas, la potencia p de este punto respecto a la esfera (S) es diferente de su potencia p' respecto a la esfera (S′). Si K es la proyección ortogonal de P sobre OO′, se tiene, repitiendo el cálculo que se hizo para el caso de dos circunferencias (v. p. 99):

$$p - p' = 2\overline{OO'} \cdot \overline{HK}.$$

Esta fórmula generaliza para dos esferas la importante propiedad de la diferencia de las potencias.

Construcción del plano radical. — Si las esferas (S) y (S′) son secantes, la potencia de todos los puntos comunes a estas esferas respecto a cada una de ellas es igual a cero y los puntos están situados en el plano radical. Expresado de otra manera: el plano radical es el plano del círculo (σ) de intersección de las dos esferas.

Si las esferas (S) y (S′) son tangentes en A, el plano radical es el plano tangente común en A, porque pasa por A y es perpendicular a la línea de los centros.

Si las esferas (S) y (S′) no tienen ningún punto común, se las corta por un plano cualquiera (un plano diametral común, por ejemplo) que determine en las superficies esféricas de (S) y (S′) dos circunferencias (C) y (C′). El plano radical que consideramos es el plano perpendicular a la línea de los centros y que pasa por el eje radical de las circunferencias (C) y (C′).

Esferas que pasan por dos o tres puntos dados y son tangentes a un plano o a una recta. — *Hay infinidad de esferas* (S) *tangentes a un plano dado* (P) *y que pasan por dos puntos dados* A y B *situados a un mismo lado del plano* (P).

Supondremos que la recta AB y el plano (P) son secantes; sea O el punto común (*fig.* 309).

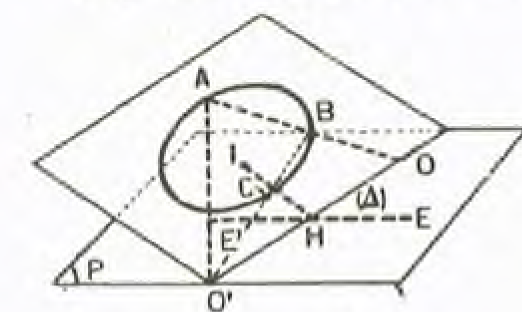


Fig. 309

Si hay una esfera (S) que pasa por A y B y es tangente al plano (P) en un punto M, las rectas OAB y OM serán respectivamente una secante y una tangente a dicha esfera, y se tendrá: $\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$. Esta igualdad prueba que OM debe tener una longitud determinada $R = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$ y, por consiguiente, M debe ser un punto de la circunferencia (C), perteneciente al plano (P) y que tiene por radio R y por centro el punto O.

Sea M un punto cualquiera de esta circunferencia. Hay una esfera (S) y sólo una que pase por A y sea tangente en M al plano (P); supongamos que dicha esfera corta en B′ la recta OAB: en ese caso debe verificarse $\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB'}$. Ahora bien, por hipótesis: $\overline{OM}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$. De estas dos igualdades se deduce que $\overline{OB'} = \overline{OB}$; luego la esfera (S) pasa por el punto B.

Hay pues una infinidad de esferas que pasan por A y B y son tangentes al plano (P). *El lugar de los puntos de contacto de estas esferas con el plano* (P) *es una circunferencia de centro* O *y radio* $\sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$.

Hay dos esferas y solamente dos que sean tangentes a un plano dado (P) *y que pasen por tres puntos* A, B *y* C *que no están situados en línea recta, cuando la circunferencia* (σ) *circunscrita al triángulo* ABC *no corta el plano* (P).

Figura 310 (sin imagen detectada).

Fig. 310

Supondremos que el plano ABC corta el plano (P) según una recta ($\triangle$) [*figura* 310]. Sea I uno de los puntos de Poncelet de la circunferencia (σ) y de la recta ($\triangle$); sea H la proyección ortogonal del punto I sobre la recta ($\triangle$). Tomemos en el plano (P) sobre la perpendicular a ($\triangle$) en el punto H, dos longitudes iguales: HE = HE′ = HI.

Hay infinidad de esferas (S) que pasan por A y B y son tangentes al plano (P). Supongamos que la recta AB corta en O al plano (P): los puntos de contacto de estas esferas (S) están en una circunferencia de centro O y radio $\sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$, pero la potencia de O respecto a la circunferencia (σ), expresada por $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$, es igual a $\overline{OI}^2$. Los triángulos rectángulos OHE y OHI son iguales por construcción: OI = OE y el lugar de los puntos de contacto de las esferas (S) con el plano (P) es la circunferencia de centro O y radio OE.

Hay infinidad de esferas (S) que pasan por B y C y son tangentes al plano (P): si la recta BC corta dicho plano en O′, los puntos de contacto de estas esferas con el plano (P) están en una circunferencia de centro O′ y radio O′E.

Por consiguiente, existen dos esferas que siendo tangentes al plano (P) pasan a la vez por A y B, y por B y C. Son precisamente las que tienen como puntos de contacto con el plano (P) los puntos E y E′ comunes a las dos circunferencias que hemos hallado como lugares geométricos.

En general hay dos esferas y solamente dos que pasen por tres puntos dados A, B, C *y que sean tangentes a una recta dada* (D).

Dejamos al lector que haga la demostración de este enunciado. Se buscará el punto de contacto M. Para esto, señalar el punto O en que el plano ABC corta la recta (D), trazar la circunferencia (σ) que pasa por A, B, C y observar que $\overline{OM}^2$ es la potencia de O respecto a dicha circunferencia.

Planos radicales de tres esferas. — Sean tres esferas (S_1), (S_2) y (S_3) que tienen por centros O_1, O_2 y O_3. Distinguiremos tres casos:

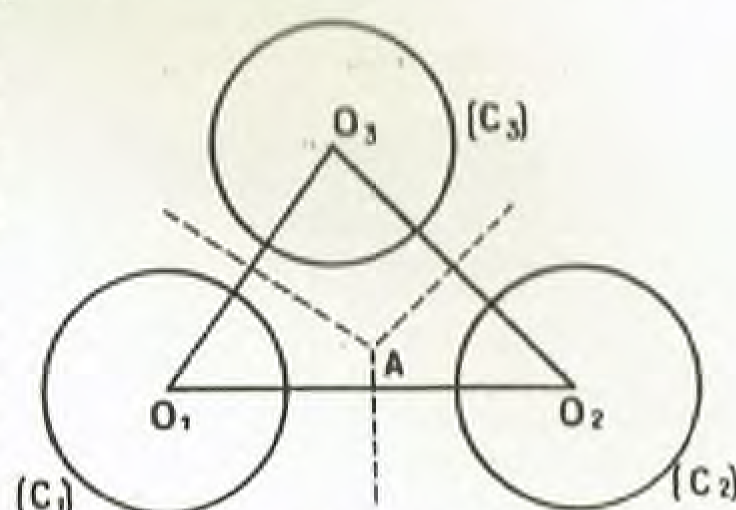


Fig. 311

1º Supongamos que O_1, O_2 y O_3 son los vértices de un triángulo. Estos puntos definen un plano (P). Dicho plano corta las esferas según tres círculos máximos (C_1), (C_2) y (C_3) cuyos centros son los vértices del triángulo.

Hay un punto A que tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias: es el punto común a los tres ejes radicales de las circunferencias tomadas dos a dos (*fig.* 311). Este punto tiene la misma potencia respecto a las tres esferas. Los tres planos radicales de las esferas tomados dos a dos pasan por el punto A y son perpendiculares a las rectas O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 del plano (P): luego son perpendiculares a dicho plano. Por consiguiente, pasan por la recta AB que es perpendicular en A al plano de los centros (P). Esta recta es el lugar de los puntos del espacio que tienen la misma potencia respecto a las tres esferas y se llama **eje radical** de las tres esferas;

2º Supongamos que O_1, O_2 y O_3 son distintos, pero están situados en línea recta. Sea (P) un plano que pasa por la recta de los centros, y (C_1), (C_2) y (C_3) los círculos máximos situados en (P). Los ejes radicales de los tres círculos son en general distintos: los planos radicales, que son planos perpendiculares a la línea de los centros, al pasar por estos ejes radicales son planos paralelos y distintos;

3º Si las circunferencias (C_1), (C_2) y (C_3) del 2º caso forman parte de un mismo haz lineal, los ejes radicales de dichas circunferencias tomadas dos a dos se confunden. Por lo tanto, los planos radicales de las esferas (S_1), (S_2) y (S_3) tomados dos a dos se confunden. Estudiaremos someramente este último caso.

Haz lineal de esferas. — Se dice que una esfera (S) forma parte del haz lineal definido por dos esferas (S_1) y (S_2) cuando los planos radicales de las tres esferas (S_1), (S_2) y (S) tomadas dos a dos se confunden.

Se conoce que una esfera, cuyo centro describe una recta, forma parte de un haz lineal si cortando la esfera por un plano fijo (P) que pase por la línea de los centros, se obtiene como sección un círculo perteneciente a un haz lineal.

Siguiendo paso a paso las explicaciones dadas para los haces lineales de círculos (v. p. 100) se demuestra que hay tres especies de haces lineales de esferas:

1º Esferas que tienen comunes todos los puntos de una circunferencia fija (σ);

2º Esferas tangentes a un plano dado (P) en un punto A;

3º Esferas de diámetro PQ, siendo P y Q dos puntos conjugados armónicos respecto a otros dos puntos I, J, que se llaman puntos de Poncelet del haz (esto supone que los puntos P, Q, I, J, están en línea recta).

Centro radical de cuatro esferas. — Sean (S_1), (S_2), (S_3) y (S_4) cuatro esferas cuyos centros O_1, O_2, O_3 y O_4 son los vértices de un tetraedro. Tres de estas esferas tienen un eje radical ($\triangle$): el plano radical de (S_3) y (S_4) no es paralelo a ($\triangle$), pues si lo fuese, O_4 estaría en el plano $O_1O_2O_3$. Luego el plano radical citado corta ($\triangle$) en un punto A que tiene la misma potencia respecto a las cuatro esferas. El punto A es, por definición, el **centro radical** de estas cuatro esferas: es el punto común a los seis planos radicales de dichas esferas tomadas dos a dos y a los cuatro ejes radicales de las esferas tomadas de tres en tres.

Esferas ortogonales. — *Se dice que dos esferas* (S) *y* (S′) *son* **ortogonales** *cuando son secantes y, en un punto* M *común a estas dos esferas, los planos tangentes son rectangulares.*

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos esferas de centros* O *y* O′ *y de radios* R *y* R′ *sean ortogonales es que*

$$\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2.$$

La condición necesaria y suficiente para que dos esferas sean ortogonales es que tengan un punto común M y que OM y O′M sean

ortogonales, es decir, que los círculos máximos que pasan por M sean ortogonales y por consiguiente que $\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2$ (*fig.* 312).

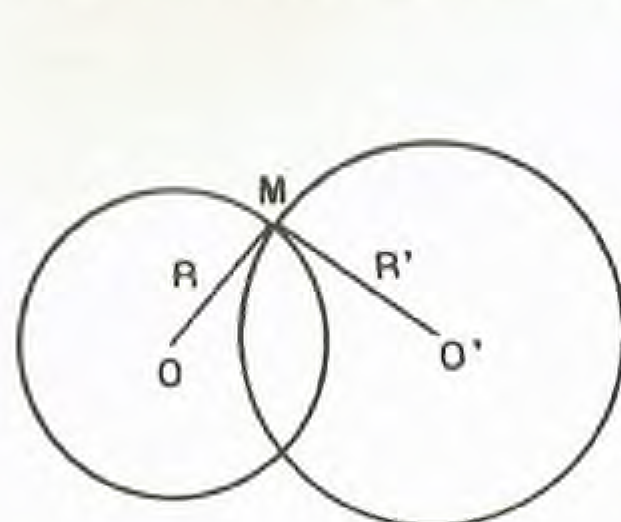


Fig. 312

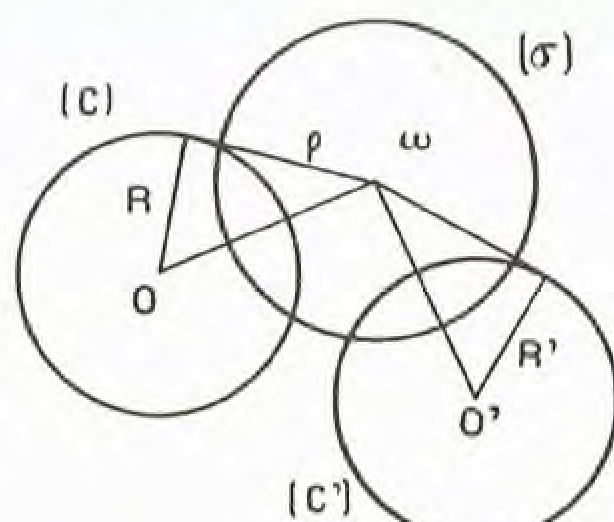


Fig. 313

De esta demostración resulta que si dos esferas son ortogonales, los planos tangentes son rectangulares en todos los puntos de la circunferencia (σ) de intersección.

La condición precedente equivale a una cualquiera de las dos siguientes:

La condición necesaria y suficiente para que dos esferas sean ortogonales es que un diámetro cualquiera de una de ellas sea cortado armónicamente por la otra.

O bien *que la potencia del centro de una de las esferas,* (S), *respecto a la otra sea igual al cuadrado del radio de la esfera* (S).

Esferas (Σ) ortogonales a otras dos (S) y (S') que no son concéntricas. — 1° El centro ω de una esfera (Σ) está en el plano radical de las esferas (S) y (S').

En efecto, la potencia de ω respecto a cada una de las dos esferas (S) y (S') es igual al cuadrado ρ^2 del radio de la esfera (Σ) [*figura* 313].

2° Cortemos las tres esferas por un plano que pase por los tres centros. Sean los círculos (C), (C') y (σ) las secciones producidas por el plano en las esferas (S), (S') y (Σ). La condición necesaria y suficiente para que la esfera (Σ) sea ortogonal a (S) y a (S') se expresa por las dos igualdades siguientes (utilizando las notaciones del teorema precedente):

$$\overline{O\omega}^2 = R^2 + \rho^2, \quad \overline{O'\omega}^2 = R'^2 + \rho^2.$$

Luego es también la condición necesaria y suficiente para que (σ) sea ortogonal a (C) y a (C').

La condición necesaria y suficiente para que una esfera (Σ) *sea ortogonal a dos esferas que no son secantes ni concéntricas es que aquélla pase por los puntos de Poncelet* I *y* J *de estas dos esferas.*

Plano polar de un punto respecto a una esfera. — Se dice que dos puntos A y M son conjugados armónicos respecto a una esfera (S), cuando la recta AM es cortada por la superficie esférica en dos puntos P y Q, conjugados armónicos respecto a los puntos A y M.

Dos puntos conjugados respecto a una esfera (S) también lo son con respecto a las circunferencias de las secciones producidas en la esfera (S) por planos que pasen por A y M. Recíprocamente, si A y M son conjugados respecto a la circunferencia de una de las secciones producidas por un plano en la esfera, son también conjugados respecto a la esfera (S).

Las condiciones necesarias y suficientes para que dos puntos A y M sean conjugados respecto a una esfera (S) son:

1° Que AM corte la esfera.

2° Que la esfera de diámetro AM sea ortogonal a la esfera (S).

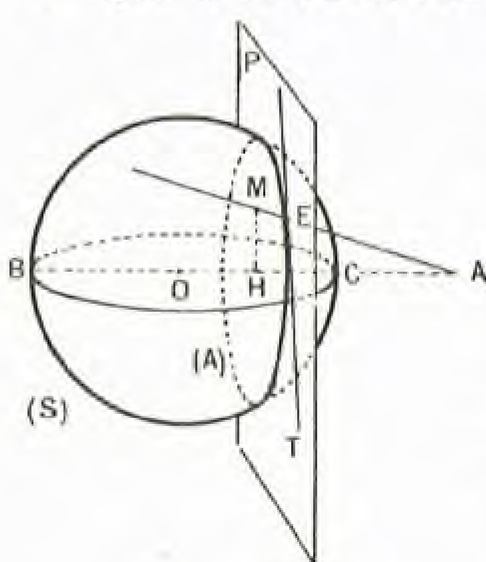


Fig. 314

Se conviene que la primera condición siempre ha de verificarse; por consiguiente, se llaman puntos conjugados A *y* M, *respecto a una esfera* (S), *todo par de puntos tal que la esfera de diámetro* AM *sea ortogonal a la esfera* (S).

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos* M *conjugados de un punto* A *respecto a una esfera* (S) *es un plano* (P), *excepto si el punto* A *está en el centro* O *de la esfera* (S). *Este plano se llama* **plano polar** *del punto A respecto a la esfera.*

Siendo distintos los puntos A y O, la recta OA queda determinada y corta (*fig.* 314) en B y C la superficie esférica (OB = OC = R). Sea H el conjugado armónico de A respecto de B y C definido por $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$.

Si el punto M es un punto del lugar, la esfera de diámetro AM es ortogonal a la esfera (S): por consiguiente, la superficie esférica de la primera esfera corta el diámetro BC de la segunda (S) en dos puntos conjugados armónicos respecto a B y C. Siendo A uno de ellos, el otro es H: el ángulo $\widehat{MHA}$ inscrito en una semiesfera es un ángulo recto y el punto M pertenece al plano (P) perpendicular a la recta OA en el punto H.

Si el punto M pertenece al plano (P), el ángulo $\widehat{MHA}$ es recto y la superficie esférica de diámetro AM cortará el diámetro BC en los puntos A y H; como estos puntos son conjugados armónicos de B y C, dicha esfera es ortogonal a la esfera (S).

Luego el lugar de los puntos M es el plano (P) perpendicular al diámetro OA en el punto H, definido por $\overline{OH} \cdot \overline{OA} = R^2$.

Polo de un plano respecto a una esfera. — Teorema. *Existe un punto* A *y sólo uno que tenga por plano polar, respecto a una esfera dada, un plano* (P) *dado, que no pase por el centro* O *de dicha esfera. Este punto es llamado* **polo** *del plano* (P).

El polo es evidentemente el punto A de la perpendicular OH trazada desde O al plano polar y definido por

$$\overline{OH} \cdot \overline{OA} = R^2.$$

La condición necesaria y sufiente para que un plano (P) *sea tangente a una esfera* (S) *es que el polo* A *de este plano respecto a la esfera, esté en el plano polar* (P).

De la condición OH = R se deduce que OA = R. Además el punto de contacto es A.

La condición necesaria y suficiente para que un plano (P) *corte una esfera según un círculo* (A) *es que el polo del plano* (P) *sea exterior a la esfera* (fig. 314).

De la condición OH $<$ R se deduce que OA $>$ R. Con la notación círculo (A) se designa la sección producida en la esfera por el plano polar del punto A exterior a la esfera.

Teorema. *Si el plano polar de* A *pasa por* A', *el plano polar de* A' *pasa también por* A. [Se trata de los planos polares respecto a la misma esfera (S)].

En efecto, si el plano polar de A pasa por A', la esfera de diámetro AA' es ortogonal a la esfera (S) y por consiguiente el plano polar de A' pasará por A.

Cono circunscrito a una esfera (S). — *Se llama* **cono circunscrito a una esfera (S)** *el cono que tiene por vértice un punto* A *exterior a la esfera y por base el círculo* (A), *intersección de la esfera con el plano polar del punto* A *respecto a esta esfera.*

Propiedades del cono circunscrito. — *Las generatrices* AE *del cono circunscrito son tangentes a la esfera en los puntos* E, *en los que aquéllas cortan la base* (A) *de este cono.*

El punto E (*fig.* 314) pertenece al plano polar de A, luego el plano polar de E pasará por A; ahora bien, por hipótesis, el punto E está sobre la esfera (S), luego el plano polar de E es el plano tangente a dicha esfera en el punto E y por consiguiente la recta AE, contenida en el plano tangente a la esfera (S) en el punto E, es tangente a la esfera en dicho punto.

Toda tangente AE *a la esfera es una generatriz del cono circunscrito que tiene por vértice el punto* A.

El plano polar de E, punto de contacto de la esfera (S) con la recta AE, es el plano tangente a la esfera (S) en el punto E; este plano contiene la tangente AE a la esfera y por lo tanto pasa por A; por consiguiente, el plano polar de A pasa por E, y el punto E pertenece a la circunferencia (A). En consecuencia, la recta AE es una generatriz del cono circunscrito.

Los planos tangentes al cono circunscrito son también tangentes a la esfera.

El plano tangente al cono circunscrito a lo largo de AE contiene la generatriz AE y la tangente ET a la base (A) del cono circunscrito. Éstas son dos perpendiculares (v. p. 126), por tanto distintas, y ambas tangentes a la esfera; la primera AE, según las "propiedades del cono circunscrito"; la segunda ET, según la definición de plano tangente a la esfera; ambas determinan, pues, el plano tangente a la esfera en el punto E. Por consiguiente, el plano tangente al cono circunscrito es también el plano tangente a la esfera en el punto E.

Todo plano que pasando por un punto A *es tangente a una esfera* (S) *en un punto* E *de la misma, es también tangente al cono de vértice* A *que sea circunscrito a la esfera.*

Por hipótesis el plano tangente a la esfera en E, es decir, el plano polar de E, pasa por A; luego el plano polar de A pasa por E y el punto E pertenece a la circunferencia (A). El plano tangente a la esfera (S) en el punto E se confunde con el plano tangente al cono circunscrito a lo largo de AE.

Rectas conjugadas respecto a una esfera. — Teorema. *Los planos polares de los puntos* M *de una recta fija* (D), *respecto a una esfera* (S), *pasan por una recta fija* (Δ), *excepto si la recta* (D) *es un diámetro de la esfera* (S).

Se dice que (Δ) es **conjugada** de la recta (D) respecto a la esfera (S).

Tomemos como plano de la figura 315 el que pasa por la recta (D) y el centro O de la esfera. Éste plano corta la esfera (S) según un círculo máximo (C). El plano polar del punto M es perpendicular al plano de la figura, puesto que es perpendicular a la recta OM; estos planos se cortan según una recta AB, y siendo todos los puntos de dicha recta conjugados de M respecto a la esfera también serán conjugados de M respecto a la circunferencia (C). Luego la recta AB es la polar del punto M respecto a la circunferencia (C) y, por lo tanto, pasa por el polo A de la recta (D) respecto a dicha circunferencia. Por consiguiente, los planos polares de M pasan por la recta (Δ), que es perpendicular al plano de la figura en el punto A. Esta recta (Δ), que pasa por un punto fijo A y es perpendicular a un plano fijo, será también una recta fija.

Construcción de la recta conjugada (Δ). — Se traza desde O la perpendicular OH sobre la recta (D) [*fig.* 315], se toma sobre OH el punto A definido por $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$. La recta conjugada ($\Delta$) es

la perpendicular en A al plano determinado por el punto O y la recta (D).

De esta construcción resulta que la recta (D) es la conjugada de (△) respecto a la esfera; por esto se dice que (D) y (△) son **conjugadas respecto a la esfera** sin indicar cuál es la conjugada de la otra.

Se conoce que dos rectas (D) y (△) son conjugadas respecto a una esfera cuando son rectangulares, su perpendicular común AH pasa por el centro de la esfera y se verifica que $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$.

Propiedades de las rectas conjugadas (D) y (△). — *El plano polar de un punto de una de ellas pasa por la otra,* por definición. *El lugar de los polos de los planos que pasan por una de las rectas es la otra recta considerada.*

Si una recta (D) *no corta la esfera, su conjugada* (△) *la corta en dos puntos* P *y* Q (fig. 316).

En efecto, siendo OA y OH las distancias del centro O a las rectas (△) y (D), si OA < R, como $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ resulta que OH > R. Luego una de estas dos rectas y sólo una corta la esfera.

Si una de las rectas (△) es tangente a la esfera en el punto A, la recta conjugada (D) será también tangente a la esfera en el mismo punto A.

Si OA = R se deduce que OH = R.

La condición necesaria y suficiente para que una recta (D) *corte su conjugada* (△) *en un punto* A *es que el plano de las rectas* (D) *y* (△) *sea tangente a la esfera en el punto* A.

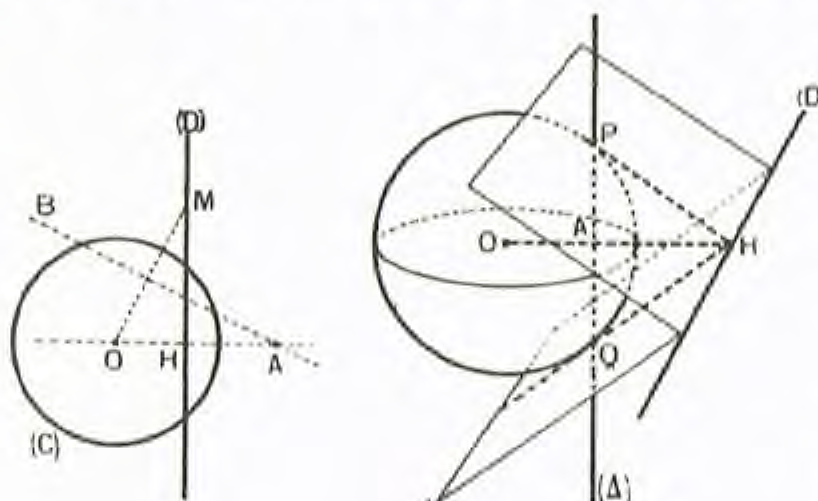


Fig. 315

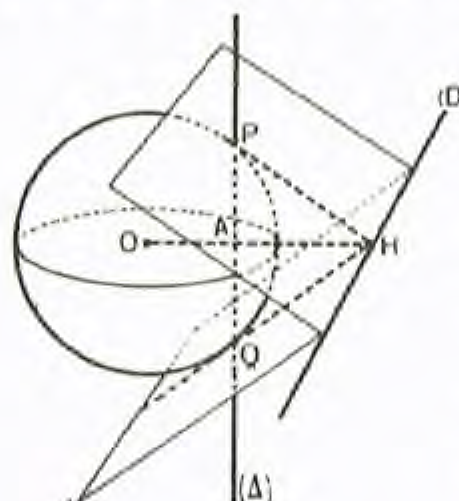


Fig. 316

Si una recta (D) *no corta la esfera, se pueden trazar por esta recta dos planos tangentes a la esfera en dos puntos* P *y* Q.

En efecto, la recta conjugada (△) [*figura* 316] corta la esfera en los puntos P y Q; el plano polar de P, punto de la esfera, es el plano tangente a la esfera en P: como P pertenece a (△), el plano citado pasa por la recta (D). Igualmente el plano tangente a la esfera en el punto Q, que es el plano polar de un punto Q de (△) respecto a la esfera, pasa por la recta (D).

Por consiguiente, hay dos planos tangentes a la esfera y que pasen por la recta (D); los puntos de contacto de estos planos son P y Q: la recta PQ que une estos puntos de contacto es, por tanto, la conjugada de la recta (D) respecto a la esfera.

Circunferencias trazadas sobre una misma esfera. — *La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias* (A) *y* (B) *trazadas sobre una esfera sean:*

1º *Tangentes, es que la recta* AB *sea tangente a la esfera;*

2º *Ortogonales, es que los puntos* A *y* B *sean conjugados respecto a la esfera y que la recta* AB *no corte la esfera.*

Utilizamos la notación (A) para designar la circunferencia trazada sobre una esfera (S) y que sea la intersección de dicha esfera con el plano polar de A respecto a la esfera (S). Observemos que si M es un punto de la circunferencia (A), la tangente MT a esta circunferencia y la generatriz MA del cono circunscrito de vértice A son (v. p. 130) dos rectas perpendiculares que pertenecen al plano tangente en M a la esfera (S) [v. p. 126].

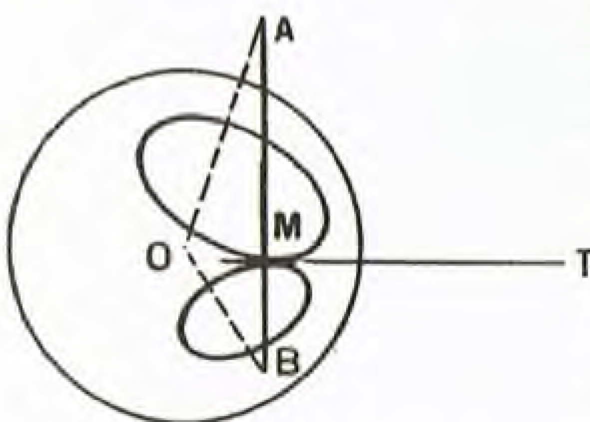


Fig. 317

1º Por hipótesis (*fig.* 317), las circunferencias (A) y (B) tienen un punto común y la misma tangente MT en dicho punto. Luego las rectas AM y MB son dos rectas que pertenecen al plano tangente en M a la esfera y ambas son perpendiculares a la recta MT. Por tanto, la recta AB también es tangente a la esfera (S) en el punto M.

Recíprocamente, si la recta AB es tangente en M a la esfera (S), las circunferencias (A) y (B) pasan por M y son tangentes a la única perpendicular MT trazada por M a las rectas comunes AM y BM. Luego estas circunferencias son tangentes en M;

2º Por hipótesis (*fig.* 318), las circunferencias (A) y (B) son ortogonales. Por lo tanto, tienen un punto común M y en este punto las tangentes MT y MT′ a estas circunferencias son ortogonales. Estando el punto M en los planos polares de los puntos A y B, el plano polar de M, plano tangente en M a la esfera, pasará por A y B: luego la recta AB no cortará la esfera (S). Además, en este plano tangente la recta MA es perpendicular a MT: luego se confunde con la recta MT′ que es tangente a la circunferencia (B) en M. Por tanto, el punto A pertenece al plano de esta circunferencia, que es el plano polar del punto B; por consiguiente, los puntos A y B son conjugados respecto a la esfera (S).

Recíprocamente, supongamos que la recta AB sea exterior a la esfera y que A y B son conjugados respecto a ella. La conjugada de la recta AB, que es exterior a la esfera (S) por hipótesis, corta dicha esfera en dos puntos M y M′. Estos puntos son comunes a las circunferencias (A) y (B). La tangente MT a la circunferencia (A) en M está situada en el plano de dicha circunferencia, plano polar de A que por hipótesis pasa por B: la tangente MT estará también situada en el plano tangente en M a la esfera (S), plano que también pasa por B. Luego es la recta MB. De un modo semejante se demostraría que la tangente MT′ a la circunferencia (B) en M es la recta MA. Para demostrar que las circunferencias (A) y (B) son ortogonales, basta demostrar que MA y MB son ortogonales: estas rectas lo son porque son dos rectas conjugadas, puesto que el plano polar de A y el de M se cortan según la recta MB, como acabamos de ver. Por consiguiente, las circunferencias (A) y (B) son también ortogonales.

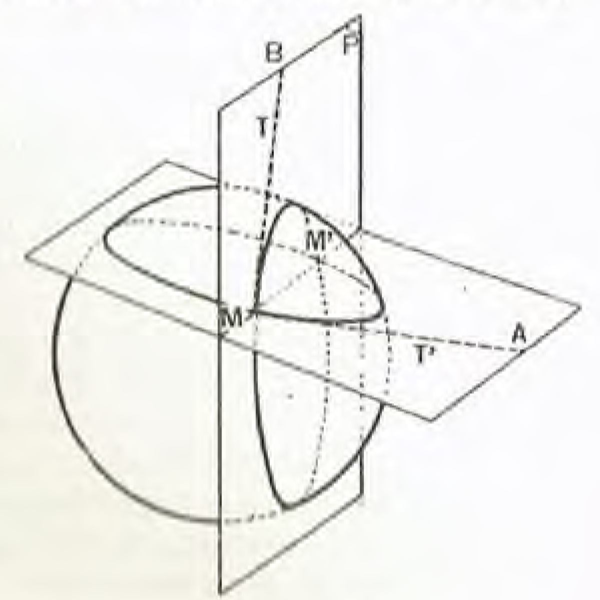


Fig. 318

Planos conjugados respecto a una esfera. — Se dice que dos planos (P) y (Q) son conjugados respecto a una esfera (S) cuando el polo A de (P) se halla en (Q). En este caso el polo B de (Q) está en el plano (P).

Si la recta de intersección de los planos (P) y (Q) es exterior a la esfera (S), los dos planos tangentes trazados por dicha recta a la esfera son conjugados armónicos respecto a los dos planos (P) y (Q).

Los planos de los dos círculos ortogonales (A) y (B) son planos conjugados respecto a la esfera (*fig.* 318).

Plano diametral conjugado de una dirección dada. — Teorema. *Los puntos medios de las cuerdas* AB *de una esfera* (S) *paralelas a una dirección dada* (△) *están en un plano* (P) *que pasa por el centro* O *de la esfera y es perpendicular a la dirección considerada.*

El plano perpendicular a la cuerda AB en su punto medio pasa por O y es perpendicular a la dirección (△), que es paralela a la recta AB. Luego este plano es fijo. Es el lugar (P) buscado.

Definiciones. *Se llama* **plano diametral conjugado de una dirección dada** (△) *el plano que pasa por el centro* O *de la esfera y es perpendicular a la dirección dada* (△). Los puntos medios de las cuerdas AB paralelas a (△) están en dicho plano: todo punto de este plano que sea interior a la esfera es el punto medio de una cuerda AB.

Se llama **diámetro conjugado de una dirección de plano dado (P)** *el diámetro perpendicular a este plano.* Luego los centros de los círculos de la esfera (S) cuyos planos son paralelos a (P) están en el diámetro de dicha esfera que es conjugado de la dirección de plano dado (P).

Cilindro circunscrito a una esfera (S). — *Se llama* **cilindro circunscrito a una esfera (S)** *a lo largo de un círculo máximo* (C) *de dicha esfera el cilindro de revolución que tiene este círculo por base y cuyas generatrices* (G) *son perpendiculares al plano* (P) *de dicho círculo.* El eje de este cilindro (D) pasa por el centro O de la esfera, que es también el del círculo (C).

Toda generatriz (G) *del cilindro circunscrito* (fig. 319) *es tangente a la esfera* (S) *en un punto* M *de la circunferencia* (C).

La generatriz (G) perpendicular al plano (P) corta este plano en un punto M de la circunferencia (C). El plano tangente a la esfera en M es perpendicular al radio OM: este radio está situado en el plano (P) [*fig.* 319]. Por consiguiente, el plano tangente en M es perpendicular al plano (P) y contiene la generatriz (G) que pasa por M y que también es perpendicular al plano (P). En consecuencia, dicha generatriz es tangente a la esfera (S) en el punto M.

Toda tangente MA *a la esfera en un punto* M *y que sea perpendicular al plano* (P), *es una generatriz del cilindro circunscrito.*

El plano perpendicular en M a la recta MA es paralelo al plano (P) y pasa por el centro O de la esfera. Luego se confunde con el plano (P). El punto M pertenece a la circunferencia (C) y MA es una generatriz del cilindro.

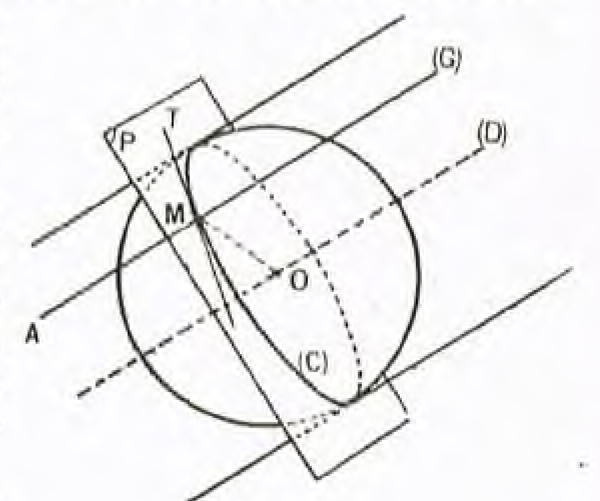


Fig. 319

Todo plano tangente al cilindro circunscrito es tangente a la esfera (S).

Todo plano tangente al cilindro toca a este cilindro en todos los puntos de una generatriz (G) tangente a la esfera (S) en un punto M de la circunferencia (C). El plano tangente al cilindro en M contiene dos tangentes a la esfera y perpendiculares entre sí: la generatriz (G) y la tangente MT a la circunferencia (C). Por consiguiente, es tangente a la esfera (S).

Todo plano tangente a la esfera (S) *en un punto de la circunferencia* (C) *es tangente al cilindro circunscrito a lo largo de la generatriz que pasa por ese punto.*

Esta propiedad resulta de la demostración precedente.

Homotecia - Inversión

Homotecia. Figuras transformadas por homotecia. Secciones de una pirámide o de un cono por dos planos paralelos. Propiedades de las tangentes y de los planos tangentes a curvas o superficies homotéticas. Productos de homotecias y de traslaciones. Planos tangentes comunes a dos esferas. Planos tangentes comunes a tres esferas. Inversión. Propiedades de las tangentes y de los planos tangentes a figuras inversas. En la inversión los ángulos son constantes. Figura inversa de un plano. Inversiones que transforman una esfera (S) en un plano (P). Figura inversa de una esfera que no pasa por el centro O de inversión. Inversiones que transforman una esfera (S) en una esfera (S'). Esferas tangentes a otra (S) y a un plano (P) o a dos esferas (S) y (S'). Figura inversa de una circunferencia (C). Distancia entre dos puntos inversos. Proyección estereográfica. Anillo ortogonal

Homotecia. — *Se llama* **homotecia** (O · k), *tanto en el espacio como en el plano, la transformación en que a un punto* M *corresponde otro punto* M', *de manera que*

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Los puntos M y M' están en línea recta con el punto fijo dado O, llamado **centro de homotecia;** la razón $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$ es constante, igual a k, y se denomina **razón de homotecia.**

La homotecia (O · k) hace que a un par de puntos A, B corresponda otro par de puntos A', B', de manera que

$$\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Recíprocamente, *si* A *y* A' *son dos puntos fijos, la transformación definida por* $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ *es una homotecia.*

Las demostraciones de estas propiedades son, palabra por palabra, las mismas que las estudiadas en geometría plana (v. p. 107).

Figuras transformadas por homotecia. — La figura transformada por homotecia o *figura homotética de una recta* (D) *que pasa por el centro de homotecia es la misma recta* (D).

La figura homotética de un plano (P) *que pasa por el centro de homotecia es el mismo plano* (P).

La figura homotética de una recta (D) *que no pasa por el centro de homotecia es una recta paralela* (D'). *Dos rectas paralelas son siempre homotéticas con relación a los infinitos puntos del plano determinado por las dos rectas:* el centro de homotecia puede ser un punto cualquiera de dicho plano que no esté situado en (D) ni en (D').

Fig. 320

Igual demostración que en el plano (v. p. 108).

La figura homotética de un plano (P) *que no pasa por el centro* O *de homotecia es un plano* (P') *paralelo a* (P).

Sea A un punto del plano (P), A' su homotético (*fig.* 320); a cada punto M del plano (P) corresponde un punto M' en la homotecia: la recta A'M' es paralela a la recta AM; luego A'M' está contenida en el plano (P') que pasa por A' y es paralelo al plano (P). El punto M' está en (P').

Todo punto M' del plano (P') es además homotético del punto M en que la recta OM' corta al plano (P).

Dos planos paralelos (P) *y* (P') *son siempre homotéticos con relación a infinitos centros no situados en dichos planos.*

Sea O un punto cualquiera del espacio que no pertenezca a los planos (P) y (P'), A un punto del plano (P) y A' el punto en que la recta OA corta el plano (P'). Sea k la razón $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. La homotecia (O · k) transforma el plano (P) en el plano (P'). Puede haber tantas transformaciones como puntos O, es decir, una infinidad.

La figura homotética de una circunferencia (C) *de centro* A *y radio* R *es una circunferencia* (C') *de centro* A', *punto homotético de* A, *y de radio* R' = [k] · R, *siendo* k *la razón de homotecia. Los planos de los círculos* (C) *y* (C') *son paralelos o se confunden.*

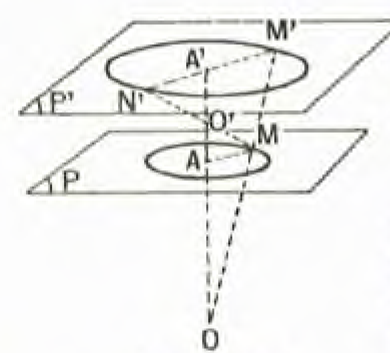


Fig. 321

Si el centro O de la homotecia está en el plano (P) a que pertenece la circunferencia (C), la proposición es idéntica a la que se ha estudiado en geometría plana (v. p. 108).

Supongamos que O está situado fuera del plano (P): en este caso la figura homotética del plano (P) es el plano (P') que pasa por el punto A' y es paralelo a (P). Sea M (*fig.* 321) un punto de la circunferencia (C) y M' su homotético: la igualdad $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ implica la siguiente: A'M' = $|k|$ · AM = $|k|$ · R. El punto M' se encuentra por tanto en la circunferencia (C') que tiene por centro A' y por radio [k] R y está contenida en el plano (P').

Cualquier punto M' de la circunferencia (C') tiene su homotético en un punto M de la circunferencia (C) y se define por $\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$. Por tanto, la circunferencia (C') es la figura homotética de la circunferencia (C).

Dos circunferencias (C) *y* (C') *que tienen los radios* R *y* R' *diferentes y que están en dos planos paralelos son homotéticas de dos maneras. Los centros de homotecia dividen la línea de los centros en la relación* $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{R}{R'}$; *las razones de homotecia son opuestas e iguales a* $\dfrac{R'}{R}$ *en valor absoluto.*

Sea M un punto de la circunferencia (C) [*fig.* 321]: tracemos por A', centro de la circunferencia (C'), una recta paralela a AM; el homotético de M no puede ser otro que uno de los dos puntos M' o N' en que A'M' corta la circunferencia (C'). La recta MM' corta las rectas AA' y MN' en los puntos O y O' respectivamente. Tenemos que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}}$ y $-\dfrac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{R}{R'}$. Luego los puntos O y O' son fijos y las dos homotecias $\left(O, \dfrac{R'}{R}\right)$ y $\left(O', -\dfrac{R'}{R}\right)$ transforman la circunferencia (C) en la circunferencia (C').

La figura homotética de una esfera (S), *de centro* A *y radio* R, *es una esfera* (S') *de centro* A' *y radio* R', *siendo* A' *el homotético de* A *y* $\dfrac{R'}{R}$ *igual al valor absoluto de la razón de homotecia* k.

Si M está sobre la esfera (S) [*fig.* 322], AM = R por hipótesis. El punto M' homotético de M es tal que $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$, de donde A'M' = = [$k$] R. Por tanto, el punto M' está sobre la esfera (S') de centro A' y radio [k] R.

Si M' está sobre la esfera (S') es el homotético del punto M que pertenece a la esfera (S) y está definido por $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{A'M'}}{k}$. La esfera (S') es, por tanto, la figura homotética de (S).

Dos esferas (S) *y* (S') *no concéntricas y de radios* R *y* R' *diferentes son homotéticas de dos maneras. Los centros de estas homotecias son los puntos* O *y* O' *que dividen la línea de los centros* AA' *en la relación* $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}} = \dfrac{R}{R'}$ *Las razones de dichas homotecias son opuestas y de valor absoluto igual a* $\dfrac{R'}{R}$.

Sea M un punto de la esfera (S) [*fig.* 322]; la recta trazada por A', centro de (S'), paralelamente a la recta AM, corta la esfera (S) en dos puntos M' y N'. Si las dos esferas son homotéticas, el punto homotético de M no puede ser otro que M' o N'. Por consiguiente, el centro de homotecia no puede ser más que uno de los dos puntos en que las rectas MM' y NN' cortan la línea de los centros AA'. Estos puntos están definidos por las igualdades

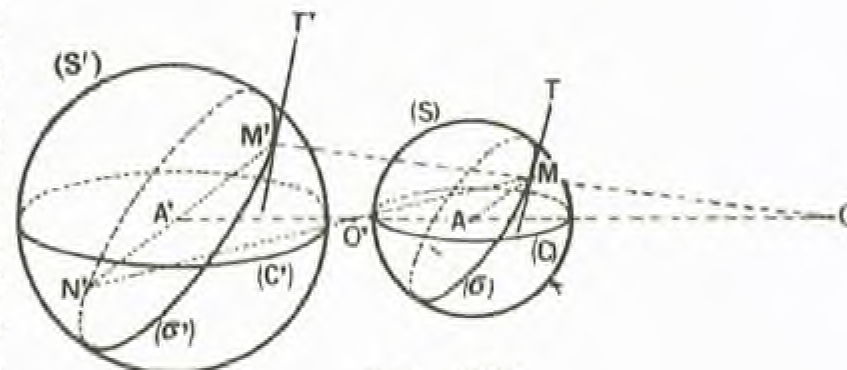


Fig. 322

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = -\frac{\overline{O'A}}{\overline{O'A'}} = \frac{R}{R'}.$$

Por tanto son fijos y la esfera (S') es la figura homotética (S) en una de las dos homotecias $\left(O \cdot \dfrac{R'}{R}\right)$, $\left(O' \cdot -\dfrac{R'}{R}\right)$.

Secciones de una pirámide o de un cono por dos planos paralelos. — Teorema. *Las secciones* (C) *y* (C') *producidas en un cono o en una pirámide por los planos paralelos* (P) *y* (P') *que no pasan por su vértice son figuras homotéticas.*

Haremos la demostración en el caso de un cono.

Supongamos el cono que tiene por vértice el punto S y como base la curva (C) [*fig.* 323].

Tracemos una secante SAA' cualquiera que corte los planos (P) y (P') en A y A' respectivamente.

Sea M un punto cualquiera de la curva (C); la recta SM que corta el plano (P) cortará también el plano paralelo (P') en un punto M', y se verifica (v. p. 121) $\dfrac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = \dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$.

Los puntos M y M' están en línea recta con el punto S y la razón $\dfrac{\overline{SM'}}{\overline{SM}}$ es igual al valor constante $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k$. Por tanto el punto M'

es el homólogo de M en la homotecia (S . k). El lugar geométrico de los puntos M', intersección del cono y del plano (P'), es, por consiguiente, la curva (C') homotética de la curva (C) en la homotecia (S . k).

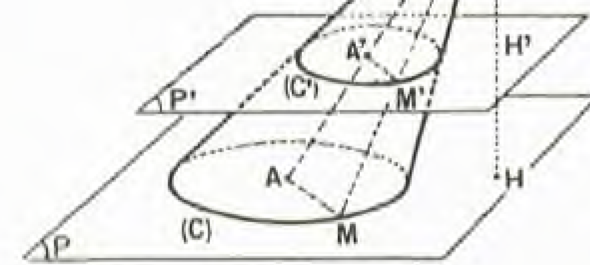


Fig. 323

OBSERVACIONES. 1° Para evaluar la razón k de la homotecia se traza la recta SHH' perpendicular a los dos planos (P) y (P'). En este caso la razón k es igual a $\frac{\overline{SH'}}{\overline{SH}}$.

2° La demostración expuesta para el cono se aplica a una pirámide reemplazando la curva (C) por una línea poligonal.

Propiedades de las tangentes y de los planos tangentes a curvas y superficies homotéticas. — *Cuando una curva* (C) *admite en un punto* M *una tangente* MT, *la curva homotética* (C') *admite en el punto homólogo* M' *una tangente* M'T' *paralela a* MT.

La misma demostración que en geometría plana (v. p. 108).

CONSECUENCIA. Sean (C) y (C') dos circunferencias situadas en dos planos paralelos: dichas curvas son homotéticas (*fig.* 324). Sea M un punto de (C) y MT una tangente en dicho punto. En la circunferencia (C') existen dos puntos M' y N' en que la tangente a (C') es una paralela a MT; cada uno de estos dos puntos puede ser el homotético de M.

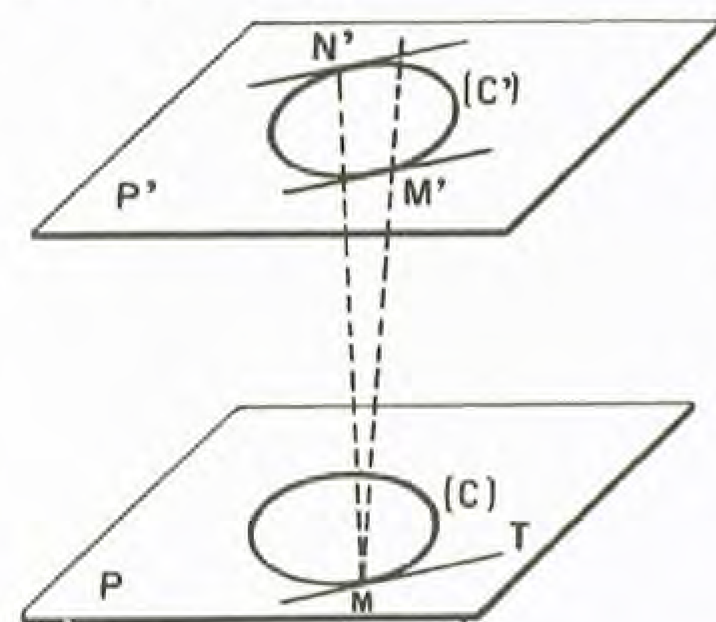


Fig. 324

Se deducirá sin dificultad que si son diferentes los radios de las circunferencias cada uno de los dos puntos es homotético de M en una de las dos homotecias que transforman (C) en (C').

Cuando una superficie (S) *admite en un punto* M *un plano tangente* (P), *la superficie homotética* (S') *admite en el punto* M' *un plano tangente que sea paralelo a* (P).

Sea (O . k) la homotecia considerada. En la superficie (S') tracemos una curva (σ') que pase por el punto M' (*fig.* 322) y que admita en M' una tangente M'T'. En la homotecia (O . $\frac{1}{k}$) la homotética de la curva (σ') es otra curva (σ) trazada en la superficie (S), que pase por M y que tenga en M una tangente MT paralela a M'T'.

La tangente MT estará en el plano tangente en M, ya que por hipótesis dicho plano existe. La recta M'T' estará por consiguiente en un plano (P') que pase por M' y sea paralelo al plano (P). Resulta que: 1°, el plano tangente en M' existe, ya que M'T', tangente a una curva cualquiera trazada en (S'), está en un plano fijo (P'); 2°, dicho plano tangente en M' es paralelo al plano (P).

EJEMPLO. Sean (S) y (S') dos esferas (*fig.* 322). En la esfera (S') existen dos puntos M' y N' en que el plano tangente a (S') es paralelo al plano tangente a la esfera (S) en un punto de la misma. Estos puntos son los que pueden ser homotéticos de M en una de las homotecias que transforman (S) en (S'). Se deduce que si los radios de las esferas son diferentes, cada uno de los puntos M' y N' es homotético de M en una de las dos homotecias citadas.

Las rectas MM' y NN' pasan por dos puntos fijos.

Productos de homotecias y de traslaciones. — Los mismos enunciados y demostraciones que en el plano (v. p. 109).

Planos tangentes comunes a dos esferas. — Suponemos que las dos esferas son desiguales (*fig.* 322).

Todo plano (P) *tangente en* M *a una de la esferas* (S) *y en* M' *a la otra, pasa por uno de los dos centros* O *de homotecia de dichas esferas.*

Todo plano (P) *que pasa por un centro de homotecia* O *y que es tangente en* M *a una de las esferas es también tangente a la otra en el punto* M' *homotético de* M.

Planos tangentes comunes a tres esferas. — Nombraremos estas esferas (A), (B) y (C) por las letras que designan sus centros respectivos. En la figura se representan las secciones que produce en la tres esferas un plano que pase por sus centros A, B y C. Supondremos que dichos centros son los vértices de un triángulo.

1° Las tres esferas son iguales (*fig.* 325).

Los planos tangentes a las dos primeras (A) y (B) son paralelos a AB o pasan por el centro de homotecia C', punto medio de AB. Los planos tangentes comunes a las esferas (A) y (C) son paralelos a AC o pasan por B', punto medio de AC.

Por consiguiente, los planos tangentes comunes a las tres esferas son los planos tangentes a la esfera (A) que cumplan una de las condiciones siguientes:

a) Ser paralelo al plano ABC;

b) Pasar por B'C';

c) Pasar por B' y ser paralelos a AB, es decir, que pasen por B'A' siendo A' el punto medio de BC;

d) Pasar por C' y ser paralelos a AC, es decir, que pasen por C'A';

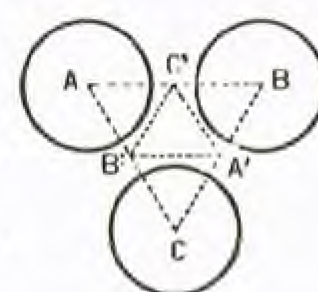


Fig. 325

2° La esfera (A) no es igual a (B) ni a (C).

Los planos tangentes a las esferas (A) y (B) pasan por uno de los dos centros de homotecia O o I de dichas esferas: los planos tangentes a las esferas (A) y (C) pasan por O' o I', centros de homotecia de estas esferas. Por tanto, los planos tangentes comunes a las tres esferas son los planos tangentes a la esfera (A) y que pasan por una de las cuatro rectas OO', OI', O'I o II'.

El número máximo de planos tangentes a tres esferas es igual a 8, ya que por una recta se pueden trazar dos planos tangentes a una esfera.

Inversión. — *En el espacio, como en el plano, se llama* **inversión** (O . k) *la transformación en que a un punto* M *corresponde un punto* M' *tal que:*

1° *El punto* M' *esté en la recta* OM;

2° $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

El punto O es un punto fijo dado que se llama **centro de inversión;** k es un número dado que se llama **potencia de la inversión.**

El inverso M' de un punto M se confunde con M si $OM = \sqrt{k}$, es decir, cuando M está sobre la esfera (Σ) de centro O y de radio $\sqrt{k}$, que se llama **esfera de inversión.** Si OM es diferente de $\sqrt{k}$, el punto M será distinto de su inverso M' y ambos estarán a un mismo lado del centro de inversión si k es positivo; M' y M estarán situados a distinto lado del centro de inversión O si k es negativo.

Se dice que dos puntos M y M' *son inversos respecto a una esfera* (Σ) *cuando son inversos en una inversión que tiene* (Σ) *por esfera de inversión.* En este caso toda esfera que pase por M y M' es ortogonal a la esfera (Σ).

Fig. 326

Propiedades de las tangentes y de los planos tangentes a figuras inversas. — *Si una curva* (C) *admite en un punto* A *una tangente* AT *distinta de* OA, *la curva inversa* (C') *admite en el punto* A', *inverso de* A *en la inversión* (O . k), *una tangente* A'T', *simétrica de* AT *respecto al plano perpendicular a la recta* AA' *en su punto medio.*

El plano de la figura OAA'MM' (*fig.* 326) es un plano variable (P) que pasa por AA': como la recta AM de dicho plano tiende hacia una posición límite AT diferente de OA, el plano (P) tiende hacia una posición límite (R) determinada por O, A y T.

Se ha demostrado en geometría plana (v. p. 112) que si la recta AM, que une un punto fijo A con un punto variable M, tiende hacia una posición límite AT, la recta A'M' que une los puntos A' y M', inversos de A y M respectivamente, tiende hacia una posición límite A'T' simétrica de AT respecto a la mediatriz de AA'; admitiremos que, en el espacio, A'M' tiende también hacia la posición límite A'T', que es una recta del plano (R) simétrica de AT respecto a la mediatriz de AA' situada en dicho plano y por consiguiente simétrica de AT respecto al plano perpendicular a AA' en su punto medio.

Si una superficie (S) *admite en un punto* A *un plano tangente* (P), *la superficie* (S'), *inversa de* (S), *admite un plano tangente* (P') *en el punto* A' *inverso de* A. *Los planos* (P) *y* (P') *son simétricos respecto al plano perpendicular a la recta* AA' *en su punto medio.*

En la inversión los ángulos son constantes. — Si dos curvas se cortan en un punto A y tienen en dicho punto dos tangentes AT y AU, las curvas inversas se cortan en un punto A' inverso de A y tienen en el punto A' las tangentes A'T' y A'U'. La figura formada por las tangentes AT y AU es simétrica de la formada por A'T' y A'U' respecto al plano perpendicular a AA' en su punto medio (*fig.* 327). Luego se puede decir que el ángulo formado por las dos tangentes en A' es igual que el formado por las tangentes en A.

En particular, *dos curvas tangentes en* A *son transformadas por inversión en dos curvas tangentes en* A'; *dos curvas ortogonales en* A *son transformadas en dos curvas ortogonales en* A'. (Se dice que dos curvas son ortogonales cuando sus tangentes en un punto común son perpendiculares.)

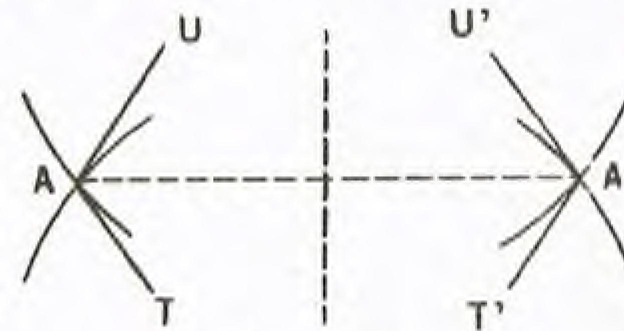


Fig. 327

Si dos superficies tienen un punto común A y cada una de ellas un plano tangente (P) y (Q) en dicho punto, las superficies inversas tienen un punto común A' inverso de A y en A' los planos tangentes (P') y (Q'). Siendo la figura formada por los planos (P) y (Q) simétrica de la que forman los planos (P') y (Q') respecto al plano perpendicular a AA' en su punto medio, se puede decir que el ángulo formado por los planos tangentes en A' es igual que el de los planos tangentes en A.

En particular, *dos superficies tangentes en* A *son transformadas por inversión en superficies tangentes en* A'; *dos superficies ortogonales en*

A, *es decir, aquellas cuyos planos tangentes son rectangulares, son transformadas en superficies ortogonales en A'.*

El conjunto de estas propiedades se resume diciendo: *en la inversión los ángulos permanecen constantes.*

Figura inversa de un plano. — 1° *La inversa de una recta que pasa por el centro O de inversión es esa misma recta.*

Por consiguiente, *la figura inversa de un cono que tiene por vértice el centro de inversión es el mismo cono.*

2° *La figura inversa de un plano (P) que pasa por el centro de inversión es ese mismo plano.*

3° *La figura inversa de un plano (P) que no pasa por el centro de inversión es una esfera (S) que pasa por el centro O de inversión y cuyo centro B' es el inverso del simétrico B del centro O de inversión respecto al plano (P).*

Sea M un punto del plano (P). El plano de la figura (*fig.* 328) es el que pasa por M y por la perpendicular OA trazada desde O al plano (P). La recta (D) representa la intersección del plano de la figura con el plano (P). El punto M', inverso de M, está en el plano de la figura en una circunferencia de centro B, inverso de B, y de radio B'O, siendo B el punto simétrico de O respecto al plano (P) [v. p. 112]. Luego, en el espacio, M' está en una esfera (S) de centro B' y de radio B'O.

Fig. 328

El plano tangente en O a la esfera (S) es perpendicular a OA y por consiguiente paralelo al plano (P). La recta que une el centro O de inversión con un punto cualquiera de la esfera (S) corta el plano (P) en un punto M. Luego todos los puntos de esta esfera son inversos de los puntos del plano (P).

Por consiguiente, *la figura inversa de una esfera (S) que pase por el centro O de inversión es el plano perpendicular a OB en su punto medio, siendo B el inverso de B', que es el centro de la esfera (S).*

Inversiones que transforman una esfera (S) en un plano (P). — Tracemos por el centro B' de la esfera un plano perpendicular al plano (P); dicho plano (*fig.* 328) corta la esfera (S) según una circunferencia (C) y el (P) según una recta (D). Las inversiones consideradas son las que transforman la circunferencia (C) en la recta (D). Luego (v. p. 113):

Existen dos inversiones, y solamente dos, que transforman la esfera (S) en el plano (P). Los centros de estas inversiones son los extremos del diámetro de (S) que sea perpendicular al plano (P).

Figura inversa de una esfera que no pasa por el centro O de inversión. — *La figura inversa de una esfera (S) que no pasa por el centro de inversión O es una esfera (S').*

Si el punto O coincide con el centro E de la esfera (S) la proposición es evidente: (S') será una esfera de centro O.

Supongamos ahora que O y E son distintos; en este caso el diámetro determinado por OE corta la esfera (S) en A y B. Sean A' y B' los inversos de A y B respectivamente. Seguiremos la demostración en la figura 329, que representa una sección de la esfera (S) producida por un plano que pasa por los puntos O y E, ya citados, y por un punto cualquiera M de esta esfera.

La recta OM corta en el punto P la esfera (S) y el producto $\overline{OM} \cdot \overline{OP}$, potencia de O, es una constante. Si $p = k$, siendo p la potencia de la inversión dada, el punto M' inverso de M coincidirá con el punto P, y la inversa de la esfera (S) será ella misma. Si $p \neq k$, se verifica que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ y en consecuencia $\overline{OM'} = \dfrac{k}{p} \cdot \overline{OP}$.

El punto M' es el homólogo de M en la homotecia $(O \cdot \dfrac{k}{p})$ y, por consiguiente, el lugar geométrico del punto M' es una esfera (S') de diámetro A'B'.

Inversiones que transforman una esfera (S) en una esfera (S'). — Sean E y F los centros de estas esferas; consideremos como plano de la figura 329 el que pasa por la línea de los centros EF. Dicho plano corta las dos esferas según dos circunferencias (C) y (C'). Las inversiones que transforman (S) en (S') transforman también (C) en (C') y recíprocamente Luego (v. p. 113):

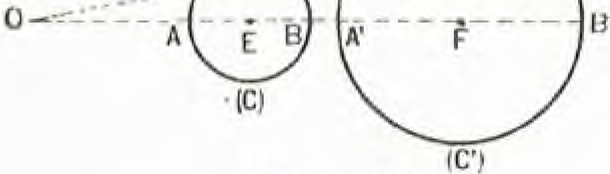


Fig. 329

Si las esferas (S) y (S') tienen radios diferentes, existen dos inversiones y solamente dos que transformen (S) en (S'). Los centros de inversión O y O' son los centros de homotecia de las dos esferas.

Si las esferas (S) y (S') tienen el mismo radio, existe una inversión y solamente una que transforme (S) en (S'); es una simetría respecto al centro de homotecia de las dos esferas. La segunda inversión, que en este caso no existe, es reemplazada por una simetría.

Esferas tangentes a otra (S) y a un plano (P) o a dos esferas (S) y (S'). — Las dos figuras (S) y (P), o (S) y (S'), son figuras inversas en una inversión (O . *k*). El enunciado que se expone a continuación supone que se trata de dos esferas, pero los resultados no se modifican para el caso de una esfera y un plano.

Toda esfera (Σ) que pase por dos puntos inversos M y M' y sea tangente en M a una de las esferas (S) será también tangente en M' a la esfera (S').

La inversión (O . *k*) que transforma (S) en (S'), transforma también M en M'; luego $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$; siendo la potencia de la inversión *k* igual a la potencia de O respecto a la esfera (Σ), la figura inversa de (Σ) es ella misma. La inversa de la figura formada por las esferas (S) y (Σ) tangentes en M, se compone, pues, de las esferas (S') y (Σ) tangentes en M'.

Figura inversa de una circunferencia (C). — *La inversa de una circunferencia que pasa por el centro O de inversión es una recta.*

La inversa de una circunferencia (C) que no pasa por el centro O de una inversión es otra circunferencia (C'). Las circunferencias (C) y (C') inversas se confunden o están en un mismo plano o están sobre una misma esfera.

Se puede demostrar que dos circunferencias (C) y (C') de una misma esfera son dos circunferencias inversas.

Distancia entre dos puntos inversos. — La fórmula que se estableció en geometría plana (v. p. 115):

$$A'B' = AB \frac{|k|}{OA \cdot OB}$$

es evidentemente exacta en el espacio.

Proyección estereográfica. — Sea (S) una esfera, O un punto de la misma y (P) un plano *paralelo al plano tangente a la esfera en el punto* O.

Se llama **proyección estereográfica de un punto M** *de la esfera sobre el plano* (P) *el punto* M' *en que la recta* OM *corta el plano* (P). El punto O es uno de los centros de inversión que permiten que la esfera (S) se transforme en el plano (P), luego el producto $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ es constante y la proyección estereográfica no es, en resumen, más que una inversión de centro O.

Se llama **proyección estereográfica de una curva (C)** *trazada sobre la esfera* (S) *la curva* (C') *descrita en el plano* (P) *por el punto* M', *proyección estereográfica del punto* M, *cuando* M *describe la curva* (C).

La proyección estereográfica de una circunferencia (C) es otra circunferencia cuyo centro es el punto A' en que el plano (P) es cortado por la recta OA, que une el punto O con el polo A del plano a que pertenece la circunferencia (C).

Siendo la proyección estereográfica una inversión, la inversa (C') de la circunferencia (C) es también una circunferencia (*fig.* 330). Los planos que pasan por la recta OA cortan la esfera (S) según

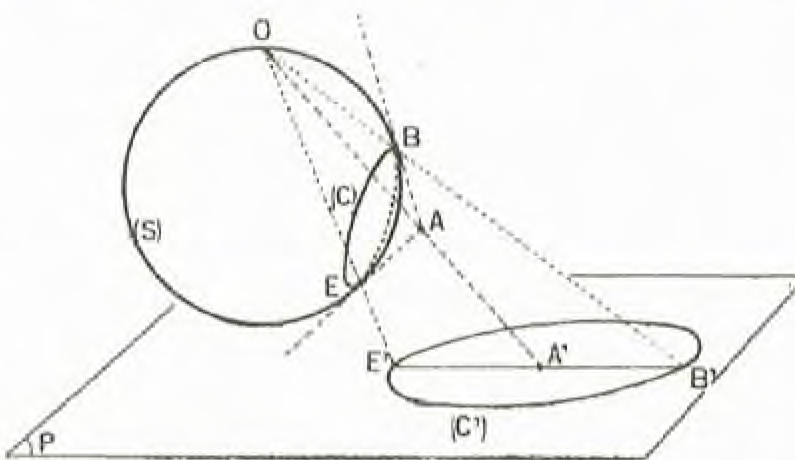


Fig. 330

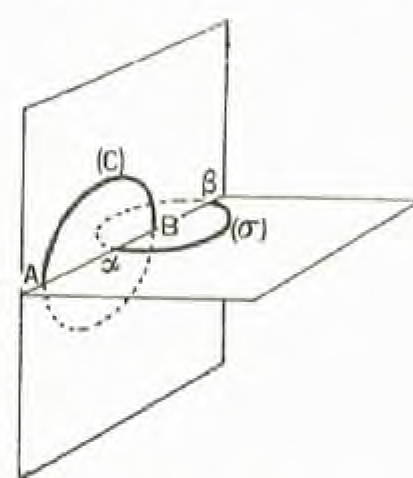


Fig. 331

las circunferencias (σ) que pasan por el punto O (v. p. 131) y son ortogonales al círculo (C). Las proyecciones estereográficas de dichas circunferencias sobre el plano (P) son las rectas que pasan por el punto A'. Estas rectas (como en la inversión permanecen constantes los ángulos) son ortogonales a la circunferencia (C') y por consiguiente son diámetros de la misma. El punto A' en que la recta OA corta el plano (P) es el centro de la circunferencia (C').

Anillo ortogonal. — *Se llama* **anillo ortogonal** *el conjunto de dos circunferencias (C) y (σ) que estando situadas en planos perpendiculares* (fig. 331) *tienen por diámetro común la recta de intersección de estos planos, y los puntos A, B, α, β, extremos de los diámetros situados en dicha intersección, son conjugados armónicos.*

Las esferas (S) y (Σ) que pasan por dos circunferencias que forman un anillo ortogonal son también ortogonales.

Elipse

Definiciones y nomenclatura. Segunda definición de la elipse. Tangente a la elipse en un punto de ésta. Envolvente. Condición de tangencia de una recta y una elipse. Tangentes a una elipse paralelas a una dirección dada. Tangentes a una elipse que pasan por un punto P dado. Condición para que un punto P sea exterior a una elipse. Teoremas de Poncelet. Producto de las distancias de los focos a una tangente. Circunferencia ortóptica. Intersección de una recta (D) con una elipse

Definiciones y nomenclatura. — Sean F y F′ dos puntos fijos cuya distancia es $2c$. *Se llama* **elipse** *el lugar geométrico de los puntos* M *de un plano fijo que pasa por* F *y* F′, *tales que la suma de las distancias de cada uno de ellos a los puntos* F *y* F′ *es una longitud constante*, $MF + MF' = 2a$ mayor que $2c$.

De un modo aproximado se dibuja una elipse en una hoja de papel apoyando sobre éste la punta de un lápiz que mantenga tenso un hilo, cuyas extremidades están fijas por dos chinchetas. La punta del lápiz dibuja aproximadamente una elipse.

Puesto que la distancia FF′ es menor que $2a$ por hipótesis, los dos círculos de centros F y F′ y de radio a se cortan (*fig.* 332) en dos puntos B y B′, que son puntos de la elipse, llamados **vértices del eje menor** de la elipse. La recta BB′ se llama **eje menor** de la elipse; la distancia $2b$ entre los vértices B y B′ es la longitud del eje menor. La recta FF′ se llama **eje mayor** o **eje focal** de la elipse; los puntos F y F′ son los **dos focos** y su distancia es la **distancia focal** $2c$ de la elipse; el punto O en que los dos ejes se cortan es el punto medio de FF′, y se llama **centro** de la elipse.

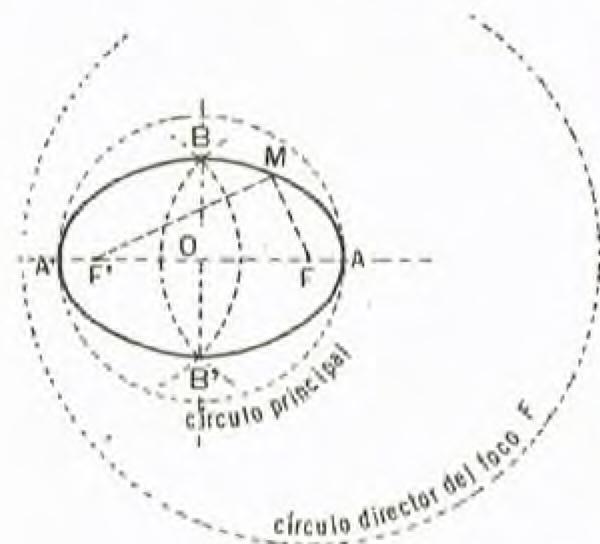


Fig. 332

Sean A y A′ los dos puntos del eje mayor definidos por $OA = OA' = a$. Estos puntos pertenecen a la elipse; en efecto, siendo O el punto medio de FF′, se tiene $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{2AO}$, de donde $AF + AF' = 2a$. Estos dos puntos son los **vértices del eje mayor** o **eje focal** de la elipse. Su distancia es la longitud $2a$ del eje mayor.

Se comprueba sin dificultad que los dos ejes son ejes de simetría recta para la elipse y que su centro es un centro de simetría. En fin, siendo el triángulo FBO rectángulo en O, existe entre los tres números a, b, c la relación

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

puesto que $FB = a$, $BO = b$, $OF = c$.

Se llama **círculo principal** de la elipse el círculo de centro O y de radio a; este círculo tiene por diámetro AA′. Se llama **círculo director relativo a un foco F,** el círculo de centro F y de radio $2a$. Se verifica que el homotético del círculo principal en la homotecia (F′ · 2) es el círculo director relativo al foco F.

Segunda definición de la elipse. — Teorema. *La elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias* (C) *que pasan por un foco* F′ *y son tangentes al círculo director* (F) *relativo al segundo foco* F.

1° Hipótesis: M es un punto de la elipse, luego $MF + MF' = 2a$. M es el centro de una circunferencia (C) que pasa por F′: vamos a demostrar que (C) es tangente al círculo director (F).

Se prolonga FM (*fig.* 333) una longitud MA igual a MF′. El punto A está en la circunferencia del círculo (C) porque $MA = MF'$; también está en la circunferencia del círculo (F) porque $FA = MF + MA = MF + MF' = 2a$. Como los radios AM y AF se confunden, los círculos (C) y (F) son tangentes en el punto A.

2° Hipótesis: M es el centro de una circunferencia (C) que pasa por F′ y es tangente en A al círculo director (F). Vamos a demostrar que M pertenece a la elipse.

Los dos círculos (C) y (F) son tangentes por hipótesis: como F′ es interior al círculo (F), el círculo (C) también lo será y el punto M, centro del círculo (F), pertenecerá, por consiguiente, al segmento FA.

Por tanto, se tiene

$$FA = FM + MA.$$

Ahora bien, $MA = MF'$, como radios de un mismo círculo (C), y $FA = 2a$. Por consiguiente, se tiene

$$MF + MF' = 2a$$

y el punto M pertenece a la elipse.

El teorema queda demostrado. Es conveniente conocerlo con el enunciado siguiente, que no difiere del primero más que por las notaciones: *El lugar de los centros de los círculos tangentes a otro dado* (O), *de centro* O, *y que pasan por un punto fijo* A, *interior al círculo* (O), *es una elipse cuyos dos focos son* O *y* A, *siendo el círculo* (O) *un círculo director.*

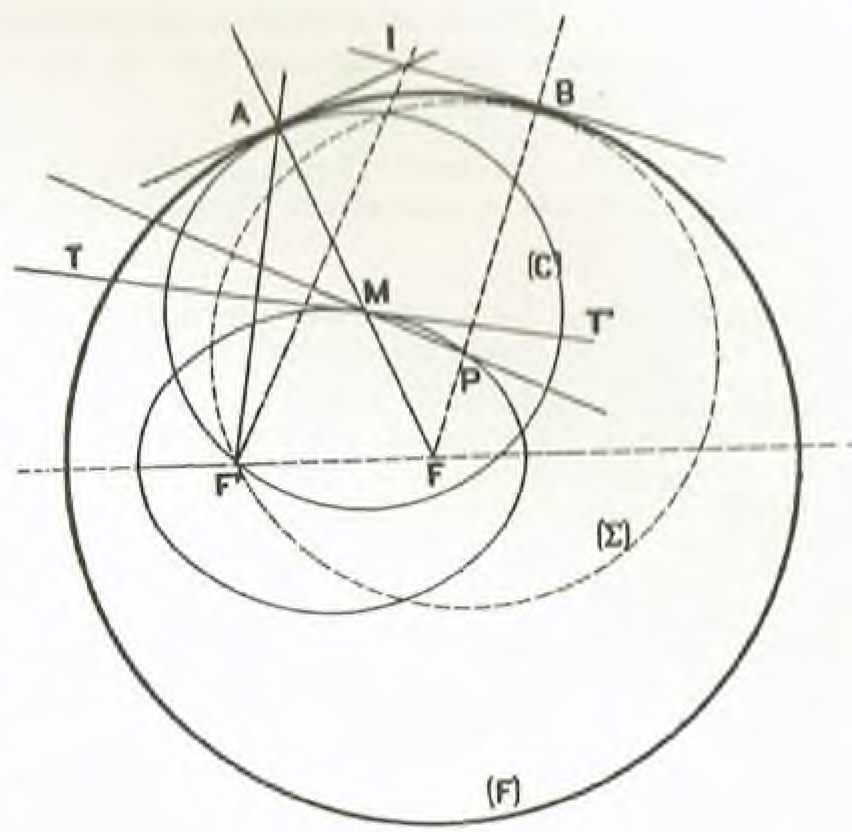


Fig. 333

Tangente a la elipse en un punto de ésta. — Teorema. *En todo punto* M *de una elipse, hay una tangente* MT. *La tangente es la mediatriz del segmento* F′A, *siendo* A *el punto de contacto del círculo director* (F) *con el círculo de centro* M *y de radio* MF′.

Sea P (*fig.* 333) un punto de la elipse próximo al punto fijo M. Sea (Σ) el círculo de centro P, de radio PF′: este círculo es tangente al círculo director (F) en el punto B, situado en la prolongación del segmento FP. Las tangentes al círculo director en los puntos A y B se cortan en un punto I, polo de la recta AB con relación a este círculo. El punto I tiene la misma potencia con respecto a los círculos (C) y (Σ), puesto que las tangentes IA, IB trazadas desde I al círculo (F) son iguales: la recta IF′ es, por tanto, eje radical de los círculos (C) y (Σ); por consiguiente, esta recta es perpendicular a la línea de los centros MP de estos dos círculos.

Permaneciendo fijo M, supongamos que P tiende a confundirse con M; la semirrecta FP tenderá hacia la posición de FM; el punto B del círculo (F) tenderá hacia el punto fijo A de este círculo: por tanto, **la recta AB tenderá hacia la tangente AI a este círculo en el punto A.** Como el punto I es el polo de la recta AB, tenderá, en estas condiciones, hacia el punto A, y la recta F′I hacia F′A (*fig.* 334). La recta MP gira alrededor del punto M sin dejar de ser perpendicular a F′I: tiende, por consiguiente, hacia una posición límite MT, obtenida trazando por M una perpendicular MT a F′A.

De esta demostración resulta: 1°, que por el punto M se puede trazar una tangente a la elipse; 2°, que esta tangente MT es la mediatriz de F′A.

Siendo el triángulo F′MA isósceles, la mediatriz MT es también la bisectriz del ángulo F′MA; por tanto, *la tangente a la elipse en un punto* M *es la bisectriz exterior del ángulo formado por los radios* MF *y* MF′.

Recíproco. *Las mediatrices de los segmentos* F′A, *cuyos extremos son un foco* F′ *de la elipse y un punto cualquiera* A *del círculo director* (F) *relativo al segundo foco, son tangentes a la elipse.*

Sea TT′ (*fig.* 334) una mediatriz del segmento F′A, cuyos extremos son un foco F′ y un punto A cualquiera del círculo director relativo al segundo foco F. Sea (C) la circunferencia que pasa por F′ y es tangente en A al círculo director: el centro M de (C) está en la mediatriz TT′ de la cuerda AF′; el punto M es un punto de la elipse; en este punto hay una tangente que es precisamente TT′, mediatriz de F′A.

Es muy importante el siguiente enunciado del recíproco, que no difiere del primero más que por las notaciones.

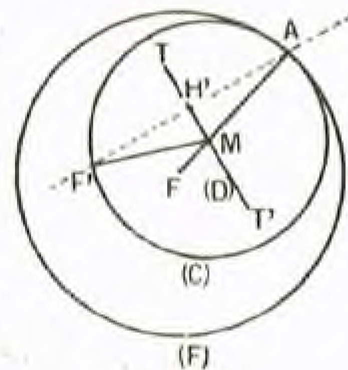


Fig. 334

Envolvente. — Se dice que una curva fija es la **envolvente** de una recta variable para expresar que la recta es tangente a la curva fija en un punto variable de la misma. Establecido esto:

La envolvente de las mediatrices de los segmentos AM, *de que un extremo* M *describe una circunferencia fija* (O), *de centro* O, *y el otro extremo* A *es un punto fijo interior a dicha circunferencia, es una elipse de focos* O *y* A, *en la que* (O) *es la circunferencia de uno de los círculos directores.*

Condición de tangencia de una recta y una elipse. — *La condición necesaria y suficiente para que una recta sea tangente a una elipse es que el punto simétrico de un foco con relación a dicha recta sea un punto de la circunferencia del círculo director relativo al otro foco.*

Este enunciado resume la proposición demostrada en el párrafo "tangente a la elipse en un punto de ésta" y su recíproca. De él se deduce la consecuencia siguiente:

El lugar de los puntos simétricos de un foco con relación a las tangentes a una elipse es la circunferencia de círculo director relativo al otro foco.

La condición necesaria y suficiente para que una recta (D) *sea tangente a una elipse es que la proyección ortogonal* H′ *de un foco* F′ *sobre* (D) *esté en la circunferencia del círculo principal.*

Sea A (*fig.* 334) el punto simétrico de F′ con relación a la recta (D); la igualdad $\overline{F'A} = 2\overline{F'H'}$ demuestra que A es el homotético de H′ en la homotecia (F′ . 2), homotecia que transforma el círculo principal en el círculo director (F). La condición necesaria y suficiente para que (D) sea tangente a la elipse, es que A esté sobre (F); esta condición es la misma que si decimos que H′ sea un punto de la circunferencia del círculo principal.

CONSECUENCIA. *El lugar de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes a una elipse es la circunferencia del círculo principal de esta elipse.*

CONSECUENCIA. *La envolvente del segundo lado* BC *de un ángulo recto, cuyo primer lado pasa por un punto fijo* A, *y cuyo vértice* B *describe una circunferencia* (O), *de centro* O, *que contiene en su interior el punto* A, *es una elipse* (E), *de foco* A, *de centro* O *y de círculo principal* (O).

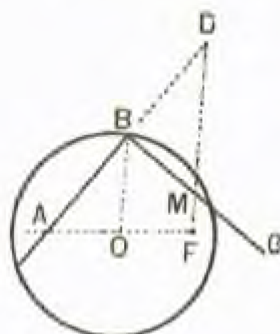


Fig. 335

En efecto, la proyección del foco A de la elipse (E) sobre la recta BC es B, punto del círculo principal de esta elipse. Por tanto, BC es una tangente de la elipse (E) [*fig.* 335].

Para hallar el punto M de contacto de la recta BC con la elipse se prolonga AB una longitud BD = AB, y AO una longitud OF = AO. Se traza FD: la intersección de FD con BC es el punto M buscado.

Tangentes a una elipse paralelas a una dirección dada. — TEOREMA. *A una elipse se le pueden trazar dos tangentes y solamente dos, paralelas a una dirección dada* (△). *Los puntos de contacto de estas tangentes son simétricos con relación al centro de la elipse.*

La perpendicular (*fig.* 336) trazada por el foco F′ a la dirección dada (△) corta en A y B el círculo director (F) relativo al otro foco, puesto que F′ está en el interior de este círculo. Las mediatrices (D) y (D′) de los segmentos F′A y F′B son tangentes a la elipse y paralelas a la dirección dada (△). Se comprueba sin dificultad que son las únicas tangentes a la elipse paralelas a esta dirección.

Fig. 336

El punto M donde la recta (D) corta el radio FA es también el de contacto con la elipse; el punto P donde la recta (D′) corta el radio FB es también el de contacto con la elipse. La recta FA es simétrica de la MF′ con relación a la recta (D), la FB es simétrica de la FA con relación a la mediatriz de la cuerda AB, recta paralela a (D); luego se pasará de F′M a FB por el producto de dos simetrías con relación a rectas paralelas, es decir, por una traslación; por consiguiente, MF′ y FP son paralelas. De igual modo se demuestra que FM y F′P son paralelas. La figura FMF′P es un paralelogramo y MP corta FF′ en su punto medio O. Por tanto, los puntos de contacto M y P de las dos tangentes paralelas son simétricos con relación al centro O de la elipse.

Tangentes a una elipse que pasan por un punto P dado. — TEOREMA. *Por un punto P que no esté situado sobre una elipse, se pueden trazar a ésta dos tangentes y solamente dos o ninguna.*

Para trazar por un punto dado P las tangentes a una elipse, hay que hallar los simétricos del foco F′ con relación a las tangentes desconocidas.

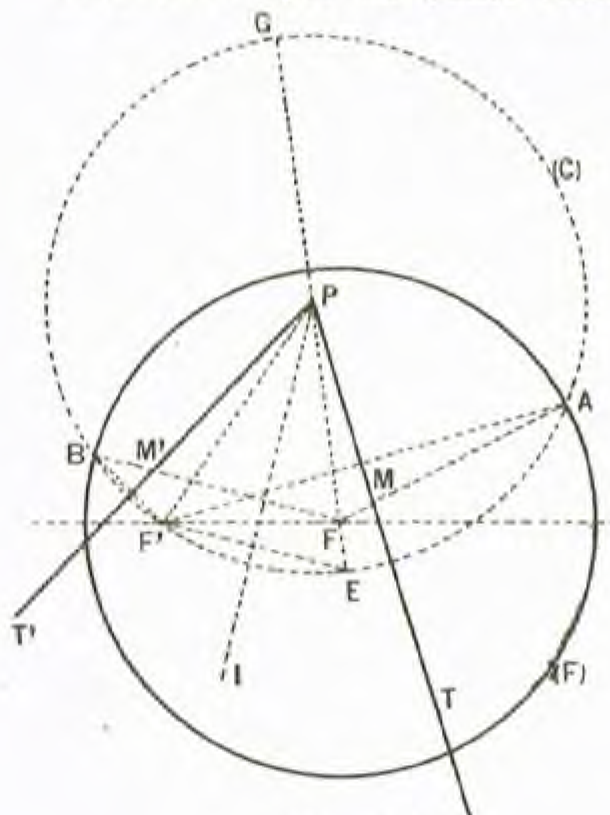


Fig. 337

Estos puntos están: 1°, sobre la circunferencia del círculo director (F) relativo al otro foco; 2°, sobre la circunferencia (C), de centro P y de radio PF′, pues si A (*fig.* 337) es simétrico de F′ con relación a una recta que pasa por P, las distancias PA y PF′ de puntos simétricos son iguales y A está sobre la circunferencia (C).

Si (C) y (F) no se cortan, no se pueden trazar a la elipse tangentes que pasen por el punto P. En este caso P es, por definición, un punto *interior* a la elipse.

Supongamos por tanto que las circunferencias (C) y (F) se cortan en dos puntos A y B. En este caso hay dos tangentes a la elipse y solamente dos que pasan por el punto P: son las mediatrices PT y PT′ de los segmentos F′A y F′B y se dice que el punto P es *exterior* a la elipse.

Condición para que un punto P sea exterior a una elipse. — Para que un punto P sea exterior a una elipse (*fig.* 338), es necesario y suficiente que se verifique la relación PF + PF′ > $2a$.

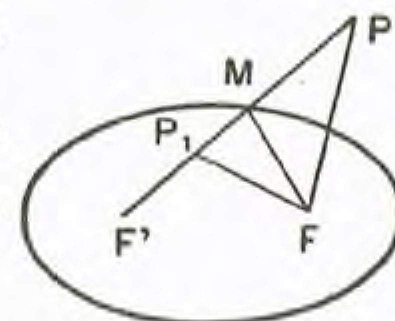


Fig. 338

Pues si se tiene PF + PF′ = $2a$, el punto P es un punto de la elipse.

Si es $P_1F + P_1F' < 2a$, el punto P está en el interior de la elipse.

Sea M el punto de encuentro de F′P con la elipse. Se tiene:

$$F'P_1 + P_1M + MF = 2a.$$

Como $P_1M + MF > P_1F$, se tendrá: $F'P_1 + P_1F < 2a$.

Teoremas de Poncelet. — TEOREMA. *Los segmentos* PM *y* PM′ *de tangentes a una elipse, comprendidos entre el punto exterior* P *y los puntos de contacto* M *y* M′ *se ven desde un foco cualquiera* F *bajo un mismo ángulo.*

Los puntos M y M′ están (*fig.* 337) situados sobre los radios FA y FB del círculo director (para la construcción de M ver la figura 333): siendo los puntos A y B simétricos con relación a la línea de los centros PF, puesto que A y B están sobre la circunferencia del círculo director de centro F y también sobre la circunferencia de centro P y radio PF′, los ángulos $\widehat{PFA}$ y $\widehat{PFB}$ son iguales. Estos son precisamente los ángulos bajo los cuales se ven desde el punto F los segmentos PM y PM′.

TEOREMA. *Las bisectrices de los ángulos formados por dos tangentes* PT *y* PT′ *a la elipse son también las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores* PF *y* PF′.

El punto E (o G) [*fig.* 337] en que la línea de los centros PF corta la circunferencia (C) es el punto medio del arco = AB, puesto que A y B son simétricos con relación a PF. Por tanto, F′E es una de las bisectrices del ángulo $\widehat{AF'B}$. Sea PI la mediatriz de F′E. La recta PI es perpendicular a la bisectriz del ángulo $\widehat{AF'B}$; las rectas PT y PT′ son perpendiculares a los lados de este ángulo: por consiguiente, PI es una de las bisectrices del ángulo que forman las tangentes. Evidentemente, también es (F′PE es un triángulo isósceles) una de las bisectrices del ángulo $\widehat{F'PF}$ que forman los radios vectores.

Producto de las distancias de los focos a una tangente. Circunferencia ortóptica. — *El producto* FH . F′H′ *de las distancias de los focos* F *y* F′ *de una elipse a una tangente variable a esta elipse es constante e igual a* b^2 *(cuadrado del semieje menor).*

Los puntos H y H′, proyecciones ortogonales de los focos sobre una tangente, están (v. p. 135) sobre el círculo principal (O) [*fig.* 339]. Sea I el segundo punto de intersección de la recta F′H′ con la circunferencia (O); siendo recto el ángulo inscrito $\widehat{HH'I}$, la recta IH es un diámetro y el punto I el simétrico de H con relación al punto O.

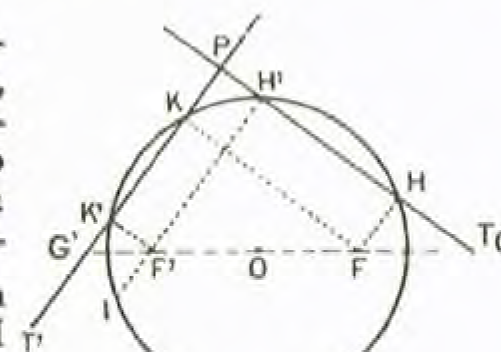


Fig. 339

Como F′ es también el simétrico de F con relación al mismo punto, las longitudes FH y F′I son iguales.

La potencia de F′ con relación al círculo (O) es $\overline{F'I} \cdot \overline{F'H'}$; también es $\overline{F'G'} \cdot \overline{F'G}$, es decir, $(c - a)(c + a) = (c^2 - a^2) = -b^2$ (v. p. 134).

Por consiguiente, en valor absoluto se tiene $FH \cdot F'H' = F'I \cdot F'H' = b^2$.

El lugar geométrico de los puntos P, *por donde pasan dos tangentes a la elipse que sean rectangulares, es una circunferencia que tiene por centro el centro* O *de la elipse y* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *por radio. Esta circunferencia se llama* **circunferencia ortóptica de la elipse.**

Sean PT y PT′ (*fig.* 339) dos tangentes rectangulares; las proyecciones ortogonales H y K del foco F sobre estas tangentes y las H′ y K′ del foco F′ están sobre el círculo principal (O). Las figuras FHPK y F′H′PK′ son, por hipótesis, rectángulos: se tendrá, pues, PH′ = F′K′, PH = FK y, por consiguiente, PH . PH′ = b^2. De esta igualdad se deduce, siendo P exterior al círculo (O), que $\overline{PH} \cdot \overline{PH'} = b^2$. Ahora bien, la potencia $\overline{PH} \cdot \overline{PH'}$ del punto P con relación al círculo principal (O) es también igual a $\overline{OP}^2 - a^2$. Por tanto, se tiene $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2$. El punto P está efectivamente sobre la circunferencia ortóptica de la elipse.

Queda por demostrar que si P es un punto de la circunferencia ortóptica, por él pasan dos tangentes rectangulares. En primer lugar supongamos que P sea exterior a la elipse; en el triángulo FPF′ se tiene:

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 2\overline{PO}^2 + 2\overline{OF}^2$$
$$= 2(a^2 + b^2) + 2c^2$$
$$= 4a^2.$$

De la desigualdad $(PF + PF')^2 > \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2$ se deduce que:

$$(PF + PF')^2 > 4a^2$$

y, en consecuencia, PF + PF′ > $2a$. Luego desde P se pueden trazar dos tangentes a la elipse; sea PT una de ellas; existen (v. p. 136) dos tangentes a la elipse perpendiculares a PT, que cortan esta recta en P_1 y P_2; estos dos puntos están, según la demostración precedente, sobre la circunferencia ortóptica: el punto P estará, pues, en P_1 o en P_2, y las tangentes que pasan por este punto serán rectangulares.

Intersección de una recta (D) con una elipse. — Se buscan los puntos M comunes a una recta (D) y a la elipse: estos puntos son los centros (v. p. 135) de las circunferencias que pasan por un foco F′ y son tangentes al círculo director (F) relativo al otro foco. La condición necesaria y suficiente para que el centro M de esta circunferencia sea un punto de la recta (D) es que la circunferencia buscada pase por G′, punto simétrico de F′ con relación a la recta (D). El problema queda reducido al siguiente: hallar el centro M de una circunferencia que pase por dos puntos F′ y G′ y sea tangente a un círculo dado. Se ha visto (v. p. 100) que este problema admite a lo máximo dos soluciones. Se puede por tanto enunciar la consecuencia siguiente:

Una recta corta una elipse a lo máximo en dos puntos distintos. Se comprobará sin dificultad que la condición necesaria y suficiente para que la recta (D) corte la elipse en dos puntos distintos es que el punto G′ esté en el interior del círculo director (F). Cuando los dos puntos se confunden, G′ está sobre la circunferencia del círculo director y la recta (D) es una tangente a la elipse.

Hipérbola

Definición y nomenclatura. Segunda definición de la hipérbola. Tangente a la hipérbola en un punto de ésta. Asíntotas de la hipérbola. Condición de tangencia de una recta y una hipérbola. Tangentes a una hipérbola paralelas a una dirección dada. Tangentes a una hipérbola trazadas por un punto dado P. Condición para que un punto P sea exterior a la hipérbola. Teoremas de Poncelet. Producto de las distancias de los focos a una tangente. Tangentes rectangulares a una hipérbola. Circunferencia ortóptica. Intersección de una recta (D) con una hipérbola

Definición y nomenclatura. — Sean F y F′ dos puntos fijos cuya distancia es $2c$. *Se llama* **hipérbola** *el lugar geométrico de los puntos M de un plano fijo que pasa por F y F′, siendo el valor absoluto de la diferencia de las distancias de M a los puntos F y F′ una longitud constante $2a$ menor que $2c$.*

$$| MF - MF' | = 2a.$$

Los puntos F y F′ son los dos **focos** de la hipérbola; el punto medio O del segmento FF′ es el **centro** de la hipérbola. La recta FF′ es el **eje mayor, eje transverso** o **eje focal** de la hipérbola; la distancia $2c$ entre estos dos puntos es la **distancia focal** de la hipérbola.

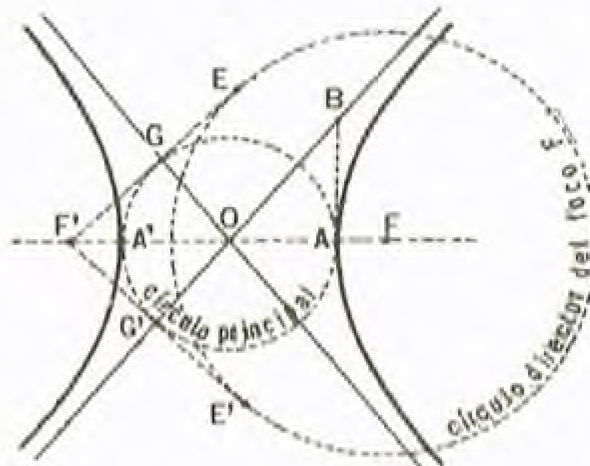


Fig. 340

Sobre el eje mayor hay *(fig. 340)* dos puntos de la hipérbola y solamente dos, A y A′, definidos por OA = OA′ = a. Estos puntos son los **vértices** de la hipérbola; la distancia $2a$ que separa estos dos puntos es la longitud del eje transverso de la hipérbola. Se verifica que AA′ es un eje de simetría de la hipérbola y que el punto O es un centro de simetría de esta curva.

La perpendicular en O al eje AA′ es también un eje de simetría de la hipérbola y se llama **eje menor** o eje **no transverso.** Evidentemente no hay ningún punto del lugar situado sobre este eje. Llamaremos b al número positivo definido por la igualdad

$$b^2 = c^2 - a^2$$

y por analogía con el caso de la elipse llamaremos al número positivo $2b$ longitud del eje menor, si bien éste no existe.

Se llama **círculo principal** de la hipérbola el círculo de centro O y de radio a; **círculo director relativo al foco F,** el círculo (F) que tiene por centro el foco F y por radio $2a$. La homotecia (F′ . 2) transforma el círculo principal en círculo director relativo al foco F.

Observación. Los puntos de la figura 340 no están situados como los de la figura 332. El círculo principal y los círculos directores son secantes. F′ es exterior al círculo (F). La hipérbola dibujada se compone de dos ramas: para la rama de la derecha, MF′ — MF = $2a$, y para la de la izquierda, MF — MF′ = $2a$.

Segunda definición de la hipérbola. — Teorema. *La hipérbola es el lugar de los centros de las circunferencias* (C) *que pasan por un foco* F′ *y son tangentes al círculo director* (F) *relativo al segundo foco* F.

1° Hipótesis: M está, por ejemplo, en la rama de la derecha de la hipérbola, MF′ — MF = $2a$. Se prolonga MF *(fig. 341)* una longitud FA = $2a$: por consiguiente, A estará sobre la circunferencia del círculo director (F) y MA = MF + FA = MF + $2a$ = MF′, como consecuencia de la hipótesis MF′ = MF + $2a$. El punto M es, por tanto, el centro de una circunferencia (C) de radio MF′ que pasa por F′ y es tangente en A al círculo director (F).

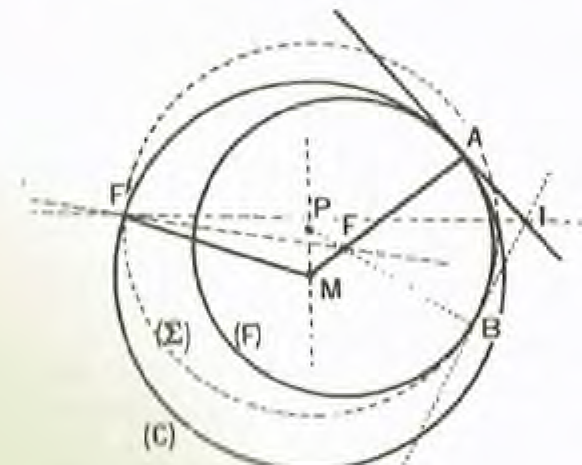


Fig. 341

2° Hipótesis: M es el centro de una circunferencia (C) tangente en A al círculo director (F) y que pasa por F′. Vamos a demostrar que M pertenece a la hipérbola.

Puesto que F′ es exterior al círculo (F), son posibles dos casos: el de la figura 341, en que estando F sobre el segmento MA se verifica MF′ = MA = MF + $2a$ y MF′ — — MF = $2a$; o bien el de la figura 342, en que estando A sobre el segmento MF se verifica MF′ = = MA = MF — $2a$, y por tanto MF — MF′ = $2a$. Tanto en un caso como en otro M es un punto de la hipérbola.

El teorema precedente puede ser enunciado del siguiente modo:

El lugar de los centros de las circunferencias tangentes a un círculo dado (O), *de centro* O, *que pasan por un punto fijo* A *exterior al círculo* (O), *es una hipérbola de focos* O *y* A, *de la que* (O) *es un círculo director.*

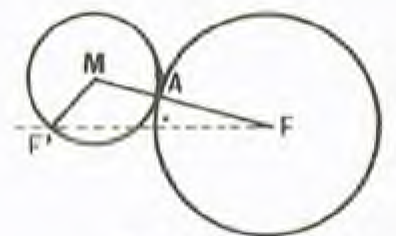


Fig. 342

Tangente a la hipérbola en un punto de ésta. — Teorema. *En todo punto M de una hipérbola, hay una tangente* MT. *La tangente es la mediatriz del segmento* F′A, *siendo* A *el punto de contacto del círculo director* (F) *con el círculo de centro* M *y de radio* MF′.

La demostración es la misma que la expuesta para la elipse en la página 135, sustituyendo la palabra elipse por la de hipérbola. Esta demostración se puede seguir sobre las figuras 341 y 343 estableciendo: 1°, la existencia de la tangente MT en el punto M; 2°, la posición de esta tangente, mediatriz de F′A.

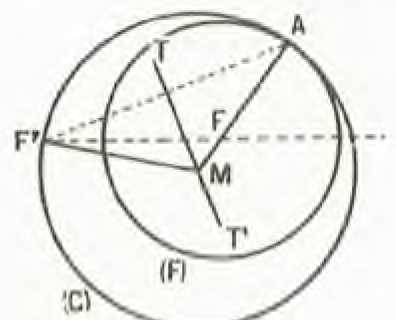


Fig. 343

Como el triángulo F′MA *(fig. 343)* es isósceles, la mediatriz de F′A es también bisectriz de F′MA; por tanto, se puede decir que:

La tangente a la hipérbola en un punto M *de ésta es la bisectriz interior del ángulo que forman los radios vectores* MF *y* MF′.

Para el recíproco del teorema precedente se debe hacer un estudio aparte.

Recíproco. *Las mediatrices de los segmentos* F′A, *uno de cuyos extremos* F′ *es un foco de la hipérbola y el otro* A *un punto cualquiera de la circunferencia del círculo director* (F) *relativo al otro foco, son tangentes a la hipérbola, excepto si la recta* F′A *es tangente en* A *al círculo director.*

Sea TT′ *(fig. 343)* la mediatriz de un segmento F′A. Existe una circunferencia (C) que pasa por F′ y es tangente en A al círculo director (F), excepto si F′A es tangente en A a este círculo. El centro M de dicha circunferencia está en la mediatriz TT′ de la cuerda AF′; también estará en la hipérbola, luego en este punto hay una tangente que es precisamente TT′.

Asíntotas de la hipérbola. — Desde el punto F′ exterior al círculo director (F) se pueden trazar a este círculo dos tangentes, cuyos puntos de contacto *(fig. 340)* son E y E′. *Se llaman* **asíntotas** *de la hipérbola las mediatrices de los segmentos* F′E *y* F′E′. La recta F′E tangente al círculo director (F) y que pasa por el centro de homotecia F′ de este círculo y del círculo principal es también tangente a este último en G, punto medio de F′E. Análogamente, F′E′ será tangente al círculo principal en G′, punto medio de F′E′: por tanto, las asíntotas son los radios OG y OG′ de este círculo. Resulta, pues, que *las asíntotas pasan por el centro de la hipérbola.*

En el triángulo rectángulo F′OG, se verifica que OF′ = c y OG = a, luego F′G = b. Tracemos AB perpendicular a la recta AA′ en el punto A; la perpendicular AB corta en B una de las asíntotas: los triángulos OAB y OGF′ son iguales (OA = OG, $\widehat{AOB} = \widehat{GOF'}$), por consiguiente, AB = GF′ = b. Esta propiedad permite construir las asíntotas de una hipérbola. Llevando *(fig. 344)* sobre el eje no transverso $O\beta = O\beta' = b$, y trazando por β y β' paralelas a AA′, y por A y A′ paralelas a $\beta\beta'$, se forma un rectángulo cuyas diagonales son las asíntotas de la hipérbola. Sea 2θ el ángulo de las asíntotas que contiene la curva; queda definido por $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$.

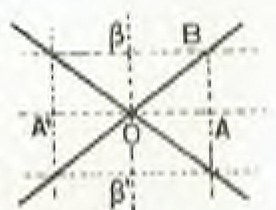


Fig. 344

Se dice que una hipérbola es **equilátera** *para expresar que el ángulo de las asíntotas es recto, y en este caso,* $a = b$.

En la práctica se consideran las asíntotas como las posiciones límites hacia las cuales tiende una tangente cuando el punto de contacto se aleja indefinidamente: en lo sucesivo designaremos por tangentes a la hipérbola tanto las tangentes a ésta en un punto M como las asíntotas. Con arreglo a este convenio, la recíproca del párrafo precedente se puede enunciar del siguiente modo, modificando las notaciones empleadas.

La envolvente de las mediatrices de los segmentos AM, *de que un extremo* M *describe una circunferencia fija* (O), *de centro* O, *y el otro extremo* A *es un punto fijo exterior a dicha circunferencia, es una hipérbola de focos* O *y* A, *en la que* (O) *es la circunferencia de uno de los círculos directores.*

Condición de tangencia de una recta y una hipérbola. — Si en la pág. 135 se sustituye la palabra elipse por la de hipérbola, se demuestran los enunciados que damos a continuación.

1° *La condición necesaria y suficiente para que una recta sea tangente a una hipérbola es que el simétrico de un foco con respecto a dicha recta esté sobre la circunferencia del círculo director relativo al otro foco.*

2° *La condición necesaria y suficiente para que una recta sea tangente a una hipérbola es que la proyección ortogonal de un foco sobre dicha recta esté sobre la circunferencia del círculo principal.*

CONSECUENCIAS. *El lugar de los puntos simétricos de un foco con relación a las tangentes a una hipérbola es la circunferencia del círculo director relativo al otro foco.*

El lugar de las proyecciones ortogonales de un foco sobre las tangentes a una hipérbola es la circunferencia del círculo principal de esta hipérbola.

La envolvente de un lado BC (fig. 345) *de un ángulo recto, cuyo otro lado pasa por un punto fijo* A, *y el vértice* B *describe una circunferencia* (O), *de centro* O, *es, en el caso de que* A *sea exterior al círculo* (O), *una hipérbola de foco* A, *de centro* O *y de círculo principal* (O).

Se construye (*fig.* 345) el punto M de contacto del lado BC con la hipérbola tomando

$$BD = BA \qquad OF = OA.$$

Tangentes a una hipérbola paralelas a una dirección dada. — TEOREMA. *Se pueden trazar dos tangentes a una hipérbola y solamente dos, paralelas a una dirección dada* ($\triangle$), *o ninguna. Los puntos de contacto de estas tangentes, cuando existen, son simétricos con relación al centro de la hipérbola.*

La perpendicular (*fig.* 346) a la dirección ($\triangle$), trazada por el foco F′, no corta necesariamente el círculo director (F). Si no lo corta, no existe ninguna tangente a la hipérbola paralela a la dirección dada ($\triangle$): en efecto, si hay una tangente, el simétrico de F′ con relación a esta tangente estará en dicha perpendicular y en el círculo director (F). Si esta perpendicular corta en A y B el círculo director, las mediatrices (D) y (D′) de los segmentos F′A y F′B son las tangentes buscadas. Se termina la demostración repitiendo palabra por palabra el razonamiento hecho en la página 136, cambiando la palabra elipse por la de hipérbola.

DISCUSIÓN. Para que existan dos tangentes paralelas a ($\triangle$) es necesario y suficiente que F′AB corte el círculo director (F′); para esto será preciso y bastará que la paralela O$\triangle$′ a la dirección ($\triangle$), trazada por el centro O de la hipérbola, esté en el ángulo de las asíntotas donde no se encuentra la hipérbola.

Tangentes a una hipérbola trazadas por un punto dado P. — TEOREMA. Por un punto P, no situado sobre una hipérbola, se pueden trazar a ésta dos tangentes y solamente dos o ninguna.

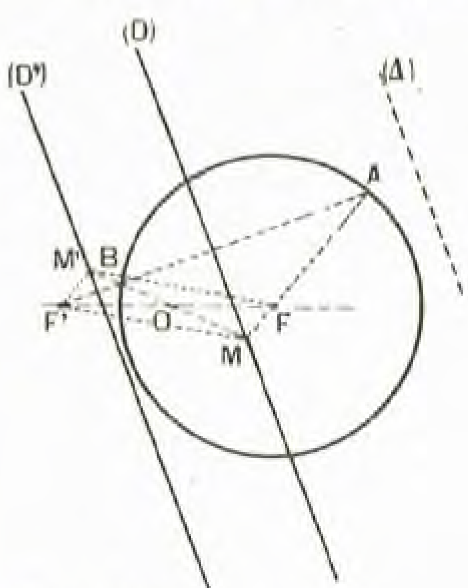


Fig. 345

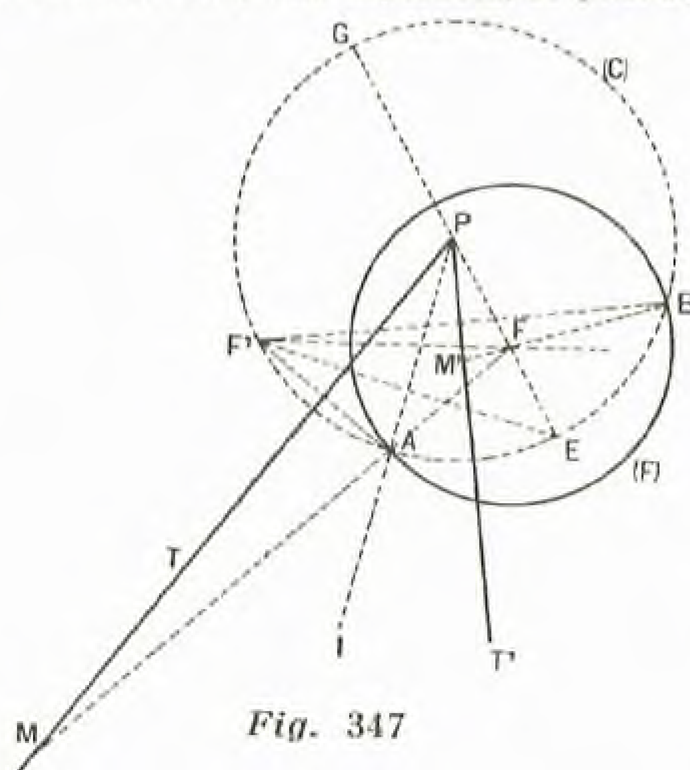


Fig. 346 *Fig.* 347

Se repetirá, palabra por palabra, excepto la de elipse que se sustituirá por la palabra hipérbola, la demostración dada en la página 136, siguiéndola sobre la figura 347.

Condición para que un punto P sea exterior a la hipérbola. — Para que P sea **exterior** a la hipérbola, es decir, para que se puedan trazar desde P dos tangentes PT y PT′ a esta hipérbola es preciso que los círculos (C) y (F) de la figura 347 se corten, lo que exige que

$$| PF' - 2a | < PF < PF' + 2a.$$

En el triángulo PFF′ el lado FF′ es menor que la suma de los otros dos; por tanto, se tiene:

$$2c < PF + PF',$$

y puesto que $2a < 2c$,

$$2a < PF + PF'.$$

Las desigualdades $| PF' - 2a | < PF < PF' + 2a$ se descomponen en las tres siguientes:

$$PF' - 2a < PF, \; 2a - PF' < PF, \; PF < PF' + 2a;$$

satisfecha la del centro, quedan las otras dos, que se resumen escribiendo

$$| PF' - PF | < 2a.$$

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que el punto P sea exterior a la hipérbola es que se verifique

$$| PF' - PF | < 2a.$$

Teoremas de Poncelet. — TEOREMA. *Los segmentos* PM *y* PM′ *de tangentes a una hipérbola, comprendidos entre el punto exterior* P *y los puntos de contacto* M *y* M′, *se ven desde un foco cualquiera* F *bajo ángulos iguales o suplementarios.*

Los puntos M y M′ están (*fig.* 347) situados sobre las semirrectas FA y FB o sobre las semirrectas opuestas. Se comprobará examinando las construcciones hechas para hallar el punto de contacto M en las figuras 342 y 343. Si M y M′ están sobre las semirrectas FA y FB, los ángulos $\widehat{AFP}$ y $\widehat{BFP}$ son iguales, porque A y B son simétricos con relación a la recta FP. La figura 347 está construida en la hipótesis de que M está en la semirrecta FA y M′ en la opuesta a FB. El ángulo bajo el cual se ve el segmento PM es en este caso el $\widehat{PFA}$ y el ángulo bajo el que se ve el segmento PM′ es el suplemento del $\widehat{PFB}$. Estos ángulos son por tanto suplementarios. Si M y M′ estuviesen sobre las semirrectas opuestas a FA y FB, los ángulos bajo los cuales se verían los segmentos PM y PM′ serían suplementarios de los ángulos iguales $\widehat{AFP}$ y $\widehat{BFP}$: por consiguiente, serían iguales.

Se comprobará fácilmente que los ángulos bajo los cuales se ven los dos segmentos son iguales cuando los puntos de contacto M y M′ están a un mismo lado del eje menor de la hipérbola; en este caso se dice que están en una misma **rama** de la hipérbola.

TEOREMA. *Las bisectrices del ángulo formado por las dos tangentes* PT *y* PT′ *a la hipérbola son también bisectrices del ángulo* $\widehat{FPF'}$ *formado por los radios vectores* PF *y* PF′.

Se repetirá, palabra por palabra, la demostración dada en la página 136 para el segundo teorema de Poncelet, siguiéndola en la figura 347.

Producto de las distancias de los focos a una tangente. — *El producto* FH · F′H′ *de las distancias de los focos* F *y* F′ *de una hipérbola a una tangente variable a esta hipérbola es constante, e igual a* b^2 (cuadrado del semieje menor).

Las proyecciones ortogonales H y H′ de los focos F y F′ (*fig.* 348), sobre una tangente PT, están en la circunferencia del círculo principal; la recta F′H′ corta esta circunferencia en I; H e I son diametralmente opuestos y por tanto simétricos con relación al punto O: las longitudes simétricas HF, IF′ son iguales. La potencia de F′ con respecto al círculo principal $\overline{F'I} \cdot \overline{F'H'}$ es también igual a $\overline{OF'}^2 - a^2$, es decir, $c^2 - a^2 = b^2$. De esto se deduce que $F'I \cdot F'H' = b^2$ y, como $F'I = FH$, $FH \cdot F'H' = b^2$.

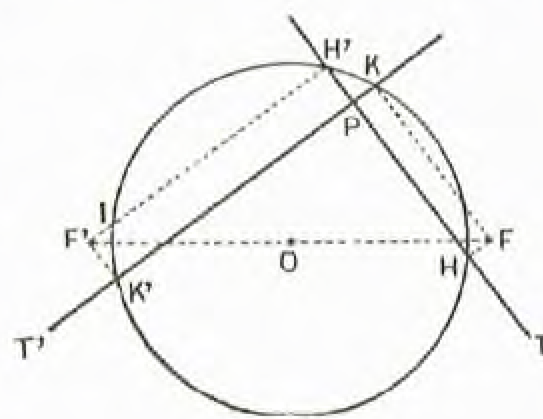


Fig. 348

Tangentes rectangulares a una hipérbola. Circunferencia ortóptica. — Hemos visto que se pueden trazar a una hipérbola dos tangentes paralelas a una dirección O$\triangle$, con tal que O$\triangle$ esté en el ángulo de las asíntotas que no contiene la hipérbola. Por tanto, se podrán trazar a la hipérbola tangentes rectangulares si hay dos rectas O$\triangle$ y O$\triangle$′ rectangulares que estén en el ángulo de las asíntotas que no contiene la curva: para ello es preciso y suficiente que el ángulo 2θ de las asíntotas (v. p. 137) que contiene la curva sea menor que un recto, es decir, que la desigualdad $b < a$ quede satisfecha. Supongamos que es así.

En la hipótesis $b < a$ *el lugar geométrico de los puntos* P *por los que pasan dos tangentes rectangulares a la hipérbola es una circunferencia que tiene por centro el centro* O *de la hipérbola y* $\sqrt{a^2 - b^2}$ *por radio. Esta circunferencia se llama* **circunferencia ortóptica** *de la hipérbola.*

Sean PT y PT′ dos tangentes rectangulares (*fig.* 348) a la hipérbola; sean H, K las proyecciones de F, y H′, K′ las de F′ sobre estas tangentes. Estos cuatro puntos están sobre la circunferencia del círculo principal (O). Se tiene PH = FK y PH′ = F′K′; por tanto, PH · PH′ = FK · F′K′ = b^2, según se dice en la página 138; siendo P un punto interior del círculo (O), de dicha igualdad se deduce que $\overline{PH} \cdot \overline{PH'} = -b^2$ y como $\overline{PH} \cdot \overline{PH'} = \overline{OP}^2 - a^2$ (potencia de P con respecto al círculo principal), se tiene $\overline{OP}^2 = a^2 - b^2$; luego P está en la circunferencia ortóptica.

Intersección de una recta (D) con una hipérbola. — Los puntos M comunes a una recta (D) y a una hipérbola son los centros de las circunferencias (v. p. 138) que pasan por F′ y por G′, simétrico de F′ con relación a la recta (D), y son tangentes al círculo director (F) relativo al segundo foco. La construcción de una circunferencia (C) que cumpla estas condiciones se ha hecho (v. pp. 100 y 101) en geometría plana; como máximo existen dos soluciones.

Hemos realizado esta construcción (*fig.* 349) en la hipótesis de que la recta (D) es paralela a una asíntota. En este caso la recta F′G′ es tangente al círculo director en K′ y la construcción no proporciona más que una sola circunferencia (C) que responda a las condiciones impuestas; por consiguiente, la recta (D) no corta la hipérbola más que en un solo punto.

Si el punto G′ estuviese en K′, es decir, si la recta (D) fuese la misma asíntota, no se encontraría ninguna circunferencia (C) que responda a las condiciones impuestas. Se comprueba por otra parte que haciendo tender el punto G′ hacia el K′, el único punto M situado sobre la recta (D) tiende a desaparecer alejándose indefinidamente. La asíntota de una hipérbola es, por tanto, la posición límite hacia la cual tiende la paralela a una cierta dirección fija, trazada por un punto M de la hipérbola, cuando el punto M se aleja indefinidamente sobre la curva. Esta recta es, pues, una asíntota, en el sentido que se entiende esta palabra para una curva cualquiera.

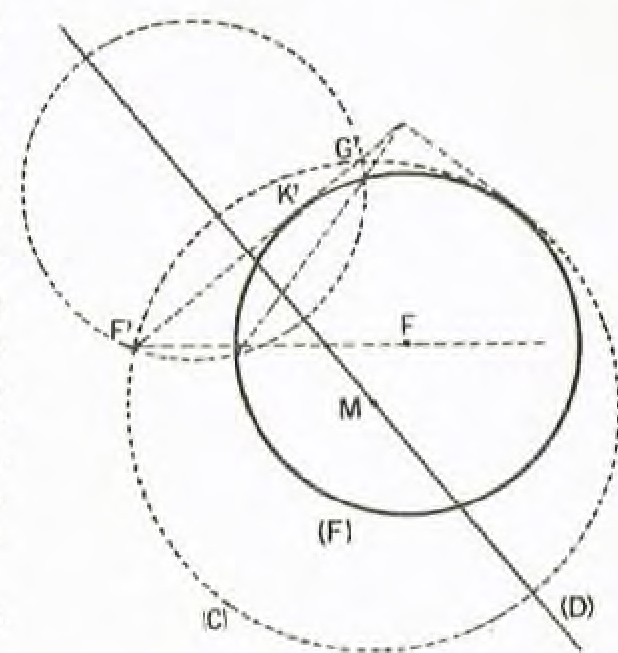


Fig. 349

Resumiremos estas afirmaciones diciendo:

Una recta (D) *corta una hipérbola en dos puntos distintos como máximo;*

Una paralela a una asíntota corta la hipérbola en un solo punto;

Una asíntota no corta la hipérbola.

Parábola

Definiciones y nomenclatura. Segunda definición de la parábola. Tangente a la parábola en un punto de ésta. Condición de tangencia de una recta y una parábola. Propiedades de la subnormal y de la subtangente a la parábola. Tangente a la parábola paralela a una dirección dada. Tangentes a la parábola que pasan por un punto dado. Posición de un punto respecto a una parábola. Teoremas de Poncelet. Tangentes rectangulares a la parábola. Intersección de la parábola con una recta

Definiciones y nomenclatura. — Sea (D) una recta y F un punto situado fuera de ella; *se llama* **parábola** *el lugar geométrico de los puntos* M *del plano definido por el punto* F *y la recta* (D) *que están a igual distancia del punto y de la recta.* Sea H la proyección ortogonal del punto M sobre la recta (D): se tiene MF = MH (*fig.* 350). El punto F se llama **foco** y la recta (D) **directriz** de la parábola. La perpendicular FA bajada desde el foco a la directriz se llama **eje** de la parábola; el eje es evidentemente un eje de simetría para la parábola. El punto A del eje situado en la directriz es el **pie** de la misma. Sobre el eje hay un solo punto S de la parábola, el punto medio de AF, llamado **vértice.**

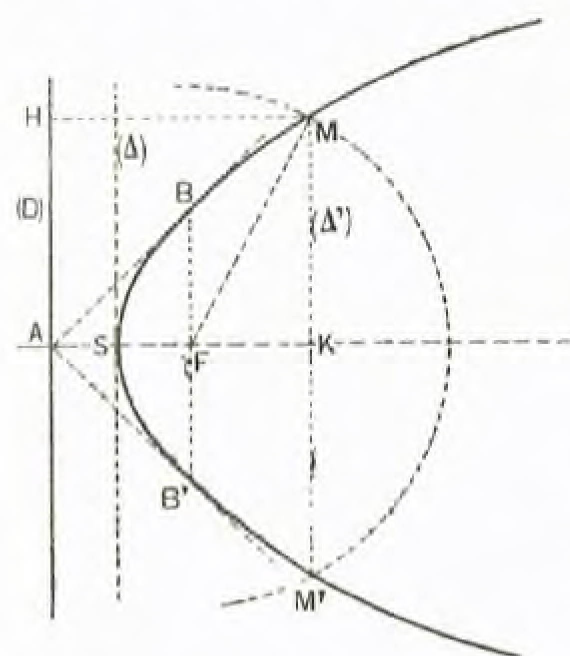


Fig. 350

Sea (△′) una perpendicular al eje en el punto K; para que haya sobre (△′) un punto M de la parábola, es necesario y suficiente que la circunferencia (*fig.* 350) de centro F y radio igual a AK corte esta recta: los puntos comunes M y M′ a la circunferencia y a la recta, si los hay, están sobre la parábola.

$$MF = MH = AK$$

Para que estos puntos existan, es necesario y suficiente que se verifique la desigualdad FK < AK; dicho de otro modo, que K esté sobre la semirrecta de origen S que pasa por el foco. Se llama **tangente en el vértice** de la parábola la recta (△) que pasando por el vértice S es perpendicular al eje. *La parábola queda toda ella situada respecto de la tangente* (△) *en el vértice, en la misma región en que se encuentra el foco* F.

La construcción precedente proporciona dos puntos de la parábola, B y B′, sobre la perpendicular al eje en el punto F. La longitud FB es, por definición, el **parámetro** *p* de la parábola. Por construcción, FB = FA, por tanto, *la distancia del foco* F *a la directriz* (D) *es igual al parámetro* p *de la parábola.*

Segunda definición de la parábola. — Teorema. *La parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias* (C) *que pasan por el foco* F *y que son tangentes a la directriz* (D).

Si el punto M está sobre la parábola, se tiene (*fig.* 351) MF = MH y la circunferencia (C), de centro M y radio MF, es tangente en H a la directriz. Si el punto M es el centro de la circunferencia tangente en H a la directriz y pasa por F, se tiene MF = MH; MH es la distancia de M a la directriz, luego M está en la parábola. El teorema queda, pues, demostrado. He aquí otro enunciado:

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto A *y que son tangentes a una recta* (D) *en un punto variable es una parábola de foco* A *y de directriz* (D).

Tangente a la parábola en un punto de ésta. — Teorema. *En todo punto* M *de una parábola, hay una tangente* MT. *Esta tangente es la mediatriz del segmento* FH, *siendo* H *el punto de contacto de la circunferencia* (C), *de centro* M *y radio* MF, *con la directriz.*

Sea P (*fig* 351) un punto de la parábola próximo al punto M: será el centro de una circunferencia (Σ) que pasa por F y es tangente en K a la directriz (D). El punto medio I de HK tiene la misma potencia $\overline{IH}^2 = \overline{IK}^2$ con respecto a las circunferencias (Σ) y (C): la recta IF es, por consiguiente, el eje radical de estas circunferencias y la recta PM, que une sus centros, es perpendicular a **IF**.

Cuando el punto P se aproxima al M, el punto K, proyección ortogonal de P sobre la recta (D), se aproxima a H, proyección ortogonal

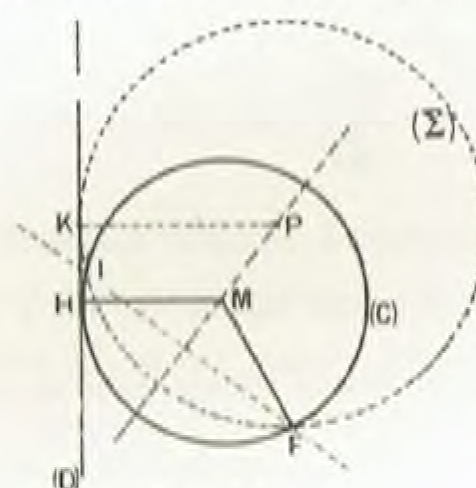


Fig. 351

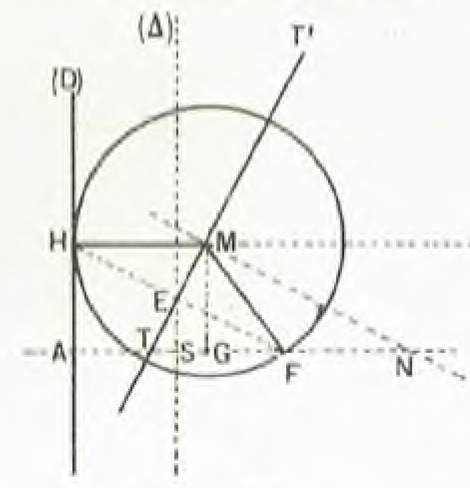


Fig. 352

del punto fijo M sobre la misma recta: I, punto medio de HK, tiende, por tanto, hacia H, y la recta FI, que gira alrededor de F, tiende hacia la FH. La recta PM gira alrededor del punto fijo M, sin dejar de ser perpendicular a la FI; PM tiende, por tanto, hacia una posición límite que es precisamente la perpendicular bajada desde M a FH. Resultando: 1°, que hay una tangente en M, puesto que MT tiene una posición límite; 2°, que esta tangente MT es la mediatriz de FH (*fig.* 352), puesto que, en el triángulo isósceles HMF, la altura trazada desde M es precisamente la mediatriz del lado opuesto. Como, por otra parte, esta altura es bisectriz del ángulo $\widehat{HMF}$, se puede enunciar el resultado siguiente:

La tangente a la parábola en un punto M *de ésta es la bisectriz interior del ángulo formado por el radio vector* MF *y por la semirrecta que tiene por origen* M *y corta perpendicularmente la directriz.*

Observación. La tangente en el vértice S (*fig.* 350) de la parábola es la recta (△) perpendicular en S al eje y que se ha denominado tangente en el vértice.

Las tangentes en B y B′ (*fig.* 350) pasan por el pie A de la directriz.

Condición de tangencia de una recta y una parábola. —

1° *La condición necesaria y suficiente para que una recta* TT′ *sea tangente a la parábola es que el punto simétrico del foco respecto a esta recta esté en la directriz.*

La condición es necesaria (ver teorema anterior); vamos a demostrar que es suficiente. Hipótesis: TT′ es la mediatriz de FH (*figura* 352), siendo H un punto cualquiera de la directriz. La perpendicular HM a la directriz en el punto H corta en M la tangente

TT'; el punto M es el centro de una circunferencia (C) de radio MF; como M está en la mediatriz de HF, será MF = MH, y esta circunferencia pasará por H y será tangente en este punto a la directriz. El punto M es, por tanto, un punto de la parábola y la tangente en M es TT'.

Esta recíproca se enuncia del modo siguiente: *La envolvente de la mediatriz de un segmento de que un extremo, A, es fijo y el otro, B, describe una recta (D) que no pasa por el punto A, es una parábola de foco A y de directriz (D);*

2° *La condición necesaria y suficiente para que una recta TT' sea tangente a la parábola es que la proyección ortogonal del foco sobre esta recta esté sobre la tangente en el vértice (fig. 353).*

La homotética de la directriz en la homotecia $(F \cdot \frac{1}{2})$ es la tangente (Δ) en el vértice. La condición necesaria y suficiente para que TT' sea tangente a la parábola es que el punto H simétrico de F respecto a TT' esté en la directriz; la proyección ortogonal E de F sobre TT' es el punto homotético de H, en la homotecia $(F. \frac{1}{2})$: luego esta condición puede ser sustituida por la condición del 1°.

La condición del 2° se enuncia también del siguiente modo:

El lugar geométrico de las proyecciones ortogonales del foco sobre las tangentes a la parábola es la tangente en el vértice.

Si se relaciona esta proposición con el teorema de Simson, demostrado en Geometría plana (v. p. 111), se comprueba que:

La condición necesaria y suficiente para que un punto F sea el foco de una parábola tangente a tres rectas dadas, es que el punto F esté en la circunferencia circunscrita al triángulo formado por estas tres rectas.

La proposición del 2° se enuncia también del siguiente modo:

La envolvente del segundo lado BC de un ángulo recto cuyo primer lado AB pasa por un punto fijo A y cuyo vértice B describe una recta fija (Δ) es una parábola de foco A, en la que (Δ) es la tangente en el vértice.

Se ha construido (*fig.* 354) el punto de contacto M del lado BC con su envolvente trazando BA' = BA y A'M perpendicular a (Δ).

Propiedades de la subnormal y de la subtangente a la parábola. — Sea G la proyección ortogonal (*fig.* 352) del punto M sobre el eje de la parábola y T el punto en que la tangente en M corta el eje. El segmento GT es por definición la **subtangente** a la parábola.

TEOREMA. *El vértice* S *es el punto medio de la subtangente* GT (fig. 353).

La homotecia (F • 2) transforma el segmento ES en el segmento HA; por consiguiente, $\overline{HA} = 2\overline{ES}$. Siendo la figura HMGA un rectángulo, $\overline{HA'} = \overline{MG}$. De estas dos igualdades resulta que $\frac{\overline{MG}}{\overline{ES}} = 2$

Ahora bien, siendo semejantes los triángulos TMG y TES, se tiene

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{TE}} = \frac{\overline{TG}}{\overline{TS}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{ES}}.$$

La última de estas relaciones es igual a 2, por consiguiente: $\overline{TG} = 2\overline{TS}$ y $\overline{TM} = 2\overline{TE}$, luego S es el punto medio de TG y E es el punto medio de TM.

El teorema queda demostrado. Además hemos establecido el resultado siguiente: *el punto medio del segmento* MT *de tangente comprendido entre el punto de contacto* M *y el punto* T, *situado sobre el eje, pertenece a la tangente en el vértice.*

DEFINICIONES. *Se llama* **normal** *a la parábola en un punto* M, *la perpendicular* MN *a la tangente. Sea* N *el punto de la normal situado sobre el eje: se llama* **subnormal** *el segmento* GN (fig. 353).

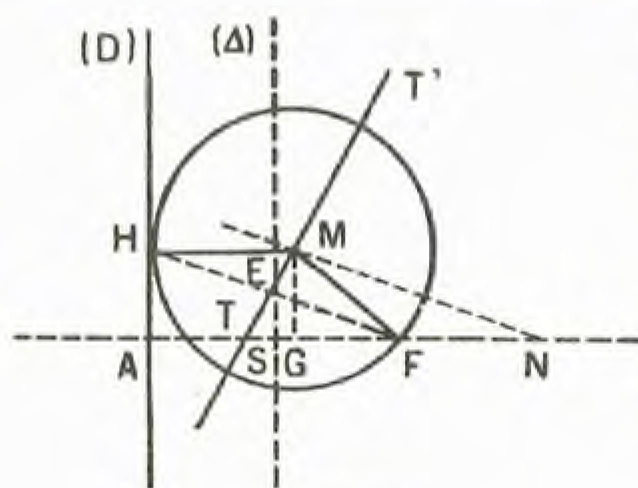


Fig. 353

TEOREMA. *La subnormal de la parábola es constante e igual al parámetro* p (fig. 353).

La normal MN es perpendicular a la tangente, luego es paralela a FH. El triángulo MGN se obtiene del triángulo HAF, por la traslación $\overrightarrow{HM}$; en efecto, esta traslación lleva H a M, A a G y sustituye HF por un lado paralelo, es decir, por MN. De lo que resulta: $\overline{GN} = \overline{AF} = p$.

De los dos teoremas precedentes se deduce que:

El punto medio del segmento TN *es el foco* F *de la parábola.*

En efecto, hemos establecido las igualdades siguientes: $\overline{TG} = 2\overline{TS}$ y $\overline{GN} = \overline{AF} = 2\overline{SF}$. Sumándolas se obtiene

$$\overline{TG} + \overline{GN} = 2\overline{TS} + 2\overline{SF},$$

es decir, $\overline{TN} = 2\overline{TF}$. El punto F es el punto medio de TN.

Tangente a la parábola paralela a una dirección dada. — TEOREMA. *A una parábola se le puede trazar una tangente y sólo una, paralela a una dirección* $\alpha\beta$, *que no es la dirección del eje de esta parábola.*

Sea $\alpha\beta$ la dirección dada (*fig.* 355), no paralela al eje de la parábola. Se halla el punto H, simétrico del foco F respecto a la tangente desconocida TT'. Este punto está en la perpendicular a la dirección $\alpha\beta$ trazada por el foco F; también está en la directriz (D) de la parábola. Estas dos rectas se cortan, puesto que $\alpha\beta$, perpendicular a la primera, no lo es, por hipótesis, a la segunda: H es el punto común a estas dos rectas. La mediatriz de FH es la única tangente a la parábola, paralela a la dirección dada $\alpha\beta$: M es el punto de contacto de dicha mediatriz con la parábola [MH es perpendicular a (D)].

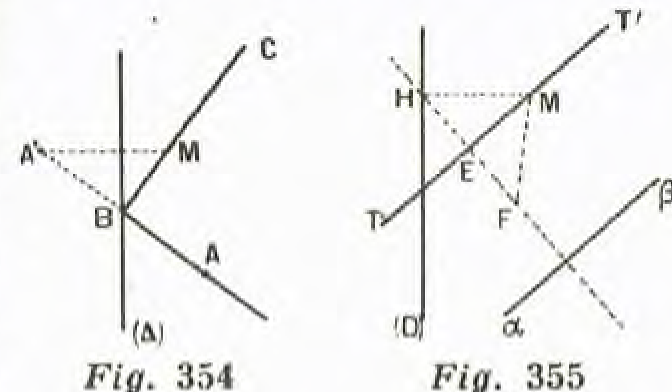


Fig. 354

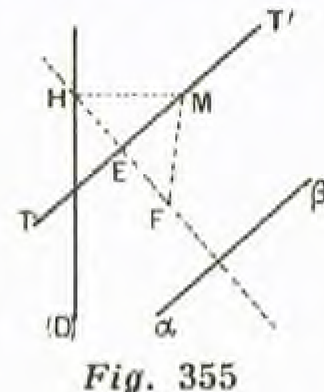


Fig. 355

OBSERVACIÓN. No hay ninguna tangente a la parábola paralela al eje.

Tangentes a la parábola que pasan por un punto dado. — TEOREMA. *Por un punto* P *no situado en una parábola, se pueden trazar a ésta dos tangentes y solamente dos o ninguna.*

Se determina el punto H simétrico del foco F respecto a una tangente cualquiera PT (*fig.* 356). Los segmentos PH y PF simétricos tienen la misma longitud: por tanto, el punto H está en la circunferencia (C) de centro P y radio PF; también está en la directriz (D) de la parábola. Si la directriz no corta la circunferencia (C), no hay ninguna tangente a la parábola que pase por el punto P: en este caso se dice que este punto es *interior* a la parábola. Si la directriz corta la circunferencia (C) en dos puntos H y H', hay dos tangentes a la parábola y solamente dos que pasan por el punto P: éstas son las mediatrices de los segmentos HF y H'F. En este caso, se dice que el punto P es *exterior a la parábola.*

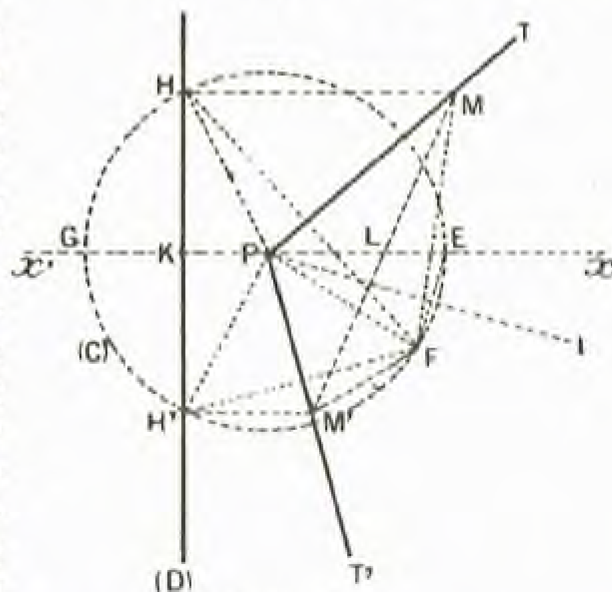


Fig. 356

Los puntos de contacto de estas tangentes con la parábola se hallan fácilmente. Basta con trazar por H y H' las perpendiculares a la directriz (D), que cortan en M y M' las tangentes MT y M'T'. Los puntos de contacto serán M y M'.

Posición de un punto respecto a una parábola. — Se dice que un punto P es exterior a una parábola cuando su distancia PK a la directriz es menor que su distancia PF al foco. El punto P es interior a la parábola cuando su distancia a la directriz es mayor que su distancia al foco.

Teoremas de Poncelet. — TEOREMA. *Los segmentos* PM *y* PM' *de las tangentes a una parábola comprendidos entre un punto* F *exterior a ella y los puntos de contacto* M *y* M' *se ven desde el foco* F *bajo un mismo ángulo.*

Los segmentos PM y PM' se ven bajo los ángulos $\widehat{PFM}$ y $\widehat{PFM'}$ (*fig.* 356); los ángulos $\widehat{PFM}$ y $\widehat{PHM}$ son iguales por ser simétricos respecto a la tangente PM; los ángulos $\widehat{PFM'}$ y $\widehat{PH'M'}$ son iguales por ser simétricos respecto a la tangente PM'; los ángulos $\widehat{PHM}$ y $\widehat{PH'M'}$ que son simétricos respecto a xx', mediatriz de HH', son iguales: por tanto, se deduce que los ángulos $\widehat{PFM}$ y $\widehat{PFM'}$ son iguales.

TEOREMA. *Las bisectrices de los ángulos formados por dos tangentes* PT *y* PT' *a la parábola son también bisectrices del ángulo* $\widehat{FPx}$, *formado por el radio vector* PF *y por la paralela* Px *al eje, trazada por el punto* P.

El punto E (o G) en que la mediatriz xx' de HH' corta (*fig.* 356) la circunferencia (C) es el punto medio de uno de los arcos que, en esta circunferencia, tiene por extremos H y H'; por tanto, FE es una de las bisectrices del ángulo $\widehat{HFH'}$. La perpendicular PI bajada desde el punto P a la bisectriz FE del ángulo HFH', es una de las bisectrices del ángulo formado por las tangentes PT y PT', que son perpendiculares a los lados FH y FH' del ángulo $\widehat{HFH'}$. Ahora bien, la recta PI es la altura del triángulo isósceles FPE: por tanto, es también bisectriz del ángulo $\widehat{FPE}$, y, por consiguiente, de uno de los ángulos formados por el radio vector PF y la paralela al eje, Px.

OBSERVACIÓN. El punto medio del segmento MM', punto equidistante de las dos rectas paralelas HM y H'M', pertenece a la paralela $x'x$, que equidista de estas dos rectas. En consecuencia:

La recta que une un punto exterior P *con el punto medio* L *de la cuerda* MM', *cuyos extremos son los puntos de contacto de las tangentes a la parábola que pasan por* P, *es paralela al eje.*

Tangentes rectangulares a la parábola. — TEOREMA. *La directriz es el lugar geométrico de los puntos por donde pasan dos tangentes rectangulares a la parábola.*

La condición necesaria y suficiente para que las tangentes a la parábola trazadas por un punto exterior P sean rectangulares (*fig.* 357) es que el ángulo $\widehat{HFH'}$ sea recto, es decir, que HH' sea un diámetro de la circunferencia (C). Para que suceda esto, es preciso y basta que el centro P de la circunferencia (C) esté en la directriz de la parábola, siendo la recta HH' dicha directriz. Todos los puntos de la directriz son exteriores a la parábola: el lugar geométrico de los puntos por donde pasan dos tangentes rectangulares a la parábola es, por tanto, la directriz.

Se ha efectuado (*fig.* 357) la construcción de las tangentes rectangulares a la parábola trazadas por un punto P de la directriz (D): los ángulos $\widehat{PFM}$ y $\widehat{PFM'}$ son (primer teorema de Poncelet) iguales e (ver la demostración) iguales a los ángulos $\widehat{PHM}$ y $\widehat{PH'M'}$, que, en este caso particular, son rectos. Los puntos M, F y M' están, por consiguiente, alineados, y F es la proyección ortogonal del punto P sobre MM'.

La recta MM' *que une los puntos de contacto de dos tangentes rectangulares a la parábola pasa por el foco: la proyección ortogonal sobre esta recta del punto* P *de intersección de estas dos tangentes es el foco de la parábola.*

Intersección de la parábola con una recta. — Se buscan los puntos comunes a una recta (D) y a la parábola. Estos puntos son los centros de las circunferencias (C) que pasan (v. p. 139) por el foco F y son tangentes a la directriz; por otra parte, para que el punto M esté en la recta (D), es necesario y suficiente que estas circunferencias pasen por el punto A, simétrico de F respecto a la recta (D').

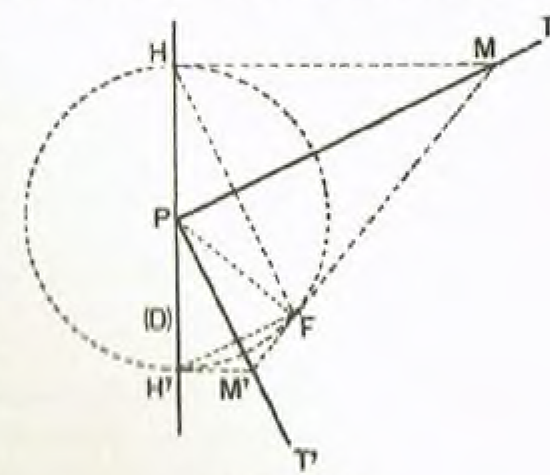


Fig. 357

En geometría plana se ha estudiado el modo de hallar las circunferencias que pasan por dos puntos fijos F y A y son tangentes a una recta (D) dada: se ha demostrado que si el punto A está situado respecto a la recta (D), es decir, con relación a la directriz en el mismo lado que el foco F, existen dos circunferencias que satisfacen estas condiciones, a las cuales corresponden dos puntos M de intersección de la recta con la parábola. En el caso de que la recta FA sea paralela a la directriz, habrá una sola circunferencia y, por tanto, un solo punto M.

Cuando el punto A y el punto F están a distinto lado de la directriz no hay ninguna circunferencia que cumpla las condiciones enunciadas. La recta (D) no corta la parábola. Como resumen podemos decir que:

Una recta que no sea paralela al eje ni tangente a la parábola corta ésta en dos puntos distintos o no la corta. Una recta paralela al eje corta la parábola en un solo punto.

Definición común de las cónicas

Definición de la elipse por un foco y una directriz. Definición de la hipérbola por un foco y una directriz. Directriz de una elipse o de una hipérbola dada. — **Cónicas:** Trazado de una elipse definida por sus ejes. Trazado de una hipérbola definida por sus asíntotas y un punto. Teorema de las secciones cónicas

Definición de la elipse por un foco y una directriz. — Sea (D) una recta llamada **directriz**, y F un punto no situado sobre dicha recta. Demostraremos el siguiente teorema:

TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos* M *del plano determinado por un punto* F *y una recta* (D), *cuya razón de distancias al punto y a la recta* $\frac{MF}{MH}$ *es un número* e *constante, menor que* 1, *es una elipse de foco* F.

Tracemos desde el punto F la perpendicular FK a la directriz (*fig.* 358). Sea A el punto del segmento FK que divide este segmento en la relación e: $\frac{AF}{AK} = e$; sea A' el segundo punto de la recta FK definido por la igualdad $\frac{A'F}{A'K} = e$. Como e es menor que 1, F está en el segmento AA'. Designaremos por O el punto medio de AA', por F' el simétrico de F con respecto a O, por (D') la simétrica de (D) con respecto al mismo punto, y por (Δ) la mediatriz de AA'.

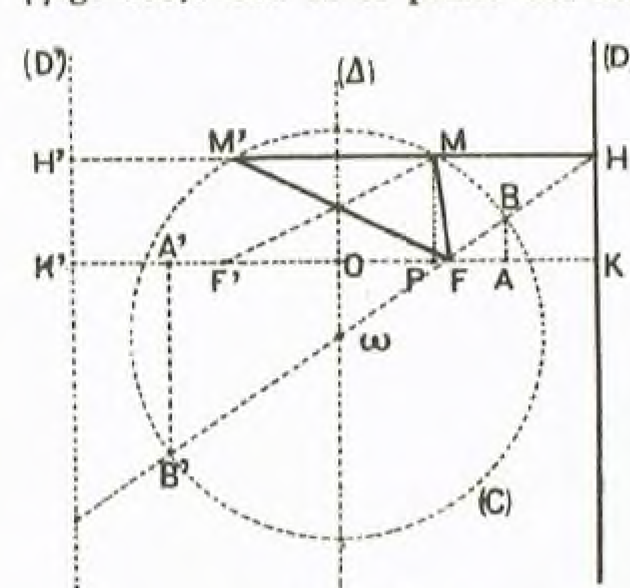


Fig. 358

Sea M un punto del lugar, tal que, por hipótesis, MF = e . MH; tracemos la recta MH, que corta la recta (D') en H', y obtengamos los puntos del lugar situados sobre esta recta. Estos puntos se encuentran sobre HH' y sobre la circunferencia (C), lugar de los puntos tales que $\frac{MF}{MH} = e$, siendo F y H fijos. Para construir la circunferencia (C), se buscan los puntos B y B' de la misma situados sobre FH: estos puntos se encuentran sobre las paralelas AB, A'B' a la recta (D), ya que la hipótesis $\frac{AF}{AK} = e$ implica (por semejanza de los triángulos FAB, FKH) $\frac{BF}{BH} = e$, e igualmente la hipótesis $\frac{A'F}{A'K} = e$ implica $\frac{B'F}{B'H} = e$. El diámetro del círculo (C) es BB'; el centro ω de este círculo es el punto medio de BB': por consiguiente, es un punto de (Δ), recta que equidista de las rectas paralelas AB y A'B'. La circunferencia (C) que pasa por M, puesto que, por hipótesis, $\frac{MF}{MH} = e$, corta la recta MH en un segundo punto M'; este punto es simétrico de M con respecto a la recta (Δ), ya que MM' es la cuerda de un círculo (C) cuyo centro ω está situado sobre la recta (Δ).

El punto M del lugar está situado al mismo lado que F con respecto a la recta (D), ya que de lo contrario MF sería mayor que MH; el punto M', simétrico de M con respecto a (Δ), está también situado al mismo lado que F con respecto a la recta (D). Los segmentos MF', MH' son iguales respectivamente a los segmentos simétricos con respecto a (Δ), M'F y M'H. Como M' pertenece al lugar, por construcción, tendremos $\frac{M'F}{M'H} = e$ y, por consiguiente, $\frac{MF'}{MH'} = e$. Esta igualdad implica la desigualdad MF' < MH', lo que prueba que M y, por consiguiente, M' están ambos situados al mismo lado que F' con respecto a la recta (D'). Por consiguiente, M y M' son dos puntos del segmento HH', como indica la figura 358.

De las igualdades $\frac{MF}{MH} = e$, que constituye la hipótesis, y $\frac{MF'}{MH'} = e$, que hemos demostrado, deducimos que

$$MF' + MF = e\,(MH + MH'),$$

y, como M es un punto del segmento HH':

$$MF + MF' = e \cdot HH'.$$

Como HH' es una cantidad constante (distancia entre dos rectas paralelas), el punto M se encuentra sobre una elipse (E) de focos F, F' y de eje mayor AA'.

Queda por demostrar que, recíprocamente, cualquier punto M situado, por hipótesis, sobre la elipse (E) es un punto del lugar. Se tiene, por hipótesis:

$$MF + MF' = 2a,$$

llamando $2a$ a la longitud AA'. Sea P la proyección ortogonal del punto M sobre AA': en el triángulo FMF' se tiene:

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 2\,\overline{F'F} \cdot \overline{OP}.$$

Y reemplazando en esta igualdad MF' por su valor $2a$ — MF, obtendremos

$$4a^2 + \overline{MF}^2 - 4a \cdot \overline{MF} - \overline{MF}^2 = 2\,\overline{F'F} \cdot \overline{OP}$$

$$4a^2 - 4a \cdot \overline{MF} = 2\,\overline{F'F} \cdot \overline{OP}$$

$$a \cdot \overline{MF} = a^2 - \overline{OF} \cdot \overline{OP}.$$

Los puntos A y A' que dividen al segmento FK en una relación dada e son conjugados armónicos con respecto a estos dos puntos; tendremos, pues: $\overline{OA}^2 = \overline{OF} \cdot \overline{OK}$. Reemplazando en la igualdad precedente a^2 por $\overline{OF} \cdot \overline{OK}$, la igualdad se convertirá en

$$a \cdot \overline{MF} = \overline{OF} \cdot (\overline{OK} - \overline{OP})$$

$$= \overline{OF} \cdot \overline{PK}$$

$$= \overline{OF} \cdot \overline{MH}.$$

Esta igualdad supone que

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MH}} = \frac{c}{a}.$$

Se verifica fácilmente que $\frac{c}{a} = e$. Por consiguiente, el punto M de la elipse pertenece al lugar.

Definición de la hipérbola por un foco y una directriz. — TEOREMA. *El lugar geométrico de los puntos M del plano definido por un foco F y una recta* (D), *cuya razón de distancias al punto y a la recta,* $\frac{MF}{MH}$, *es un número e, constante y mayor que 1, es una hipérbola de foco F.*

La demostración de este teorema, completamente análoga a la que acabamos de dar en el párrafo anterior, construyendo una figura basada en la figura 358, constituye un excelente ejercicio. Se observará que siempre existe un punto A que divide el segmento FK en la razón $\frac{AF}{AK}$ igual al número e, pero como e es mayor que 1, el punto A' y el punto A están situados a uno y otro lado de la recta (D). Se observará igualmente que como la razón $\frac{MF}{MH}$ es mayor que 1, los puntos M y M' están situados en las regiones del plano en donde no se encuentra el punto O, y que, por consiguiente, en lugar de $MH + MH' = HH'$, se tendrá $MH - MH' = HH'$, o bien $MH' - MH = HH'$, igualdades que implican que $|MF - MF'| = e \cdot HH'$.

Directriz de una elipse o de una hipérbola dada. — *Se llama* **directriz** *de una elipse o de una hipérbola dada,* **con respecto a un foco** F, *la polar del foco F con respecto al círculo principal.*

Sea *(fig. 358)* una elipse de focos F y F', de distancia focal $2c$, de vértices A y A', y de eje mayor $2a$. La polar del foco F con respecto al círculo principal es la recta (D), perpendicular en K, conjugado armónico de F con respecto a los puntos A y A', en el eje mayor AA'. Por consiguiente, de la demostración hecha en el párrafo "Definición de la elipse por un foco y una directriz", pág. 141, resulta que si M es un punto de la elipse dada, la razón $\frac{MF}{MH}$ es igual al valor constante $\frac{c}{a}$. De la demostración del teorema enunciado en el párrafo anterior se deduciría que si M es un punto de una hipérbola cualquiera de foco F y de directriz (D), la razón $\frac{MF}{MH}$ sigue siendo igual a $\frac{c}{a}$.

Por consiguiente:

La razón $\frac{MF}{MH}$ *de las distancias de un punto M de una elipse o de una hipérbola a un foco F y a la directriz correspondiente* (D) *es un número constante igual a* $\frac{c}{a}$.

El número $\frac{c}{a}$ es, por definición, la **excentricidad** de la elipse o de la hipérbola. *La excentricidad de la elipse es menor que 1 y la de la hipérbola mayor que 1.*

Este resultado se relacionará con el que vamos a obtener como consecuencia de la definición de la parábola.

La razón $\frac{MF}{MH}$ de las distancias de un punto M de una parábola al foco F y a la directriz (D) es un número constante igual a 1.

Este número se denomina también excentricidad. *La excentricidad de la parábola es igual a* 1.

OBSERVACIÓN. Las asíntotas OG, OG' de una hipérbola se construyen *(fig. 359)* trazando desde F las tangentes FG, FG' al círculo principal (O). La polar de F con respecto al círculo principal es GG', que es también la directriz (D) con respecto al foco F.

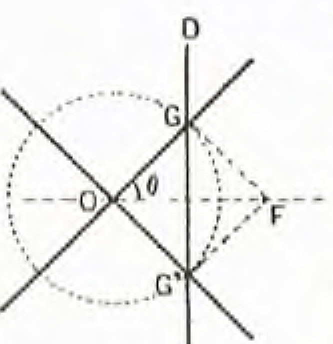


Fig. 359

Por consiguiente:

1° *Las proyecciones ortogonales del foco F sobre las asíntotas de una hipérbola están situadas en la directriz relativa a este foco;*

2° En el triángulo OGF, rectángulo en G, se tiene

$$OG = a \text{ y } OF = c.$$

De donde

$$\cos\theta = \frac{OG}{OF} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}.$$

Cónicas

DEFINICIONES. Con la sección anterior damos fin al estudio geométrico tradicional de la elipse, la hipérbola y la parábola, consideradas como curvas planas estudiadas en su plano. Pero esas tres curvas poseen otras propiedades, muy numerosas e interesantes, cuyo verdadero sentido sólo puede apreciarse si se completa el estudio geométrico con unas consideraciones de geometría analítica, que exceden el marco de esta obra. Nos limitaremos, pues, a enunciar, sin demostrarlos, algunos resultados elegidos entre los más interesantes.

Cónica *es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo* (foco) *y a una recta fija* (directriz) *que no pasa por el foco es una cantidad constante. Si esta constante es menor que 1, la cónica se llama elipse; si es mayor que 1, se llama hipérbola, y si es igual a 1, se llama parábola. O también: parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de otro fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.*

Se demuestra que las secciones planas producidas en un cono, cuya base es una cónica, por planos que cortan este cono sin ser tangentes al mismo, son cónicas. En particular, las secciones de un cono de revolución producidas por planos que no pasan por el vértice del cono, son cónicas. Se demuestra igualmente que las secciones planas de un cilindro, cuya base es una cónica, producidas por planos que no sean paralelos a las generatrices, son también cónicas; en particular, las secciones planas de un cilindro de revolución son elipses.

Trazado de una elipse definida por sus ejes (PROCEDIMIENTO DE LA BANDA DE PAPEL). — La elipse está definida por sus ejes A'A, B'B. Sea O su centro *(fig. 360)*. Se señalan en el borde rectilíneo de una cartulina rígida, una tarjeta de visita por ejemplo, dos longitudes: MQ igual al semieje mayor OA, y MP igual al semieje menor, ya al mismo lado, ya a distinto lado de M. Se desplaza la cartulina de forma que el punto P describe la recta AA' y el punto Q la recta BB'; el punto M describirá entonces la elipse. Señalando con el lápiz por puntos las diversas posiciones del punto M, se obtiene un trazado de puntos de la elipse dada.

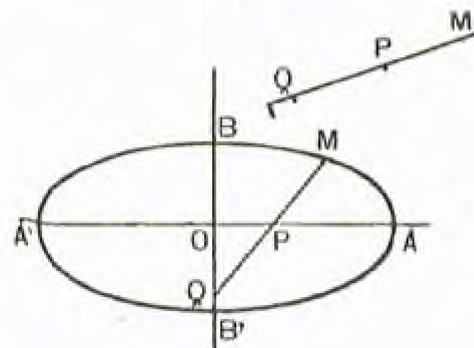


Fig. 360

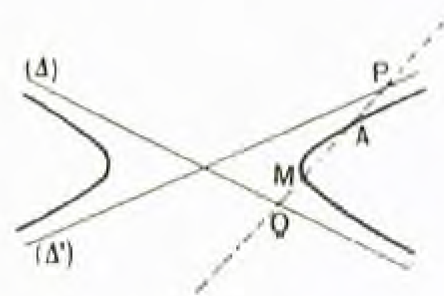


Fig. 361

Trazado de una hipérbola definida por sus asíntotas y un punto. — Sean (Δ), (Δ') las asíntotas, y A un punto de una hipérbola dada. Se aplica sobre el papel una regla cuyo borde pase por A y corte las rectas (Δ) y (Δ') *(fig. 361)* en Q y P. Se lleva sobre el borde de la regla una longitud QM = AP, de forma que M y A se encuentren en el mismo ángulo de las asíntotas. Marcando con un punto sobre el papel la posición de M y volviendo a comenzar las operaciones para otras posiciones de la regla, se obtiene un trazado de la hipérbola por puntos.

La proyección ortogonal de una circunferencia sobre un plano es una elipse cuyo eje mayor es el diámetro de dicha circunferencia.

Teorema de las secciones cónicas. — *La sección de un cono de revolución producida por un plano que no pase por el vértice de dicho cono es una elipse, una hipérbola o una parábola (fig. 362).*

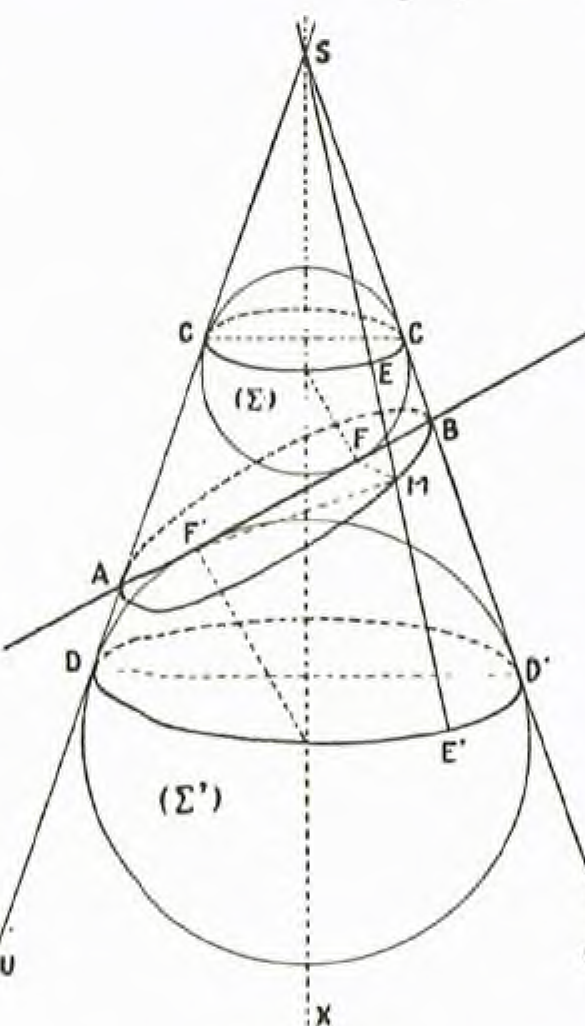


Fig. 362

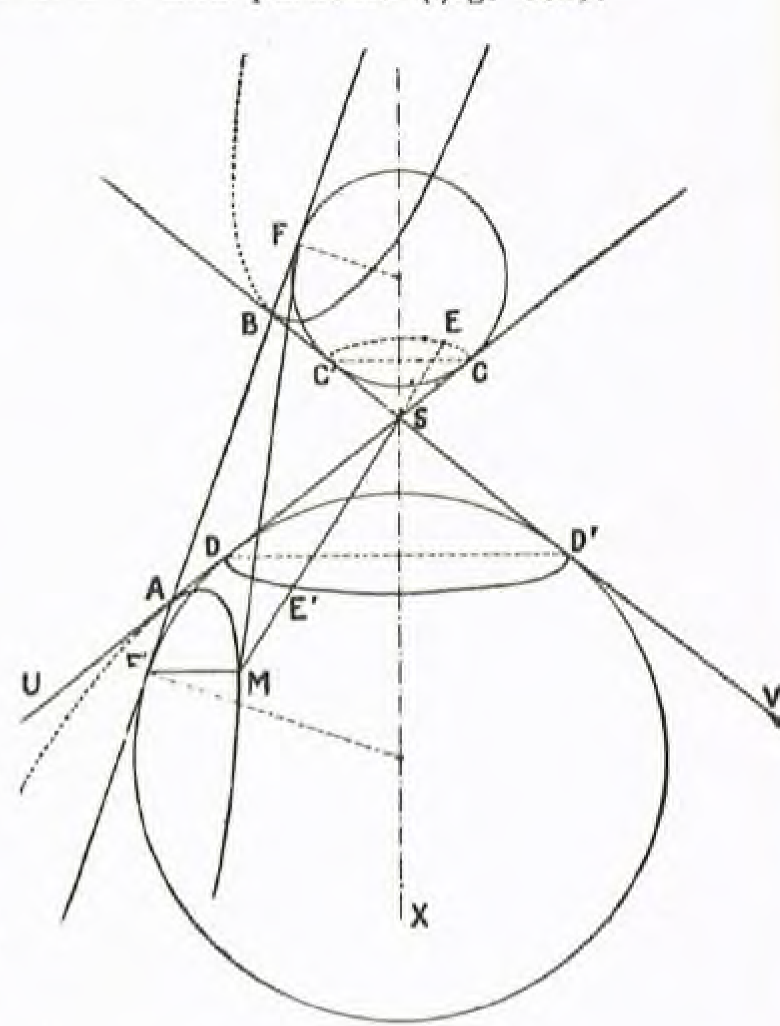


Fig. 363

El plano de la figura es el que pasa por el eje SX del cono y es perpendicular al plano secante. Este plano corta el cono según dos generatrices SU, SV, y el plano secante según la recta AB. Los dos primeros casos son aquellos en que A se encuentra sobre SU, y B sobre SV. Se trazan los dos círculos *(fig. 362 y 363)*, cuyos centros están situados en SX y que son tangentes a las rectas SU, SV, AB. Estos círculos, al girar alrededor de SX, engendran dos esferas: la primera (Σ) es tangente al plano secante en F y al cono en todos los puntos de la circunferencia CC'; la segunda (Σ') es tangente al plano secante en F' y al cono en todos los puntos de la circunferencia DD'. La generatriz SM del cono corta el plano secante en M y es tangente a la esfera (Σ) en E y a la esfera (Σ') en E'.

1er CASO. *Los puntos* A *y* B *están situados a distinto lado del eje del cono (fig. 362).*

El punto M que se proyecta ortogonalmente sobre el plano de la figura, al que es, por hipótesis, perpendicular el plano secante entre A y B, es un punto comprendido entre los planos de los círculos CC′ y DD′; luego M es un punto del segmento EE′, y, por consiguiente, ME + ME′ es una cantidad constante.

Ahora bien, MF es una tangente a la esfera (Σ), puesto que el plano secante es tangente en F a la esfera (Σ), y ME es otra tangente a (Σ): por consiguiente, se tendrá MF = ME. Análogamente, MF′ y ME′, ambas tangentes a (Σ′), son iguales, MF′ = ME′, y, por consiguiente:

$$MF + MF' = ME + ME' = EE'$$

El punto M pertenece a una elipse de focos F y F′ y de eje mayor AB, cuyo plano es el plano secante.

2º CASO. A *y* B *están situados a un mismo lado del eje del cono (fig. 363).*

El punto M, que se proyecta ortogonalmente sobre el plano de la figura fuera del segmento AB, no está comprendido entre los planos de los círculos CC′ y DD′. Por consiguiente, dicho punto no se encuentra en el segmento EE′, y se tendrá | ME — ME′ | = EE′. Esta igualdad implica, por las mismas razones que en el primer caso, | MF — MF′ | = EE′. El punto M de la sección plana se encuentra situado sobre una hipérbola de focos F, F′ y vértices A y B. La razón expuesta en el primer caso basta para mostrar que cualquier punto de esta hipérbola está situado en el cono, y que, por consiguiente, la *sección se compone de la hipérbola completa situada en el plano secante de focos* F *y* F′ *y eje mayor* AB.

3er CASO. *La recta* AB *es paralela a una de las generatrices del cono,* SU *por ejemplo (fig. 364).*

Como el punto A ya no existe, designaremos por BP la recta de intersección del plano secante con el plano de la figura. No existe más que una sola esfera (Σ), tangente al plano secante en F y al cono en todos los puntos de una circunferencia CC′. Designemos por (Δ) la intersección del plano secante con el plano de este círculo, por H el punto en que esta recta corta la recta BP, y por *m* la proyección ortogonal del punto M sobre el plano de la figura. El plano que es perpendicular al eje y pasa por el punto M corta el cono según un círculo DD′; este plano corta el plano de la figura según la recta DD′, que corta BP en el punto *m*.

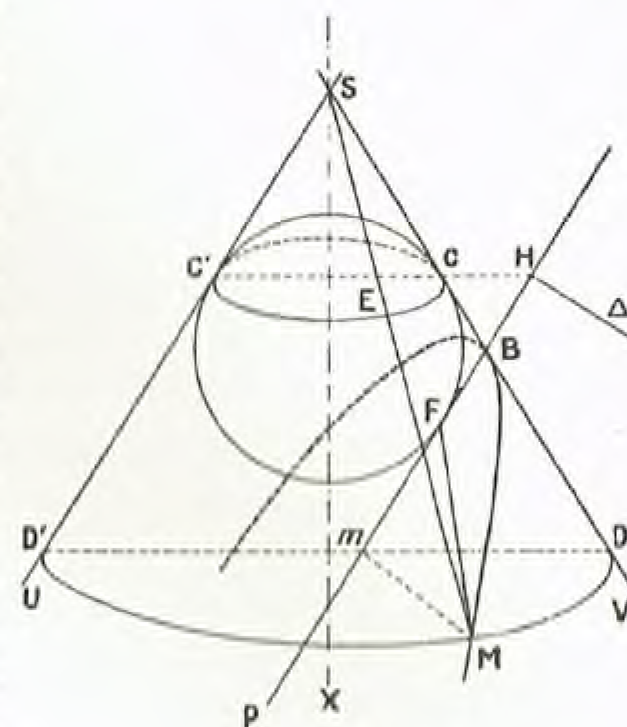


Fig. 364

Las tangentes MF y ME a la esfera (Σ) son iguales; los segmentos EM y C′D′, que pueden obtenerse uno de otro por rotación, son iguales; C′D′ y *m*H, lados paralelos de un paralelogramo, son iguales. Estas igualdades implican en definitiva que MF = = *m*H. Ahora bien, en el plano secante, la distancia de M a la recta (Δ) es igual a *m*H, y por consiguiente el punto equidistante de F y la recta (Δ) se encuentra sobre la parábola de foco F y directriz (Δ).

El razonamiento expuesto en el primer caso permite afirmar que todo punto de esta parábola se encuentra en el cono. De donde resulta que *la sección del cono se compone de la parábola completa situada en el plano secante, de foco* F *y directriz* (Δ).

Puede demostrarse que, en los casos primero y segundo, la recta de intersección del plano secante con el plano del círculo CC′ es la directriz de la cónica de sección relativa al foco F.

Áreas de los polígonos planos

Área. Área de un rectángulo. Área del paralelogramo. Área del triángulo. Área del trapecio. Área de un polígono. Áreas de polígonos homotéticos. Razón de las áreas de dos polígonos planos semejantes. Proyección de un área plana

Áreas. — *Se llama* **área** *de una superficie el número que mide su extensión.* Sólo se habla de área cuando la superficie está limitada por un contorno simple, y en el lenguaje ordinario se confunde el área limitada por un contorno con el área del contorno. Así, se dice el área de un triángulo para designar el área de la superficie plana interior al triángulo.

Las áreas de dos superficies que pueden superponerse son, por definición, iguales: si se divide una superficie (Σ), trazando una línea sobre la misma, en dos partes (S) y (S′), el área de la superficie (Σ) es, por definición, la suma de las áreas de las superficies (S) y (S′).

El objeto de este capítulo es hallar la medida de ciertas superficies. Se conviene expresamente en:

1º Que todas las longitudes se miden con la misma unidad;

2º Que la unidad de área, superficie cuya área es igual a 1, por definición, es el área del cuadrado cuyo lado tiene como medida la unidad de longitud;

3º Que, con arreglo a lo establecido, cuando no haya confusión posible, se denominan base, lado y altura las medidas de la base, del lado o de la altura, respectivamente, y área la medida del área. Así, pues, se demostrará que el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura: esto quiere decir que el número que mide el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de los números que miden su base y su altura.

Se dice que dos áreas son **equivalentes** *cuando están representadas por el mismo número, sin que tengan necesariamente que poder superponerse.*

Área de un rectángulo. — TEOREMA. *El área de un rectángulo es igual al producto de sus dos lados no paralelos.*

1º Sean (Δ y (Δ′) (*fig.* 365) dos rectas paralelas, a la distancia *h*: se llamará rectángulo correspondiente al segmento AB de (Δ) el rectángulo ABB′A′, cuyo lado A′B′ está en (Δ′). A dos segmentos iguales BE y CD corresponden dos rectángulos que pueden superponerse mediante la traslación $\overrightarrow{BC}$, y que, por esta razón, tienen áreas iguales. A la suma AE de los segmentos AB y CD, obtenida reemplazando CD por BE, cuya longitud es igual, corresponde un rectángulo AEE′A′ cuya área es la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes a AB y CD.

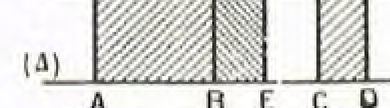


Fig. 365

Esto basta para afirmar que el segmento AB y el rectángulo que le corresponde son magnitudes homólogas (v. p. 76). De donde resulta que la razón de las áreas de los rectángulos ABB′A′ y CDD′C′ es igual a la de los lados AB y CD.

Supuesto esto, compararemos primeramente dos rectángulos ABB′A′ y PQQ′P′, cuyos lados AA′ y PP′ son iguales. Por un desplazamiento, se puede transportar PQQ′P′ a una posición CDD′C′, que sea la de la figura 365. Los rectángulos PQQ′P′ y CDD′C′ tienen áreas iguales, puesto que pueden superponerse; por consiguiente, la razón de las áreas de los rectángulos ABB′A′ y PQQ′P′ es igual a la de las áreas de los rectángulos ABB′A′ y CDD′C′; esta razón es igual a la de los lados $\frac{AB}{CD}$, razón que es a su vez igual a $\frac{AB}{PQ}$. De donde se deduce la siguiente regla:

La razón de las áreas de dos rectángulos que tienen iguales uno de sus lados es igual a la razón de los lados desiguales.

2º Sea ABB′A′ (*fig.* 366) un rectángulo: AB = *a* y AA′ = *b*. Elijamos como unidad de área el área de un cuadrado PQQ′P′, cuyo lado sea la unidad de longitud, y tratemos de medir el área *x* del rectángulo ABB′A′; para ello, construyamos un rectángulo ABB_1A_1 de dimensiones AB = = *a* y AA_1 = 1; sea *y* la medida de su área. Los dos rectángulos ABB′A′ y ABB_1A_1 tienen un lado igual (AB común), y por consiguiente los números *x* e *y* son entre sí como los otros lados *b* y 1:



Fig. 366

$$\frac{x}{y} = b.$$

Los dos rectángulos ABB_1A_1 y PQQ′P′ tienen un lado igual: AA_1 = PP′ = 1; los números *y* y 1, que representan sus áreas, guardan, pues, entre sí la misma relación que los otros lados *a* y 1; por consiguiente, *y* = *a*, luego *x* = *ab*.

CASO PARTICULAR. *El área del cuadrado de lado* a *es* a^2.

Área del paralelogramo. — TEOREMA. *El área del paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.*

Sea (*fig.* 367) un paralelogramo ABB′A′; elijamos arbitrariamente como base el lado AB. Tracemos desde los vértices A′ y B′ las perpendiculares A′C y B′D a la base: una de estas dos rectas será la altura del paralelogramo.

Fig. 367

La traslación $\overrightarrow{A'B'}$ hace que coincidan los puntos A′, A y C en B′, B y D, respectivamente: las áreas de los triángulos AA′C y BB′D, que pueden superponerse, son iguales por definición. De donde se deduce que el área del paralelogramo es igual al área del rectángulo CDB′A′, puesto que se obtiene de ésta suprimiendo en el rectángulo el triángulo BDB′ y añadiéndole el triángulo ACA′, que son iguales. El área del rectángulo es igual al producto A′B′ × A′C de dos lados no paralelos. Ahora bien, A′B′ = AB y por consiguiente

el área del paralelogramo es igual al producto AB × A'C, de la base AB por la altura A'C.

Área del triángulo. — Sea el triángulo ABC: elijamos el lado BC (*fig.* 368) como base y la altura correspondiente AH como altura.

Teorema. *El área de un triángulo es igual al semiproducto de un lado por la altura correspondiente.*

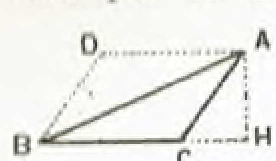


Fig. 368

Completemos el paralelogramo ACBD: siendo los triángulos ACB y BDA iguales, pueden superponerse, y por consiguiente tienen igual área. Sea S el área de uno de esos triángulos: la del paralelogramo será 2S y, aplicando la regla precedente, tendremos

$$2S = BC \cdot AH,$$

y, por consiguiente, $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH.$

Caso particular. *El área de un triángulo rectángulo cuyos catetos son* a *y* b *es* $\frac{ab}{2}$.

El área de un triángulo equilátero de lado a *es igual a* $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Área del trapecio. — Se llaman bases del trapecio los lados (*fig.* 369) paralelos AB y A'B', y altura la distancia entre ambos.

Teorema. *El área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura.*

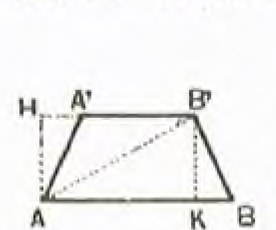


Fig. 369

Tracemos la diagonal AB'; el área del triángulo AA'B', de base A'B' y altura AH, es $\frac{1}{2}$ A'B' · AH, y la del triángulo B'AB, de base AB, y altura B'K, es $\frac{1}{2}$ AB · B'K. Como AH = B'K = *h*, altura del trapecio, el área S de éste es la suma de las áreas de los dos triángulos.

$$S = \frac{1}{2}(AB + A'B')\,h.$$

Área de un polígono. Áreas de polígonos homotéticos. — Para hallar el área de un polígono se le descompone en triángulos y se hallan las áreas de éstos.

Teorema. *La razón de las áreas de dos polígonos homotéticos es igual al cuadrado de la razón de homotecia.*

1° Sea el polígono un triángulo ABC, de base BC y altura AH (*fig.* 370). El área S de este triángulo es $\frac{1}{2}$ BC · AH. La homotecia

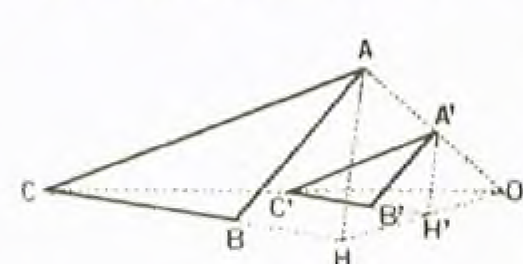


Fig. 370

(O · *k*) transforma A, B, C, H en A', B', C', H' respectivamente. El ángulo $\widehat{A'H'B'}$ (o $\widehat{A'H'C'}$) es recto por ser homotético de un ángulo recto: por consiguiente, A'H' es la altura del triángulo A'B'C', de base B'C'. El área S' de este triángulo es $S' = \frac{1}{2} B'C' \cdot A'H'$. Pero los segmentos B'C' y A'H', homólogos de BC y AH, son proporcionales a éstos: por consiguiente, tendremos $B'C' = |k| \cdot BC$, $A'H' = |k| \cdot AH$, y, por lo tanto, $S' = k^2 \cdot S$.

2° Caso de un polígono cualquiera. El área S de este polígono es la suma de las áreas S_1, S_2 de cierto número de triángulos en que se ha descompuesto el polígono; el área S' de la figura homotética es la suma de las áreas S'_1, S'_2 de los triángulos homotéticos a los precedentes. Para estos triángulos, tendremos $S'_1 = k^2S_1$, $S'_2 = k^2S_2$ ... De estas igualdades se deduce evidentemente que

$$S'_1 + S'_2 + \ldots = k^2(S_1 + S_2 + \ldots),$$

es decir, $S' = k^2 \cdot S$.

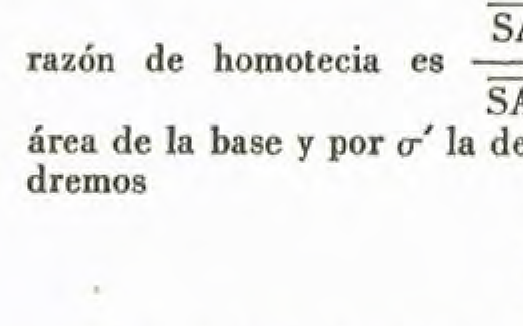


Fig. 371

Aplicación. En la demostración anterior no se ha supuesto que la homotecia sea plana. Por consiguiente, puede aplicarse a las secciones producidas en una pirámide SABCDE (*fig.* 371) por un plano (Q) paralelo al plano de base (P). La sección es un polígono A'B'C'D'E', homotético de la base, cuya razón de homotecia es $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$. Si designamos por σ la medida del área de la base y por σ' la de la sección producida por el plano (Q), tendremos

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \left(\frac{SA'}{SA}\right)^2.$$

Si H y H' son los puntos en que la altura SH corta los planos (P) y (Q), se tendrá igualmente

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \left(\frac{SH'}{SH}\right)^2.$$

Razón de las áreas de dos polígonos planos semejantes. — Teorema. *La razón de las áreas de dos polígonos planos semejantes es igual al cuadrado de la razón* k *de semejanza.*

Cuando dos polígonos (P) y (P') son semejantes, uno de ellos (P') puede superponerse a un homotético (P_1) de (P), siendo la razón de homotecia igual a *k*, que es la razón de semejanza.

El área S' de (P') será igual, por lo tanto, al área S_1 de (P_1), que es a su vez igual a k^2S, siendo S el área del polígono (P). Por consiguiente, se tendrá:

$$\frac{S'}{S} = k^2$$

Proyección de un área plana. — Sea (P) un plano dado (*fig.* 372), (Q) un plano fijo que no sea paralelo ni perpendicular al plano (P) elegido como plano de proyección. Hagamos corresponder a cada punto M de (P) su proyección ortogonal M' sobre el plano (Q). Se traza la perpendicular MH desde el punto M a la recta de intersección (D) de los dos planos; en virtud del teorema de las tres perpendiculares (v. p. 119), la recta M'H es perpendicular a la recta (D); el ángulo agudo $\widehat{MHM'} = \theta$ es uno de los ángulos del diedro formado por (P) y (O): es, pues, una constante de la figura.

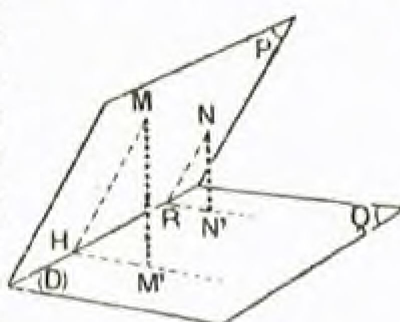


Fig. 372

Si se sitúa el punto M en un punto determinado N del plano (P), M' coincidirá con N' y H con R. Los dos triángulos rectángulos MHM', NRN', que tienen un ángulo agudo igual a θ, son semejantes, de lo que se deduce:

$$\frac{HM'}{HM} = \frac{RN'}{RN}.$$

La cantidad $\frac{HM'}{HM}$ es, por consiguiente, una constante, cuyo valor no depende del punto M, y que se denomina coseno θ; se la representa por la notación cos θ.

La definición y las propiedades del coseno de un ángulo se estudian en trigonometría. Nos limitaremos simplemente a recordar aquí que el coseno de cualquier ángulo es siempre igual o menor que 1 y que se tiene

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Teorema. *La razón entre el área S' de un triángulo A'B'C', proyección ortogonal de un triángulo ABC, y la del área S de este triángulo es igual al coseno del ángulo θ que forman los planos de esos dos triángulos* (fig. 373).

Sea (P) el plano del triángulo ABC, y (Q') el plano del triángulo A'B'C', proyección ortogonal del triángulo ABC. Tracemos por el vértice A del triángulo ABC un plano (Q) paralelo al plano (Q'); sean $\beta\gamma$ las proyecciones ortogonales sobre este plano de los vértices B y C del triángulo ABC. Hemos visto que las áreas de los triángulos A'B'C' y $A\beta\gamma$, proyecciones de un mismo polígono sobre planos paralelos, eran iguales.

Fig. 373

Supongamos que el lado BC corta el plano (Q) en el punto E y además que E no se encuentra en el segmento BC. Sean H y K las proyecciones ortogonales de B y C sobre la intersección de los planos (P) y (Q): BH y CK, por una parte, y βH, γK, por otra, son perpendiculares a esta intersección HK.

El área S del triángulo ABC es la diferencia de las áreas del triángulo ACE, de base AE y altura CK, y del triángulo ABE, de base AE y altura BH.

$$S = \frac{1}{2} AE\,(CK - BH).$$

El área S' del triángulo $A\beta\gamma$, igual al área S' del triángulo A'B'C', es la diferencia de las áreas del triángulo $A\gamma E$, de base AE y altura γK, y del triángulo $A\beta E$, de base AE y altura βH.

$$S' = \frac{1}{2} AE\,(\gamma K - \beta H).$$

Pero como las razones $\frac{\gamma K}{CK}$ y $\frac{\beta H}{BH}$ son iguales a cos θ, se tendrá

$$S' = \frac{1}{2} AE\,(CK \cdot \cos\theta - BH \cdot \cos\theta) = S\cos\theta.$$

La razón $\frac{S}{S}$ será, pues, igual a cos θ.

Volumen de los poliedros

Volumen. Volumen del paralelepípedo rectángulo. Equivalencia entre un prisma oblicuo y otro recto. Volumen del paralelepípedo. Volumen del prisma. Volumen de la pirámide. Volumen del tronco de prisma. Volumen del tronco de pirámide

Volumen. — *Se llama* **volumen** *limitado por una determinada superficie* (S) *y, abreviando, volumen de* (S), *cuando no hay confusión posible, la porción de espacio limitada por esta superficie, considerada desde el punto de vista de su extensión.* Nos referimos a volumen únicamente cuando esta porción de espacio está efectivamente limitada.

Cuando dos superficies se pueden superponer, por definición limitan volúmenes iguales. Cuando una superficie divide un volumen en dos partes, la suma de los volúmenes V_1 y V_2 de estas dos partes es, por definición, igual al volumen V.

El objeto de este capítulo es hallar la medida de ciertos volúmenes. Se ha convenido expresamente:

1° Que todas las longitudes son medidas con la misma unidad, y todas las superficies con la unidad de superficie correspondiente.

2° Que la unidad de volumen es el volumen de un cubo cuyo lado es la unidad de longitud.

3° Que, siempre que esto no presente inconvenientes, se dirá la palabra volumen en lugar del número que mide el volumen.

Se dice que dos volúmenes son **equivalentes** *cuando, sin ser obligatoriamente superponibles, son medidos por el mismo número.*

Volumen del paralelepípedo rectángulo. — Teorema. *El volumen del paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres lados.*

1° Tracemos (*fig.* 374) en un plano (P) un rectángulo de lados $AA_1 = a$, $A_1A_2 = b$, y por los cuatro vértices de este rectángulo, perpendiculares al plano (P), (Δ), (Δ_1), (Δ_2) y (Δ^3).

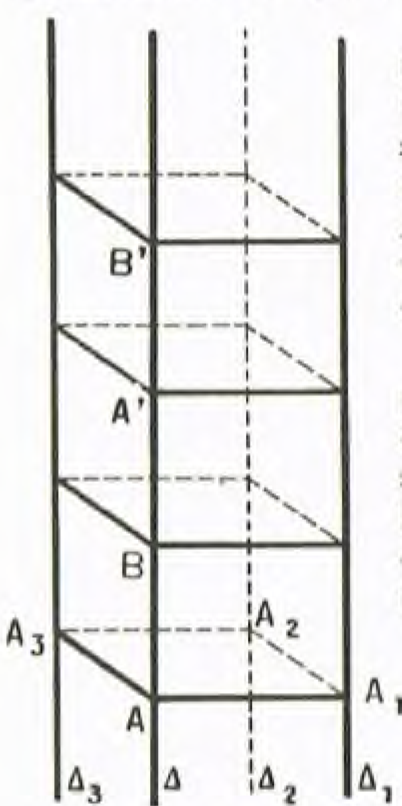


Fig. 374

Los volúmenes de los paralelepípedos construidos sobre las paralelas (Δ), (Δ_1), (Δ_2) y (Δ_3) y que corresponden a segmentos iguales son evidentemente iguales. El volumen del paralelepípedo que corresponde a un segmento AC, igual a AB + BC, es igual a la suma de los volúmenes de los paralelepípedos que corresponden a AB y a BC.

Esto basta para deducir que el volumen de un paralelepípedo correspondiente a un segmento AB es una magnitud homóloga (v. p. 76) de este segmento. Por consiguiente, la razón de los volúmenes V y V' de paralelepípedos correspondientes a AB y A'B', es igual a la razón de estos lados

$$\frac{V}{V'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Por tanto:

La razón de los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos lados iguales es igual a la razón de los terceros lados.

2° Supuesto esto, consideremos dos paralelepípedos rectángulos: los lados del primero son *a*, *b* y *c* y su volumen V; los del segundo son *a*, *b* y 1 y su volumen V_1; los del tercero *a*, 1 y 1 y su volumen V_2; los del cuarto 1, 1 y 1 y, por definición, su volumen será 1. Comparando el volumen de uno de ellos con el siguiente, se verifica, por aplicación de la regla establecida antes:

$$\frac{V}{V_1} = c, \quad \frac{V_1}{V_2} = b \text{ y } \frac{V_2}{1} = a.$$

De estas igualdades se obtiene $V = abc$.

Equivalencia entre un prisma oblicuo y otro recto. — Teorema. *Un prisma oblicuo es equivalente al prisma recto que tiene por base una sección recta y por altura la arista lateral del prisma oblicuo.*

Sea ABCA'B'C' (*fig.* 375) un prisma oblicuo, triangular para mayor facilidad de la construcción de la figura, pero que, en realidad, podría tener por base un polígono cualquiera. Sean P y P' dos puntos de la recta AA', tales que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'}$. Sean PQR y P'Q'R' dos secciones rectas; se situará P sobre AA' de modo que la sección PQR sea exterior al prisma.

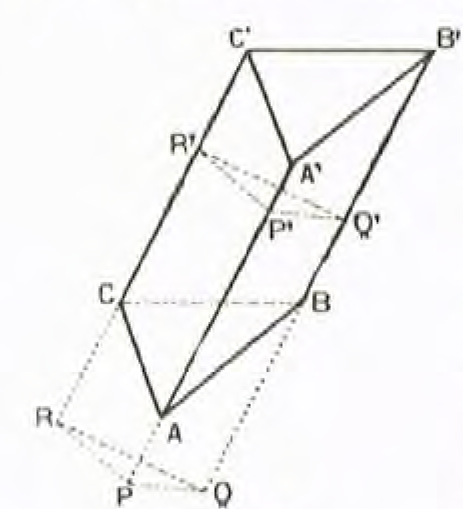


Fig. 375

La traslación $\overrightarrow{AA'}$ lleva a A a A', B a B', C a C', P a P', Q a Q' y R a R': los dos volúmenes PQRABC y P'Q'R'A'B'C', superponibles, son, por tanto, iguales. Si se añade al volumen ABCA'B'C' el primero de estos volúmenes y se le resta el segundo se obtendrá el volumen del prisma PQRP'Q'R', de base PQR y altura PP', quedando demostrado el teorema.

Volumen del paralelepípedo. — Elijamos arbitrariamente una de las caras ABCD como base (*fig.* 376): se llama altura la distancia de uno cualquiera de los otros vértices A', B', C', D' al plano de la base.

Teorema. *El volumen de un paralelepípedo es el producto de la base por la altura.*

1° Sea un paralelepípedo recto (*fig.* 376). AA' es, por hipótesis, perpendicular al plano de la base ABCD, que es un paralelogramo. Por tanto AA' es la altura.

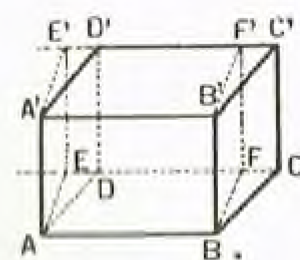


Fig. 376

Siendo las rectas AA' y AB perpendiculares, se puede trazar por AA' un plano perpendicular a AB, que corta las aristas CD y C'D' o sus prolongaciones en E y E' respectivamente.

El paralelepípedo dado es un prisma de base A'ADD' y de arista AB: es equivalente al prisma cuya base sea el rectángulo AA'E'E, sección recta del prisma antes citado por construcción y cuya arista sea AB; este nuevo prisma AEE'A'BFF'B' es un paralelepípedo pendicular a AB, porque está en un plano perpendicular a AB; es, por tanto, la altura del paralelogramo ABCD, y el producto AB.AE es el área S de este paralelogramo.

El volumen V del prisma dado tiene por medida el producto AA' · S, es decir, el producto del área S de la base por la altura correspondiente AA'.

2° Sea un paralelepípedo oblicuo (*fig.* 377). El paralelepípedo ABCDA'B'C'D' tiene por base ABCD y por altura A'H. Se traza por H una recta EF perpendicular a AB: el plano A'EF que contiene A'H y EF, perpendiculares ambas a la recta AB, es un plano perpendicular a esta recta y por tanto una sección recta del prisma de base AA'D'D y de arista AB. El volumen V de este prisma (que es precisamente el paralelepípedo dado) es equivalente al volumen del prisma (P) que tiene por base la sección recta A'EFG y por arista AB: este prisma es un paralelepípedo recto; luego, según hemos visto en 1°, su volumen V es el producto de la altura AB por el área de la base A'EFG, área igual a EF . A'H:

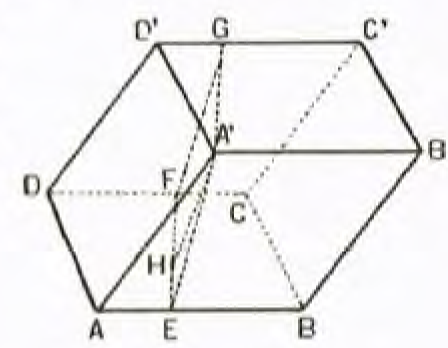


Fig. 377

$$V = A'H \,.\, EF \,.\, AB.$$

El producto EF . AB es el área (S) de la base ABCD, puesto que, por construcción, EF es perpendicular a AB. Por tanto, se tiene V = S · A'H, producto de la base por la altura.

Volumen del prisma. — Teorema. *El volumen de un prisma es igual al producto de la base por la altura.*

1° Supongamos que el prisma tiene por base un triángulo ABC (*fig.* 378). Su altura es la distancia A'H de uno de los otros vértices, A' por ejemplo, al plano ABC.

Completemos el paralelepípedo cuyos lados son BA, BB' y BC: sea DD' la cuarta arista de este paralelepípedo paralela a A'A.

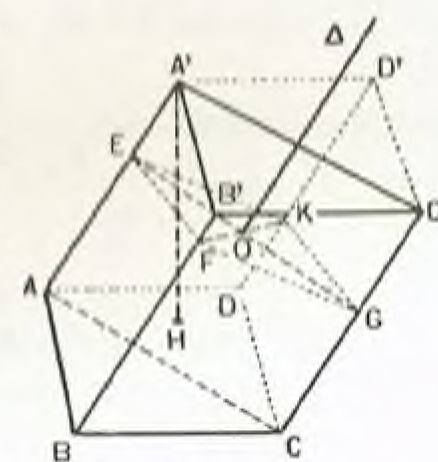


Fig. 378

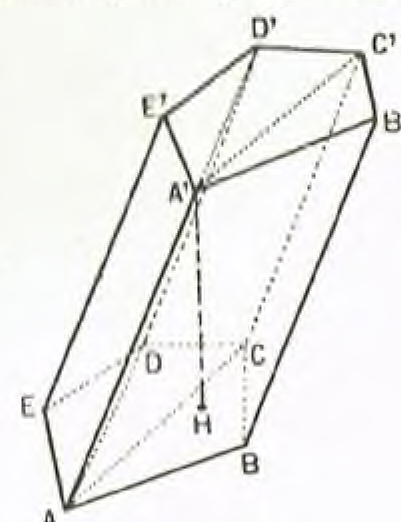


Fig. 379

El volumen V de este paralelepípedo es igual al volumen V_1 del prisma dado de base ABC, aumentado en el volumen V_2 del prisma de base ACD.

Tracemos una sección recta de estos dos prismas, EFG para el primero y EKG para el segundo. El primer prisma es equivalente a un prisma (P_1) de base EFG y arista AA'; el segundo equivale al prisma (P_2) de base EKG y arista AA'. Tracemos por O, punto medio de EG, una paralela (Δ) a AA'; esta recta es perpendicular al plano de la sección recta: un giro de 180° alrededor de (Δ) llevará E a G, F a K y G a E y las aristas del prisma (P_1) sobre las del prisma (P_2). Siendo superponibles estos dos prismas serán equivalentes: $V_1 = V_2$ y, por tanto, $V = 2V_1$.

El volumen V del paralelepípedo tiene por medida

$$A'H \cdot \text{área } ABCD;$$

pero el área de ABCD es la suma de las áreas de dos triángulos ABC y ADC iguales, por tanto, será igual al doble del área de uno de ellos y, por consiguiente, $V = A'H.2$ área ABC y $V_1 = A'H \cdot$ área ABC. El volumen del prisma dado es igual al producto de su base ABC por la altura A'H.

2° Supongamos que el prisma tiene por base un polígono ABCDE (*fig.* 379). Se divide el polígono en los triángulos ABC, ACD y ADE. Los prismas de aristas paralelas a AA' que tienen por bases esos triángulos tienen por volúmenes V_1, V_2 y V_3.

$$V_1 = A'H \cdot \text{área } ABC,$$
$$V_2 = A'H \cdot \text{área } ACD,$$
$$V_3 = A'H \cdot \text{área } ADE.$$

El volumen V del prisma dado es la suma de los volúmenes V_1, V_2 y V_3, por tanto:

$$V = A'H \text{ (área ABC + área ACD + área ADE)}$$
$$= A'H \cdot \text{área ABCDE.}$$

Volumen de la pirámide. — Teorema. *El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto de la base por la altura.*

1° *Pirámide triangular* SABC.

Dividamos (*fig.* 380) uno de los lados, SA por ejemplo, en un número entero n de partes iguales; aunque n es arbitrario, en la figura 380 se ha tomado $n = 5$. Los puntos de división a partir del vértice se denominan A_1, A_2, ... Se trazan por estos puntos planos paralelos (P_1), (P_2), ..., que determinan las secciones $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., las cuales son homotéticas de la base ABC. Estos planos son equidistantes: por consiguiente, si h, distancia de S al plano ABC, es la altura de la pirámide, la distancia entre dos planos consecutivos será $\frac{h}{n}$.

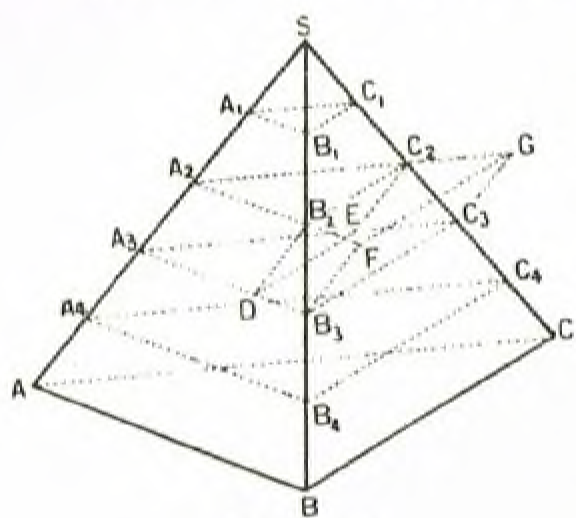


Fig. 380

Sean σ_1, σ_2, ..., las áreas de los triángulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., y σ el área de ABC.

La razón de homotecia que permite pasar del triángulo ABC al $A_1B_1C_1$ es $\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}$, es decir, $\frac{1}{n}$; la que permite pasar del ABC al $A_2B_2C_2$ es $\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}} = \frac{2}{n}$ así sucesivamente. Siendo las áreas entre sí como los cuadrados de sus razones (v. p. 143), se verifica

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \sigma_2 = \sigma \cdot \frac{2^2}{n^2},$$

y así sucesivamente.

Llamemos V_1 el volumen de la pirámide $SA_1B_1C_1$, y V_2 el volumen de la porción de pirámide comprendida entre los planos (P_1) y (P_2), V_3 el volumen comprendido entre (P_2) y (P_3), etc. Consideremos uno cualquiera de estos volúmenes distinto del primero, el V_3 por ejemplo. Tracemos por B_2 y C_2 paralelas a SA; serán rectas situadas en las caras ASB y ASC de la pirámide y, por tanto, cortarán el plano (P_3) en dos puntos D y E situados sobre los segmentos A_3B_3 y A_3C_3. El prisma oblicuo cuya base es A_3DE o $A_2B_2C_2$ y sus aristas A_3A_2, DB_2 y EC_2, está formado por puntos todos ellos interiores al volumen V_3: el volumen de este prisma, que se mide por el producto de la altura $\frac{h}{n}$ [distancia entre los planos (P_2) y (P_3)] por σ_2, área del triángulo $A_2B_2C_2$, es inferior al volumen V_3. Por tanto, se tendrá

$$V_3 > \frac{h}{n} \cdot \sigma_2.$$

Del mismo modo

$$V_2 > \frac{h}{n}\sigma_1, \quad V_4 > \frac{h}{n}\sigma_3 \quad V_n > \frac{h}{n}\sigma_{n-1}$$

y, por consiguiente,

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n > \frac{h}{n}(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots \sigma_{n-1}).$$

Pero $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ es el volumen V de la pirámide, luego

$$V > \frac{h}{n}(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}).$$

Como

$$\sigma_1 = \sigma \cdot \frac{1}{n^2}; \quad \sigma_2 = \sigma \cdot \frac{2^2}{n^2}, \text{ etc.,}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} = \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2}\sigma.$$

Ya se ha calculado en álgebra que la suma de los cuadrados de los n primeros números enteros es igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Por consiguiente,

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^2}\sigma = $$
$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\sigma.$$

En consecuencia,

$$V > \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\sigma\, h.$$

Tracemos ahora por B_3 y C_3 paralelas a SA, que estarán en los planos de las caras BSA y CSA, y cortarán el plano (P_2) en F y G, puntos situados fuera de los segmentos A_2B_2 y A_2C_2. El volumen del prisma de bases $A_3B_3C_3$ y A_2FG es, esta vez, mayor que el volumen V_3, y se tiene

$$V_3 < \frac{h}{n}\sigma_3.$$

La construcción anterior puede ser realizada del mismo modo en la pirámide $SA_1B_1C_1$. Por tanto, se tendrá

$$V_1 < \frac{h}{n}\sigma_1, \quad V_2 < \frac{h}{n}\sigma_2, \quad V_n < \frac{h}{n}\sigma.$$

Por consiguiente,

$$V < \frac{h}{n}(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma).$$

Pero

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma = \frac{1 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2}\sigma =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\sigma = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\sigma;$$

luego

$$V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\sigma\, h.$$

El resultado de este estudio es el siguiente: el volumen V desconocido es un número que satisface a la doble desigualdad siguiente:

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\sigma h < V < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\sigma h.$$

Ahora bien, los dos números

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}, \quad \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

son, el primero menor que $\frac{1}{3}$ y el segundo mayor que $\frac{1}{3}$ (porque $n - 1 < n$, $2n - 1 < 2n$, $n + 1 > n$ y $2n + 1 > 2n$): su diferencia es $\frac{1}{n}$. Estos son, pues, dos valores aproximados de $\frac{1}{3}$ en menos de $\frac{1}{n}$, como son también, a causa de la desigualdad demostrada, valores aproximados de $\frac{V}{\sigma h}$ en menos de $\frac{1}{n}$, cualquiera que sea el valor de n, luego $\frac{V}{\sigma h} = \frac{1}{3}$, y por tanto $V = \frac{1}{3}\sigma h$. El volumen de la pirámide será igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base σ por la altura h.

2° *Pirámide de base poligonal* (P).

Se divide el polígono de la base en triángulos, de modo que el área σ del polígono sea igual a la suma de las áreas σ', σ'', σ''', etc., de los triángulos así formados. El volumen V de la pirámide se puede descomponer en una suma de volúmenes V', V'' V''', ..., que son los volúmenes de las pirámides cuyas bases son los triángulos en que se ha descompuesto la base. Siendo triangular cada una de estas pirámides, se tiene, según el apartado (1°), y suponiendo que la altura de la pirámide sea h:

$$V' = \frac{1}{3}h\sigma', \quad V'' = \frac{1}{3}h\sigma'', \quad V''' = \frac{1}{3}h\sigma''', \ldots$$

y como

$$V = V' + V'' + V''' + \ldots$$
$$V = \frac{1}{3}h(\sigma' + \sigma'' + \sigma''' + \ldots)$$
$$= \frac{1}{3}h\sigma.$$

El teorema queda, pues, demostrado.

Volumen del tronco de prisma. — *Se llama* **tronco de prisma** *el volumen comprendido entre una superficie prismática y dos planos no paralelos.* Las denominaciones caras, aristas, caras y aristas laterales, son las mismas que las utilizadas para el prisma. Las secciones producidas por planos no paralelos se llaman bases del tronco.

Teorema. *El volumen del tronco de prisma triangular es equivalente a la suma de los volúmenes de tres pirámides que tienen por base común una de las dos bases* ABC *del tronco y por vértices los vértices* A', B' *y* C' *de la otra base.*

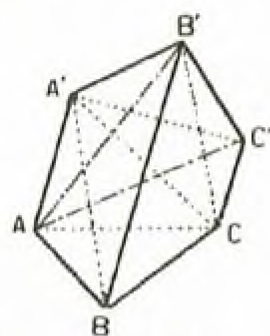


Fig. 381

Unamos (*fig.* 381) A' con B y C. El volumen del tronco queda dividido por el plano A'BC en dos volúmenes: 1°, el volumen de la pirámide (P_1), de base ABC y vértice A'; 2°, el volumen de la pirámide (P'), de base BCC'B' y vértice A'. Siendo la recta AA' paralela al plano de la base de la pirámide (P'), ésta será equivalente a otra pirámide de la misma base, pero de vértice A. Para calcular el volumen de esta última se descompone su base en dos triángulos, y, por consiguiente, la pirámide en otras dos pirámides: (P_2), de base BB'C y vértice A, y (P_3), de base B'CC' y vértice A. En la pirámide (P_2) se puede tomar como base ABC y como vértice B'. Queda la pirámide (P_3): en ella se puede tomar

como base ACC′ y como vértice B′. Siendo la recta BB′ paralela a CC′ será paralela al plano ACC′, plano de la base de la pirámide (P_3); ésta es, pues, equivalente a una pirámide de vértice B y base ACC′, pirámide que también puede tener por vértice C′ y por base ABC.

Las operaciones sucesivas han descompuesto el volumen V en pirámides equivalentes a tres pirámides de base común ABC y de vértice A′, B′ y C′.

Volumen del tronco de pirámide. — Sea (*fig.* 382) una pirámide (P) de vértice S y de base un polígono cualquiera ABCDE. Sea A′B′C′D′E′ una sección de esta pirámide producida por un plano paralelo al de la base. *Se llama* **tronco de pirámide** *el volumen de la pirámide* (P) *comprendido entre el plano de la base y el plano de la sección paralela.* Siendo la base de la pirámide la **base mayor** del tronco, designaremos por B su medida; la sección A′B′C′D′E′ es la **base menor** del tronco y designaremos *b* su medida. La distancia *h* entre los planos de las bases del tronco es la **altura del tronco.**

Fig. 382

TEOREMA. *El volumen del tronco de pirámide de bases* B *y* b, *y de altura* h, *viene dado por la fórmula*

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{Bb})\,h.$$

Sea S el vértice de la pirámide (P), SH la altura y H′ el punto en que SH corta el plano de la base menor (*fig.* 382). Se tiene HH′ = *h*, pero SH′ no es un dato del problema; por tanto, supondremos que SH′ = *x*, siendo *x* una incógnita. Las bases ABCDE y A′B′C′D′E′ son las secciones producidas por planos paralelos en una pirámide: por tanto, son (v. p. 132) polígonos homotéticos. La razón de las áreas (v. p. 144) $\frac{B}{b}$ es igual al cuadrado de la razón $\frac{SH}{SH'}$ de homotecia.

Ahora bien, SH = $x + h$ y SH′ = x, luego

$$\frac{B}{b} = \frac{(x+h)^2}{x^2}.$$

Para mayor comodidad haremos $\sqrt{B} = \beta$ y $\sqrt{b} = \alpha$, de suerte que

$$\frac{x+h}{x} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

De esta ecuación se obtiene la incógnita x: $x = \dfrac{h\,\alpha}{\beta - \alpha}$.

El volumen V del tronco es la diferencia entre el volumen de la pirámide (P), igual a $\frac{1}{3}$ B $(x + h)$ y el volumen de la pirámide de vértice S y base A′B′C′D′E′, igual a $\frac{1}{3}\,bx$. Por tanto, tendremos

$$V = \frac{1}{3}\beta^2(x+h) - \frac{1}{3}\alpha^2 x$$

$$= \frac{1}{3}x(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{1}{3}\beta^2 h,$$

y sustituyendo x por su valor,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{h\alpha}{\beta - \alpha}(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{1}{3}\beta^2 h$$

$$= \frac{1}{3}h\alpha(\beta + \alpha) + \frac{1}{3}\beta^2 h = \frac{1}{3}h\;(\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2),$$

es decir,

$$V = \frac{1}{3}h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Longitud de la circunferencia

Polígono regular inscrito en una circunferencia. Polígonos regulares inscritos de tres, cuatro y seis lados. Longitud de la circunferencia. Número π. Cálculo de π. Radián

Polígono regular inscrito en una circunferencia. — *Se llama* **polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia (O),** *de radio* R, *un polígono cuyos vértices A_1, A_2, …. A_n son puntos de la circunferencia* (O) *y cuyos lados* A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 *son iguales.* La figura 383 representa el polígono regular convexo de cinco lados inscrito o **pentágono.**

Si un punto móvil M recorre la circunferencia (O) en un sentido determinado, encuentra los vértices del polígono en un orden definido. Se comprueba que el polígono regular inscrito es **convexo** cuando un móvil que recorra la circunferencia en un sentido definido, encuentra los vértices en el orden A_1, A_2, A_3, …, A_{n-1}, A_n, A_1; por el contrario, cuando esta condición no se cumple el polígono no es convexo. Limitaremos nuestro estudio a los polígonos regulares, inscritos, convexos, que, por consiguiente, cumplen la condición anterior.

Vamos a demostrar que *hay un polígono regular convexo de un número cualquiera* n *de lados, inscrito en una circunferencia* (O) *dada, de radio* R, en el que uno de los vértices es un punto fijo A_1.

Hagamos girar el punto A_1 alrededor del punto O, en un sentido elegido arbitrariamente, un ángulo igual a $\frac{2\pi}{n}$; sea A_2 el punto obtenido. En el mismo sentido hagamos girar A_2 alrededor del punto O el mismo ángulo $\frac{2\pi}{n}$, y sea A_3 el punto obtenido, y así sucesivamente. Los segmentos A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 se obtienen unos de otros mediante los giros $\frac{2\pi}{n}$, luego dichos segmentos son iguales, y el polígono A_1A_2 … A_nA_1 es regular, inscrito, convexo y de *n* lados.

Recíprocamente, si A_1A_2 … A_nA_1 es un polígono regular, inscrito, convexo y de *n* lados, los ángulos $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, …, $\widehat{A_nOA_1}$ son iguales entre sí e iguales a $\frac{2\pi}{n}$.

Se llama **perímetro** *de un polígono cualquiera, y en particular de los que hemos definido anteriormente, la suma de las longitudes de sus lados.*

Se llama **apotema** (fig. 383) *la perpendicular* OH *trazada desde el centro* O *sobre uno cualquiera de los lados del polígono regular inscrito, limitada por el punto* O *y por el pie H de la citada perpendicular.*

Como todos los triángulos A_1OA_2, A_2OA_3... son iguales, *todas las apotemas son también iguales.*

Polígonos regulares inscritos de tres, cuatro y seis lados. — *El polígono regular inscrito que tiene tres lados es el triángulo equilátero. El valor de su lado en función del radio es* $R\sqrt{3}$ *y el de su apotema* $\frac{R}{2}$.

Evidentemente este polígono es un triángulo y como sus lados son iguales por hipótesis, será equilátero. El centro O de la circunferencia circunscrita es el ortocentro; por consiguiente (*fig.* 384), OA_1 es una altura del triángulo, perpendicular al lado A_2A_3 en el punto H. Luego OH será una apotema. Como el punto O es también el centro de gravedad del triángulo, OH = $\frac{OA_1}{2} = \frac{R}{2}$ y la apotema es igual a $\frac{R}{2}$.

El lado A_1A_2 es la hipotenusa del triángulo A_2HA_1. Si consideramos que A_1A_2 = x, uno de los catetos HA_2 será igual a $\frac{x}{2}$, y el otro HA_1 será igual $\frac{3R}{2}$; por consiguiente, tendremos:

$$x^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{9R^2}{4},$$

es decir, $x^2 = 3R^2$, de donde $x = R\sqrt{3}$.

El polígono regular inscrito de cuatro lados es un cuadrado. El valor de su lado en función del radio es $R\sqrt{2}$ *y el de su apotema* $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ (fig. 385).

Los ángulos $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, etc., son iguales a $\frac{2\pi}{4}$, es decir, a $\frac{\pi}{2}$.

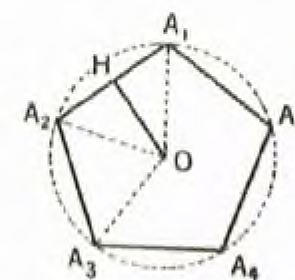


Fig. 383

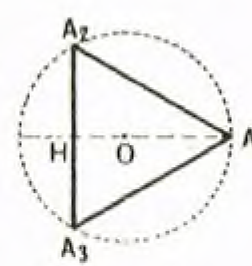


Fig. 384

Por consiguiente, $\widehat{A_1OA_3} = \pi$ y los puntos A_1, A_3 son diametralmente opuestos en la circunferencia (O); el cuadrilátero convexo $A_1A_2A_3A_4$, cuyos lados son iguales por hipótesis, tiene además todos sus ángulos rectos: luego es un cuadrado. En el triángulo A_1OA_2, rectángulo en O, se tiene $\overline{A_1A_2}^2 = 2R^2$, de donde $\overline{A_1A_2} = R\sqrt{2}$. La apotema OH es igual a la mitad del lado, luego

$$OH = \frac{A_1A_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

El lado del polígono regular inscrito de seis lados, o exágono, es igual al radio R. *Su apotema es igual a* $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ (*fig.* 386).

El ángulo $\widehat{A_1OA_2}$ es igual a $\frac{2\pi}{6}$ o, lo que es igual, $\frac{\pi}{3}$.

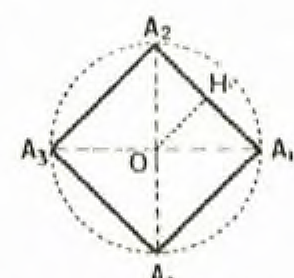


Fig. 385

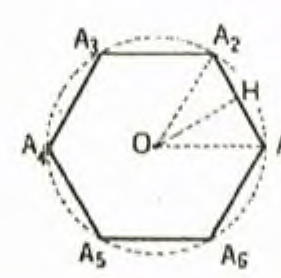


Fig. 386

Por consiguiente, el triángulo A_1OA_2 isósceles ($OA_1 = OA_2$) será equilátero y $A_1A_2 = R$. La apotema OH es la altura de este triángulo y será igual a $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Longitud de la circunferencia. Número π. — Admitiremos que el perímetro del polígono regular convexo de n lados inscrito en la circunferencia (O) tiende hacia un límite L, cuando n aumenta indefinidamente. Este límite es, por definición, la **longitud de la circunferencia (O).**

TEOREMA. *En una circunferencia* (O) *la razón de su longitud* L *al diámetro* 2R *es un número constante.*

Sean (O) y (O′) dos circunferencias de radios diferentes R y R′: hay, como mínimo, una homotecia de razón $\frac{R'}{R}$ que transforma la circunferencia (O) en (O′). Esta homotecia transforma también un polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$, regular, convexo, inscrito en la circunferencia (O), en otro polígono $A_1'A_2'A_3' \ldots A_n'A_1'$, regular, convexo e inscrito en la circunferencia (O′). Se tendrá

$$\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2} = \frac{A'_2A'_3}{A_2A_3} = \ldots = \frac{R'}{R}.$$

Por consiguiente, si l' es el perímetro del polígono $A'_1A'_2 \ldots A'_nA'_1$, y l el del polígono $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, tendremos $l' = \frac{R'}{R} l$.

Cuando el número n aumenta indefinidamente, l' tiende, por hipótesis, hacia la longitud de la circunferencia (O′) y l tiende, al mismo tiempo, hacia la longitud de la circunferencia (O); puesto que $l' = \frac{R'}{R} l$, tendremos

$$L' = \frac{R'}{R} L \quad \text{ó} \quad \frac{L'}{2R'} = \frac{L}{2R}.$$

La razón $\frac{L}{2R}$ de la longitud de la circunferencia al diámetro es un número constante que se representa por el símbolo π.

COROLARIO. *La longitud de una circunferencia de centro* O *y radio* R *es* $2\pi R$.

Cálculo de π. — El problema del cálculo del número π y el conocimiento de sus propiedades han sido objeto de prolongados estudios de los geómetras. Esperaban hallar valores muy aproximados de π calculando las longitudes de los perímetros de los polígonos regulares inscritos, convexos, de un gran número de lados, y duplicando indefinidamente el número de lados de un polígono inicial, un cuadrado, por ejemplo. Hoy día estos procedimientos no se utilizan: el cálculo de π y el estudio de sus propiedades se lleva a cabo por medio del álgebra superior. El número π es conocido con muchos decimales, pero, corrientemente, para su empleo, basta saber que está comprendido entre 3,14159 y 3,1416.

Radián. — *Se llama* **radián** *una unidad de ángulo elegida de forma que la medida del ángulo llano sea igual a* π, *razón de la circunferencia a su diámetro.*

Sea AB un arco de la circunferencia (O) de centro O y radio R; l la longitud del arco AB, θ la medida en radianes del ángulo $\widehat{AOB}$. Puesto que en una circunferencia los arcos y los ángulos centrales correspondientes son magnitudes homólogas, la razón $\frac{\text{arco AB}}{\pi R}$ (πR es la longitud de la semicircunferencia) es igual a la razón $\frac{\theta}{\pi}$ de los ángulos centrales correspondientes; por consiguiente, tendremos

$$\text{arco AB} = \theta \cdot R,$$

y en el caso de que $\theta = 1$, arco AB = R.

Luego el radián es un ángulo igual que el ángulo central $\alpha O \beta$ *correspondiente a un arco* $\alpha\beta$ *de longitud igual que el radio* R *de la circunferencia a que pertenece.*

La medida de un arco AB de una circunferencia de radio R *es igual a* $R\theta$, *siendo* θ *la medida en radianes del ángulo central* $\widehat{AOB}$ *correspondiente al arco* AB.

Siendo la medida del ángulo llano 180 grados sexagesimales ó 200 grados centesimales, tendremos

π radianes = 180 grados sexagesimales = 200 grados centesimales.

1 radián = 57 grados sexagesimales = 63 grados centesimales, con menor error que una unidad.

Áreas de las superficies de revolución

Área lateral de una pirámide regular. Área lateral de un cono de revolución. Área lateral de un tronco de cono de revolución. Área lateral de un prisma. Área lateral de un cilindro de revolución. Área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje. Área de la zona. Área de la superficie esférica

Área lateral de una pirámide regular. — *Se llama* **pirámide regular** (fig. 387) *una pirámide cuya base es un polígono regular convexo* $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ *de n lados, inscrito en una circunferencia* (O) *de radio* R, *y cuyo vértice* S *es un punto del eje del círculo* (O).

Se llama **apotema** *de una pirámide regular la perpendicular* SH *trazada desde el vértice* S *a uno cualquiera de los lados* A_1A_2 *del polígono que constituye la base de la pirámide.*

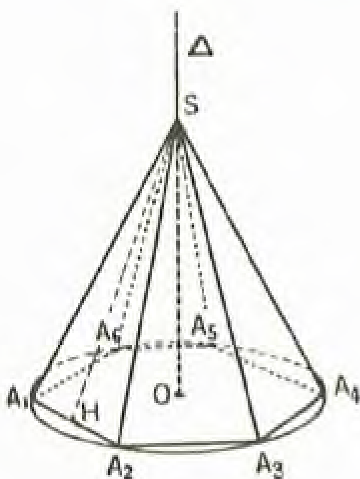


Fig. 387

Se llama **área lateral** *de la pirámide la suma de las áreas de los triángulos* A_1SA_2, A_2SA_3, etcétera, *que constituyen las caras laterales de la pirámide regular.*

TEOREMA. *El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto de la apotema* SH *por el perímetro de la base.*

En efecto, sea (Δ) el eje del círculo (O); mediante un giro de una amplitud igual a $\frac{2\pi}{n}$ alrededor de (Δ) en un sentido conveniente, haríamos coincidir A_1 con A_2, A_2 con A_3, etc.; por consiguiente, coincidirían el triángulo SA_1A_2 con el SA_2A_3, etc. De donde se deduce que estos triángulos son iguales, así como las apotemas.

El área de uno de estos n triángulos, A_1SA_2 por ejemplo, es igual a $\frac{1}{2} \cdot SH \cdot A_1A_2$; en consecuencia, el área lateral de la pirámide será igual a $\frac{1}{2} \cdot SH \cdot A_1A_2 \cdot n$. Ahora bien, $n \cdot A_1A_2$ es el perímetro de la base de la pirámide, luego el teorema queda demostrado.

Área lateral de un cono de revolución. — Sea (*fig.* 387) un cono de revolución de vértice S y que tenga por base un círculo (O). Inscribamos en (O) un polígono regular convexo de n lados $A_1A_2 \ldots A_nA_1$. La pirámide de vértice S y de base $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ es una pirámide regular cuya área lateral es igual a la mitad del producto de la apotema SH por el perímetro del polígono $A_1A_2 \ldots A_nA_1$.

Supongamos que n aumenta indefinidamente; el perímetro del polígono $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ tiende, por hipótesis, hacia un límite que es por definición la longitud $2\pi R$ de la circunferencia (O). La apotema SH, altura de un triángulo isósceles, es un segmento en el que uno de sus extremos S es fijo y el otro H, punto medio de A_1A_2, tiende a confundirse con A_1 cuando n aumente indefinidamente y, por lo tanto, A_2 tienda a coincidir con A_1. Luego la longitud de SH tenderá a confundirse con la longitud a de la apotema del cono de revolución.

El área lateral de la pirámide, producto de dos factores que tienen sus límites respectivos, tenderá hacia un límite igual al producto de los límites, es decir, a $\frac{a}{2} \cdot 2\pi R$. Este límite es el área lateral del cono de revolución, que se define diciendo:

El área lateral de un cono de revolución es igual a la mitad del producto de la apotema por la longitud de la circunferencia de la base.

$$S = \pi Ra.$$

Área lateral de un tronco de cono de revolución. — *Se llama* **tronco de cono de revolución** *la parte de cono comprendida entre la base* (O) *y una sección* (O′) *producida en el cono por un plano paralelo a la base. Esta sección recibe el nombre de* **base menor** *del tronco de cono. Se llama* **altura del tronco** *la distancia entre los planos de las dos bases. Se llama* **apotema del tronco** *la parte* AB *de una arista del cono comprendida entre los planos de las dos bases* (fig. 388).

TEOREMA. *El área lateral de un tronco de cono de revolución de bases paralelas es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las circunferencias de las bases por su apotema.*

Viene dada por la fórmula

$$\pi (R + R')\, a,$$

en que R *y* R′ *son los radios de las bases y* a *la longitud de la apotema.*

Sea x la longitud desconocida de la apotema SA de un cono de vértice S que tiene por base el círculo (O′), base menor del tronco (*fig.* 388): el área lateral σ_1 de este cono es $\pi R' x$. La longitud de la apotema SB del cono de vértice S que tiene por base el círculo (O), base del tronco, es $x + a$: el área lateral σ_2 de este cono es $\pi R (x + a)$. El área lateral σ del tronco de cono será la diferencia $\sigma_2 - \sigma_1$ de las áreas laterales de estos conos:

$$\sigma = \pi R(x + a) - \pi R' x.$$

Los dos círculos (O) y (O′) son homotéticos en una homotecia de centro S; por consiguiente, tendremos

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} = \frac{R}{R'},$$

es decir,

$$\frac{x + a}{x} = \frac{R}{R'}.$$

De esta igualdad se deduce el valor de x: $\dfrac{aR'}{R - R'}$.

$$\sigma = \pi R\left(\frac{aR'}{R - R'} + a\right) - \pi R' \frac{aR'}{R - R'}$$

$$= \frac{\pi}{R - R'}\,[RaR' + aR(R - R') - aR'^2],$$

$$= \frac{\pi}{R - R'}\,(aR^2 - aR'^2),$$

$$= \pi a \frac{R^2 - R'^2}{R - R'} = \pi a\,(R + R').$$

Área lateral de un prisma. — *Se llama* **área lateral de un prisma** *la suma de las áreas de los paralelogramos AA′BB′, BB′CC′etc., que son las caras laterales del prisma.*

Teorema. *El área lateral de un prisma es igual al producto del perímetro de una sección recta por la longitud de la arista lateral.*

Sea $\alpha\beta\gamma$ una sección recta del prisma ABCA′B′C′ (*fig.* 389); siendo, por hipótesis, el plano de la sección recta perpendicular a las aristas del prisma, las rectas $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ de dicho plano serán perpendiculares a las aristas; por consiguiente, $\alpha\beta$ es la altura de un paralelogramo AA′BB′ cuya base es AA′; por idéntica razón $\beta\gamma$ es la altura del paralelogramo BB′CC′ cuya base BB′ es igual que AA′, etc. De donde se deduce que el área lateral σ del prisma será igual a

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \cdot AA',$$

producto del perímetro de la sección recta por la longitud de la arista.

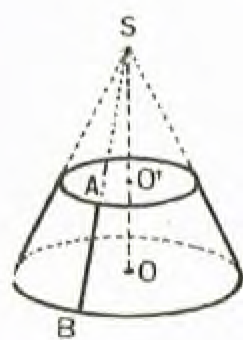


Fig. 388

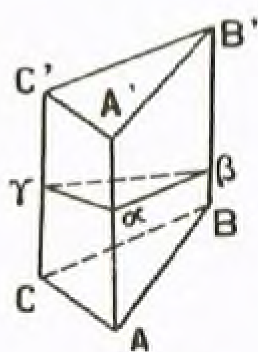


Fig. 389

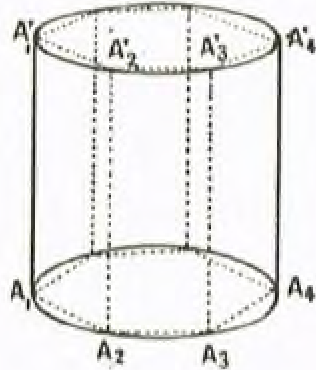


Fig. 390

Área lateral de un cilindro de revolución. — Inscribamos en un círculo (O) de radio R, base de un cilindro de revolución (*fig.* 390), un polígono regular convexo $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ de n lados. El prisma que tiene por base este polígono y cuyas aristas $A_1A'_1$, etc., son paralelas e iguales a las generatrices del cilindro, es recto: el área lateral de dicho prisma es, por consiguiente, igual al producto de la arista h del prisma, que es también la altura del cilindro, por el perímetro $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1$ de la sección recta $A_1A_2 \ldots A_nA_1$.

Cuando n aumenta indefinidamente, h permanece constante y el perímetro del polígono regular inscrito $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ tiende, por hipótesis, hacia un límite $2\pi R$, longitud de la circunferencia de la base del cilindro. Luego el área lateral del prisma $A_1A_2 \ldots A_1'A_2' \ldots$ tenderá hacia el límite $2\pi Rh$. Este límite se llama **área lateral del cilindro** y se define diciendo:

El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto $2\pi Rh$ *de la longitud de la circunferencia de la base por la altura del cilindro.*

Área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje. — *El área engendrada por un segmento de recta AB que gira alrededor de un eje (D) que no lo atraviesa y que está situado con él en un mismo plano, tiene por medida el producto de la proyección ortogonal ab del segmento AB sobre la recta (D) por la longitud de una circunferencia que tenga por radio el segmento IM de la mediatriz de AB, limitado en M, punto medio de AB, y en el punto I de su intersección con el eje (D).*

1er caso. Sea AB paralela a (D) [*fig.* 391]. La superficie engendrada por AB es un cilindro de revolución cuya altura es AB = ab y el radio de la base es igual a IM; por tanto, el área lateral de este cilindro será $2\pi \cdot IM \cdot ab$.

2º caso. Supongamos que AB corta en S la recta (D) [*fig.* 391]. La superficie engendrada por AB es, o un cono si el punto A está situado en (D), o un tronco de cono de altura ab y cuyas bases tengan por radios Aa y Bb. En los dos casos la superficie engendrada tiene por medida $\pi\,(Aa + Bb) \cdot AB$.

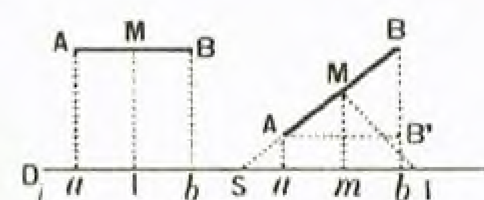


Fig. 391

Siendo M el punto medio de AB, se tiene $Mm = \dfrac{Aa + Bb}{2}$ y en consecuencia

$$\sigma = \pi\,(Aa + Bb)\,AB = 2\pi \cdot Mm \cdot AB.$$

Tracemos por A una paralela AB′ a ab (el punto B′ es el de intersección de AB′ con Bb); los dos triángulos rectángulos AB′B y MmI tienen sus lados perpendiculares, luego sus ángulos son iguales y por lo tanto los triángulos son semejantes. Por consiguiente, se tiene $\dfrac{AB}{MI} = \dfrac{AB'}{Mm}$, y como AB′ = ab resulta que $AB \cdot Mm = IM \cdot ab$.

De todo ello se deduce que $\sigma = 2\pi \cdot IM \cdot ab$, igualdad que justifica el enunciado.

Área de la zona. — *Se llama* **zona esférica** *la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos. Los dos planos paralelos cortan la superficie esférica según dos circunferencias llamadas* **bases** *de la zona. La distancia entre estos dos planos es la* **altura** h *de la zona* (fig. 392).

Sea AB un arco de la circunferencia (O) de radio R, y (D) uno de sus diámetros que no corte el arco AB (*fig.* 393). Sea θ el ángulo central $\widehat{AOB}$ correspondiente al arco AB. Inscribamos en la circunferencia (O) un polígono regular, convexo, de forma que el primer vértice A_1 coincida con el punto A, que el segundo A_2 esté situado en el arco AB, y que el ángulo $\widehat{A_2OA_1} = \dfrac{\theta}{n}$. El vértice (n + 1) de dicho polígono coincidirá con el punto B. Al girar alrededor de la recta (D) la línea quebrada $A_1A_2 \ldots A_nB$ engendrará una superficie (S); uno cualquiera de los lados A_1A_2, A_2A_3, etc., de la línea quebrada satisface las condiciones impuestas anteriormente al segmento AB. El segmento de la mediatriz de uno cualquiera de estos lados, limitado como indica el enunciado del párrafo precedente, es una apotema OH igual a cualquiera de las demás. Llamemos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, las proyecciones ortogonales de los vértices $A_1, A_2, A_3, \ldots$, sobre la recta (D), a y b las de los puntos A y B (a_1 y a coinciden). El área engendrada por el lado A_1A_2 será igual a $2\pi \cdot OH \cdot a_1a_2$; el área engendrada por A_2A_3 será $2\pi \cdot OH \cdot a_2a_3$, y así sucesivamente. El área S, engendrada por la línea poligonal $A_1A_2 \ldots A_nB$, será la suma de esas áreas parciales. Sea $S = 2\pi \cdot OH\,(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots)$. La suma $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots$ es precisamente igual a ab y, por consiguiente, $S = 2\pi \cdot OH \cdot ab$.

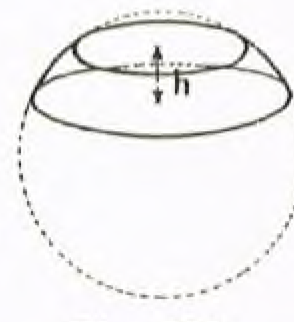


Fig. 392

Cuando n aumenta indefinidamente, el punto H (medio de A_1A_2) tiende a confundirse con el punto fijo A_1 y OH tiende hacia OA_1. La longitud OH tiende hacia un límite R y el área S tiende hacia un límite cuyo valor es $2\pi \cdot R \cdot ab$.

Este límite es, por definición, el **área de la zona,** cuyas bases son las circunferencias engendradas por los extremos A y B del arco AB y cuya altura es ab.

El área de una zona es igual al producto 2π Rh *de la longitud* 2π R *de una circunferencia máxima de la esfera por la altura* h *de la zona.*

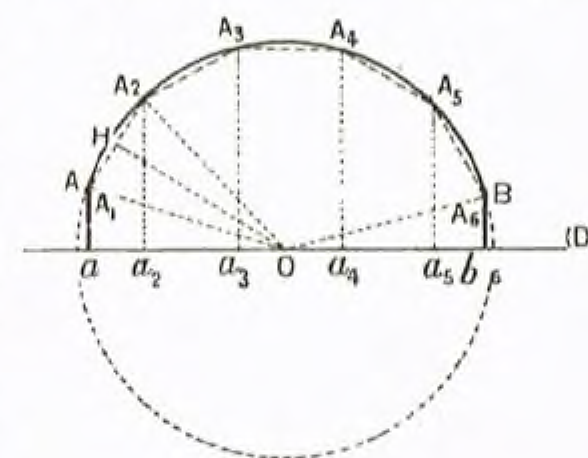


Fig. 393

Área de la superficie esférica. — La superficie esférica es una zona que tiene por altura 2R. Por consiguiente, *el área de la superficie esférica de radio* R *será* $4\pi R^2$.

Se llama **huso esférico** *la porción de superficie esférica comprendida entre dos semiplanos diametrales.* Si θ es la medida en radianes del ángulo plano correspondiente al diedro formado por estos dos semiplanos, el área del huso esférico será $2\,\theta\,R^2$.

Área del círculo

Área del círculo. — Inscribamos en un círculo (O), de centro O y radio R (*fig.* 394), un polígono regular convexo de n lados, A_1A_2, ..., A_nA_1. Los n triángulos que podemos considerar con uno de sus vértices en O y que tienen por bases los lados A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, son triángulos isósceles iguales y por consiguiente tendrán todos igual área; el área de uno de ellos, el OA_1A_2, por ejemplo, es el semiproducto de A_1A_2 por la apotema OH del polígono inscrito. El área de dicho polígono será, por consiguiente, igual a

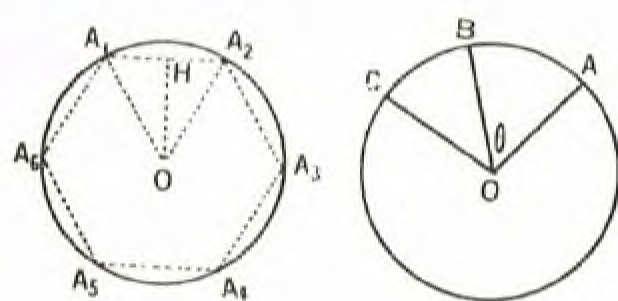


Fig. 394

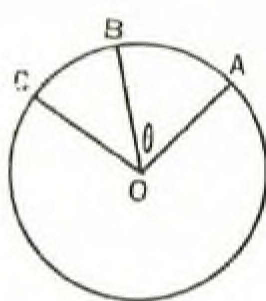


Fig. 395

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot A_1A_2 \cdot OH.$$

Cuando n aumenta indefinidamente, $n \cdot A_1A_2$, que es el número que mide el perímetro del polígono inscrito, tiende por hipótesis hacia la longitud $2\pi R$ de la circunferencia; como la apotema OH tiende entonces hacia R, el área del polígono inscrito tenderá por consiguiente hacia un límite que es πR^2.

Este límite es lo que se llama **área del círculo (O).**

El área de un círculo de radio R *es* πR^2.

Area del sector circular. — Sea AOB (*fig.* 395) un sector del círculo (O). A cada ángulo central $\widehat{AOB}$ corresponde un sector determinado del círculo (O); a dos ángulos iguales $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ corresponden dos sectores iguales cuyas áreas son, por consiguiente, iguales; a la suma $\widehat{AOC}$ de dos ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ corresponde un sector cuya área es la suma de las áreas de los sectores correspondientes a los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$. De donde se deduce que el área de un sector AOB de un círculo (O) y el ángulo central $\widehat{AOB}$ son magnitudes homólogas: por consiguiente, la razón de las áreas de dos sectores es igual a la razón de sus ángulos centrales.

Comparando entre sí el área S del sector AOB, cuyo ángulo central mide θ radianes, y el área del círculo considerado como un sector cuyo ángulo central, evaluado también en radianes, tiene por medida 2π, tendremos

$$\frac{S}{\pi R^2} = \frac{\theta}{2\pi},$$

y por consiguiente:

$$S = \frac{R^2\theta}{2}.$$

El área de un sector circular de radio R *cuyo ángulo central vale* θ *radianes es*

$$\frac{R^2 \cdot \theta}{2}.$$

En el caso de que la medida del ángulo fuese dada en grados sexagesimales o centesimales recordemos que 1 grado sexagesimal vale $\frac{\pi}{180}$ radianes y 1 grado centesimal vale $\frac{\pi}{200}$.

Volumen de los cuerpos redondos

Volumen de un cilindro. Volumen de un cono. Volumen de un tronco de cono. Volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta. Volumen del sector esférico. Volumen de la esfera. Volumen del anillo esférico. Volumen del segmento esférico. Fórmula de los tres niveles

Volumen de un cilindro. — Un cilindro de altura h (*fig.* 396) tiene por base un círculo (O) de radio R. Inscribamos en dicho círculo un polígono regular convexo $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ de n lados.

El prisma cuya base es $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ y cuyas aristas laterales $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, etc., son iguales y paralelas, tiene por volumen el producto de la altura h del prisma, que es también la altura del cilindro, por el área B de la base del prisma.

Cuando el número n aumente indefinidamente, el área B de un polígono regular convexo inscrito en el círculo (O) tenderá hacia el área πR^2 de dicho círculo. Por consiguiente, el volumen del prisma, $B \cdot h$, tenderá hacia un límite igual a $\pi R^2 h$. Este límite es el **volumen del cilindro.** Luego:

El volumen de un cilindro cuya base sea un círculo de radio R *y cuya altura sea* h, *es igual al producto* $\pi R^2 h$ *del área de la base* πR^2 *por la altura* h.

Volumen de un cono. — Un cono de vértice S (*fig.* 397) tiene por base un círculo (O) de radio R. Inscribamos en dicho círculo un polígono regular convexo $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ de n lados; el volumen de la pirámide de vértice S que tenga dicho polígono por base es igual al tercio del producto del área de esta base B por la altura h de la pirámide, que es también la altura del cono.

Cuando n aumente indefinidamente, B tenderá hacia πR^2, área de la base del cono, y el volumen de la pirámide tenderá hacia un límite que es $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Este límite es el **volumen del cono;** luego:

El volumen de un cono que tenga por base un círculo de radio R *y por altura* h *viene dado por la fórmula* $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, *tercera parte del producto del área de la base* πR^2 *por la altura* h.

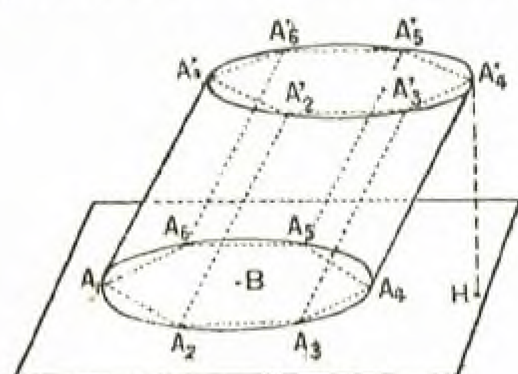


Fig. 396

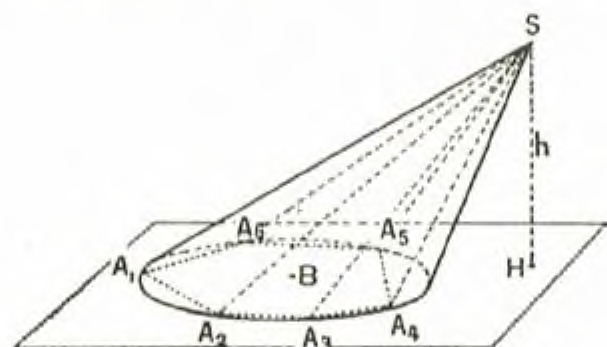


Fig. 397

Volumen de un tronco de cono. — *El volumen de un tronco de cono cuyas bases tengan por radios* R *y* R' *y cuya altura sea* h, *es* $\pi(R^2 + R'^2 + RR')$ h.

En un cono de vértice S cuya base es un círculo (O) de radio R (*fig.* 398) se obtiene un tronco de cono trazando un plano paralelo al plano de la base y que corte el cono según un círculo (O') de radio R'. La altura SH del cono corta en H el plano de la base mayor y en H' el de la base menor: HH' es una de las alturas del tronco de cono y su medida es h.

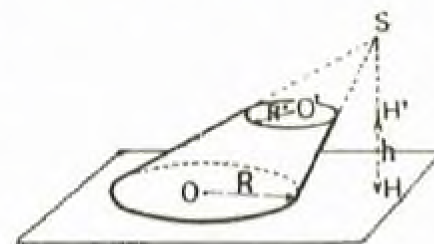


Fig. 398

Llamaremos x la longitud desconocida del segmento SH'.

El volumen del tronco es la diferencia de los volúmenes de dos conos: uno de ellos, de vértice S y base (O), tiene por volumen $\frac{1}{3}\pi R^2(x + h)$, pues su altura es $SH = x + h$; el otro cono, de vértice S y base (O'), tiene por volumen $\frac{1}{3}\pi R'^2 x$. Por consiguiente, el volumen V viene dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(x + h) - \frac{1}{3}\pi R'^2 x.$$

Sólo falta calcular x. Como las bases (O) y (O') son homotéticas y la razón de la homotecia es $\frac{SH}{SH'}$, tendremos

$$\frac{x + h}{R} = \frac{x}{R'}.$$

De esta proporción se obtiene:

$$x = R'\frac{h}{R - R'},$$

y en consecuencia

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{R^3 - R'^3}{R - R'}h,$$

y puesto que

$$R^3 - R'^3 = (R - R') \cdot (R^2 + R'^2 + RR'),$$

se tendrá

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R'^2 + RR')h.$$

Volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta. — Sea PQR un triángulo [*fig.* 399], (D) una recta que estando situada en su plano pasa por uno de sus vértices P y no

corta el segmento QR. *Se llama* **volumen engendrado por el triángulo que gira alrededor de la recta (D)** *el volumen* V *limitado por las tres superficies siguientes:*



Fig. 399

1° *Por la superficie lateral de un cono de revolución de vértice* P, *engendrado por la recta* FQ;

2° *Por la superficie lateral de un cono de revolución de vértice* P, *engendrado por la recta* PR;

3° *Por la superficie lateral de un tronco de cono de revolución, o de un cilindro de revolución engendrado por la recta* QR.

La figura 399 y los razonamientos que se exponen a continuación suponen que la prolongación del lado QR del triángulo corta en S la recta (D). En el caso particular de que QR fuese paralela a (D) habría que hacer ligeras modificaciones. Inscribamos en la circunferencia (O) descrita por el punto R una línea poligonal regular convexa, $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ de n lados. Las aristas de la pirámide de vértice S, que tiene dicho polígono por base, cortan en $A'_1, A'_2 \ldots A'_n, A'_1$ la circunferencia (O′) engendrada por el punto Q; estos puntos son los n vértices de un polígono regular, convexo, inscrito en la circunferencia (O′).

El volumen (V_1) limitado por las superficies siguientes:

1° por la superficie lateral de una pirámide regular de vértice P y de base $A'_1A'_2 \ldots A'_nA'_1$;

2° por la superficie lateral de una pirámide regular de vértice P y de base $A_1A_2 \ldots A_nA_1$;

3° por el tronco de pirámide $A_1A_2 \ldots A_nA'_1A'_2 \ldots A'_n$,

tiende, cuando n aumenta indefinidamente, hacia el volumen V engendrado por la superficie del triángulo PQR cuando gira alrededor de la recta (D), porque cada una de las tres superficies citadas tiende, en ese caso, hacia una de las tres superficies que limitan el volumen V.

Ahora bien, el volumen (V_1) puede ser descompuesto en n pirámides de vértice P y cuyas bases sean los trapecios $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, etcétera. Todas estas pirámides son iguales y se obtienen de la primera mediante giros de $\frac{2\pi}{n}$ de amplitud alrededor de la recta (D). Por consiguiente, la medida del volumen V_1 será n veces el producto del tercio de la altura PH de una cualquiera de dichas pirámides por el área de la base $A_1A_2A'_2A'_1$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \text{PH} \cdot n \cdot \text{área } A_1A_2A'_2A'_1.$$

Ahora bien, el producto n · área $A_1A_2A'_2A'_1$ es precisamente el área lateral del tronco de pirámide $A_1A_2 \ldots A_nA'_1A'_2 \ldots A'_n$. Cuando n aumente indefinidamente, dicha área tenderá hacia el área del tronco de cono cuyas bases son los círculos (O) y (O′). Por otra parte, la altura PH es la distancia del punto P al plano $A_1A_2A'_2A'_1$; podemos suponer que los puntos A_1, A'_1 son fijos y que A_2 y A'_2 son variables y tienden a confundirse con A_1 y A'_1 respectivamente. Por consiguiente, cuando n aumente indefinidamente, el plano $A_1A_2A'_2A'_1$ tenderá hacia uno de los planos tangentes al tronco de cono y la altura PH tenderá hacia un límite que es la distancia del punto P a dicho plano; este límite es igual a la altura PK del triángulo PQR.

Fig. 400

De todo ello se deduce que

El volumen engendrado por un triángulo PQR *que gira alrededor de una recta que pasa por el vértice* P *y no corta el lado* QR, *es igual al producto del área engendrada por el lado* QR, *en su giro alrededor del eje, multiplicada por el tercio de la altura* PK *del triángulo* PQR.

Volumen del sector esférico. — *Se llama* **sector esférico** *el volumen engendrado por un sector circular* AOB (fig. 400) *que gira alrededor de un diámetro* (D) *que no corta el arco* AB. *Dicho volumen* está limitado por la zona engendrada por el arco AB en su giro alrededor de (D) y por los dos conos de vértice O y cuyas bases están determinadas por las circunferencias (C) y (C′) engendradas por los puntos A y B en su giro alrededor de la recta (D).

Inscribamos en el arco AB una línea poligonal regular, convexa, $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ (obtenida de igual forma que en la página 149) cuyo primero y último vértices coincidan con los puntos A y B respectivamente.

El volumen V_1, engendrado por el triángulo OA_1A_2 en su giro alrededor de la recta (D), es igual al producto del área S_1 de la superficie engendrada por A_1A_2 por el tercio de la altura OH del triángulo OA_1A_2, que es la apotema de la línea poligonal. El volumen V_2, engendrado por el triángulo OA_2A_3, es igual al producto del área S_2 de la superficie engendrada por A_2A_3, en su giro alrededor de la recta (D), multiplicada por el tercio de la altura OH′ de dicho triángulo, que es igual a OH, y así sucesivamente.

La suma $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ de los volúmenes engendrados por los triángulos OA_1A_2, OA_2A_3, etc., es igual, por consiguiente, al producto $\frac{1}{3}$ OH · $(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)$. Se comprueba en primer lugar que dicho producto tiene un límite cuando n aumenta indefinidamente; en efecto, en ese caso OH tiende hacia R, radio del círculo (O), la suma $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ tiende (v. p. 149) hacia el área de la zona engendrada por el arco AB, y por tanto la suma $V_1 + V_2 + \ldots + V_n$, que es igual a un producto de números que tienen sus límites respectivos, tendrá un límite igual al producto de la tercera parte del radio por el área de la zona engendrada por el arco AB. Dicho límite es el **volumen del sector esférico.** Por consiguiente, diremos que:

El volumen de un sector esférico de una esfera (O), *de radio* R, *es igual al producto del área de la zona que limita el sector por el tercio del radio.*

Volumen de la esfera. — El volumen del sector esférico engendrado por una semicircunferencia AOB que gira alrededor del diámetro AB es igual al volumen de la esfera. En este caso, la zona que limita el sector esférico es la superficie de toda la esfera y su área es $4\pi R^2$. Por consiguiente, *el volumen de la esfera es igual a* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Volumen del anillo esférico. — *Se llama* **anillo esférico** *el volumen engendrado por un segmento* AMB *de un círculo* (O), *de radio* R, *que gira alrededor de uno de los diámetros* (D) *de dicho círculo que no cortan el arco* AB *(fig.* 401). Este volumen está limitado por la zona engendrada por el arco AB y por el tronco de cono o el cilindro engendrado por la cuerda AB. Su forma es aproximadamente la de una mondadura de fruta.

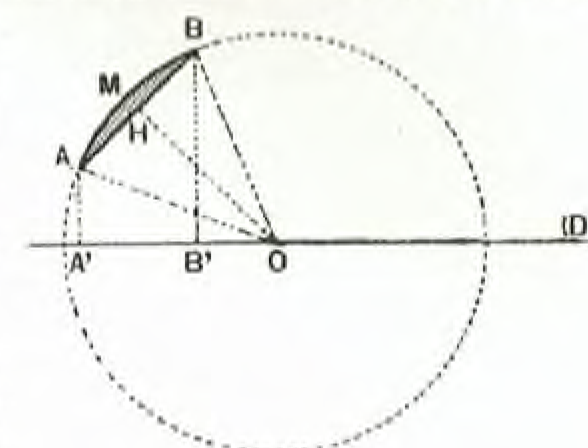


Fig. 401

Se llama **altura** *del anillo la altura* A′B′ *del tronco de cono o de la zona que lo limitan.*

Teorema. *El volumen del anillo esférico de altura* A′B′ *engendrado por un segmento circular* AMB *es igual a* $\frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 \cdot A'B'$.

El volumen del anillo es igual a la diferencia entre el sector esférico engendrado por el sector circular AOB y el volumen engendrado por el triángulo AOB en su giro alrededor de (D).

El volumen del sector esférico es igual al producto del área de la zona $2\pi R \cdot A'B'$ por el tercio del radio, luego será $\frac{2}{3}\pi R^2 \cdot A'B'$; el volumen engendrado por el triángulo AOB es igual al producto del área engendrada por el giro del segmento AB, es decir, $2\pi \cdot OH \cdot A'B'$ por el tercio de OH, que es la distancia del punto O al lado AB; luego este volumen será $\frac{2}{3}\pi A'B' \cdot \overline{OH}^2$.

Por consiguiente, el volumen del sector esférico es

$$V = \frac{2}{3}\pi A'B' (R^2 - \overline{OH}^2).$$

En el triángulo rectángulo OAH, se tiene que OA = R y

$$\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2;$$

por consiguiente, $\overline{AH}^2 = R^2 - \overline{OH}^2$, y como $\overline{AH}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4}$, tendremos

$$V = \frac{1}{6}\pi A'B' \cdot \overline{AB}^2.$$

Volumen del segmento esférico. — *Se llama* **segmento esférico** *la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos. Las secciones producidas en la esfera por estos planos paralelos son dos círculos* (C) *y* (C′) *de radios* r *y* r′ *respectivamente, que se llaman* **bases del** *segmento. La distancia entre los planos de las bases es la* **altura** *del segmento. El segmento esférico es el volumen engendrado por un segmento de círculo cuando gira alrededor de su eje de simetría* A′B′.

Se llama **casquete esférico** *la porción de esfera comprendida entre la superficie de la esfera y un plano.* Se considera el casquete esférico como un segmento esférico en que el plano de una base es tangente a la esfera.

Teorema. *El volumen de un segmento esférico de altura* h *cuyas bases son dos círculos de radios* r *y* r′ *es*

$$V = \frac{1}{2}\pi(r^2 + r'^2)\,h + \frac{1}{6}\pi\,h^3.$$

Cortemos *(fig.* 402) el segmento esférico por un plano diametral perpendicular a las dos bases. La sección producida es un segmento circular; el diámetro perpendicular a las bases de dicho segmento, las corta en los puntos A′ y B′. Se puede obtener el segmento esférico añadiendo al tronco de cono, cuya sección es A_1B_1BA y cuyo volumen es $\frac{1}{3}\pi(r^2 + r'^2 + rr')h$, el anillo esférico cuya sección se compone de las dos partes rayadas en la figura 402 y cuyo volumen es $\frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \cdot A'B'$. Para medir AB en función de r, r' y h se traza por A una recta AC paralela a A′B′; en el triángulo ACB, rectángulo en C, tenemos AC = A′B′ = h, y BC = $r' - r$; por consiguiente, $AB^2 = h^2 + (r - r')^2$. El volumen V del segmento esférico se expresa por la fórmula

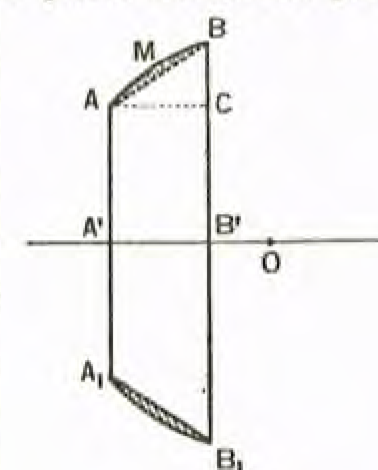


Fig. 402

$$V = \frac{1}{3}\pi(r^2 + r'^2 + rr')\,h + \frac{1}{6}\pi(h^2 + r^2 - 2\,rr' + r'^2)\,h,$$

es decir,

$$V = \frac{1}{6}\pi(3\,r^2 + 3\,r'^2 + h^2)\,h$$

$$= \frac{\pi}{2}(r^2 + r'^2)\,h + \frac{\pi}{6}h^3.$$

Fórmula de los tres niveles. — Consideremos un sólido (Σ) y un eje orientado Oz cualquiera. Sea (P) un plano variable perpendicular a Oz, definido por el punto M de intersección de (P) con Oz. Supondremos $OM = z$ y haremos variar z, aumentando desde un valor inicial z_1, al que corresponde un plano (P_1), hasta un valor z_2, al que corresponde un plano (P_2). Estos valores deberán ser elegidos de forma que al variar z desde z_1 hasta z_2, el plano (P) corte el sólido (Σ) según un área plana cuya medida será el número positivo S.

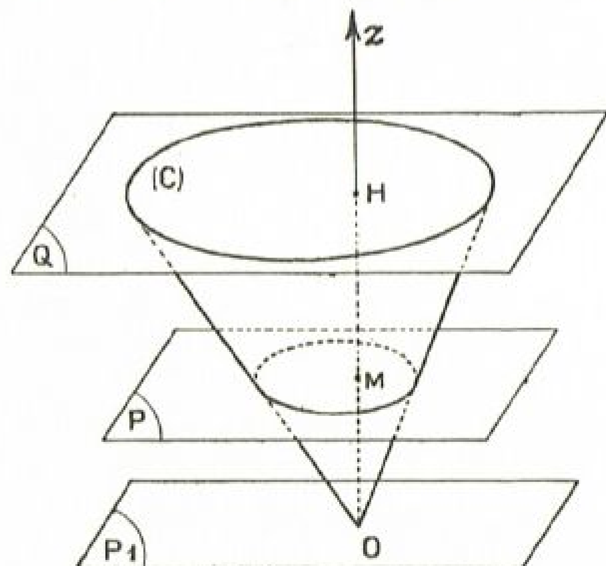


Fig. 403

El lector podrá seguir estas operaciones en la figura 403: hemos elegido como sólido (Σ) el sólido limitado por un cono de vértice (O) que tenga por base una curva plana (C) situada en un plano (Q). Se ha elegido Oz perpendicular al plano Q: la semirrecta Oz corta el plano Q en un punto H. Supondremos $OH = a$. En este ejemplo el plano (P) variable es paralelo al plano (Q) y corta el sólido (Σ), si M es un punto del segmento OH, según un área plana limitada por una curva homotética (v. p. 132) de la curva (C) en la homotecia $(O \cdot \frac{z}{a})$: por consiguiente, esta área viene expresada por la fórmula $S = B \cdot \frac{z^2}{a^2}$ (generalización del resultado obtenido en la página 144), siendo B el número positivc que mide el área de la base del cono, limitada por la curva (C).

En todos los casos que, como en el ejemplo precedente, sea posible calcular el área S de la sección producida en el sólido (Σ) por el plano (P) y que el resultado de este cálculo nos lleve a una igualdad de la forma

$$S = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

siendo α, β, γ números cuyo valor no depende de z, la porción de volumen del sólido (Σ) comprendida entre los dos planos (P_1) y (P_2) se expresará por la fórmula llamada **de los tres niveles**

$$V = \frac{h}{6}(b + B + 4m).$$

En esta fórmula, h representa la distancia entre los planos paralelos (P_1) y (P_2); b, la medida del área de la sección producida en (Σ) por el plano (P_1); B, la medida del área de la sección producida por el plano (P_2); m, la medida del área de la sección producida por un plano equidistante de (P_1) y (P_2).

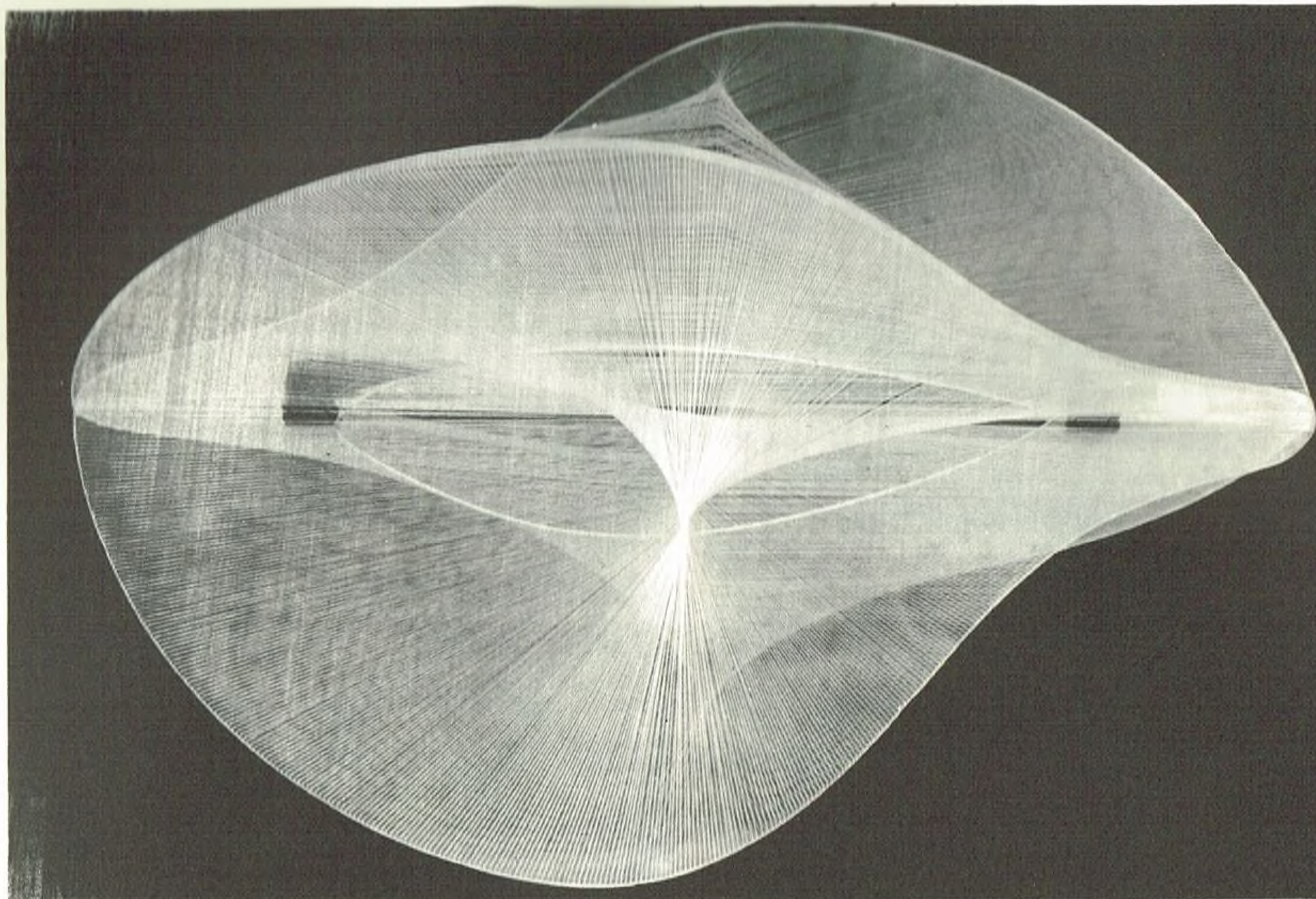
En el ejemplo considerado en que (Σ) es un cono, tendremos $b = o$, $m = \frac{B}{a^2} \cdot \frac{h^2}{4}$, y $h = a$; la fórmula de los tres niveles dará

$$V = \frac{h}{6}\left(B + 4\frac{B}{4}\right) = \frac{Bh}{3}.$$

Para obtener el volumen de una esfera de radio R, elegiremos como planos (P_1) y (P_2), dos planos paralelos tangentes a la esfera; en este caso tendremos $B = b = o$, $m = \pi R^2$, $h = 2R$ y, por consiguiente, $V = \frac{R}{3} \cdot 4\,\pi\,R^2$.

R. Dontot, J. Dalbanne y L. Lobo

BIBLIOGRAFÍA. — Leopoldo Crusat Prat: *Geometría Plana y del Espacio*. 2 vol. Editorial Bosch, Barcelona. — Miguel Ortega y Sala: *Geometría*. 2 vol. Edit. Hernando. Madrid. — L. Olabarrieta: *Geometría y Trigonometría*. Edit. El Mensajero del Corazón de Jesús. Bilbao. — Rey Pastor - Puig Adam: *Elementos de Geometría Racional*. 2 vol. Biblioteca Matemática. Madrid. — P. Puig Adam: *Curso de Geometría Métrica*. 2 vol. Biblioteca Matemática. Madrid, 1961.



Construcción linearia en el espacio por Naum Gabo *(Fot. Giraudon)*

Geometría descriptiva

Datos históricos. — Las primeras ideas sobre **geometría descriptiva** se las debemos al matemático francés **Monge** (1746-1818). Antes que él, los picapedreros, carpinteros y arquitectos debían poseer métodos personales para hacer los diseños o planos que les servirían de ayuda para la ejecución de sus obras. Pero fue Monge el primero que se ocupó de reunir estos métodos, más o menos empíricos, y edificó una verdadera ciencia con reglas y métodos que sustituyeron a los antiguos procedimientos, muchos de los cuales eran tenidos en secreto. Monge tuvo un precursor, **Desargues** (1593-1662), que había dado métodos exactos para el corte de las piedras (1640). Desargues se ganó el odio de las gentes del oficio y el grabador Bosse, que quiso enseñar sus métodos, fue perseguido por este motivo.

El primer tratado de geometría descriptiva de Monge no apareció hasta el año 1799. De la geometría descriptiva de Monge se deducen la geometría perspectiva y la estática gráfica, debida a **Culmann** (1821-1881) y perfeccionada por **M. Levy** (1838-1910).

Podemos citar también los métodos de cálculos gráficos debidos a **Lalanne** (1811-1892) y desarrollados por **M. d'Ocagne** (1862-1938).

Objeto y métodos

La geometría descriptiva tiene por objeto el representar, en un dibujo hecho sobre un plano, una figura del espacio cuyos elementos no están todos sobre un mismo plano. Nos permite resolver por medio de construcciones geométricas, hechas con la regla y el compás, los problemas relativos a las formas y dimensiones de los cuerpos en el espacio, con el objeto de construirlos o reproducirlos en otro lugar o posteriormente.

No se puede estudiar con fruto esta ciencia si antes no se tienen los debidos conocimientos de las construcciones en geometría plana y del espacio. En efecto, los objetos que vamos a representar no existen frecuentemente más que en nuestro pensamiento y debemos conocer bien las propiedades que los definen, para su acertada representación.

Así, por ejemplo, para hallar la distancia de un punto a un plano, es preciso saber:

1° Que dicha distancia es la medida del segmento de perpendicular bajada del punto al plano;

2° Que la perpendicular al plano es perpendicular a todas las rectas del plano, y para que esto se cumpla, es suficiente con que ella sea perpendicular a dos rectas del plano;

3° Que en un plano siempre se puede trazar una recta paralela a otro plano;

4° Que la proyección ortogonal de un ángulo recto sobre un plano paralelo a uno de sus lados, no perpendicular al otro, es un ángulo recto, etc.

Los instrumentos que se utilicen en las construcciones gráficas deben ser debidamente comprobados y cuidados.

En la resolución de un problema de geometría descriptiva tenemos, primeramente, una parte matemática puramente cualitativa, sobre una figura del espacio que se representa generalmente en perspectiva, pero que puede ser interesante tenerla en cartón, madera o yeso (estereotomía). Otra parte consiste en ejecutar en verdadera magnitud, o a una escala determinada, una serie de construcciones sobre un plano, que nos conducen a una figura perfectamente determinada en el dibujo.

En este dibujo existen dos clases de líneas:

1° Las diversas construcciones hechas con vistas a llegar al resultado apetecido.

Estas construcciones pueden variar, en un mismo problema, según el método empleado para resolverlo. Conviene repasarlas con el tiralíneas con tinta roja, haciendo los trazos lo más fino posible, para determinar con la máxima precisión todos los puntos que se van obteniendo y también para no sobrecargar el dibujo, en detrimento de su claridad. Corrientemente, las construcciones más elementales se dejan en lápiz; pero las que se refieren más especialmente a los métodos de la geometría descriptiva se deben dejar en trazo fino rojo (o en rayas en negro, si sólo se emplea un solo color de tinta, como en imprenta, por ejemplo);

2° El resultado buscado se debe poner en tinta negra, en trazo lleno, y bien diferenciado de todas las demás líneas.

Ciertas líneas del resultado que representan aristas ocultas se dibujan en puntos, para distinguirlas de las rayas y del trazo continuo.

Representación del punto

Representación gráfica. Línea de referencia. Cota y alejamiento de un punto. Posiciones relativas de un punto. Distancia de un punto a la línea de tierra. Distancia entre dos puntos. Cambio del plano vertical

Definiciones. *Se llama* **proyección** *a de un punto* A, *sobre un plano* P, *el punto de intersección de este plano con una recta que pasa por* A, *llamada* **proyectante.** Esta recta se determina por una segunda condición, que puede ser:

1º *Que pase por un punto fijo* S *(fig.* 1). Entonces, el lugar geométrico de las proyectantes de los distintos puntos de una línea es una superficie **cónica,** cuyo vértice es el punto S; la línea es la **directriz** del cono y las proyectantes de cada punto son las **generatrices.** La intersección de esa superficie cónica con el plano P es la proyección **cónica** de la línea considerada. Se llama perspectiva a una proyección cónica de los objetos sobre un plano, considerando el ojo reducido a un punto, que es el vértice del cono;

2º *Que sea paralela a una dirección fija* △ *(fig.* 2). El lugar geométrico de las proyectantes de los distintos puntos de una línea es una superficie **cilíndrica** paralela a la dirección △; la **directriz** del cilindro es la línea y las **generatrices** son las proyectantes de cada punto. La intersección de esa superficie cilíndrica con el plano P es la proyección **cilíndrica** de la línea considerada. Si la dirección fija △ es perpendicular al plano P, la proyección se llama **ortogonal.** En otro caso, se llama **perspectiva caballera.**

La perspectiva y, en menor grado, la perspectiva caballera, nos da una imagen del objeto que nos hace conocer sus formas y la disposición de sus diversas partes. Pero su representación gráfica resulta complicada y la deformación de las longitudes relativas no permite prácticamente encontrar las dimensiones reales.

La proyección ortogonal, que nos proporciona menor idea del objeto real, tiene, en cambio, la ventaja de ser más fácil en su representación y, sobre todo, nos permite hallar las verdaderas magnitudes de distancias y ángulos, por procedimientos relativamente sencillos.

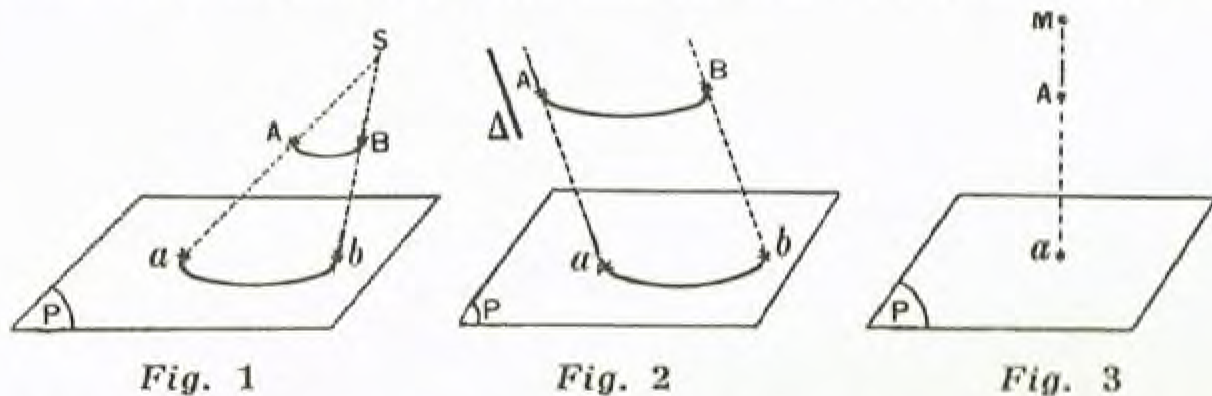


Fig. 1 *Fig.* 2 *Fig.* 3

La posición de un punto A no queda determinada únicamente por su proyección ortogonal *a* sobre un solo plano P *(fig.* 3). En efecto, *a* es también la proyección de cualquier otro punto, tal como el M, perteneciente a la perpendicular A*a* sobre P.

Esta posición de A puede determinarse dando la distancia *a*A del punto al plano. Nos encontramos entonces en el sistema de representación de *Planos acotados,* llamado así por su empleo en topografía, donde los terrenos se representan por su proyección sobre el plano horizontal y la altura o **cota** de los puntos notables sobre este plano.

En la *geometría descriptiva* propiamente dicha, la posición del punto A queda determinada por su proyección sobre un segundo plano, perpendicular al primero. Así queda definido el sistema *diédrico* o de *Monge.*

Los dos planos de proyección son el horizontal H y el vertical V. Sobre éstos se hacen, en los planos de edificios, las proyecciones correspondientes que se llaman *planta* y *alzado,* respectivamente.

Teorema. *Un punto* A *está determinado por sus proyecciones sobre dos planos perpendiculares* H *y* V (fig. 4).

En efecto, las dos proyectantes, A*a* y A*a'*, determinan un plano perpendicular a cada uno de los dos primeros H y V (que se cortan según una recta *xy* llamada **línea de tierra).** Este plano, llamado de **perfil,** contiene las perpendiculares *αa* y *a'α*, bajadas desde las proyecciones *a* y *a'* a la línea de tierra.

Estas dos perpendiculares son los lados del rectilíneo del diedro formado por los planos H y V, que es un ángulo recto, y forman con las proyectantes un rectángulo A*aαa'*. Por consiguiente, las perpendiculares *a'*A y *a*A a los planos H y V están en un mismo plano y concurren en A.

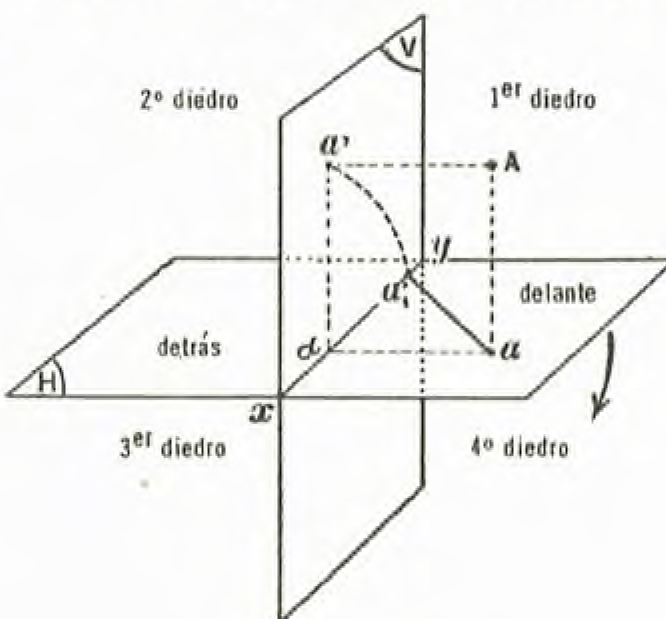


Fig. 4

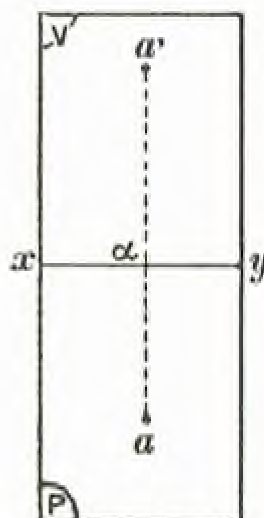


Fig. 5

Representación gráfica. — Para representar las dos proyecciones de un objeto sobre una misma hoja de papel, se hace girar la parte delantera del plano H alrededor de la línea de tierra *xy*, en el sentido de la flecha, hasta que coincida con la parte inferior del plano V. A esta operación se le llama *abatimiento.* Después del abatimiento, la proyección horizontal *a* de un punto A situado por delante del plano V, queda por debajo de *xy*; la proyección vertical *a'* de un punto A situado por encima de H, queda por encima de *xy*.

Línea de referencia. — En el dibujo, las dos proyecciones de un punto están sobre una misma perpendicular a la línea de tierra, que se llama *línea de referencia* (fig. 5).

En efecto, el plano *Aaαa'*, perpendicular a H y V, es perpendicular a su intersección *xy*, y, por tanto, esta recta es perpendicular a todas las rectas de aquel plano y, en particular, a las *αa* y *a'α*. Como en un punto *α* sobre *xy* no se puede levantar más que una sola perpendicular a esta recta, se deduce que *αa* y *a'α* tienen la misma dirección.

Recíproco. Dos puntos en el plano del dibujo, situados sobre una misma línea de referencia, determinan la posición de un punto del espacio.

Cota y alejamiento de un punto. — *La distancia de un punto* A *al plano horizontal de proyección se llama* **cota.** Es positiva o negativa, según que A esté por encima o por debajo de H. Sobre el plano del dibujo, la cota se mide por la distancia de la proyección vertical a la línea de tierra, es decir, $\overrightarrow{\alpha a'}$.

Se llama **alejamiento** *de un punto* A *su distancia al plano vertical de proyección,* o sea $\overrightarrow{a'A}$ en el espacio o $\overrightarrow{\alpha a}$ en el plano del dibujo. El alejamiento es positivo o negativo, según que el punto A esté por delante o por detrás del plano V. Al alejamiento también se le llama *distancia.*

Observación. El punto en el espacio o en perspectiva caballera se designa por A. Sobre el plano del dibujo, las proyecciones horizontal y vertical se designan, respectivamente, por *a* y *a'*.

Posiciones relativas de un punto. — Conociendo las proyecciones de un punto, podemos saber su posición en el espacio con respecto a los planos de proyección y a sus bisectores *(fig.* 6). El punto A, cuya cota *αa'* es mayor que su alejamiento *αa*, está situado en el primer diedro por debajo del primer bisector.

El punto B, cuya cota *βb'* es menor que su alejamiento *βb*, está situado en el primer diedro por debajo del primer bisector.

El punto C, cuya cota *γc'* es igual a su alejamiento *γc*, está situado en el primer bisector.

El punto D, cuya cota *δd'* es negativa y mayor en valor absoluto que su alejamiento *δd*, positivo, está situado en el cuarto diedro, por debajo del segundo bisector.

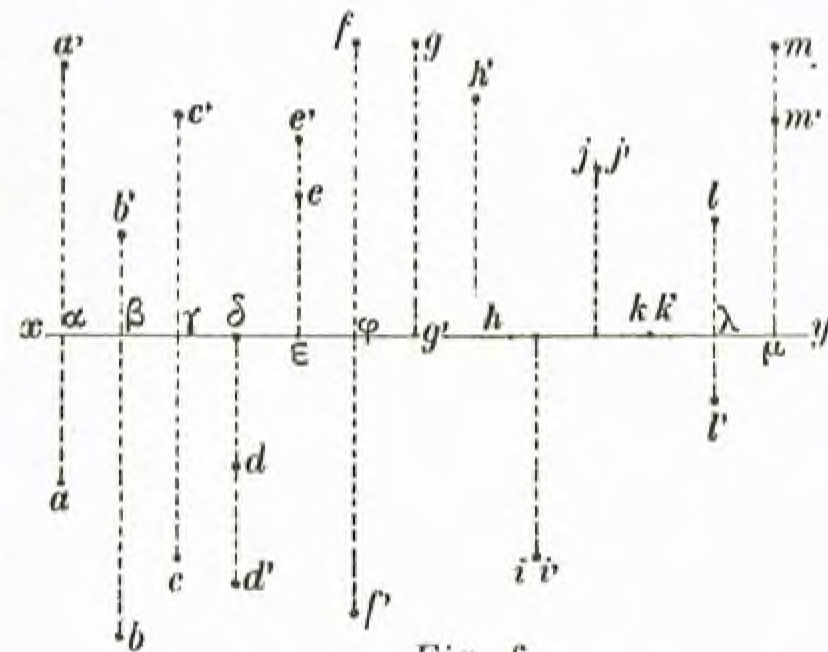


Fig. 6

El punto E, cuyo alejamiento, negativo, es menor en valor absoluto que su cota, positiva, está situado en el segundo diedro, por encima del segundo bisector.

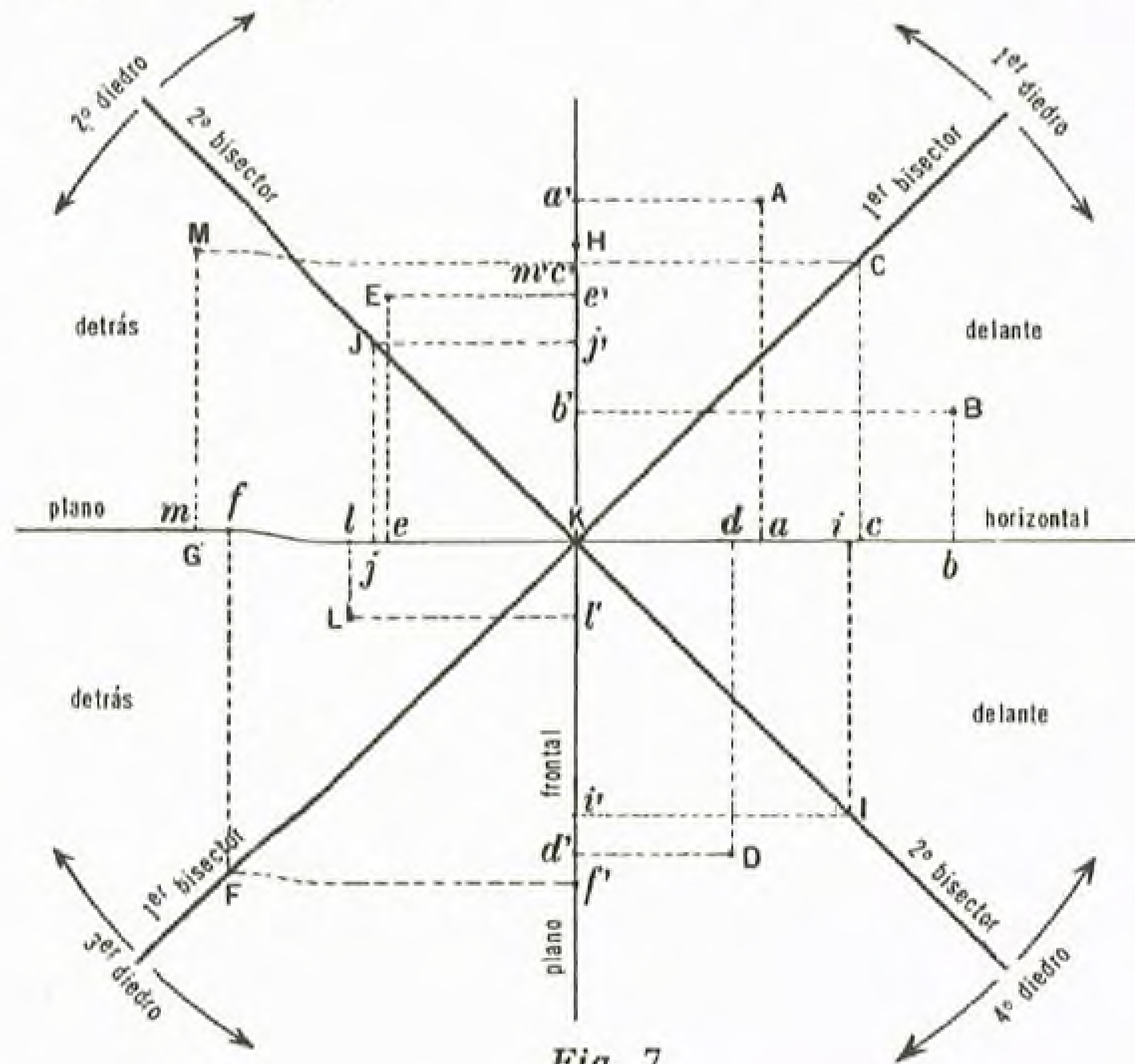


Fig. 7

El punto F, cuya cota es igual al alejamiento en valor absoluto y en signo, negativo, está situado en el tercer diedro, sobre el primer bisector.

El punto G, de cota nula y alejamiento negativo, está situado sobre el plano H, por detrás del plano V.

El punto H, de alejamiento nulo y cota positiva, está situado en el plano vertical V, por encima del plano horizontal H.

El punto I, de proyecciones confundidas y cota negativa, está situado sobre el segundo bisector, en el cuarto diedro.

El punto J, de proyecciones confundidas y alejamiento negativo, está situado sobre el segundo bisector, en el segundo diedro.

El punto K, de cota y alejamiento nulos, está situado sobre la línea de tierra.

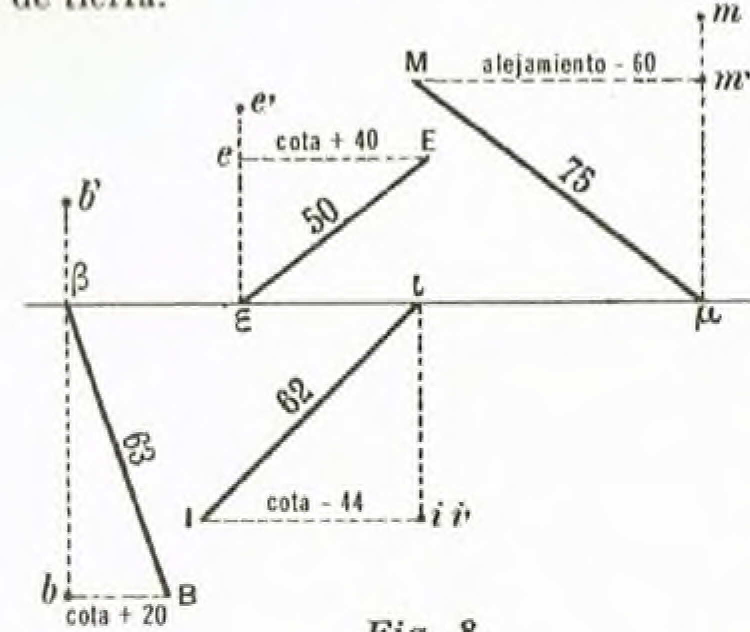


Fig. 8

El punto L, de alejamiento mayor que la cota, en valor absoluto, pero ambos negativos, está situado en el tercer diedro, por encima del primer bisector.

El punto M, de alejamiento negativo y de mayor valor absoluto que la cota, positiva, está situado en el segundo diedro, por debajo del segundo bisector.

Estos resultados pueden deducirse de la figura 7, suponiendo todos los puntos situados en un mismo plano perpendicular a xy, llamado *de perfil*.

Distancia de un punto a la línea de tierra. — La distancia D de un punto a una recta es la longitud de la perpendicular bajada desde este punto a la recta. En la figura 4, la distancia de A a xy es la diagonal Aa del rectángulo cuyos lados tienen por medidas la cota c y el alejamiento d del punto A. El valor de esta distancia es:

$$D = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

La diagonal Aa es igual a la $a'a$. Gráficamente, podemos hallar esta distancia abatiendo a' sobre el plano horizontal de proyección, girando el plano proyectante Aaa' alrededor de aa como charnela; a' vendrá sobre xy en a'_1 y la distancia buscada es a'_1a = D (*fig.* 4).

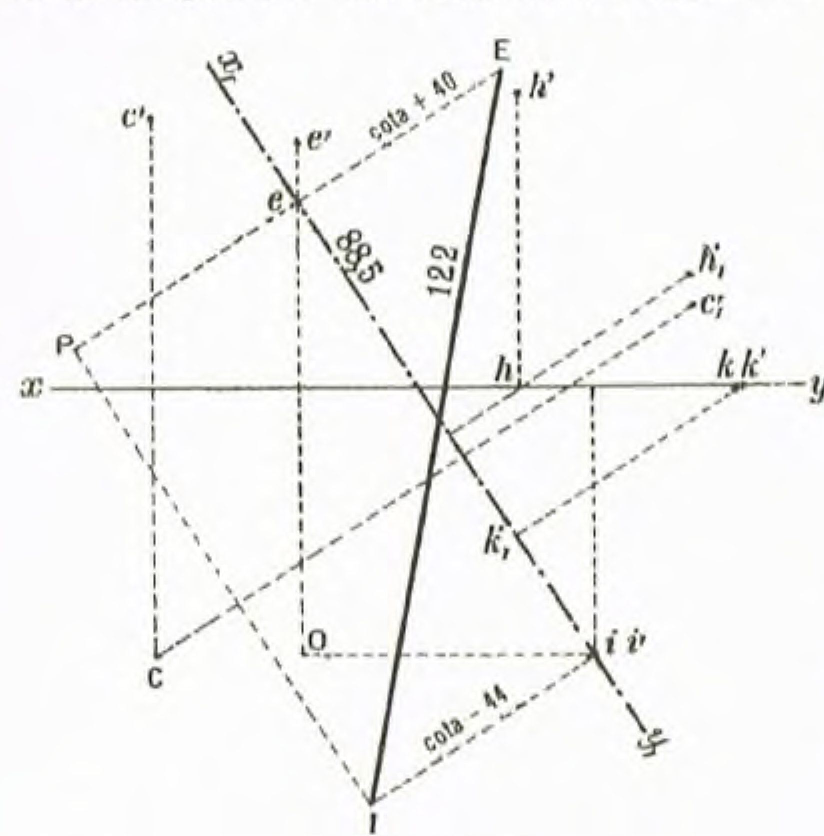


Fig. 9

Nosotros aplicamos este procedimiento a los puntos B, E e I de la fig. 6 y al punto M. Este último lo abatimos sobre el plano vertical de proyección, girando su plano proyectante alrededor de $\mu m'$ como charnela (*fig.* 8).

Distancia entre dos puntos. — Para encontrar la distancia entre dos puntos, definidos por sus proyecciones, abatimos sobre el plano horizontal de proyección el plano determinado por las proyectantes Ee e Ii de los puntos considerados, haciéndolo girar alrededor de la recta ei (*fig.* 9).

La distancia buscada es el lado oblicuo de un trapecio rectángulo que tiene por bases las proyectantes Ee e Ii y por altura el segmento ei. Si las cotas de los puntos dados son de signo contrario, el trapecio es rectángulo de segunda especie, de lados cruzados.

El valor de ei es el de la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son: la distancia oi entre las líneas de referencia y la diferencia de alejamientos oe:

$$ei = \sqrt{oi^2 + oe^2} = \sqrt{48^2 + 74^2} = 88{,}2.$$

La distancia pedida EI es la hipotenusa de otro triángulo rectángulo EPI, cuyos catetos son la distancia ei y la diferencia de cotas; si estas cotas son de signo contrario, su diferencia es la suma de sus valores absolutos. En nuestro caso es: 40 — (— 44) = 84. Por tanto es,

$$EI = \sqrt{48^2 + 74^2 + 84^2} = 121{,}8.$$

Cambio del plano vertical. — Dadas las proyecciones de un punto sobre H y V, se trata de determinar las proyecciones de este punto sobre otro sistema de planos, formado por el mismo plano horizontal H y por un nuevo plano vertical V_1 (*fig.* 10).

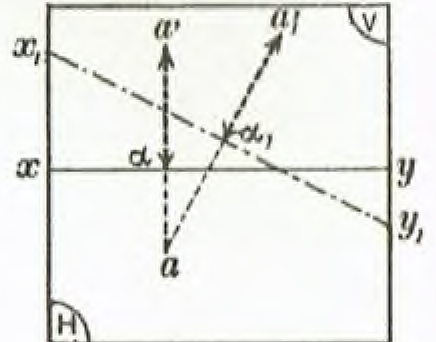
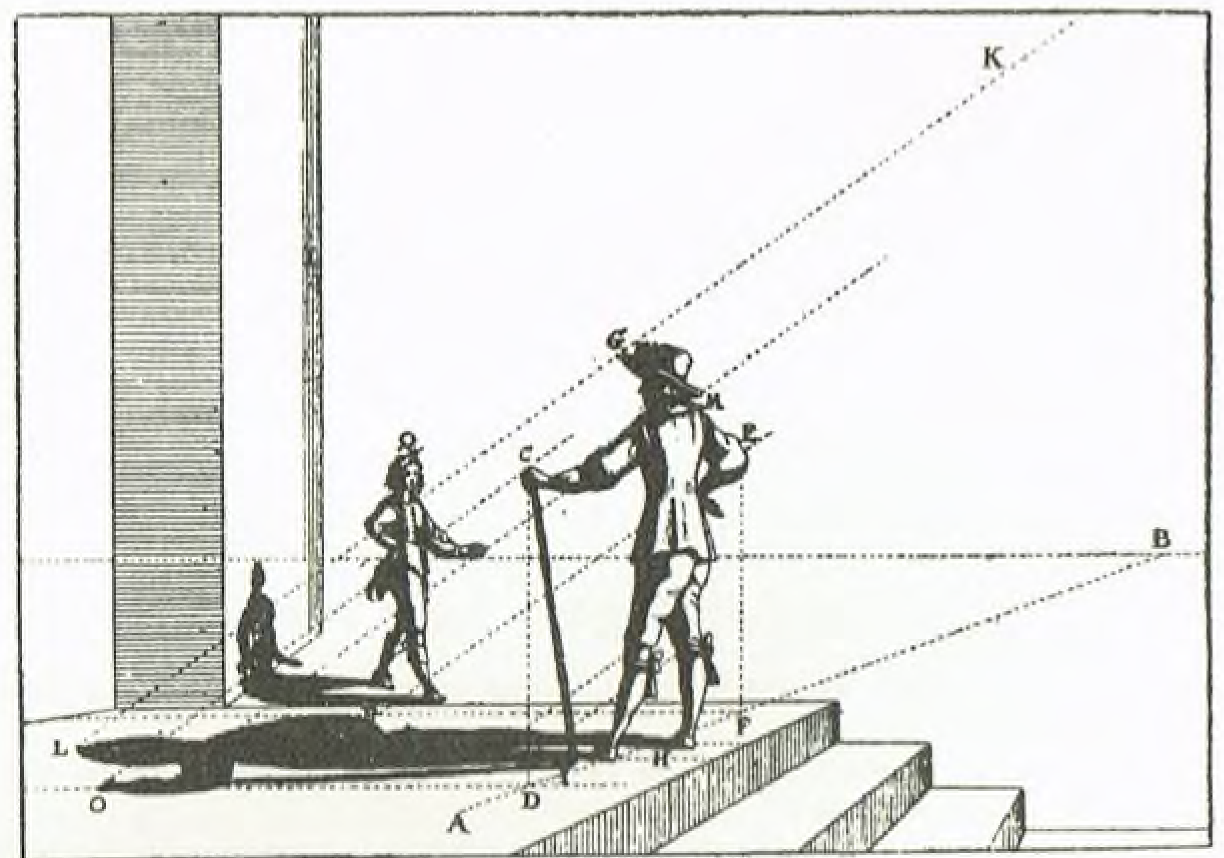


Fig. 10.

La proyección horizontal del punto es la misma y la cota no varía tampoco. Siendo la nueva línea de tierra x_1y_1, la nueva línea de referencia se obtiene trazando la perpendicular $a\alpha_1$ a ella y tomando la cota $\alpha_1a'_1 = \alpha a'$.

Observación. Si tomamos como nuevo plano vertical el que pasa por dos puntos A y B, la nueva línea de tierra pasa por a y b. Las proyecciones verticales a' y b' coinciden con los puntos del espacio y la distancia AB, en su verdadera magnitud, es igual a $a'b'$ en el dibujo.



Sombra al sol. Figura tomada de la *Perspectiva práctica* (1642)

Representación de la recta

Trazas de una recta: Traza horizontal. Traza vertical o frontal. Puntuación. — **Rectas concurrentes:** Construcción de rectas concurrentes. — **Rectas paralelas:** Caso de dos rectas de perfil. Trazar una recta paralela a una dirección dada. Trazar una recta P paralela a otra recta △ (de perfil o no) dada, apoyándose en otras dos rectas dadas, una de las cuales es vertical V'V (o de punta B'B) y la otra es una recta cualquiera D, D'. Problema de aplicación.

Definición. *Se llama* **proyección de una línea recta △ sobre un plano** P *el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus puntos sobre este plano.*

Teorema fundamental. *La proyección de una línea recta* (△) *sobre un plano* P *es otra línea recta* (fig. 11).

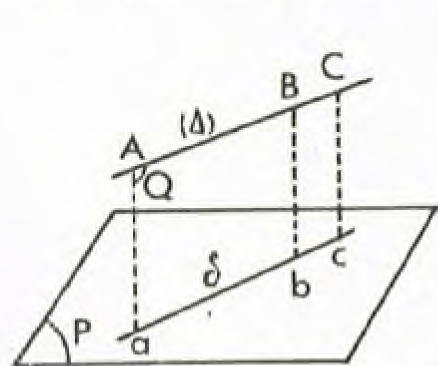


Fig. 11

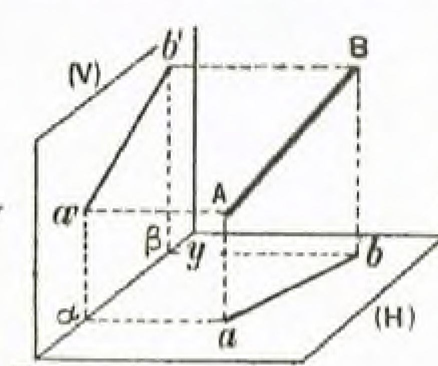


Fig. 12

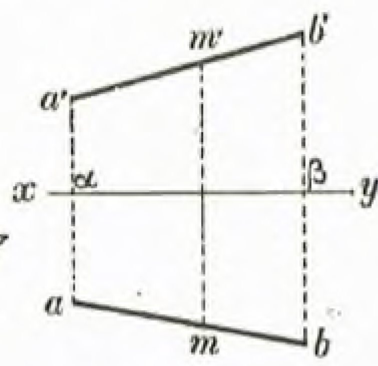


Fig. 13

En efecto, consideremos la recta (△) oblicua al plano P y la proyectante Aa de uno de sus puntos, A. Estas dos rectas determinan un plano Q, perpendicular al P, al que corta según una recta δ. Todas las perpendiculares a P bajadas desde cualquier punto de Q están situadas en este plano, luego cortan P en puntos de la recta δ. En particular, las proyecciones ortogonales de los puntos de (△) sobre P están en la recta δ. Luego queda demostrado el teorema.

Si (△) es perpendicular a P, su proyección sobre este plano se reduce a un punto. Así, la proyección de la recta Aa es el punto a.

El plano Q se llama plano **proyectante** de la recta (△); si el plano P es el horizontal de proyección, H, el plano Q se llama **vertical;** si el plano P es el vertical de proyección, V, el plano Q se dice que es **de canto.**

Teorema. *Las longitudes de varios segmentos de una misma recta son proporcionales a las longitudes de sus proyecciones sobre un mismo plano.*

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}.$$

Esto se demuestra fácilmente, trazando una paralela por A a ac.

Teorema. *Una recta, no perpendicular a la línea de tierra* xy, *que-*

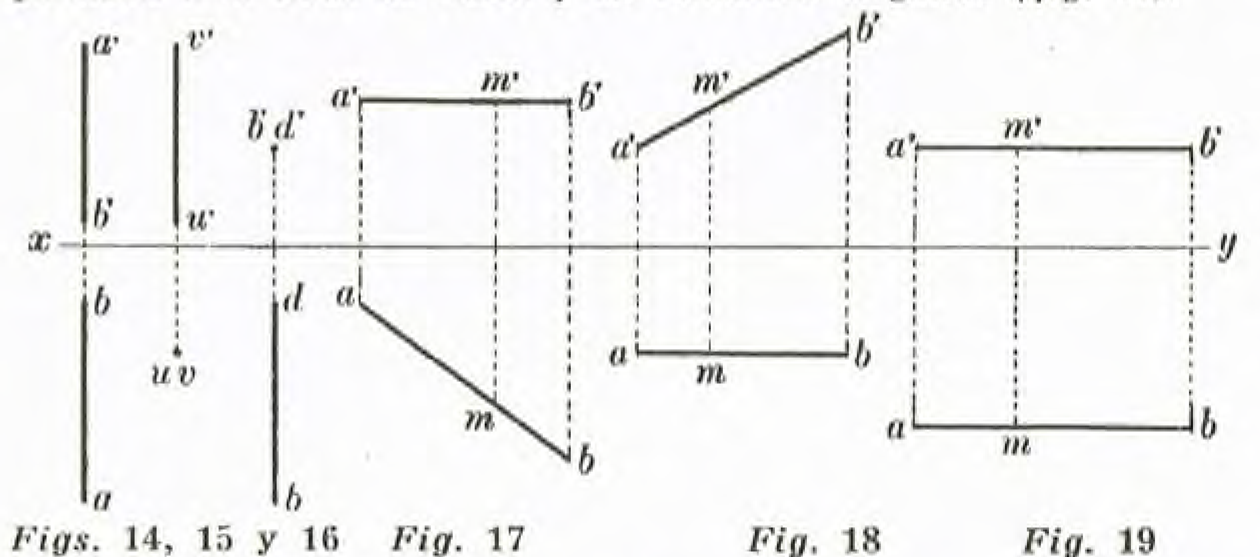
da perfectamente determinada por sus proyecciones sobre los planos (H) *y* (V).

En efecto (*figs.* 12 y 13), a su proyección vertical corresponde un plano proyectante de canto; a su proyección horizontal corresponde un plano proyectante vertical. Estos dos planos proyectantes no pueden confundirse ni ser paralelos. Su intersección es la recta considerada AB.

Caso de una recta de perfil perpendicular a xy. Los planos proyectantes se confunden. Para determinar la recta, se necesitan las proyecciones de dos de sus puntos (*fig.* 14).

Caso de una recta perpendicular a un plano de proyección. Sobre este plano se proyecta según un punto. Sobre el otro plano de proyección se proyecta, en verdadera magnitud, perpendicularmente a la línea de tierra. Cuando la recta es perpendicular al plano (H) se llama recta *vertical.* Cuando es perpendicular al plano (V) se llama recta *de punta* (figs. 15 y 16). Una recta paralela al plano (H) se llama *horizontal.* Sobre este plano se proyecta en verdadera magnitud. Sobre el plano (V) se proyecta paralelamente a *xy* (*fig.* 17). Una recta paralela al plano (V) se llama *frontal.* Sobre este plano se proyecta en verdadera magnitud. Sobre (H) se proyecta paralelamente a *xy* (*fig.* 18).

Una recta *paralela a la línea de tierra* tiene sus dos proyecciones paralelas a la línea de tierra y en verdadera magnitud (*fig.* 19).



Figs. 14, 15 y 16 *Fig.* 17 *Fig.* 18 *Fig.* 19

Una recta contenida en el primer bisector tiene sus dos proyecciones simétricas respecto de la línea de tierra, pues la cota y el alejamiento de cada uno de sus puntos son iguales en valor absoluto y signo.

Una recta contenida en el segundo bisector tiene sus dos proyecciones confundidas, pues todos sus puntos son como el I o el J de las figs. 6 y 7.

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre una recta es que cada una de sus proyecciones esté situada sobre la proyección correspondiente de la recta. Dicho de otro modo, las proyecciones del punto han de estar situadas en las intersecciones de las proyecciones de la recta con una misma línea de referencia.* Por ejemplo, el punto *m, m'* de las figs. 13, 17, 18 y 19.

Esta condición no es suficiente en el caso de una recta de perfil.

En efecto, si el punto está sobre la recta, las proyecciones de este punto están sobre las proyecciones de la recta, y si esta última condición es satisfecha, el punto en el espacio está sobre la intersección de los planos proyectantes, y éstos se confunden.

Corolario. La posición de un punto situado sobre una recta (△) queda determinada:

1º *Por una de sus proyecciones.* La otra estará sobre la misma línea de referencia;

2º *Por su alejamiento o por su cota.* La otra proyección queda perfectamente determinada;

3º *Por su distancia a otro punto de la recta* (△) *orientada.* Se hace un cambio de plano vertical, de modo que el nuevo (V_1) sea paralelo a la recta (△). Los segmentos de la recta se proyectan en (V_1) en verdadera magnitud; se toma, sobre la nueva proyección vertical y a partir del punto dado, la distancia dada y se vuelve al sistema primitivo de planos de proyección. Si no se fija el sentido de la distancia dada, hay dos soluciones al problema. También se puede cambiar el plano horizontal, poniendo el nuevo (H_1), paralelo a (△), y se procede de la misma manera.

Trazas de una recta

Definición. *Se llama* **traza de una recta** *sobre un plano el punto de intersección de la recta y el plano* (fig. 20).

Traza horizontal. — La *traza horizontal* es la intersección (*h, h'*) de la recta con el plano horizontal de proyección; su cota es nula; su proyección vertical se encuentra sobre la línea de tierra.

Traza vertical o frontal. — La *traza vertical o frontal* es la intersección (*f, f'*) de la recta con el plano vertical de proyección; su alejamiento es nulo; su proyección horizontal se encuentra sobre la línea de tierra.

Puntuación. — Para facilitar la interpretación del dibujo, se distinguen las partes vistas que se ponen en trazo lleno de las partes ocultas que se ponen de puntos.

Se supone el ojo del observador en el infinito, delante del plano vertical de proyección y por encima del plano horizontal. Por tanto, el observador sólo ve lo que hay en el primer diedro. El segmento *fh, f'h'* se dibuja de trazo lleno. El resto es oculto en la recta de la fig. 20.

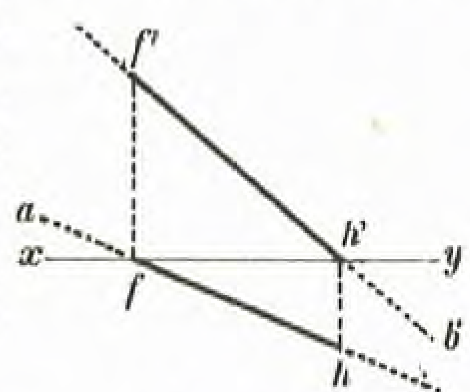


Fig. 20

Observaciones. 1ª Toda recta paralela a un plano de proyección no tiene traza sobre este plano; las rectas paralelas a la línea de tierra carecen de ambas trazas.

2ª Una recta que corta la línea de tierra en un punto α, tiene sus dos trazas confundidas en ese punto α.

Rectas concurrentes

Dadas las proyecciones de dos rectas (D) y (△), tratemos de conocer su posición relativa, es decir, si son concurrentes, paralelas o no coplanarias. Veamos primero los casos particulares siguientes:

1º Las proyecciones respectivas de ambas rectas sobre uno de los planos de proyección están confundidas. Tienen entonces un mismo plano proyectante. Son concurrentes paralelas o están confundidas, según lo sean o lo estén sus proyecciones sobre el segundo plano de proyección. En la fig. 21, (L) y (D) son paralelas; (D) y (△) son concurrentes en M; (L) y (△) concurren en N;

Fig. 21 *Fig.* 22 *Fig.* 23

2º Una de las rectas es perpendicular a uno de los planos de proyección, sobre el que se proyecta en un punto; sea la recta (△), cuya proyección vertical es el punto *m'*. Para que la recta (D) corte (△) es preciso que su proyección vertical pase por *m'* (*fig.* 22).

Caso general. *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas (no de perfil) sean concurrentes es que sus proyecciones homónimas se corten en dos puntos que se encuentren sobre una misma línea de referencia* (fig. 23).

Puede comprobarse si dos rectas son concurrentes o no, aunque no se corten dentro de los límites del dibujo (*fig.* 24).

En efecto, si las dos rectas AB y CD se cortan, ambas forman un plano. Tomemos dos rectas AD y BC que se apoyen en ellas y veremos que las intersecciones de sus proyecciones del mismo nombre se encuentran sobre una misma línea de referencia. Esto mismo ocurrirá si las rectas dadas son paralelas, pero esto se ve en seguida, pues en este caso, las proyecciones homónimas han de ser paralelas también, como se verá más adelante.

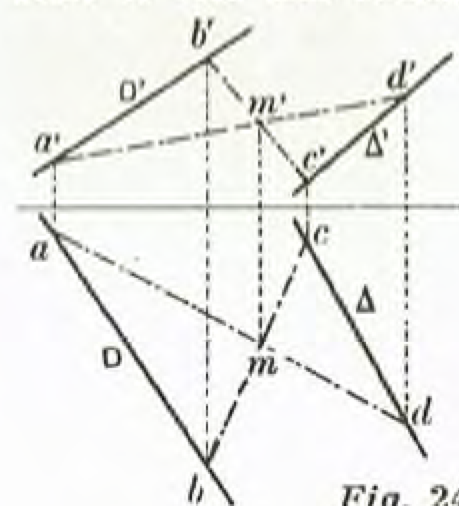


Fig. 24

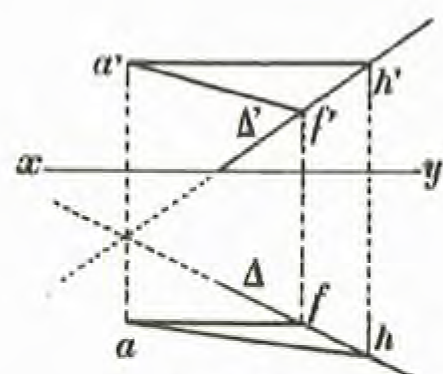


Fig. 25

Caso en que una de las rectas es de perfil (sin ser perpendicular a V ni H). Se hace un cambio del plano vertical de proyección; conviene que el nuevo sea el plano de perfil de la recta, y de esta forma queda el problema como en el caso general.

Caso en que las dos rectas son de perfil. Si sus proyecciones son distintas, las rectas no son coplanarias; si sus proyecciones están confundidas, están en un mismo plano y, por tanto, son concurrentes o paralelas. Esto se distingue haciendo un cambio del plano vertical de proyección; el nuevo plano (V_1) será el de perfil de las rectas, para mayor facilidad.

Construcción de rectas concurrentes. — La *construcción de rectas concurrentes* resulta inmediatamente de las propiedades que hemos estudiado. Por ejemplo:

1º Por un punto A, trazar una horizontal AH o una frontal AF que se apoyen en una recta dada △ (*fig.* 25).

En ambos casos, una de las proyecciones es paralela a *xy;*

2º Por un punto A, trazar una recta que se apoye en otras dos rectas dadas, una de las cuales es perpendicular a uno de los planos de proyección, por ejemplo, de punta (*fig.* 26). La proyección vertical de la recta ha de pasar por *d'*, con lo que se determina el punto *mm'* de apoyo en △;

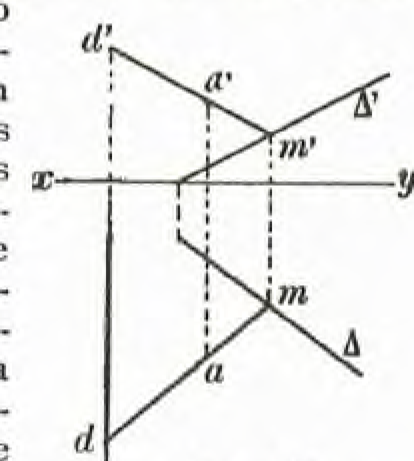


Fig. 26

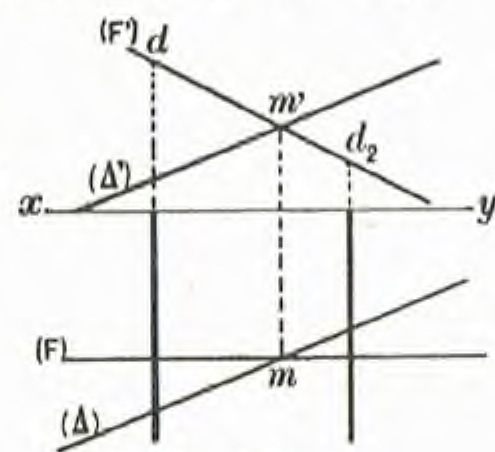


Fig. 27

3º La solución es idéntica cuando la recta pedida es frontal y ha de apoyarse sobre otras tres rectas, dos de las cuales son de punta (*figs.* 27 y 28).

La proyección vertical (F') de la recta frontal que se busca (*fig.* 27),

pasará por las proyecciones verticales d_1 y d_2 de las rectas de punta. El punto de intersección m' de (F') y (△') nos proporciona m, sobre (△). La paralela a xy por m es la proyección horizontal (F) de la frontal pedida.

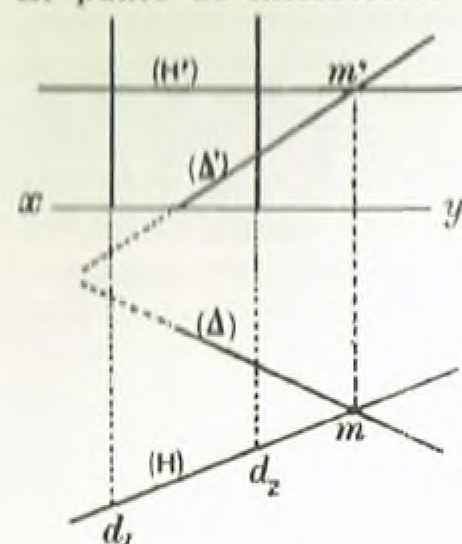


Fig. 28

De una manera análoga resolvemos el problema cuando la recta por construir es una horizontal que se apoya en otras tres rectas, dos de las cuales son verticales (*fig.* 28);

4º Para trazar una recta vertical que se apoye en dos rectas dadas, se tomará como proyección horizontal el punto de intersección de las proyecciones horizontales de dichas rectas. La proyección vertical de la recta pedida coincide con la línea de referencia de ese punto.

Análogamente se construye una recta de punta que se apoye en dos rectas dadas.

Rectas paralelas

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas (no de perfil) sean paralelas es que sus proyecciones homónimas sean paralelas* (figs. 29 y 30).

Si las rectas paralelas tienen un mismo plano proyectante horizontal o vertical, sus proyecciones horizontales o verticales están confundidas.

Si las rectas AB y CD del espacio son paralelas, sus planos proyectantes sobre un plano (P) son los planos de los ángulos aAB y cCD, que tienen sus lados paralelos dos a dos. Luego estos planos son paralelos y sus intersecciones ab y cd con un tercer plano (P) son también paralelas. Hemos demostrado con esto que la condición es necesaria. Demostremos que es también suficiente.

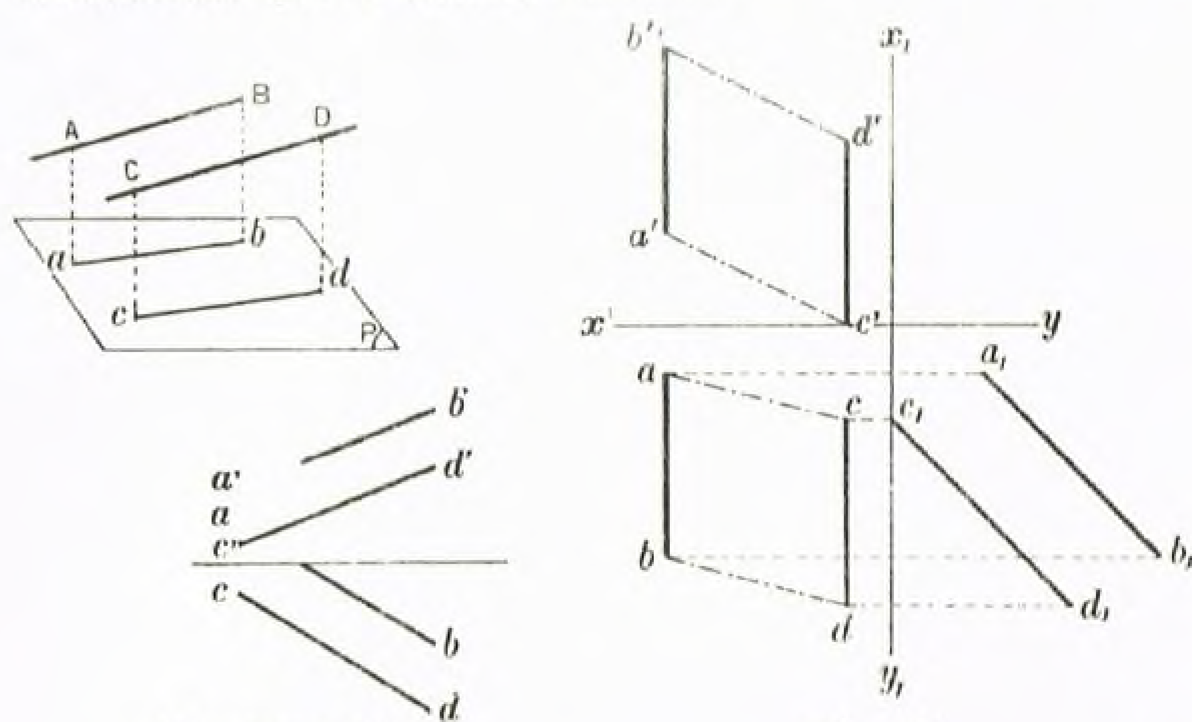


Fig. 29 y 30 *Fig.* 31

En efecto, el plano proyectante horizontal de ab es paralelo al plano proyectante horizontal de cd. Lo mismo puede decirse de los planos proyectantes verticales de $a'b'$ y $c'd'$.

Cada uno de los dos planos proyectantes horizontales corta los otros dos planos proyectantes verticales según dos rectas paralelas. En resumen, resultan cuatro rectas de intersección, todas ellas paralelas: en particular, la intersección del plano vertical que pasa por ab con el plano de canto que pasa por $a'b'$, que es la recta AB; y la intersección del plano vertical que pasa por cd con el plano de canto que pasa por $c'd'$, que es la recta CD. Luego AB y CD son rectas paralelas, como queríamos demostrar.

Caso de dos rectas de perfil. — (*Fig* 31). Las proyecciones de dos rectas de perfil son siempre paralelas, pero eso no significa que lo sean también las rectas en el espacio. En efecto, el plano proyectante horizontal se confunde con el plano proyectante vertical en cualquier recta de perfil, luego la intersección de estos planos no está determinada. Si una recta de perfil no está determinada por sus proyecciones, tampoco podemos saber su posición relativa con respecto a otra recta de perfil. Para esto, es preciso hacer un cambio de planos. Cambiemos, por ejemplo, el vertical de proyección, que lo pondremos paralelo a las rectas dadas. Si, después del cambio, las proyecciones a_1b_1 y c_1d_1 son paralelas, también lo serán AB y CD.

Si AB = CD (en valor absoluto y signo), también son paralelas AC y BD, pues ABCD es entonces un paralelogramo.

Trazar una recta paralela a una dirección dada. — Sea LL' la dirección dada y A un punto por el que queremos trazar una paralela a esa dirección (*fig.* 32). Basta con trazar por a y a' las paralelas a las proyecciones de la dirección dada. Si LL' es la dirección del sol, el punto o' es la sombra del punto A sobre el plano vertical de proyección. Si este plano fuera transparente, la sombra de A se proyectaría en el plano horizontal en el punto ω.

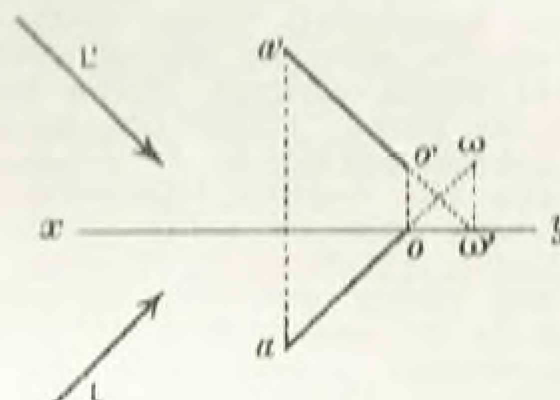


Fig. 32

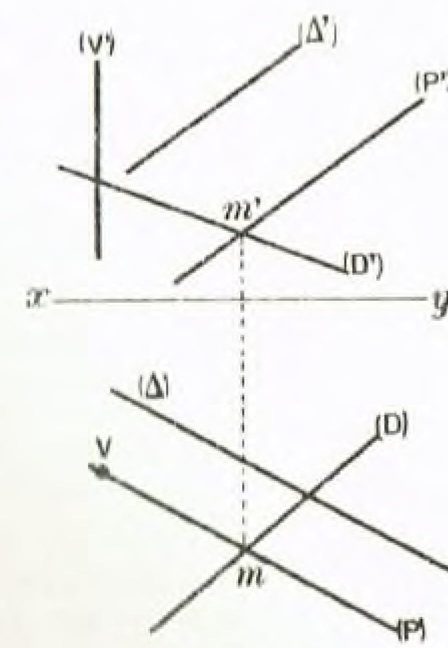


Fig. 33

Trazar una recta P paralela a otra recta △ (de perfil o no) dada, apoyándose en otras dos rectas dadas, una de las cuales es vertical V'V (o de punta B'B) y la otra es una recta cualquiera D, D'. — Si la recta (△) es de perfil, se hace un cambio de plano vertical de proyección (*fig.* 33).

Consideremos el caso en que las rectas de apoyo sean una vertical y otra cualquiera, y sea P la paralela buscada a (△). La proyección horizontal (P) pasa por la traza V de la vertical y es paralela a la proyección horizontal de (△). Luego es VP, que corta en m la proyección horizontal de la tercera recta dada (D). Obtenida la proyección vertical m' basta con trazar (P') paralela a (△').

Problema de aplicación. — *Construir las proyecciones de un paralelogramo que tiene un lado* AB = 6 cm., *horizontal y formando un ángulo de* 30º *con el plano vertical, siendo* A *el punto más cercano a este plano. A* (c = 5 cm.; d = 3,2 cm.). *El lado* AD = 3,6 cm. *es de punta.*

Hallar la sombra de este paralelogramo sobre los planos de proyección (limitados al primer diedro), producida por un haz de rayos luminosos paralelos, cuya dirección se proyecta formando ángulos de 45º *con* xy (fig. 34).

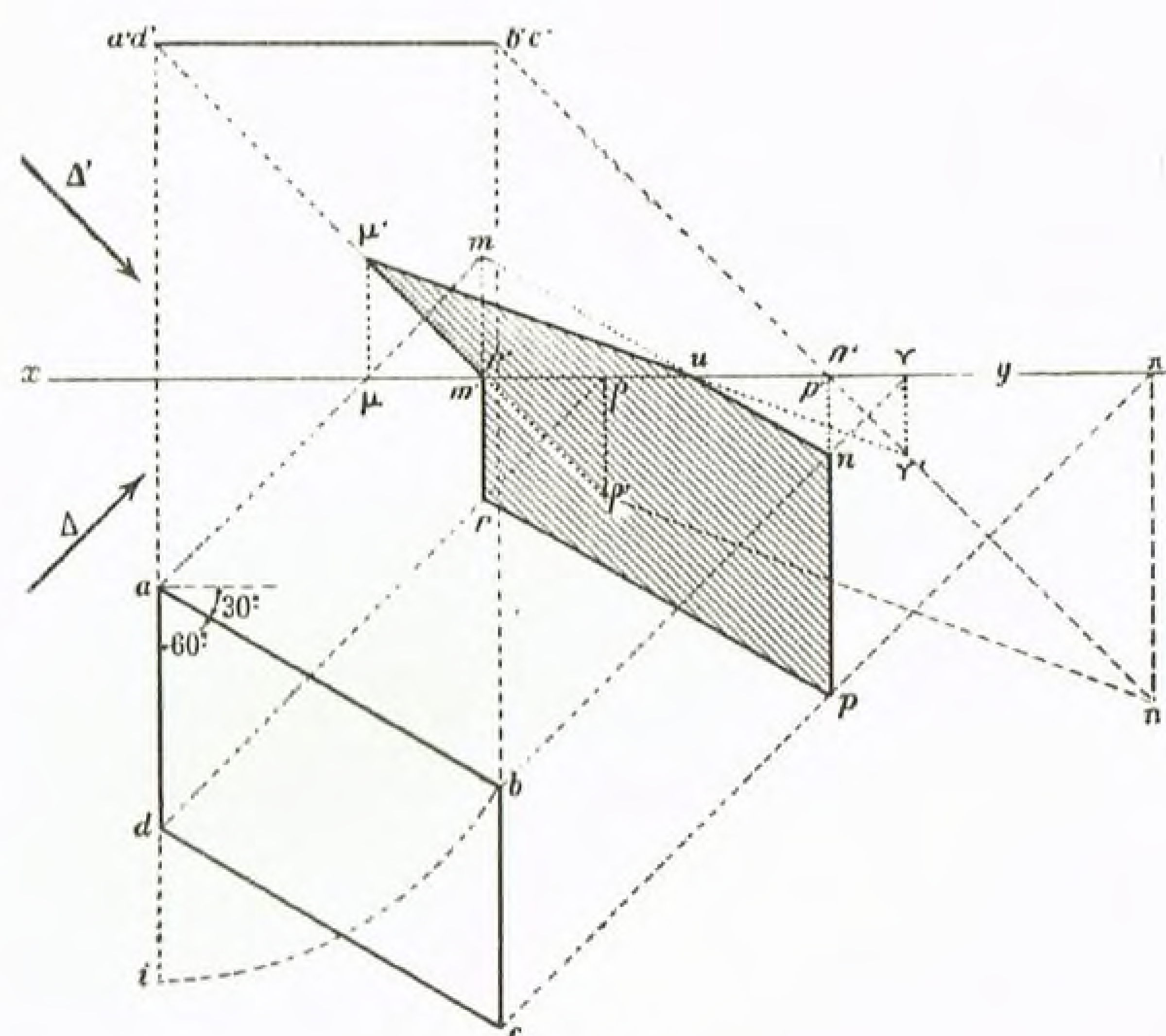


Fig. 34

Situado el punto aa', tomamos ad = 3,6 cm. en la normal a xy.

Cortamos la recta ab (siendo $\widehat{dab}$ = 60º) en b por la circunferencia de centro a y radio ai = 6 cm. Trazando paralelas, tenemos la proyección horizontal $abcd$ del paralelogramo. La proyección vertical es, ya, fácil de obtener.

La sombra del punto A sobre (H) es la traza de la paralela al rayo luminoso (△) que pasa por A, o sea el punto oculto m, m'. La sombra de D es el punto r, r' (r' se confunde con m'). La sombra de B es el punto n, n'. La sombra de C es el punto p, p' (p' se confunde con n'). Luego la sombra sobre el plano (H) es el paralelogramo $mnpr$.

Análogamente, la sombra de ABCD sobre el plano (V) es el paralelogramo $\mu'\gamma'\pi'\rho'$.

Las dos sombras se cortan sobre la línea de tierra y, prescindiendo de las sombras ocultas, la sombra real sobre los planos de proyección es el área rayada de la figura.

Representación del plano

Determinación del plano. Punto de un plano. Posición de un punto con relación a un plano. Línea de máxima pendiente de un plano. Ángulo de un plano con el horizontal de proyección. Pendiente de un plano. — **Trazas de un plano:** Traza horizontal. Traza vertical. Plano definido por sus trazas. Determinación de un punto M de un plano definido por sus trazas. Determinación de una recta de un plano definido por sus trazas. — **Planos notables:** Plano vertical. Plano frontal. Plano de canto. Plano horizontal. Plano de perfil. Plano paralelo a la línea de tierra. Plano que pasa por la línea de tierra. Cambio del plano vertical de proyección. — **Rectas y planos paralelos.** — **Problemas.** — **Intersecciones de rectas y planos:** Intersección de un plano cualquiera con uno vertical. Intersección de un plano cualquiera con uno de canto. Intersección de un plano vertical con una recta. Intersección de dos planos cualesquiera. Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra. Intersección de una recta con un plano. Intersección de dos planos definidos cada uno de ellos por dos rectas paralelas o concurrentes. Intersección de tres planos. — **Rectas y planos perpendiculares:** Distancia de un punto M a un plano P. Distancia entre dos planos paralelos. Por un punto M trazar un plano perpendicular a una recta $\triangle$. Trazar por un punto M una recta D perpendicular a otra recta $\triangle$. Trazar la perpendicular común MN a dos rectas D y $\triangle$

Determinación del plano. — Un plano queda determinado por tres puntos no alineados, por una recta y un punto, por dos rectas concurrentes o por dos rectas paralelas (D) y ($\triangle$).

La intersección de un plano cualquiera con un plano horizontal es una recta **horizontal.** Esta recta queda determinada por su cota (*fig.* 35). En efecto, supongamos el plano definido por dos rectas (D) y ($\triangle$), paralelas. La proyección vertical de la horizontal será paralela a xy, a una distancia dada por su cota. Sus intersecciones con (D') y ($\triangle$') nos dan los puntos h' y k', que, referidos a (D) y ($\triangle$), nos proporcionan la recta hk, que es la proyección horizontal de la horizontal de que se trata.

Fig. 35

Todas las horizontales de un plano son paralelas, pues corresponden a las intersecciones del plano con planos horizontales, paralelos entre sí.

La intersección de un plano con un plano frontal es una recta **frontal.** Todas las frontales del plano son paralelas entre sí. Una frontal viene determinada por su alejamiento, que nos proporciona su proyección horizontal paralela a xy. Para hallar la proyección vertical, se procede de modo análogo a como hemos hecho con la proyección horizontal de una horizontal.

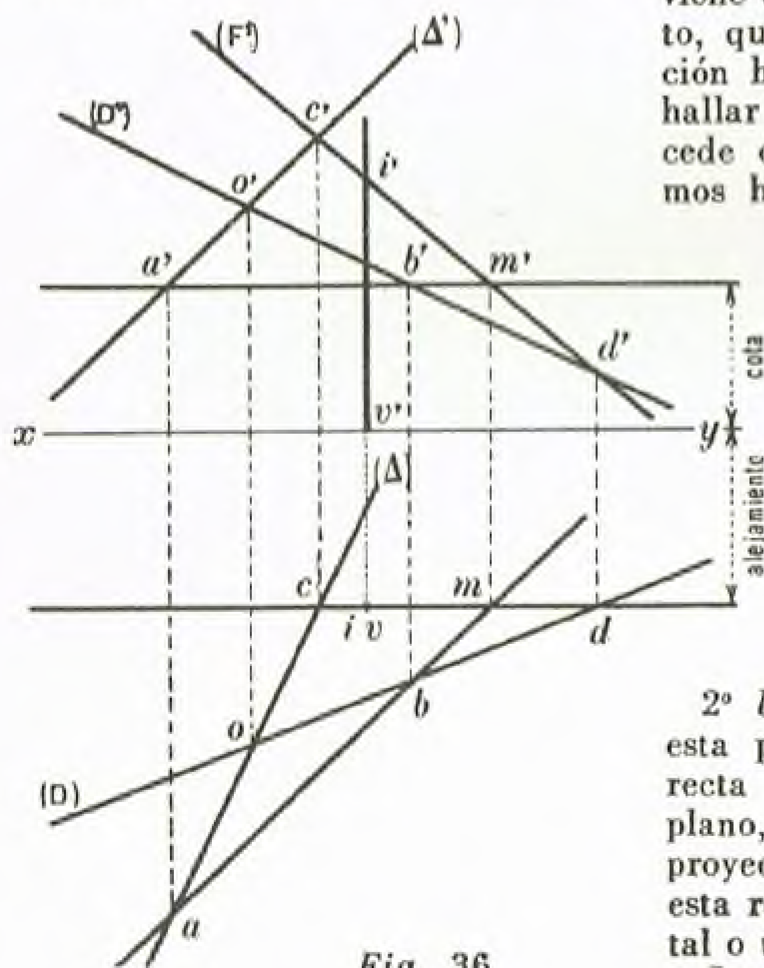


Fig. 36

Punto de un plano. — Un punto de un plano está definido si se conoce:

1° *Su cota y su alejamiento.* Basta trazar la horizontal y la frontal correspondientes a esa cota y a ese alejamiento, respectivamente, y en su intersección está el punto;

2° *Una de sus proyecciones.* Por esta proyección se hace pasar una recta cualquiera perteneciente al plano, que nos determinará la otra proyección. Para mayor facilidad, esta recta auxiliar será una horizontal o una frontal del plano (*fig.* 36).

Sea el plano formado por las rectas (D) y ($\triangle$). Se traza la horizontal *(a'b', ab)* de cota dada y la frontal *(cd, c'd')* de alejamiento dado. Estas dos rectas se cortan en el punto que se busca, *mm'*. Estas dos proyecciones han de encontrarse sobre una misma línea de referencia, lo que nos servirá de comprobación.

Posición de un punto con relación a un plano. — Este problema se reduce a buscar la intersección de un plano, determinado por dos rectas concurrentes o paralelas, con:

1° *Una vertical: iv, i'v'* (*fig.* 36).

Se traza la frontal *cd, c'd'* del plano, que se apoya en la vertical, y se halla la intersección de estas dos rectas. De esta forma sabemos si un punto de la vertical está por encima o por debajo del plano;

2° *Una recta de punta.*

Se traza la horizontal del plano, que se apoya en la recta de punta, y se halla la intersección de estas dos rectas. De esta forma vemos si un punto de la recta de punta está por delante o por detrás del plano.

Línea de máxima pendiente de un plano. — Se llama *línea de máxima pendiente* de un plano a una recta contenida en él, perpendicular a la intersección del plano con el horizontal de proyección (*fig.* 37).

La proyección horizontal, P, de una línea de máxima pendiente, es perpendicular a la proyección homónima de una horizontal cualquiera, H, del plano, pues la proyección de un ángulo recto sobre un plano paralelo a uno de sus lados es otro ángulo recto. Todas las líneas de máxima pendiente de un plano son paralelas.

OBSERVACIONES. 1ª En la fig. 37 se ha suprimido la línea de tierra por no ser necesaria;

2ª Una línea de máxima pendiente es suficiente para determinar un plano.

En efecto, puede trazarse por un punto de ella una horizontal del plano, cuya proyección horizontal será normal a la proyección correspondiente de la línea de máxima pendiente. La proyección vertical es paralela a la línea de tierra. Puede considerarse el plano definido por dos horizontales o por una horizontal y otro punto cualquiera de la línea de máxima pendiente.

Fig. 37

Si derramáramos un recipiente de agua sobre un plano, el líquido resbalaría por él paralelamente a la línea de máxima pendiente.

Ángulo de un plano con el horizontal de proyección. Pendiente de un plano. — El ángulo que forma un plano con el horizontal de proyección es el ángulo que forma una línea de máxima pendiente con su proyección horizontal.

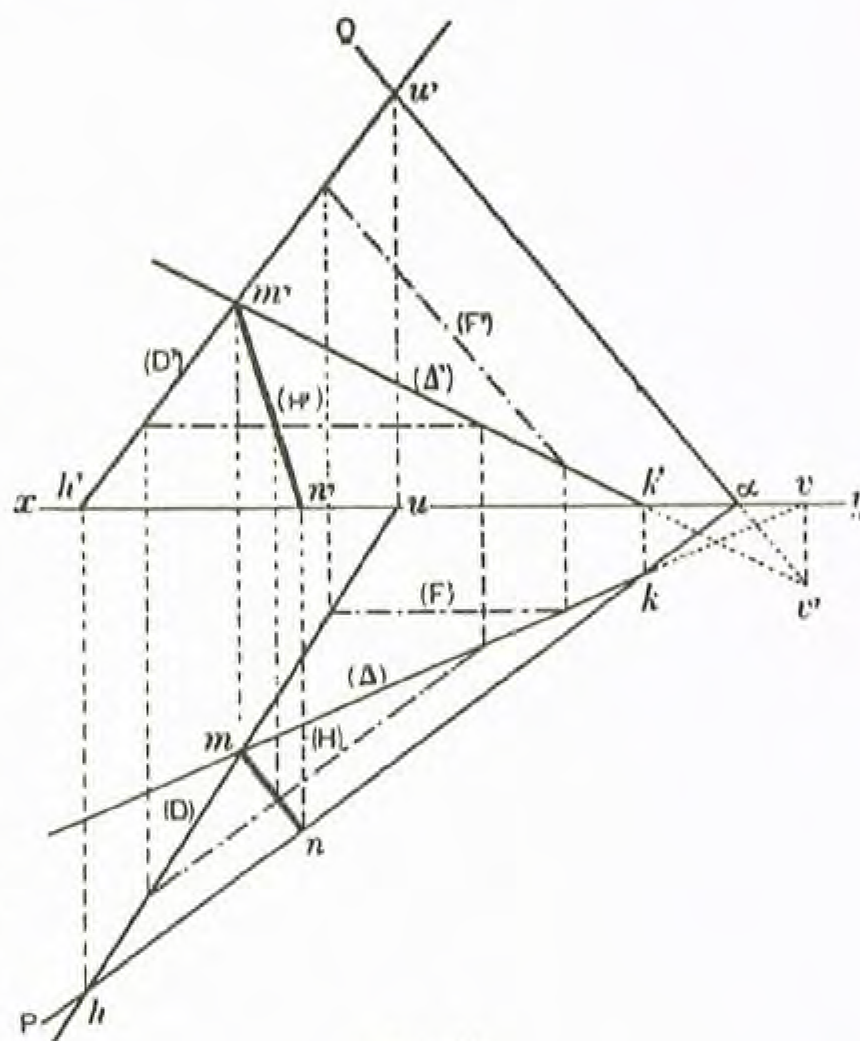
En la fig. 37, siendo el segmento bB_1 normal a P y de valor igual a la altura de B sobre A, el ángulo de que se trata, en verdadera magnitud, es el $\widehat{baB_1}$.

La tangente trigonométrica de este ángulo, $\frac{bB_1}{ab}$, es la *pendiente* del plano.

Trazas de un plano

Traza horizontal. — La *traza horizontal* αP de un plano (D, $\triangle$) es la intersección de este plano con el horizontal de proyección (*figura* 38).

Esta traza es una recta horizontal de cota nula. Es, por tanto, paralela a todas las horizontales (H) del plano y perpendicular a su línea de máxima pendiente MN. Se la determina en el dibujo uniendo las trazas horizontales *hh'* y *kk'* de las rectas D y $\triangle$. Su proyección horizontal es, por tanto, *hk*. Su proyección vertical se confunde con la línea de tierra.



Traza vertical. — Se llama *traza vertical o frontal* de un plano (D, $\triangle$) su intersección αQ con el plano vertical de proyección (*figura* 38).

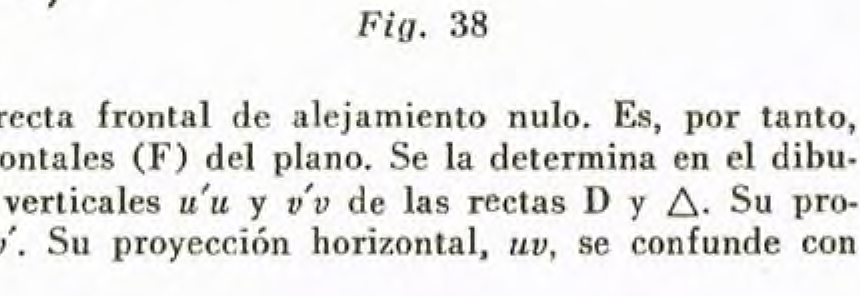


Fig. 38

La traza vertical de un plano es una recta frontal de alejamiento nulo. Es, por tanto, paralela a todas las frontales (F) del plano. Se la determina en el dibujo uniendo las trazas verticales *u'u* y *v'v* de las rectas D y $\triangle$. Su proyección vertical es *u'v'*. Su proyección horizontal, *uv*, se confunde con la línea de tierra.

Plano definido por sus trazas. — Podemos determinar un plano por sus trazas sobre los planos de proyección. Cada una de estas trazas tiene una de sus proyecciones sobre la línea de tierra, y, por tanto, con la proyección horizontal de su traza horizontal y la proyección vertical de su traza vertical tenemos la manera más fácil de definir un plano. Estas dos trazas se cortan sobre la línea de tierra en un punto α, que es el punto común a los tres planos: el plano de que se trata y los dos de proyección.

Determinación de un punto M de un plano definido por sus trazas. — (*Fig.* 39). 1° Se da la cota c y el alejamiento d del punto M. Trazamos la proyección horizontal (F), de la frontal de alejamiento d dado, que corta en a la traza horizontal del plano. La proyección vertical de esta frontal es (F′), paralela a la traza vertical del plano, αQ.

Análogamente, trazamos la proyección vertical (H′) de la horizontal de cota c dada, que corta en b' la traza vertical del plano. Refiriendo b' a b, trazamos (H) paralela a αP. Las proyecciones m, m' del punto que buscamos se encuentran, sobre una misma línea de referencia, en las intersecciones de (F) con (H) y de (F′) con (H′), respectivamente.

2° Se da una de las proyecciones m del punto M. Por esta proyección se traza ma, paralela a xy. Se refiere a a a' y por este último punto se traza $a'm'$, paralela a αQ. Sobre esta recta, y en la intersección con la línea de referencia que pasa por m, se encontrará la proyección vertical, m', del punto M.

Podíamos también haber trazado mb paralela a αP y por b' la paralela a xy, sobre la que se encontraría m'.

Determinación de una recta de un plano definido por sus trazas. — (*Fig.* 40). Pueden darnos una proyección de cada uno de los dos puntos que definirían la recta. Hallamos la otra proyección de cada uno de estos puntos, como en el caso precedente, y tenemos el problema resuelto.

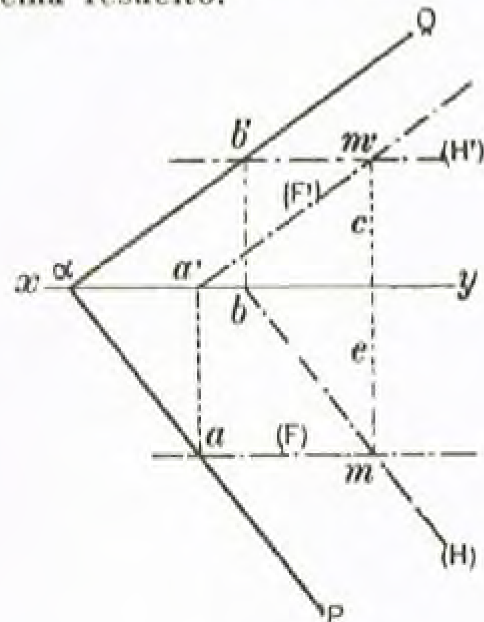


Fig. 39

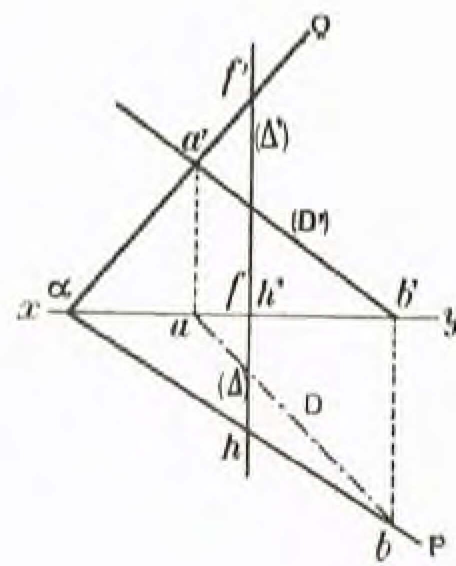


Fig. 40

Supongamos que nos dan una proyección de la recta. Sea, por ejemplo, (D′) la proyección vertical.

Hallamos las proyecciones verticales a' y b' de las intersecciones de D con la trazas del plano. Referimos estas proyecciones a sus correspondientes a y b horizontales. La proyección horizontal de la recta D es ab.

Caso de una recta de perfil. Si nos dan la situación de su plano proyectante, la recta queda determinada inmediatamente por sus trazas: vertical f' f y horizontal h', h (*fig.* 40).

Planos notables

Las posiciones que consideramos notables para un plano, con respecto a los planos de proyección, son aquellas en que el plano es paralelo o perpendicular a ellos o a la línea de tierra.

Plano vertical. — *Plano vertical* es todo plano perpendicular al horizontal de proyección. Goza de las propiedades siguientes:

1° Su traza vertical αQ es perpendicular a xy. En efecto, αQ y xy son las proyecciones verticales del ángulo QαP del espacio, que es recto. Por tanto, su proyección sobre el plano vertical de proyección, que contiene un lado αQ, es otro ángulo recto (*fig.* 41);

Fig. 41

2° El ángulo de su traza horizontal αP con xy es el rectilíneo del diedro que forma el plano con el vertical de proyección;

3° Todos los puntos del plano se proyectan horizontalmente sobre la traza horizontal αP;

4° Un plano vertical queda definido por su traza horizontal αP. Su traza vertical αQ es la perpendicular a xy por α.

Plano frontal. — El *plano frontal* es un plano vertical paralelo al vertical de proyección:

1° Su traza horizontal αP es paralela a xy. No tiene traza vertical, por ser paralelo al plano vertical de proyección (*fig.* 42);

2° Toda figura de un plano frontal se proyecta horizontalmente sobre la traza horizontal del plano. Verticalmente, se proyecta en su verdadera magnitud;

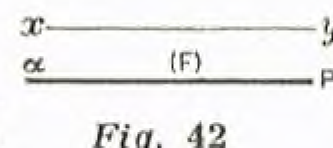


Fig. 42

3° Por medio de un cambio del plano vertical de proyección, un plano frontal se puede transformar en un plano vertical, y recíprocamente.

Plano de canto. — Se llama *plano de canto* todo plano perpendicular al vertical de proyección:

1° Su traza horizontal αP es perpendicular a xy (*fig.* 43);

2° El ángulo de su traza vertical αQ con xy es el rectilíneo del diedro que forma el plano con el horizontal de proyección;

3° Todos los puntos del plano se proyectan verticalmente sobre su traza vertical αQ;

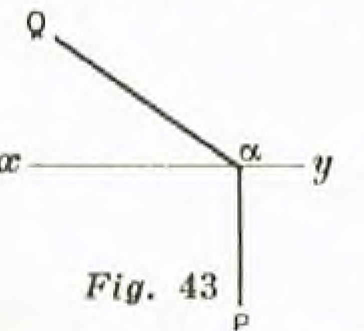


Fig. 43

4° Un plano de canto queda definido por su traza vertical αQ. Su traza horizontal αP es la perpendicular a xy, trazada por α.

Plano horizontal. — El *plano horizontal* es un caso particular del plano de canto, en que éste es paralelo al horizontal de proyección:

1° Su traza vertical αQ es paralela a xy. No tiene traza horizontal (*fig.* 44);

2° Toda figura de un plano horizontal se proyecta verticalmente sobre su traza vertical. Horizontalmente, se proyecta en su verdadera magnitud;

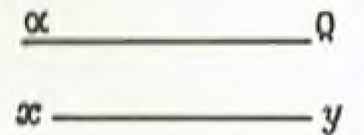


Fig. 44

En la fig. 45 tenemos las proyecciones de un triángulo equilátero, de un cuadrado, de un círculo y de un exágono regular, situados en un plano horizontal.

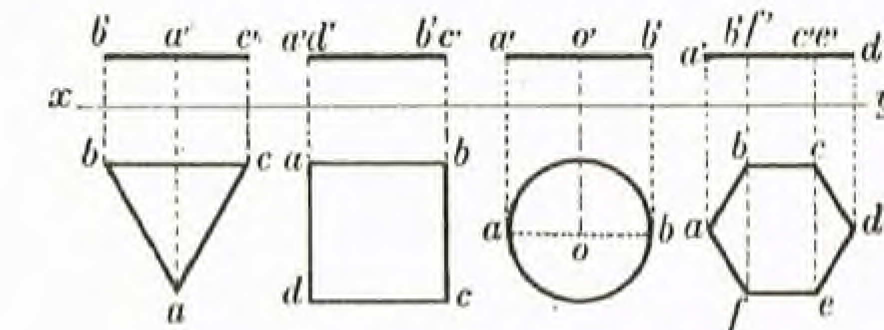


Fig. 45

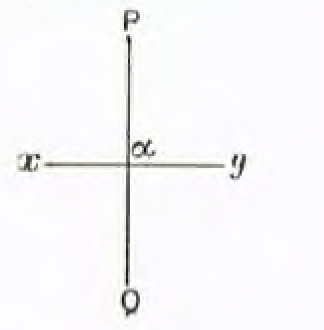


Fig. 46

Plano de perfil. — Se llama *plano de perfil* a todo plano perpendicular a los dos de proyección. Es, por tanto, perpendicular a la línea de tierra:

1° Sus dos trazas αP y αQ se confunden, y son perpendiculares a xy (*fig.* 46);

2° Toda figura de un plano de perfil se proyecta sobre las trazas del mismo nombre. Por tanto, una figura contenida en un plano de perfil sólo queda determinada cuando se conocen las proyecciones de un número suficiente de puntos pertenecientes a ella. Tal es el caso de la figura ABCDEF (*fig.* 47). Mediante un cambio del plano vertical de proyección por el de perfil de la figura, se obtiene la nueva proyección de ésta, que corresponde a la figura en su verdadera magnitud;

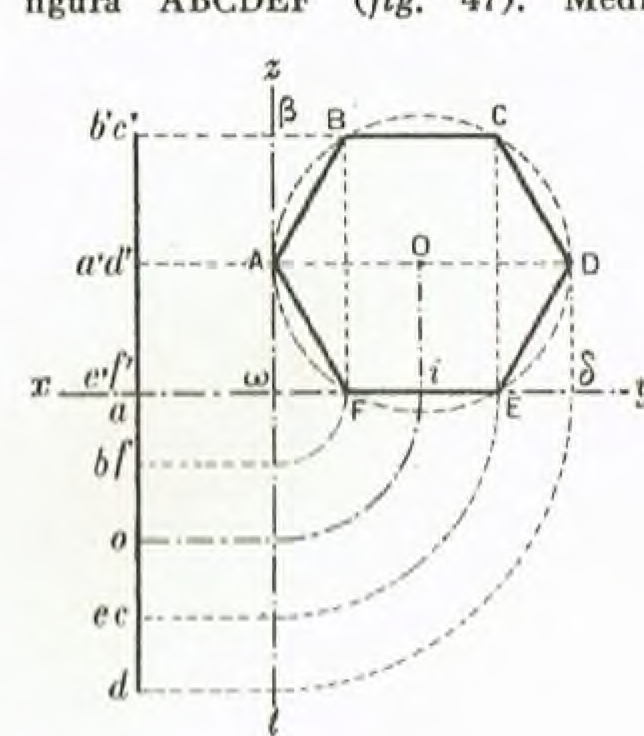


Fig. 47

3° La proyección de los puntos de una figura contenida en un plano de perfil se obtiene por el camino inverso. Se dibujan los puntos sobre la nueva proyección vertical y se deshace el cambio de plano vertical, volviendo al primitivo sistema de planos de proyección.

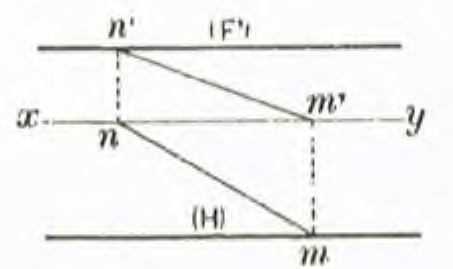


Fig. 48

Plano paralelo a la línea de tierra. — 1° Las dos trazas de este plano, (F′) y (H), son paralelas a xy. Lo mismo ocurre con las dos proyecciones de las horizontales y frontales del plano (*fig.* 48).

2° Para determinar una horizontal de cota dada, o una frontal de alejamiento dado, nos auxiliamos de un plano de perfil, con el que hallamos su intersección, y que nos servirá de nuevo plano vertical de proyección. Situamos la horizontal o frontal en la nueva proyección vertical y deshacemos el cambio.

Podemos, también, situar una recta MN del plano apoyándose en sus dos trazas (F′) y (H). Por el punto de esta recta de cota o alejamiento dados, trazamos la horizontal o la frontal, respectivamente.

3° Un punto no queda determinado por su cota y su alejamiento. Se precisa para ello una de sus proyecciones.

4° Una recta queda determinada por una de sus proyecciones.

5° Una línea de máxima pendiente de este plano es una recta de perfil.

Plano que pasa por la línea de tierra. — 1° Este plano no queda definido por sus trazas, que se confunden con la línea de tierra;

2° Para definirlo necesitamos uno de sus puntos, situado fuera de xy.

Todos los problemas referentes a estos planos se resuelven con el auxilio de un abatimiento, como veremos más adelante.

Cambio del plano vertical de proyección. — Sea un plano PαQ, dado por sus trazas (*fig.* 49). Cambiemos el plano vertical de proyección. Queremos hallar la nueva traza vertical βR del plano dado, siendo x_1y_1 la nueva línea de tierra. El punto ii', intersección de la nueva línea de tierra con la primitiva, pertenece a la nueva traza vertical que buscamos. Basta con hallar la nueva proyección i'_1. Sobre la perpendicular por i a x_1y_1 llevamos $ii'_1 = ii'$. Uniendo β con i'_1 obtenemos la solución pedida.

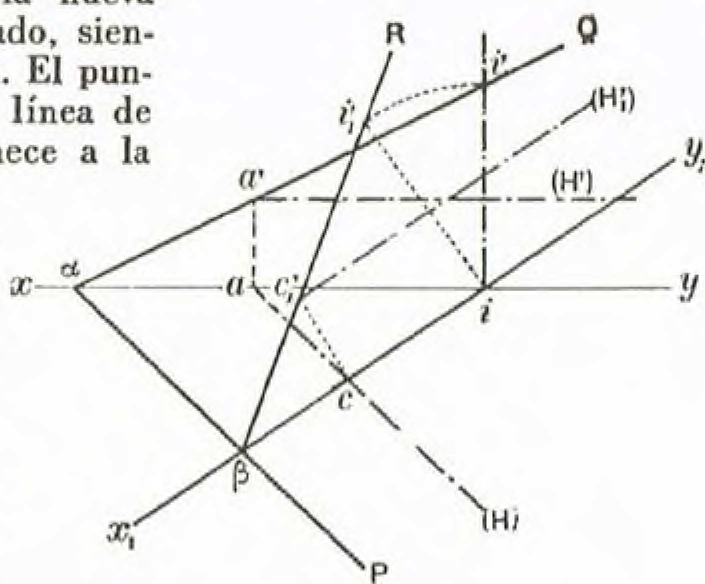


Fig. 49

Si queremos hallar la nueva proyección vertical (H'_1) de una horizontal, basta con hallar la nueva proyección vertical c'_1 de un punto de ella, pues la cota de la horizontal no varía y su proyección horizontal tampoco; la nueva proyección vertical sería la paralela a x_1y_1 trazada por c'_1.

CONSECUENCIAS. Con auxilio de un nuevo plano vertical de proyección, un plano cualquiera o un plano vertical pueden transformarse, respectivamente, en un plano de canto o en un plano frontal. La nueva línea de tierra ha de ser perpendicular a la traza horizontal del plano en el primer caso, y paralela, en el segundo.

Con estos cambios de planos se simplifican notablemente las construcciones, pues se opera con verdaderas magnitudes de ángulos y distancias.

Rectas y planos paralelos

DEFINICIONES. *Una recta es paralela a un plano cuando lo es a una recta cualquiera de este plano. Por un punto situado fuera de un plano, pueden trazarse infinitas rectas paralelas al plano. El lugar geométrico de estas rectas es un plano paralelo al primero.*

TEOREMA. *Para que dos planos sean paralelos, es condición necesaria y suficiente que uno de ellos contenga dos rectas concurrentes paralelas al otro.*

Dos rectas concurrentes y otras dos rectas, también concurrentes y paralelas a las primeras, determinan dos planos paralelos (*figs.* 50 y 51).

Dos líneas de máxima pendiente, paralelas, definen dos planos paralelos.

Todos los planos de perfil son paralelos.

Si un plano contiene dos rectas paralelas, y otro plano contiene otras dos rectas paralelas a las primeras, no puede asegurarse que aquellos dos planos sean paralelos. Para que esto se cumpla, es preciso que, si trazamos una recta que se apoya en las dos primeras paralelas, podamos trazar otra recta paralela a ésta y que se apoye en el otro par de paralelas.

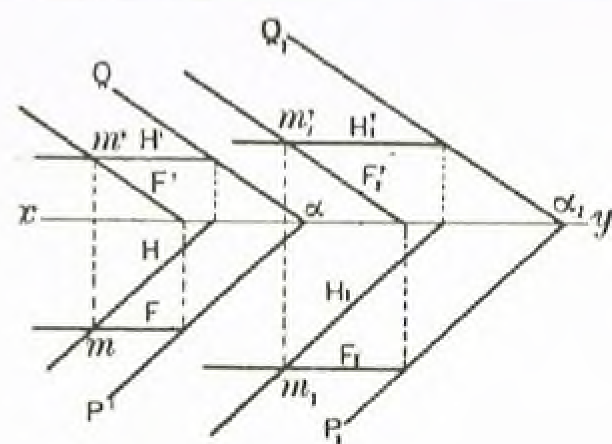


Fig. 50

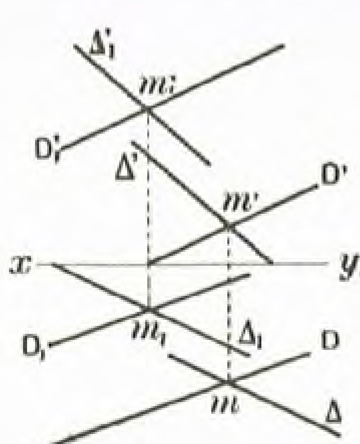


Fig. 51

En particular, es interesante reconocer si dos planos (H, V) y (H_1, V_1), paralelos a la línea de tierra, son paralelos entre sí.

En la fig. 52, los planos dados son paralelos, pues trazando (D) y (Δ), paralelas, también lo son (D′) y (Δ′).

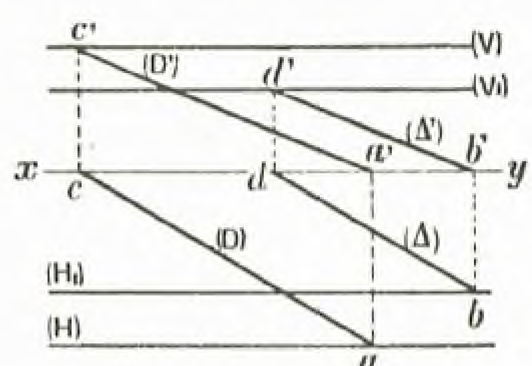


Fig. 52

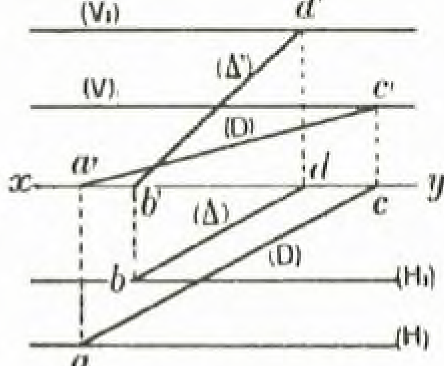


Fig. 53

En el caso de la fig. 53, siendo (D) y (Δ) paralelas, resultan (D′) y (Δ′) concurrentes. Luego los planos dados no son paralelos.

Problemas

Por un punto A, *dado, trazar un plano paralelo a otro* PαQ, *también dado.* El plano queda definido por la frontal AF y la horizontal AH, que pasan por el punto dado. Sus trazas R y S pueden hallarse fácilmente (*fig.* 54).

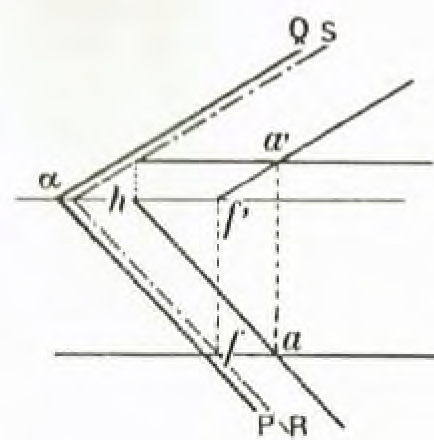


Fig. 54

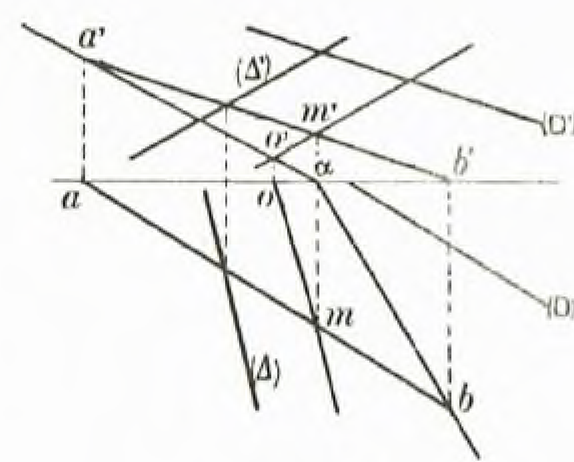


Fig. 55

Por una recta dada, trazar un plano paralelo a otra recta dada.

Se traza por un punto de la primera recta una paralela a la segunda. Esta recta trazada y la primera determinan el plano pedido.

Por un punto dado, trazar un plano paralelo a dos rectas dadas (fig. 55). Por las proyecciones m, m' del punto se trazan paralelas a las proyecciones homónimas de las rectas dadas. El plano queda definido por las rectas concurrentes OM y MA. Fácilmente se deducen sus trazas αb y $\alpha a'$.

Intersecciones de rectas y planos

Intersección de un plano cualquiera con uno vertical. — La traza horizontal del plano vertical es la proyección del mismo nombre de la intersección buscada. La proyección vertical de esta intersección se obtiene, inmediatamente, con la ayuda de las líneas de referencia que pasan por las proyecciones a y b (*fig.* 56).

El plano cualquiera puede estar definido:

1° Por sus trazas PαQ (*fig.* 56);

2° Por dos rectas concurrentes MA, MB (*fig.* 57);

3° Por dos rectas paralelas, como en el caso de las trazas de un plano paralelo a xy (*fig.* 58).

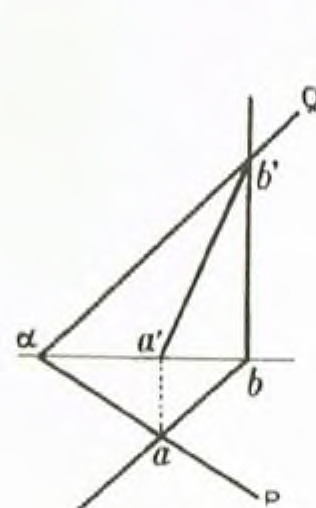


Fig. 56

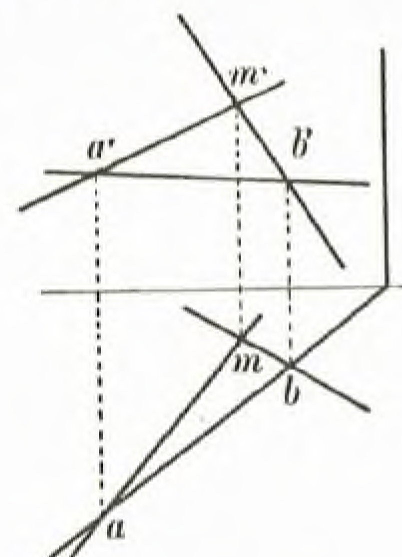


Fig. 57

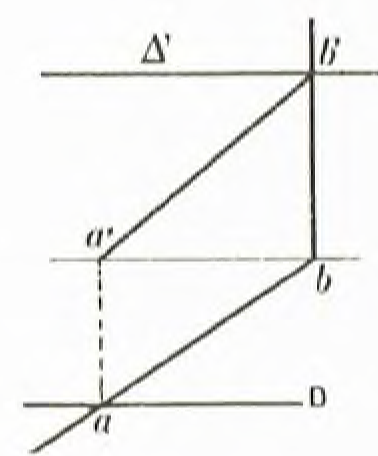


Fig. 58

Intersección de un plano cualquiera con uno de canto. — La traza vertical del plano de canto es la proyección del mismo nombre de la intersección buscada. La proyección horizontal de esta intersección se obtiene con la ayuda de las líneas de referencia (*figs.* 59, 60 y 61).

La intersección de dos planos verticales es una recta vertical; la de dos planos de canto es una recta de punta.

Para hallar la intersección de un plano de perfil con otro cualquiera, basta considerar que aquél es un caso particular del plano vertical o del plano de canto.

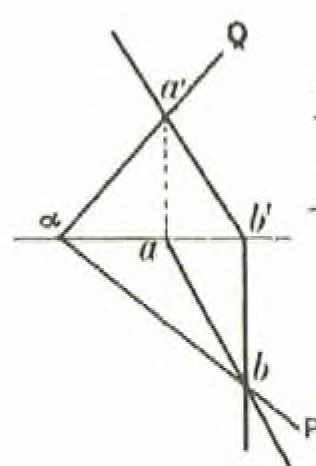


Fig. 59

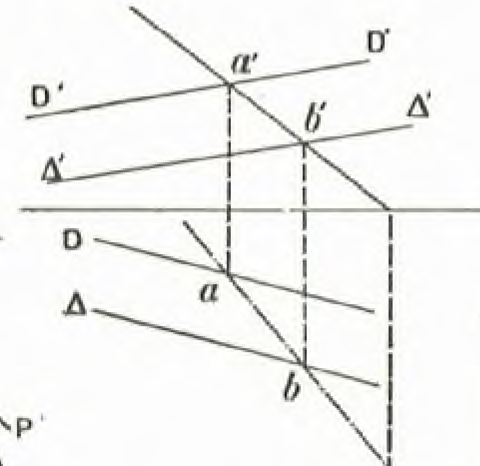


Fig. 60

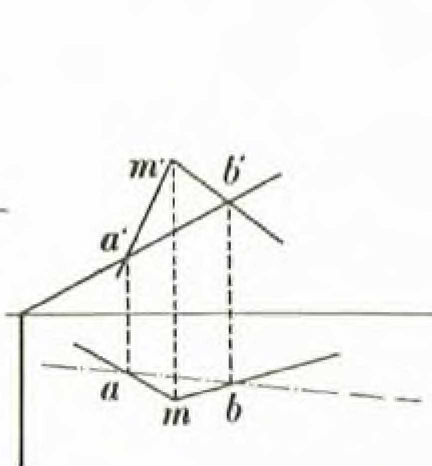
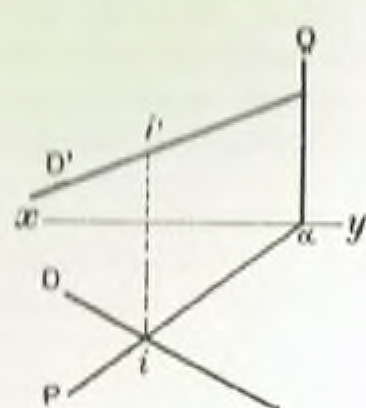
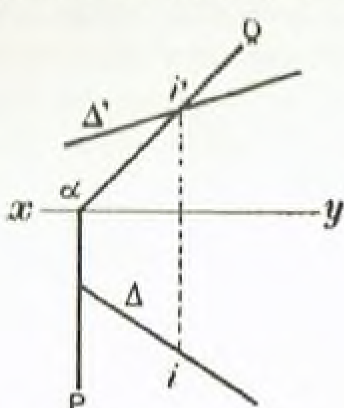


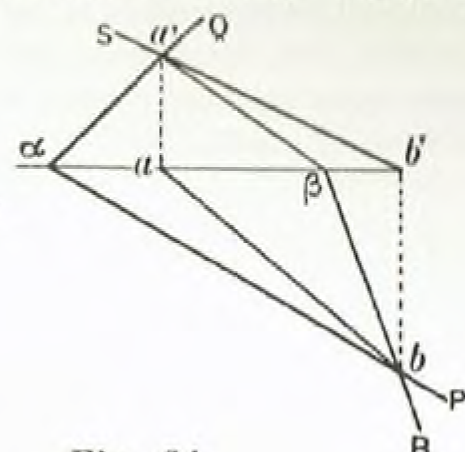
Fig. 61

Intersección de un plano vertical con una recta. — Es el punto I. Su proyección horizontal i es la intersección de P y D. Sobre la línea de referencia que pasa por i obtenemos, en D′, la proyección vertical i' (*fig.* 62).

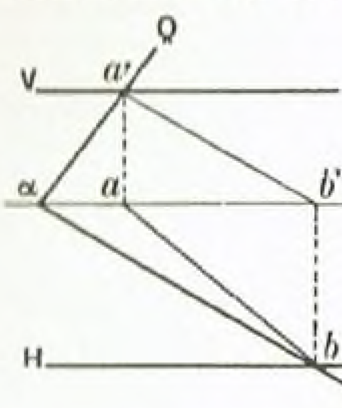
En el caso de ser el plano de canto, la solución es análoga (*fig.* 63).


Fig. 62


Fig. 63


Fig. 64

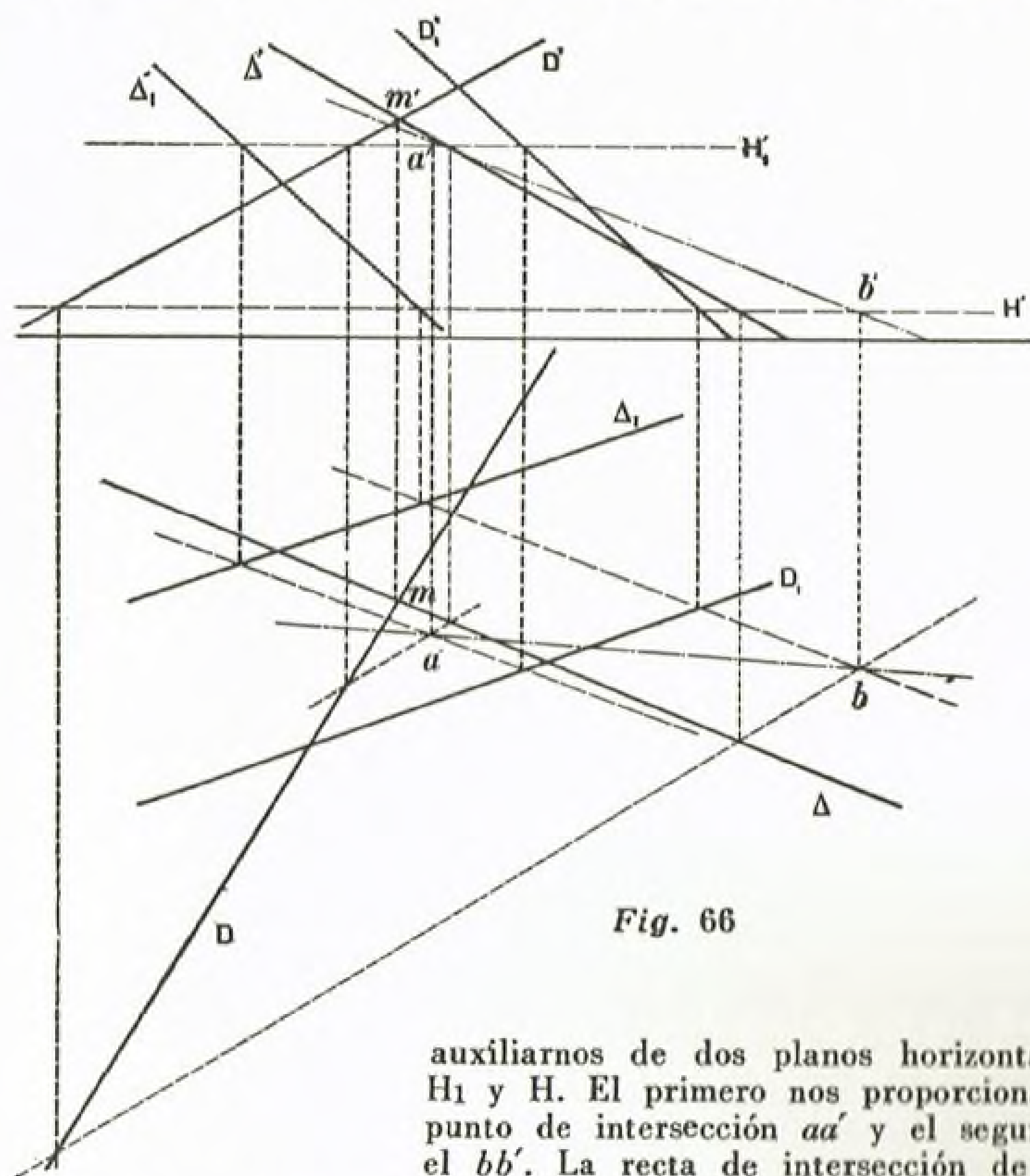
Intersección de dos planos cualesquiera. — 1° Se cortan los dos planos por un tercer plano auxiliar (horizontal, vertical, de canto o frontal). Las dos rectas obtenidas se cortan en un punto, que pertenece a la intersección que se busca. Repitiendo la misma operación con otro plano auxiliar, obtenemos un segundo punto de la recta de intersección buscada.


Fig. 65

2° Se halla la intersección de una recta de uno de los dos planos dados con el otro plano. Repitiendo la operación se obtiene otro punto de la intersección.

En particular, cuando *los dos planos están definidos por sus trazas*, la solución es inmediata (*figs.* 64 y 65).

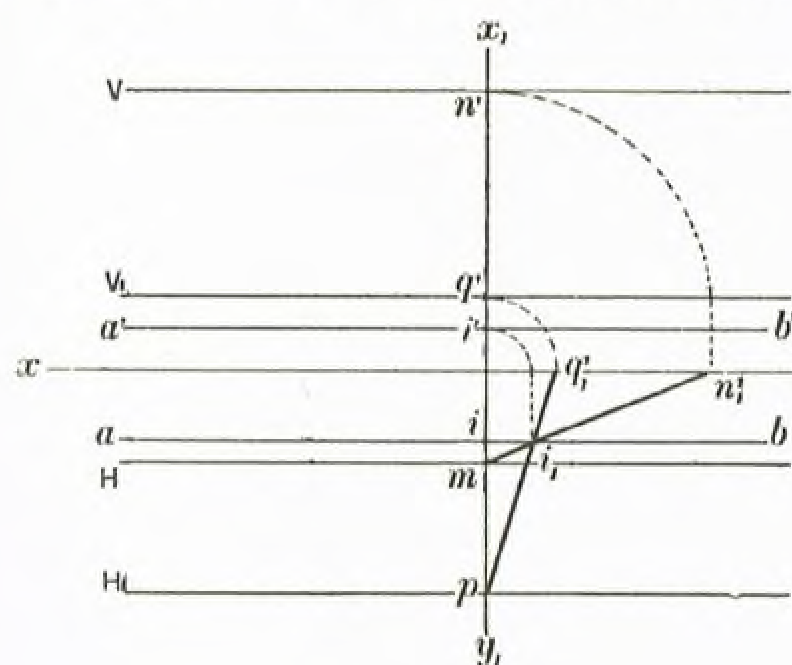
Si uno de los planos está definido por dos rectas D y △, concurrentes en M, y el otro por dos rectas paralelas, D_1 y $△_1$ (*fig.* 66), podemos auxiliarnos de dos planos horizontales, H_1 y H. El primero nos proporciona el punto de intersección *aa′* y el segundo, el *bb′*. La recta de intersección de los planos dados es, por tanto, *ab, a′b′*.

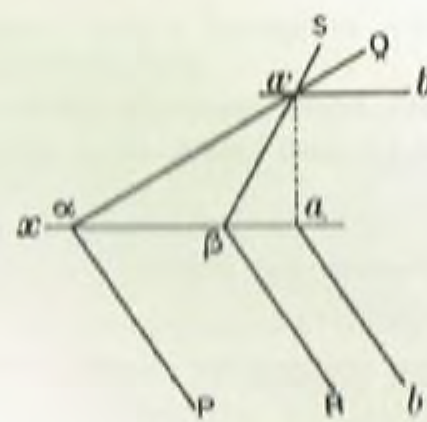

Fig. 66

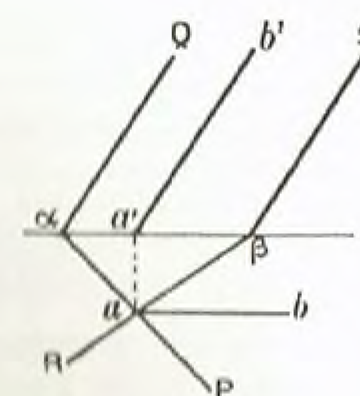
Observación. Teniendo en cuenta el gran número de líneas que se trazan para resolver un problema de geometría descriptiva, es indispensable un gran cuidado y limpieza en el dibujo. Con el uso de las tintas de colores podemos facilitar enormemente la comprensión del dibujo.

La solución obtenida en la figura 66 se podría haber conseguido igualmente utilizando, como auxiliares, dos planos frontales. También se pueden emplear un plano horizontal y otro frontal. En cada caso, la disposición de las rectas dadas aconsejará la elección de los planos auxiliares.

Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra. (*fig.* 67). — Se toma como nuevo plano vertical de proyección un plano auxiliar de perfil. Este plano auxiliar corta cada uno de los dos planos dados según una línea de máxima pendiente. Estas líneas de máxima pendiente se cortan en un punto *i*. La recta de intersección buscada pasará por este punto y debe ser paralela a *xy*, luego queda determinada por sus proyecciones *ab, a′b′*. Como se ve, sólo necesitamos hallar un punto de la intersección.


Fig. 67


Fig. 68


Fig. 69

Esta observación es aplicable también en el caso de querer hallar la intersección de dos planos, uno de los cuales contiene una recta paralela al otro. La intersección es paralela a esta recta y basta un solo punto para determinarla.

Consideremos el caso particular (*figs.* 68 y 69) en que los planos están dados por sus trazas. Si las trazas horizontales (o verticales) son paralelas entre sí, la intersección de los planos es paralela a estas trazas.

Intersección de una recta con un plano. — Método general. Para determinar la intersección de una recta △ con un plano, se hace pasar por la recta un plano auxiliar (de canto o vertical) y se halla la intersección de este plano auxiliar con el dado. El punto M, donde esta recta de intersección corta la recta dada, es el punto de intersección de la recta y el plano dados.

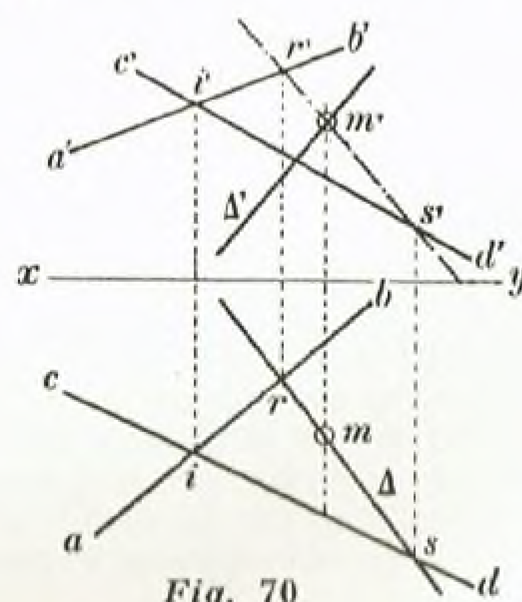
El plano está definido por dos rectas AB *y* CD, *concurrentes en* I (*fig.* 70).

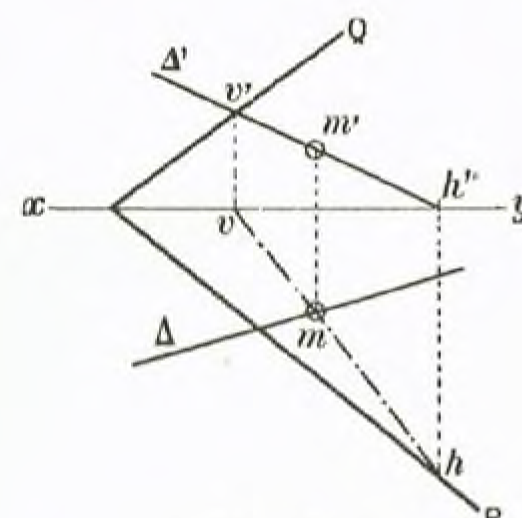
El plano vertical que pasa por △ corta AB en R y CD en S. La recta RS, perteneciente al plano (AB, CD), corta △ en M, que es el punto buscado.

El plano está definido por sus trazas (fig. 71).

El plano de canto, proyectante vertical de la recta △, corta el plano dado según *vh, v′h′*; la intersección de esta recta con △ es el punto M buscado.

Intersección de dos planos definidos cada uno de ellos por dos rectas paralelas o concurrentes. — (*Fig.* 72). Supongamos que se trata de hallar la intersección del plano (D, △) con el plano (AB, CD), siendo la recta D paralela a la recta AB. Con el auxilio del plano de canto que pasa por △, obtenemos la intersección M de (△) con el plano (AB, CD). La recta pedida será la MN, paralela a AB.


Fig. 70


Fig. 71

Intersección de tres planos. — El punto común a tres planos P, Q y R, pertenece a las dos rectas de intersección de uno de esos planos, P, con los otros dos. Halladas estas dos rectas, su intersección es la solución buscada. De una manera análoga se resuelven los siguientes problemas:

1° Por un punto dado, M, trazar una recta que se apoye en otras dos (D) y (△), no coplanarias.

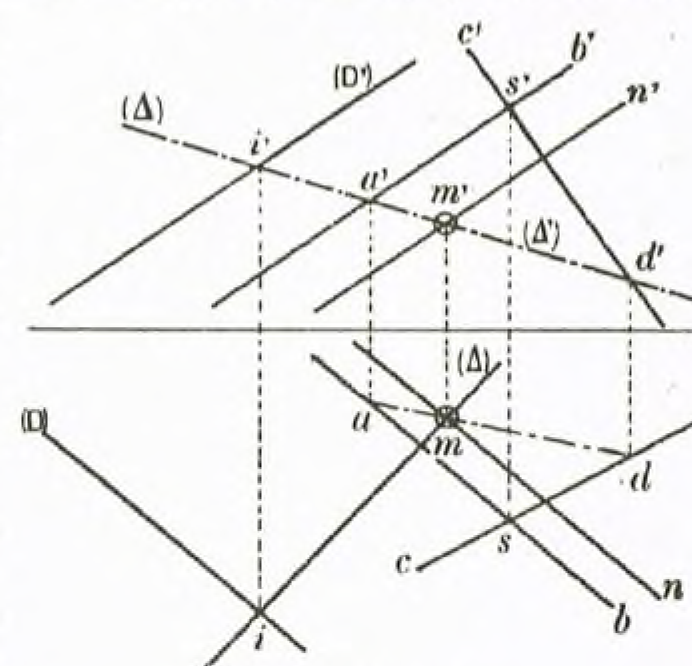
El punto M y la recta (D) determinan un plano, que corta en N la recta (△). La recta MN es la solución del problema;

2° Trazar una recta paralela a una dirección dada (L), que se apoye en otras dos rectas dadas (D) y (△).

Se traza por (D) un plano paralelo a (L), que corta (△) en M.

La recta MN, paralela a (L) es la solución buscada;

3° Por un punto dado, M, trazar una recta paralela a un plano dado, P, y que se apoye en una recta △, no perteneciente a P.


Fig. 72

Se traza por M un plano Q paralelo a P. Este plano corta en N la recta △. La solución pedida es la recta MN.

Rectas y planos perpendiculares

Definición. *Una recta es perpendicular a un plano si ella es ortogonal a todas las rectas del plano.*

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que una recta*

sea perpendicular a un plano es que sea ortogonal a dos rectas concurrentes pertenecientes al plano.

TEOREMA. *La proyección de un ángulo recto sobre un plano paralelo a uno de sus lados es un ángulo recto (o una recta, si el otro lado es perpendicular al plano).*

TEOREMA. *Las proyecciones de una recta perpendicular a un plano son perpendiculares a las trazas homónimas del plano.*

Estos teoremas se demuestran en geometría.

Distancia de un punto M a un plano P. — (*Fig.* 73). Si el plano está dado por sus trazas, se bajan las perpendiculares a ellas desde *m* y *m'*; si no se conocen las trazas, se determinarán las direcciones de una horizontal y una frontal del plano, y se trazan esas perpendiculares.

El pie N de la perpendicular sobre el plano se obtiene hallando la intersección de esa recta y el plano. La distancia pedida es la verdadera magnitud de MN.

a) El plano está definido por sus trazas. La intersección N de la perpendicular y el plano se ha obtenido hallando las intersecciones del plano vertical proyectante de *mi* con dos horizontales $h_1h'_1$ y $h_2h'_2$ del plano PαQ. Estas intersecciones son los puntos *ii'* y *ee'*. La recta IE corta en N la recta MN. La verdadera magnitud de la distancia MN se ha obtenido abatiendo alrededor de *mn*.

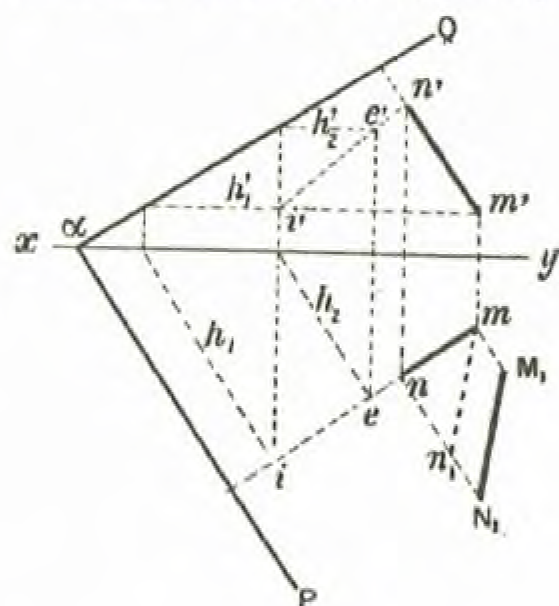


Fig. 73

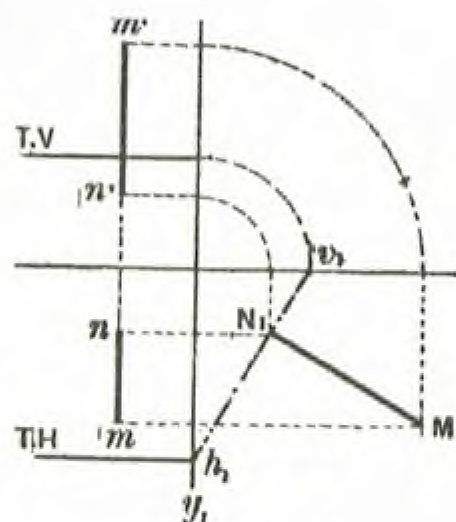


Fig. 74

b) El plano es paralelo a la línea de tierra. La perpendicular MN es una recta de perfil (*fig.* 74). Se determina su verdadera magnitud proyectándola sobre un plano de perfil x_1y_1, que corta el plano dado según la recta v_1h_1. La verdadera magnitud que se busca es M_1N_1.

Distancia entre dos planos paralelos. — Por un punto cualquiera se traza una perpendicular a uno de los planos, que también lo será al otro. Se hallan los pies de estas perpendiculares sobre los planos, y la distancia entre estos puntos nos da la solución pedida. Para mayor sencillez, se toma el punto M sobre una horizontal o una frontal de uno de los planos dados.

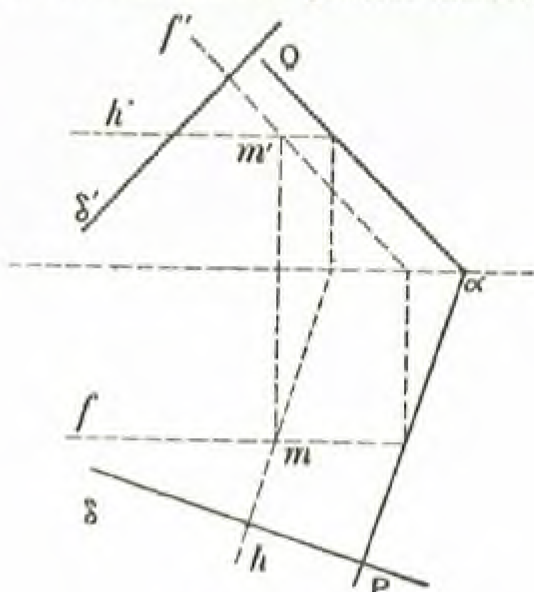


Fig. 75

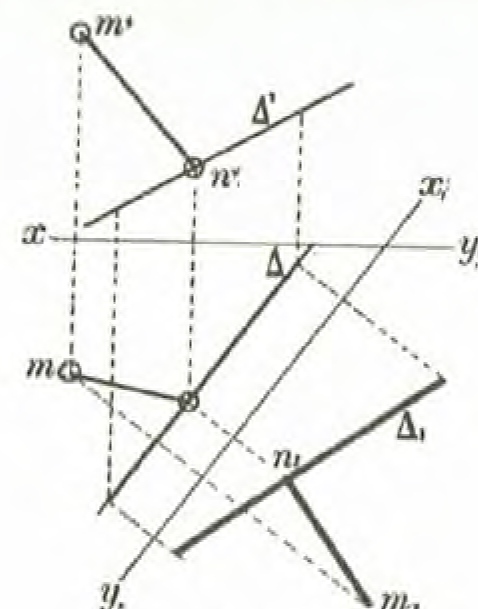


Fig. 76

Por un punto M trazar un plano perpendicular a una recta Δ. — Sean (*m, m'*) y (*δ, δ'*) el punto y la recta dados (*fig.* 75).

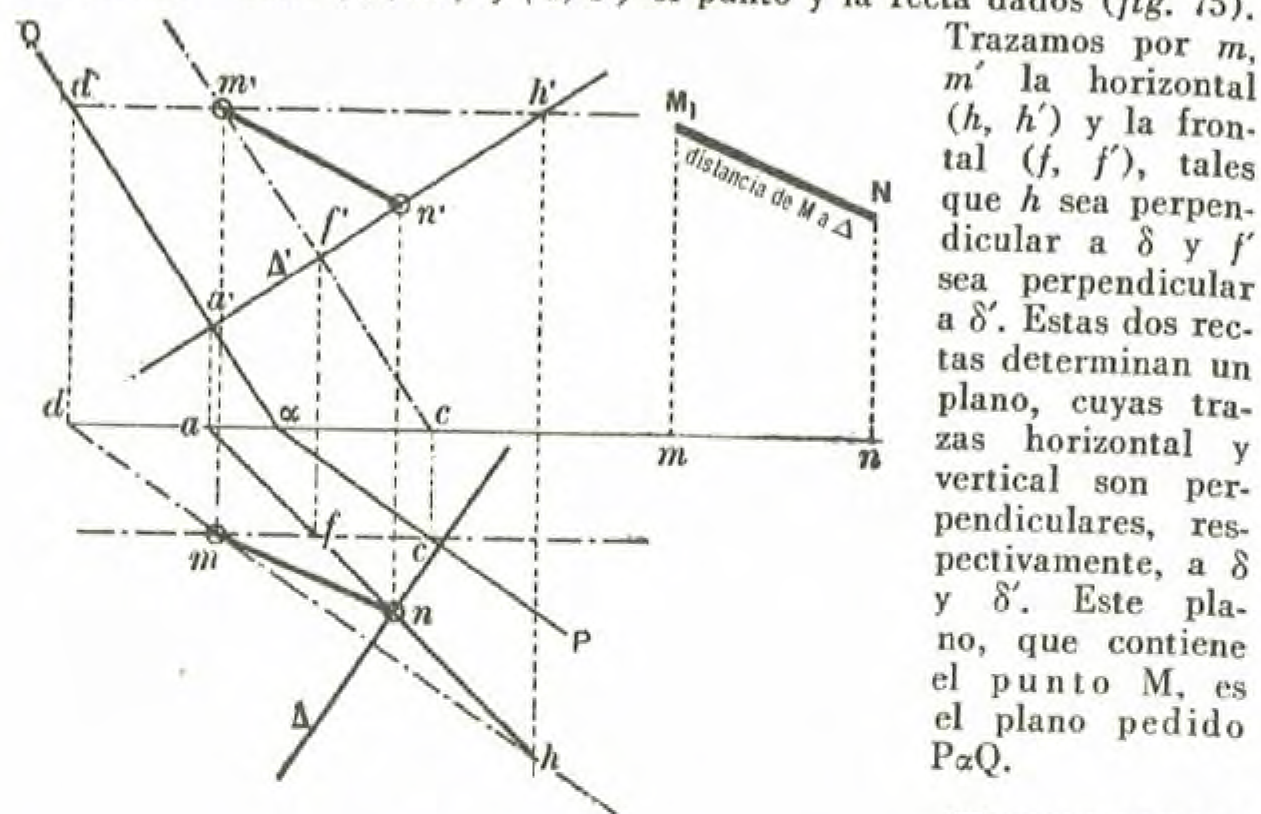


Fig. 77

Trazamos por *m, m'* la horizontal (*h, h'*) y la frontal (*f, f'*), tales que *h* sea perpendicular a δ y *f'* sea perpendicular a δ'. Estas dos rectas determinan un plano, cuyas trazas horizontal y vertical son perpendiculares, respectivamente, a δ y δ'. Este plano, que contiene el punto M, es el plano pedido PαQ.

Trazar por un punto M una recta D perpendicular a otra recta Δ. — Veamos dos métodos para resolver este problema:

1° Si la recta Δ es paralela a uno de los planos de proyección, la perpendicular trazada a su proyección sobre este plano, desde la proyección correspondiente del punto, nos determina la recta buscada. En otro caso, se puede convertir la recta Δ en una frontal, mediante un cambio de plano vertical de proyección (*fig.* 76), o en una horizontal, cambiando el plano horizontal;

2° Se traza el plano PαQ que pasa por M y es perpendicular a Δ. Se halla la intersección N de este plano con Δ. La recta pedida es la MN (*fig.* 77).

Trazar la perpendicular común MN a dos rectas D y Δ. — En el caso general, esta perpendicular común puede determinarse por dos métodos (*fig.* 78):

1° Por un punto A de la recta D trazamos una paralela Δ_1 a la otra recta dada Δ, y, perpendicularmente al plano determinado por D y Δ_1, trazamos la recta AZ. La dirección de la perpendicular común pedida es AZ.

El problema queda ahora reducido a trazar una recta paralela a una dirección dada AZ y que se apoye en dos rectas D y Δ.

Se busca la intersección de Δ con el plano determinado por D y AZ, que estará sobre la intersección de este plano con el plano de canto, proyectante de la recta Δ. Esta última intersección es ZT, que corta Δ en el punto M.

Por último, trazamos por M la paralela a AZ que cortará en N la recta D. Como comprobación, las proyecciones *n* y *n'* han de estar sobre una misma línea de referencia.

La verdadera magnitud del segmento MN (mínima distancia entre las rectas D y Δ) se obtiene del modo ya conocido;

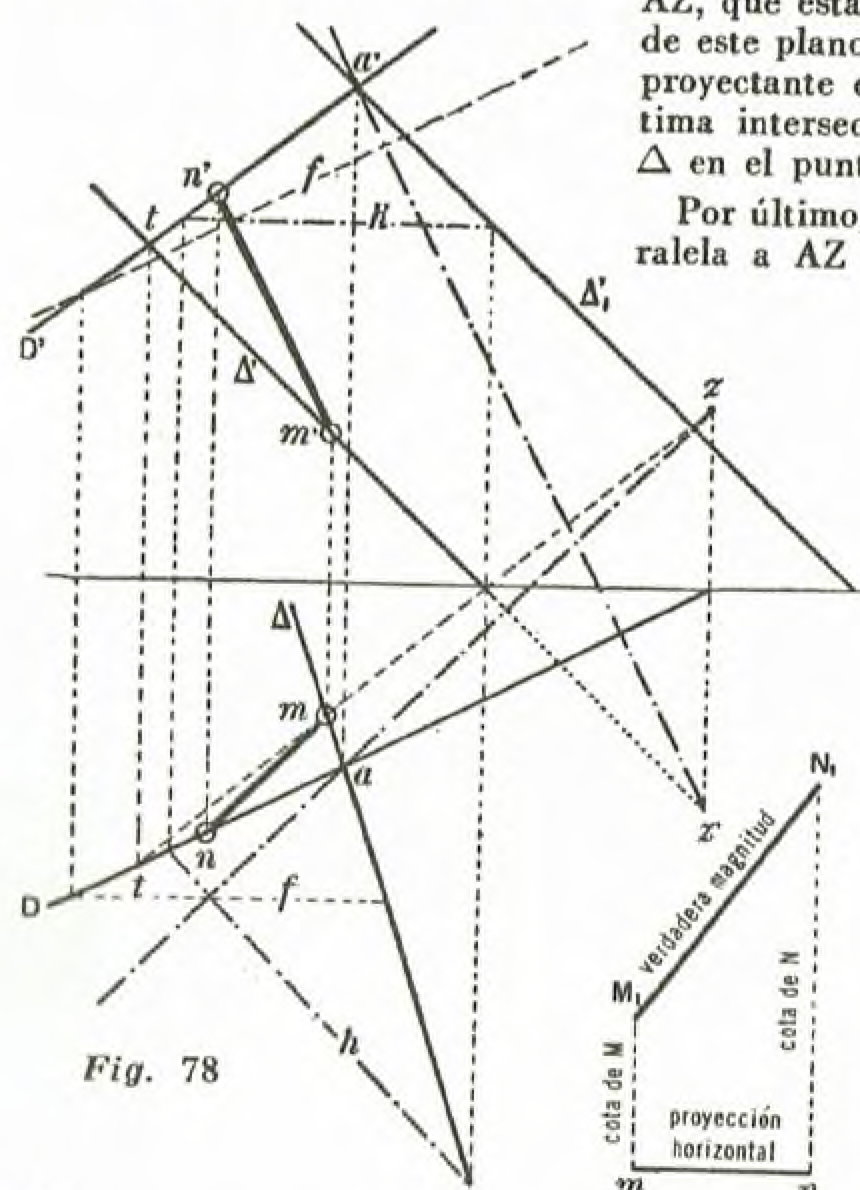


Fig. 78

2° Se trazan dos planos cualesquiera P y Q, perpendiculares, respectivamente, a D y Δ. Su intersección π nos da la dirección de la perpendicular común. Por un punto de D trazamos la paralela a π, que nos determina con D un plano que corta Δ en M. Como en el caso anterior, ya sólo queda trazar por M la paralela a π, para determinar el punto N sobre D.

CASOS PARTICULARES. 1° *Las dos rectas son paralelas a uno de los planos de proyección*, por ejemplo, al horizontal (*fig.* 79).

La distancia se proyecta en verdadera magnitud sobre el plano vertical de proyección, y tiene por valor la diferencia de cotas entre las horizontales. En efecto, los dos planos, perpendiculares respectivamente a D y Δ, son ambos verticales; su intersección es una recta vertical.

La proyección horizontal es un punto, que es precisamente donde se cortan las proyecciones horizontales de D y Δ.

Si las dos rectas son paralelas a la línea de tierra, no es cierto lo que hemos dicho, pues la perpendicular común no es entonces perpendicular a ninguno de los planos de proyección, sino que es una recta de perfil. Obtendríamos su verdadera magnitud por un cambio del plano vertical u horizontal, para conseguir que esta recta sea paralela al nuevo plano de proyección.

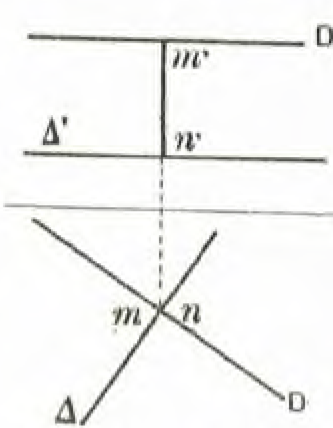


Fig. 79

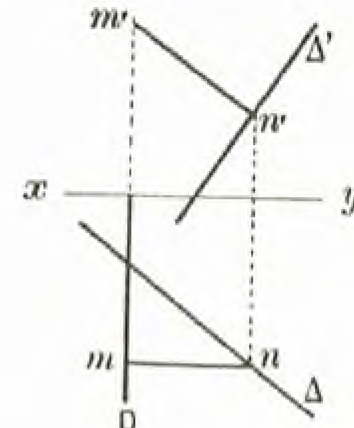


Fig. 80

2° *Una de las rectas es perpendicular a un plano de proyección.*

Sea una recta D, de punta (*fig.* 80). Todas las perpendiculares a esta recta son frontales. La perpendicular común a D y Δ lo es también, y su proyección vertical es la perpendicular *m'n'* a la proyección homónima de Δ, que pasa por la traza *m'* de la recta de punta. Esta proyección vertical es la verdadera magnitud de la distancia MN. La proyección horizontal se dibuja con el auxilio de las líneas de referencia.

3° La perpendicular común a dos rectas de perfil, no paralelas, es una recta paralela a la línea de tierra. Cambiamos el plano vertical de proyección por otro auxiliar de perfil y reducimos el problema al caso 1°.

Cambios de planos

Cambios de planos. — Ya conocemos un procedimiento para obtener una proyección suplementaria de una figura, que consiste en cambiar el plano vertical de proyección.

Este método nos ha servido para obtener una proyección más útil para la resolución de los problemas presentados, especialmente para hallar la verdadera magnitud de las figuras que están en un plano de perfil. Podemos transformar una recta cualquiera en frontal, poniendo la línea de tierra paralela a su proyección horizontal.

Análogamente, podemos cambiar el plano horizontal de proyección por otro cualquiera, que debe cumplir, naturalmente, la condición de ser perpendicular al vertical, que queda fijo. Para transformar una recta cualquiera en horizontal, basta colocar la nueva línea de tierra paralela a su proyección vertical. Con la ayuda de los cambios de planos, podemos colocar un plano cualquiera en la situación que deseemos con respecto a los nuevos planos de proyección, dejándolo horizontal, vertical, frontal, de canto o de perfil. Para conseguir esto serán precisos, en algunos casos, dos cambios de planos sucesivos.

Giros

Giro. Giro de un punto. Giro de una recta. Transformar una recta en una paralela o perpendicular a un plano de proyección. Giro de un plano. Transformar un plano cualquiera en otro perpendicular a uno de los planos de proyección. Giro de un sólido

Giro. — Con el auxilio de un giro, podemos obtener las mismas ventajas que con los cambios de planos. Cuando una figura gira alrededor de un eje A*a* (*fig.* 81), resulta:

1° Todos sus puntos describen circunferencias, cuyos centros A y B están en el eje y situadas en los planos que pasan por dichos puntos y son perpendiculares al eje;

2° Todos los arcos descritos en el giro tienen el mismo valor:

$$MAM_1 = NBN_1 = mam_1 = nan_1;$$

3° Su proyección sobre un plano perpendicular al eje describe un giro del mismo ángulo alrededor del pie del eje sobre dicho plano;

4° Las distancias de cada uno de sus puntos a un plano perpendicular al eje permanecen invariables en cada posición del giro:

$$Mm = M_1m_1 = Aa;\; Nn = N_1n_1 = Ba.$$

Giro de un punto. — 1° Sea el eje una *recta vertical* (fig. 82). La proyección horizontal *a* del punto describe un arco de circunferencia alrededor de la traza *o* del eje, cuyo ángulo es igual al del giro, α. La proyección horizontal después del giro es a_1. La proyección vertical a'_1 se encuentra sobre la línea de referencia correspondiente y en la paralela a *xy* que pasa por *a'*, pues la cota del punto no ha cambiado durante el giro.

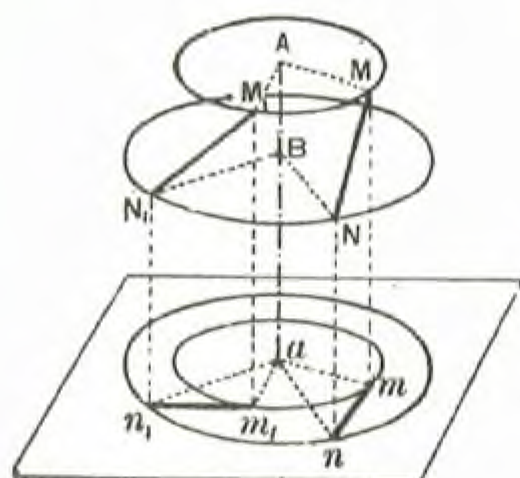


Fig. 81

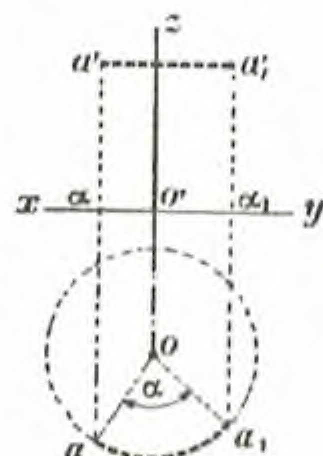


Fig. 82

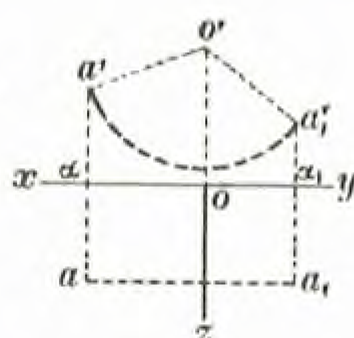


Fig. 83

2° Sea el eje de giro una *recta de punta* (fig. 83). La proyección vertical *a'* describe un arco de circunferencia alrededor de la traza *o'* del eje de giro, cuyo ángulo α es el de giro. La nueva proyección vertical de A es a'_1. La proyección horizontal a_1 se encuentra en la intersección de la línea de referencia que pasa por a'_1 con la paralela por *a* a la línea de tierra, pues el alejamiento del punto A permanece constante durante el giro.

Giro de una recta. — Para girar una recta alrededor de un eje, basta con girar dos puntos de ella, y, uniéndolos, tenemos la recta girada. En la figura 84, el eje de giro es una recta vertical. La perpendicular común a la recta AB y al eje OZ es la recta OA. Si giramos el punto A, su proyección horizontal *a* describe un arco de circunferencia de radio *oa*. La recta, en cualquier posición del giro, permanece tangente al arco descrito por *a*. Detengamos el giro de *a* en a_1. La proyección vertical a'_1 se obtiene como ya sabemos. Un segundo punto *bb'* de la recta describirá, en proyección horizontal, el arco de circunferencia de radio *ob*. Cortando esta circunferencia con otra de centro a_1 y radio *ab* obtenemos la nueva proyección horizontal b'_1 del punto B.

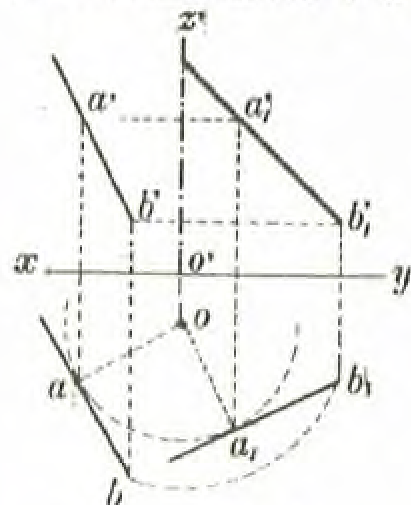


Fig. 84

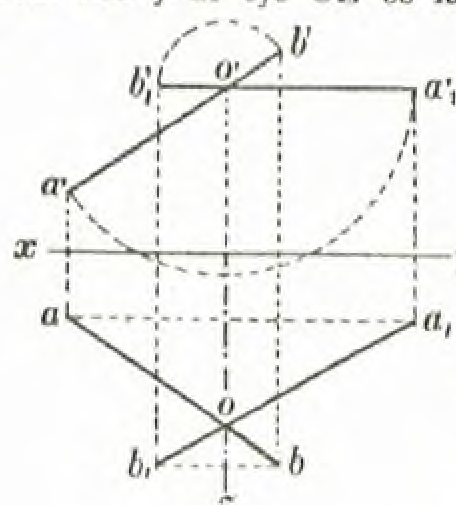


Fig. 85

Transformar una recta en una paralela o perpendicular a un plano de proyección. — 1° Una recta cualquiera se convierte en *horizontal* haciéndola girar alrededor de una recta de punta (*fig.* 85). Para ello, el giro se detiene cuando la nueva proyección vertical de la recta es paralela a *xy*.

2° Para transformar una recta cualquiera en *frontal*, se la hace girar alrededor de un eje vertical hasta que la proyección horizontal queda paralela a *xy*.

3° Una recta *horizontal* puede convertirse en recta *de punta* girándola alrededor de un eje vertical (*fig.* 86). Para transformar en recta de punta una recta cualquiera, es preciso, en primer lugar, convertirla en horizontal por un giro o un cambio de plano. Con auxilio de un segundo giro u otro cambio de plano, se transforma esa horizontal en recta de punta.

De esta manera, con dos operaciones puede dejarse vertical o de punta una línea determinada de un poliedro.

4° Análogamente, una recta *frontal* se transforma en *vertical* haciéndola girar alrededor de un eje de punta. Como en el caso anterior, para convertir una recta cualquiera en frontal, se necesitan dos operaciones.

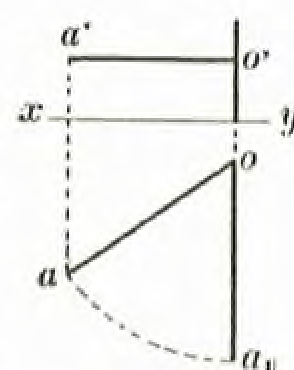


Fig. 86

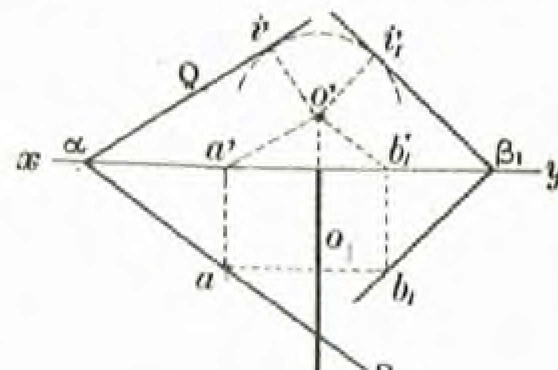


Fig. 87

Giro de un plano. — Basta con girar tres puntos de él o una recta y un punto. Es interesante considerar el punto donde el eje de giro corta al plano, pues ese punto no cambia durante el giro. Como recta que se gira, para determinar el plano en su posición girada juntamente con el punto anterior, es interesante tomar una horizontal, si el eje de giro es vertical, o una frontal, si el eje de giro es de punta (*fig.* 87). La traza vertical αQ seguirá siendo traza vertical después del giro, pues su alejamiento permanece constantemente nulo durante la rotación. La nueva posición de la traza vertical es $i'_1\beta_1$, después de girar un ángulo $\widehat{i'o'i'_1}$. El punto *oo'* donde el eje corta el plano no se mueve en el giro. La traza horizontal β_1b_1 es, ya, fácil de hallar. Observemos que la traza vertical del plano girado es la primitiva traza vertical, pues ésta en su rotación permanece contenida en el plano vertical y es tangente a la circunferencia de radio $o'i' = o'i'_1$. Sin embargo, entre las trazas horizontales del plano, antes y después del giro, no existe ninguna relación, siendo dos rectas distintas en el espacio.

Transformar un plano cualquiera en otro perpendicular a uno de los planos de proyección. — Para transformar un plano cualquiera en plano *de canto*, lo giramos alrededor de un eje vertical (*fig.* 88).

La traza horizontal del plano dado sigue siendo traza horizontal del plano después del giro. El punto a_1 es la nueva proyección de *a*. La nueva traza horizontal es $a_1\beta_1$.

La traza vertical nueva ha de pasar por β_1. El punto *oo'*, donde el eje de giro corta el plano, permanece invariable. Luego la traza vertical del plano después del giro es β_1o'.

Análogamente, un plano cualquiera puede transformarse en *vertical* girándolo alrededor de un eje de punta.

Un plano de *canto* puede transformarse en *horizontal*, si el eje de giro es de punta. Del mismo modo, un plano *vertical* se convierte en *frontal*, si se gira alrededor de un eje vertical.

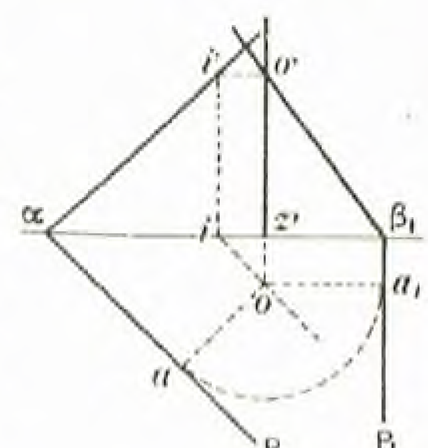


Fig. 88

El convertir un plano cualquiera en horizontal o frontal puede interesarnos para que las figuras se proyecten en su verdadera magnitud en uno de los planos de proyección. Para ello, necesitamos dos giros. Sin embargo, por el método de los abatimientos, sólo necesitamos una operación para conseguir el mismo resultado.

Giro de un sólido. — Con el auxilio de los giros, podemos obtener las proyecciones de un poliedro en una posición particular determinada, así como la verdadera magnitud de determinadas líneas.

Abatimientos

Método para abatir un punto M. Desabatimiento de un punto abatido. Regla del triángulo rectángulo. Ángulo de abatimiento. Desabatimiento de un punto m_1. Abatimiento de los puntos de una frontal

DEFINICIÓN. *Abatir un plano Q sobre otro plano P, es hacer girar el primero hasta que se confunda con el segundo, tomando como eje de giro la recta de intersección AB de los dos planos* (fig. 89).

Al eje de giro AB se le llama *charnela.*

Todos los puntos del plano Q están contenidos en el plano P, después de abatir Q sobre P. Si este último plano es paralelo a uno de los planos de proyección, el horizontal, por ejemplo, la nueva proyección horizontal de una figura contenida en el plano Q será la verdadera magnitud de la misma, y sobre ella pueden hacerse todas las construcciones de geometría plana que deseemos.

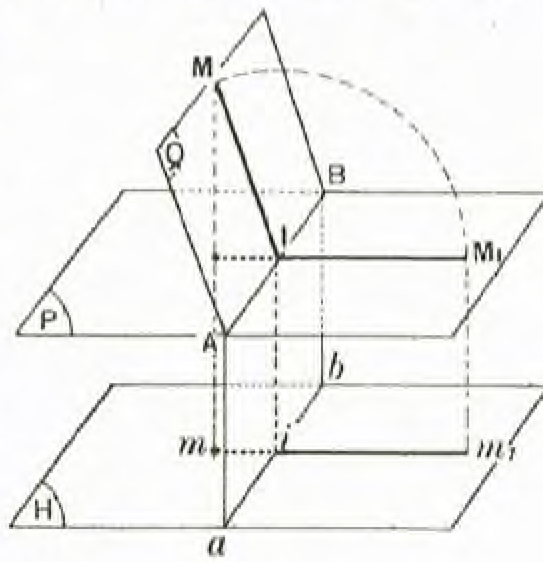


Fig. 89

Método para abatir un punto M. — Tracemos desde este punto la perpendicular MI a la charnela de giro (*fig.* 89). Su proyección *im* sobre un plano H paralelo a la charnela permanece perpendicular a la proyección *ab* de ella durante el abatimiento de Q sobre P. En la posición final, im_1, tenemos la verdadera magnitud de IM.

Desabatimiento de un punto abatido. — Después de haber hecho las construcciones deseadas sobre el plano de abatimiento, es necesario hallar las proyecciones de los puntos obtenidos. Es el problema inverso al anterior.

Regla del triángulo rectángulo. — En el abatimiento de un punto A alrededor de una horizontal (*fig.* 90) se verifica:

a) Su proyección horizontal *a* se desplaza sobre la perpendicular aa_1 a la charnela;

b) La distancia del punto a la charnela no varía durante el abatimiento, y, al final de éste, la tenemos en verdadera magnitud; su valor es la hipotenusa *bc* de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son: 1º La distancia *ab* de la proyección horizontal del punto a la proyección horizontal de la charnela; 2º La diferencia de cotas, $ac = aa'$, entre el punto A y la charnela αP.

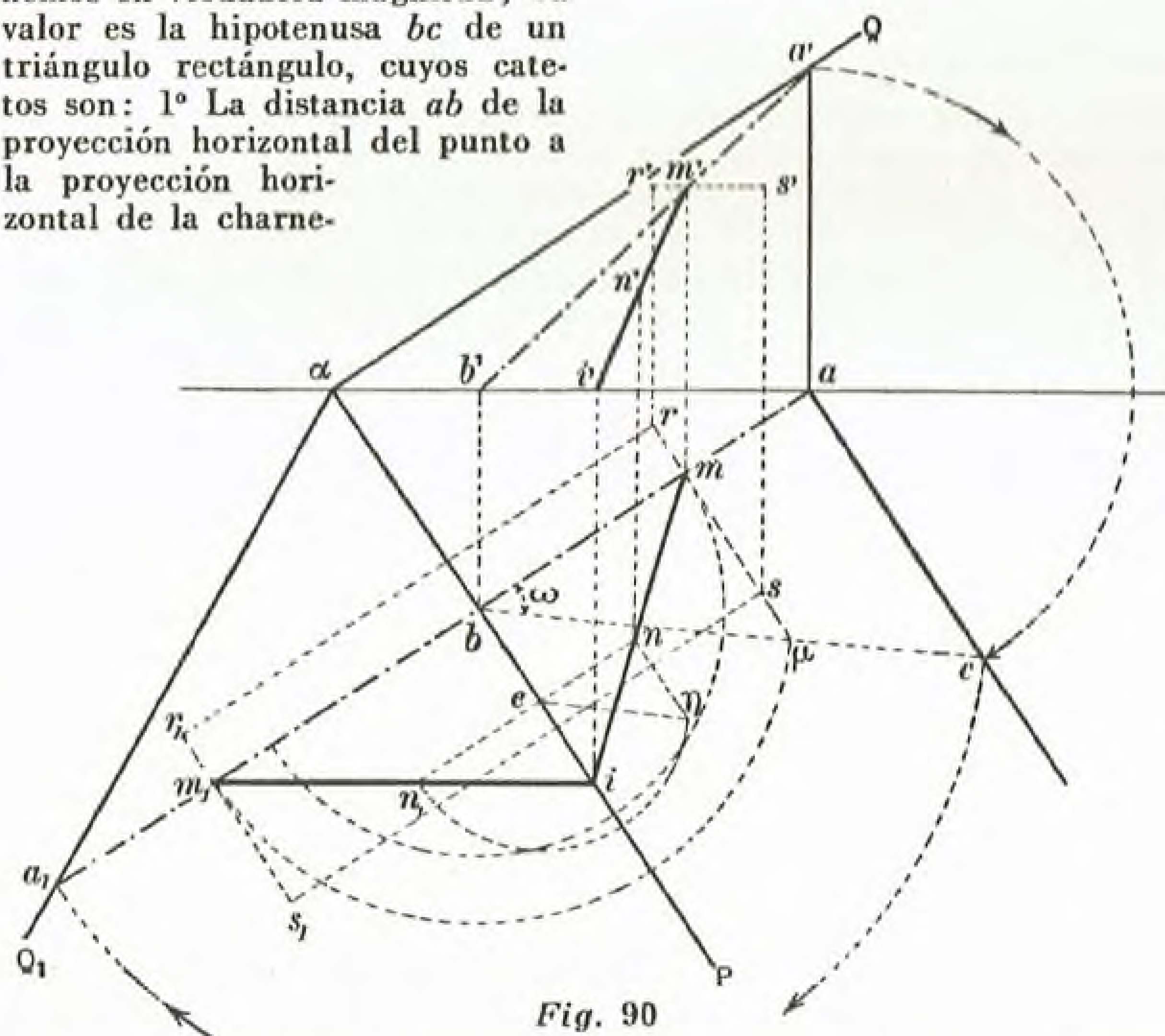


Fig. 90

El punto α, perteneciente a la charnela, no se mueve en el abatimiento. El punto aa' de la traza vertical del plano PαQ queda abatido en a_1. Luego la traza vertical αQ queda abatida en αQ_1. La verdadera magnitud del ángulo $\widehat{P\alpha Q}$ es $\widehat{P\alpha Q_1}$. Todos los puntos del plano PαQ contenidos en el primer diedro quedarán contenidos, después del abatimiento, en el interior del ángulo $\widehat{P\alpha Q_1}$.

Ángulo de abatimiento. — Es el ángulo $\widehat{\omega} = \widehat{abc}$ (*fig.* 90). Por ser *bac* un triángulo rectángulo en que *ab* es la proyección de una línea de máxima pendiente del plano PαQ, y *bc* su verdadera magnitud, siendo *ac* la altura de C sobre A, resulta que el ángulo ω es la verdadera magnitud del ángulo que forma el plano PαQ con el horizontal de proyección.

Para mayor claridad del dibujo, nosotros hemos abatido un ángulo $\pi - \omega$. *El ángulo de abatimiento es el mismo para cualquier punto del plano* PαQ. Conocido el abatimiento del primer punto A, los demás puntos abatidos se obtienen inmediatamente:

Para *m*, situado sobre *ab*, se encuentra m_1.

Para *n*, situado fuera de *ab*, se trazan las paralelas al primer triángulo rectángulo. Más fácil es encontrar los abatimientos de los puntos *m*, *r*, *s*, situados sobre una horizontal, que, abatida, será paralela a la charnela.

Análogamente, una frontal quedará abatida según una paralela a αQ_1.

Por último, la proyección horizontal *mn* de una recta y su abatimiento m_1n_1 se cortan sobre un punto *i* de la charnela.

Desabatimiento de un punto m_1. — Se trata de encontrar las proyecciones del punto M, sabiendo que pertenece al plano abatido. Si se conoce el ángulo de abatimiento, puede encontrarse la proyección *m* con la ayuda de la horizontal que pasa por M. Si sólo conocemos un punto abatido n_1, correspondiente al punto N del espacio, de proyecciones *nn'* conocidas, trazamos m_1n_1 que corta la charnela en *i*. La proyección *m* ha de encontrarse sobre *in* y sobre la perpendicular m_1a a la charnela. La proyección vertical *m'* se encontrará sobre *i'n'* (*fig.* 91).

Abatimiento de los puntos de una frontal. — Se trata de abatir el punto *m*, situado sobre la frontal *mf*, *m'f'*. Un punto del abatimiento es el *f* de la charnela. La verdadera magnitud fm_1 es igual a la proyección vertical *f'm'*. Luego m_1 es el punto de intersección de la perpendicular *ma* a la charnela con la circunferencia de centro *f* y de radio la verdadera magnitud citada (*fig.* 91).

El desabatimiento del punto abatido n_1 se hace con la ayuda de la recta m_1n_1 o de la horizontal n_1c_1.

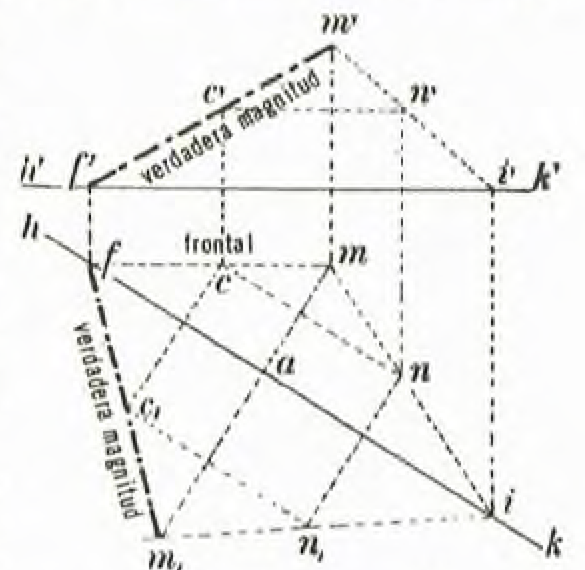


Fig. 91

OBSERVACIÓN. El objeto del abatimiento de un plano es dejarlo horizontal, para hacer las construcciones geométricas necesarias en su verdadera magnitud. El mismo fin podemos conseguirlo mediante un cambio de plano vertical, que deje de canto el plano dado. En esta posición, girando el plano alrededor de su traza horizontal, que es de punta, podemos hacerlo coincidir con el horizontal de proyección.

APLICACIÓN. En la figura 92 se ha abatido el triángulo ABC. Para abatir el punto A, se han utilizado los dos métodos: el de la línea de máxima pendiente y el de la frontal.

En el abatimiento a_1b_1c tenemos las verdaderas magnitudes de los lados y ángulos. El centro o_1 del círculo circunscrito se ha dibujado en el abatimiento y se ha desabatido en *oo'*. Análogamente hubiéramos obtenido el centro del círculo inscrito. En cuanto al centro de gravedad, podemos obtener sus proyecciones del mismo modo. Sin embargo, si sólo nos interesa este punto, no es necesario abatir el plano del triángulo, pues la proyección del centro de gravedad de un triángulo coincide con el centro de gravedad del triángulo proyectado.

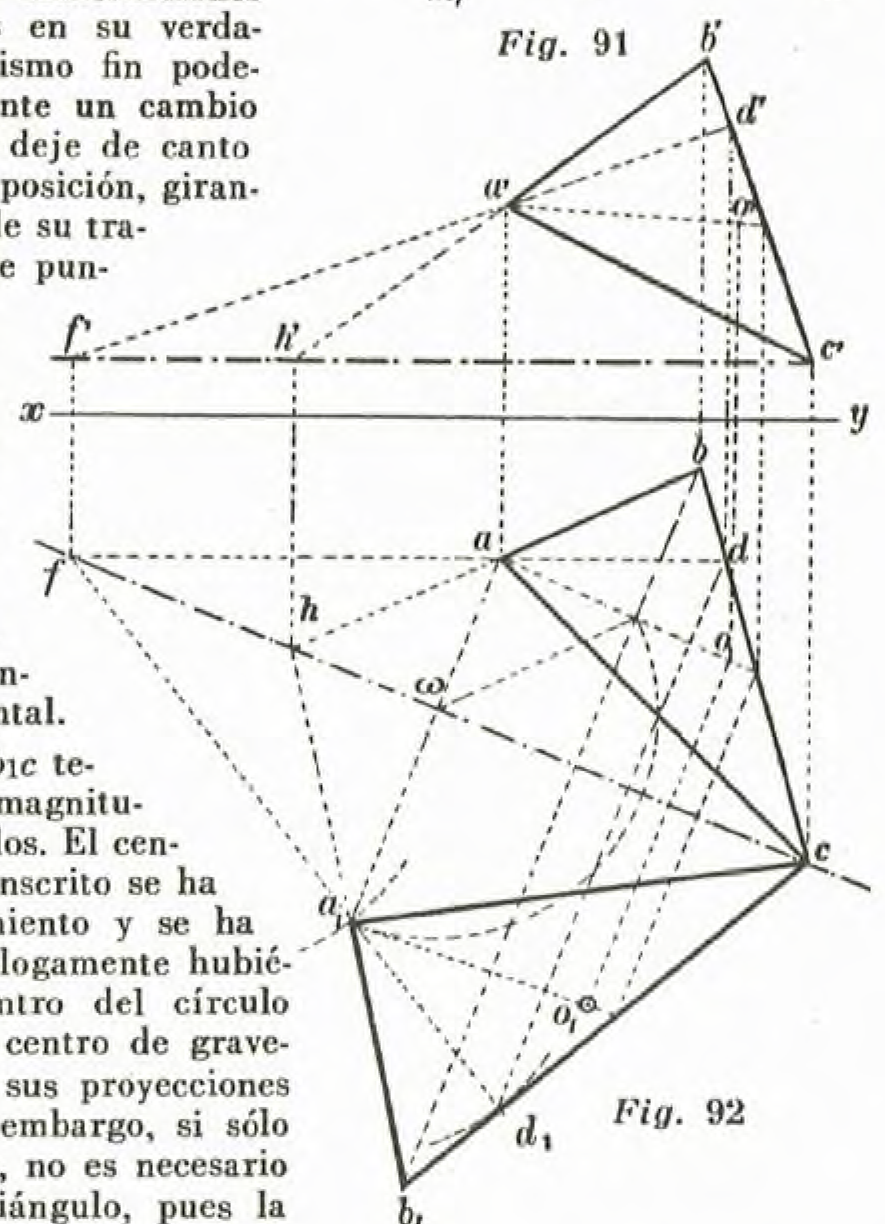


Fig. 92

Distancias y ángulos

Distancia de un punto M a una recta $\triangle$. Distancia de un punto M a un plano P. Distancias entre dos puntos, dos rectas paralelas y dos rectas no coplanarias. Ángulo de dos rectas. Ángulo de una recta $\triangle$ y un plano P. Problema inverso. Ángulo de dos planos. Plano bisector de un diedro

El método de los abatimientos nos permite hacer toda clase de construcciones sobre la figura abatida y después obtenemos las proyecciones correspondientes al deshacer el abatimiento. Este método se aplica para encontrar las verdaderas magnitudes de ángulos y distancias.

Distancia de un punto M a una recta △. — Se abate el plano determinado por M y △ alrededor de la horizontal MH que pasa por

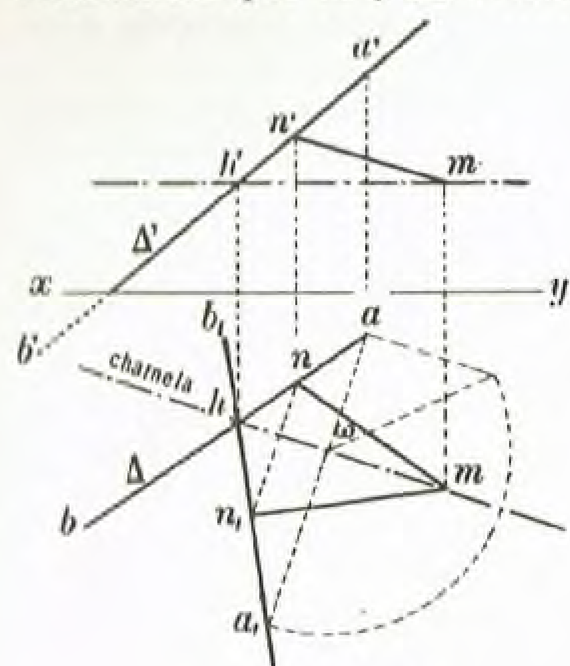

Fig. 93

Fig. 94

M. La recta abatida es a_1b_1. Trazando la perpendicular mn_1 a esta recta, tenemos la verdadera magnitud mn_1 de la distancia pedida. Si queremos las proyecciones de MN, basta con desabatir el punto n_1 *(fig. 93)*.

Como se ve, no utilizamos en este caso la línea de tierra.

Distancia de un punto M a un plano P. — Este problema ya lo hemos resuelto con un cambio de plano *(fig. 73.)* La misma solución se obtiene abatiendo en n_1 el punto n (pie de la perpendicular de M al plano P), tomando como charnela la horizontal MH. Resulta mn_1 igual y paralela a M_1N_1.

Distancias entre dos puntos, dos rectas paralelas y dos rectas no coplanarias. — Después de la determinación de los dos puntos que nos proporcionan la distancia, se obtiene ésta por un abatimiento o un giro que nos sitúen los puntos en un plano frontal, o por un cambio de plano vertical, según hemos explicado anteriormente.

Ángulo de dos rectas. — Si las rectas SA y SH son concurrentes, se abate su punto de intersección S alrededor de una horizontal AH *(fig. 94)*.

Si las rectas D y △ no son concurrentes, por un punto S de una de ellas, D, trazamos la paralela SH a la otra recta △, y se procede como anteriormente: el ángulo φ es, en verdadera magnitud, el que forman D y △.

Si una de las rectas, AH, es horizontal, se abate alrededor de ella como charnela. El ángulo θ es el que forman AH y AS.

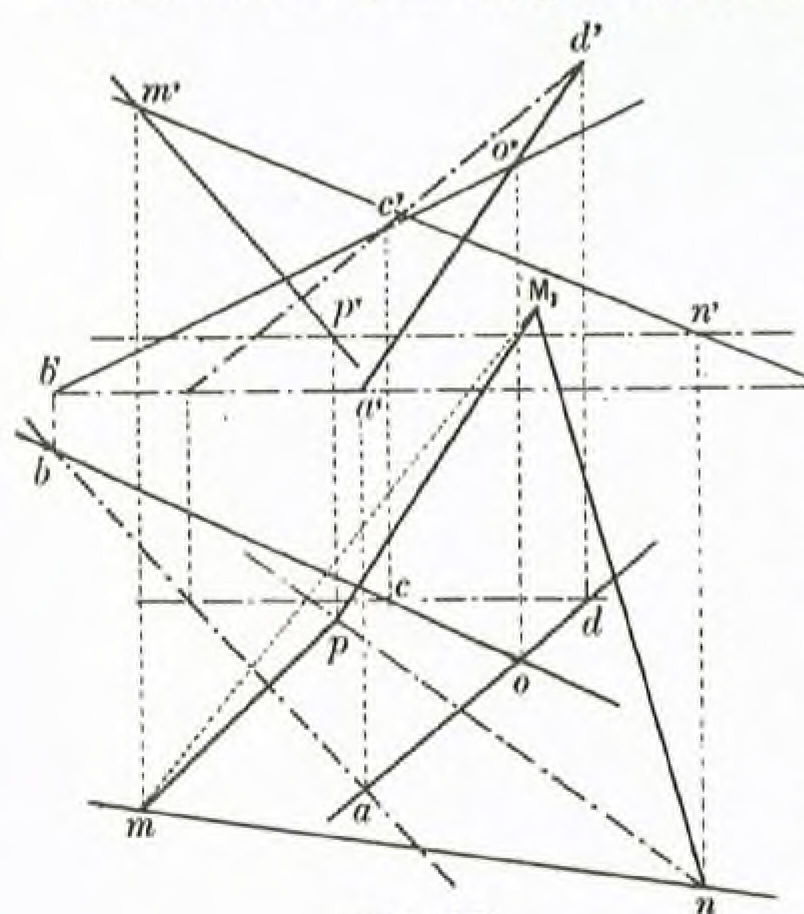
Si una recta fuera frontal, se abatiría alrededor de ella, sobre un plano frontal.

Si una recta fuera vertical o las dos proyecciones horizontales estuvieran confundidas, se abatiría el plano vertical proyectante. Este es el caso del ángulo que forma una recta con su proyección horizontal. Si esa recta es la línea de máxima pendiente de un plano, el ángulo de que se trata es el que forma dicho plano con el horizontal de proyección.

De una manera análoga se resuelve este problema si una recta es de punta o si las dos rectas tienen sus proyecciones verticales confundidas.

Ángulo de una recta △ y un plano P. — El ángulo que forma una recta △ con un plano P, es el mismo que el formado por dicha recta con su proyección sobre el plano, el cual es complementario del que forma con una recta D, normal al plano.

No es necesario, por tanto, hallar la proyección de △. Si el plano P *(fig. 95)* está definido por dos rectas AD y BC, concurrentes en O, se determinan una horizontal AB y una frontal CD. Por un punto M de △ se traza la perpendicular MP al plano, cuyas proyecciones horizontal y vertical son, respectivamente, las perpendiculares mp a ab y $m'p'$ a $c'd'$. Se abate,

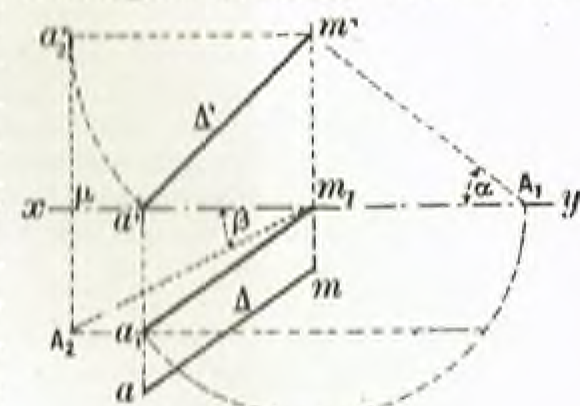

Fig. 95

por último, el ángulo $\widehat{PMN}$ alrededor de la horizontal pn y se obtiene el ángulo $\widehat{pM_1n}$, que es, en verdadera magnitud, complementario del ángulo buscado.

Problema inverso. — *Trazar por un punto* M *una recta que forme ángulos dados,* α *y* β, *con los planos de proyección* (fig. 96).

Hagamos la construcción para la proyección vertical m' de M, cuya proyección horizontal es m_1. Bastará después con trazar por M la paralela a la recta hallada.

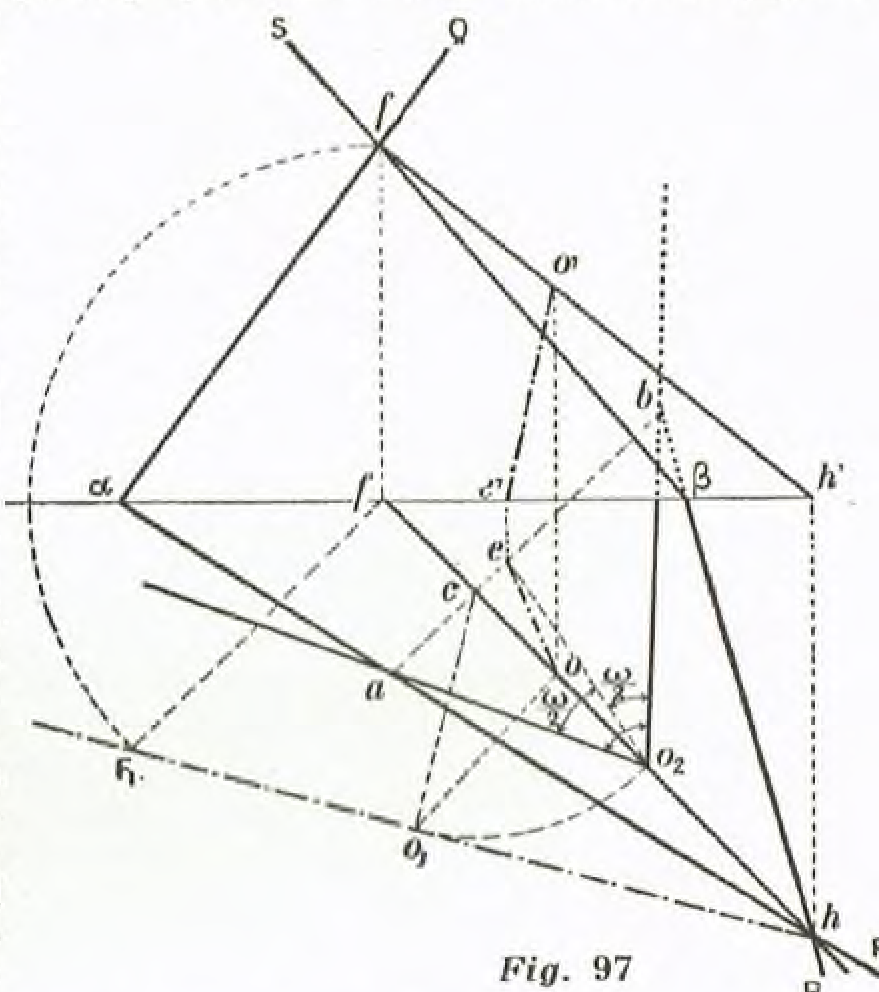
Consideremos el problema resuelto y sean a_1m_1 y $a'm'$ las proyecciones que buscamos. El plano vertical proyectante de A_1M_1 lo abatimos sobre V, y resulta el triángulo rectángulo $m'm_1A_1$. Observemos que de este triángulo conocemos el cateto m_1m' y el ángulo α. Luego podemos construirlo y tendremos la longitud $m_1A_1 = m_1a_1$. Giramos el plano de canto, proyectante de A_1M_1, alrededor de la recta de punta mm_1, m' hasta ponerlo horizontal, en cuyo momento obtenemos sobre H el triángulo rectángulo $m_1\mu A_2$. De este triángulo conocemos la hipotenusa m_1A_2, igual en magnitud a la del triángulo $m'm_1A_1$ construido antes, y el ángulo β. Luego construyendo este triángulo tendremos el alejamiento μA_2 del punto A. De aquí se deduce esta construcción: se traza la paralela A_2a_1 a la línea de tierra a una distancia μA_2. Con centro en m_1 y radio m_1A_1 se corta esta paralela y se obtiene la proyección a_1; a' está en la línea de tierra. Por m se traza la paralela a m_1a_1. La recta pedida es la am, $a'm'$. El problema tiene cuatro soluciones, en general.


Fig. 96

Ángulo de dos planos. — Es el rectilíneo del diedro formado por ellos. Se obtiene trazando por un punto de la intersección FH las perpendiculares a esta recta, contenidas en cada uno de los planos, las cuales determinan un plano perpendicular a dicha intersección *(fig. 97)*.

Las trazas de este plano son perpendiculares a las proyecciones homónimas de la recta. Tomemos como plano del rectilíneo aquel cuya traza horizontal es ab.

El plano vertical proyectante de FH corta esta traza en C. Abatiendo este plano sobre el horizontal de proyección ob, tenemos en F_1h el abatimiento de FH. El punto C queda abatido en su misma proyección horizontal c. La perpendicular co_1 a F_1h nos determina el vértice o_1 del rectilíneo del diedro que contiene la horizontal ab. Sus proyecciones, deshaciendo el abatimiento, serían o, o'. Si abatimos este vértice oo' sobre H, alrededor de ab como charnela, se obtiene su abatimiento o_2. El ángulo pedido, en verdadera magnitud, es $\widehat{ao_2b}$. Si no necesitamos las proyecciones o, o' del vértice del rectilíneo del diedro, no es preciso deshacer el primer abatimiento, pues o_2 se puede obtener directamente, ya que $co_2 = co_1$.


Fig. 97

Plano bisector de un diedro. — Después del abatimiento del rectilíneo, se puede trazar la bisectriz o_2E, que en proyección es la recta oe, $o'e'$. Esta recta y la intersección FH nos determinan el plano bisector del diedro.

El ángulo que un plano forma con el horizontal de proyección puede hallarse con ayuda de la línea de máxima pendiente. El ángulo que un plano forma con el vertical de proyección puede encontrarse de una manera análoga.

MÉTODO DEL SUPLEMENTO. También puede hallarse el ángulo entre dos planos trazando por un punto M, interior al diedro, las perpendiculares MA y MB a ellos. El ángulo formado por estas dos rectas es el suplementario del pedido.

Este método es muy útil para determinadas posiciones notables de los planos.

Representación de figuras planas

Método. Cuadrado y octógono regular, situados en un plano de canto. Circunferencia situada en un plano vertical, que forma un ángulo de 60° con el vertical de proyección. Circunferencia situada en un plano cualquiera. Método. Procedimiento rápido para determinar los ejes menores de las proyecciones de una circunferencia

Método. — Si una figura está situada sobre un plano paralelo a uno de los planos de proyección, su proyección sobre éste es su verdadera magnitud. Sobre el otro plano, se proyecta según una línea recta paralela a la línea de tierra.

Si la figura de que se trata está situada en un plano cualquiera, se abate este plano sobre un plano horizontal; se hace la representación de la figura sobre el abatimiento y se vuelve el plano a su posición inicial, y con él, todos los puntos de la figura. Veamos algunos ejemplos.

Cuadrado y octógono regular, situados en un plano de canto. — Sea el cuadrado ABCD *(fig.* 98), uno de cuyos lados, AB, es de punta, y otro, BC, es frontal; el plano del cuadrado forma un ángulo de 40° con el horizontal de proyección.

Supongamos el plano del cuadrado abatido sobre un plano horizontal, alrededor de la charnela AB.

El cuadrado se proyectará horizontalmente, entonces, en su verdadera magnitud ABCD.

Si queremos transformar este cuadrado en un octógono regular, tracemos los arcos de circunferencia de la figura, con centros en cada uno de los vértices del cuadrado y radio la mitad de su diagonal. Resulta así el octógono $m_1n_1p_1q_1r_1s_1t_1u_1$. Para deshacer el abatimiento, giremos el plano de la figura, alrededor de la recta de punta AB, hasta que su traza vertical forme un ángulo de 40° con xy. Los alejamientos de los puntos no cambian durante esta operación. Las perpendiculares a la charnela permanecen paralelas a la línea de tierra.

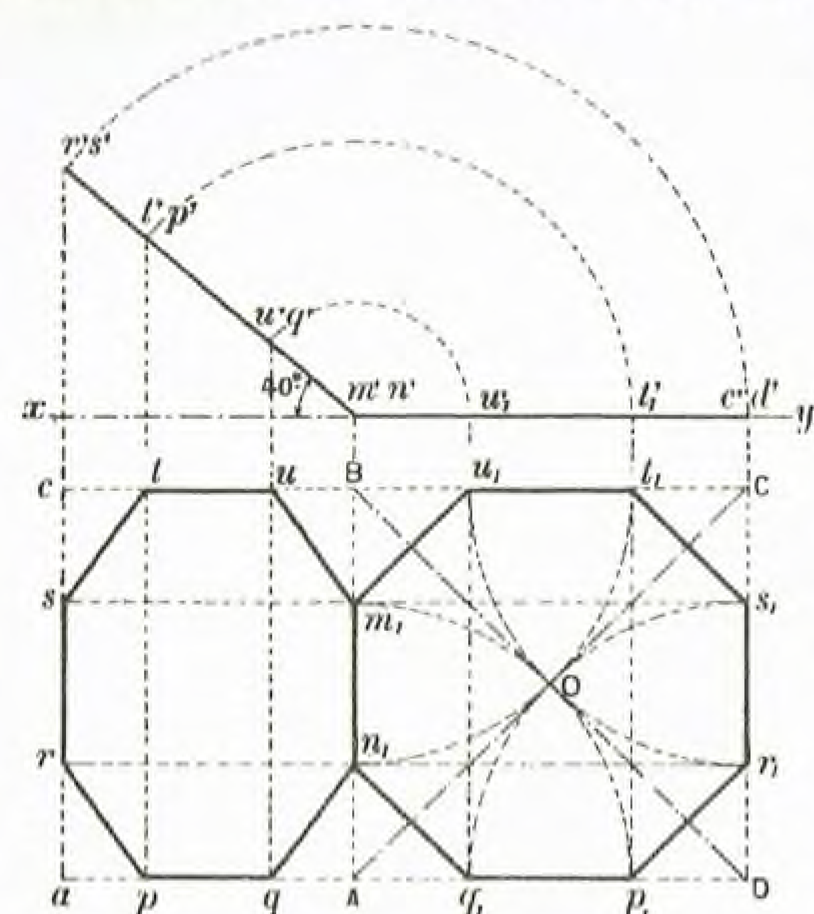


Fig. 98

Las proyecciones verticales de los vértices estarán sobre la traza vertical del plano. La distancia de ellos a la charnela de giro es constante, luego la proyección vertical $m'n'p'q'r's't'u'$ del octógono se obtiene trazando los arcos de la figura. La proyección horizontal $mnpqrstu$ se obtiene en la intersección de cada línea de referencia con la frontal correspondiente.

Circunferencia situada en un plano vertical, que forma un ángulo de 60° con el vertical de proyección. — Supongamos el plano del círculo abatido sobre el plano vertical de proyección. La circunferencia se proyecta en verdadera magnitud sobre él y podemos dibujarla. Su proyección horizontal será un segmento cd_1, igual al diámetro y situado sobre xy. Giremos ahora el plano, alrededor de la vertical que pasa por c, hasta que su traza horizontal forme un ángulo de 60° con xy.

El ángulo $\widehat{dcx}$ es el rectilíneo del diedro considerado; cd es la proyección horizontal de la circunferencia y su magnitud es un diámetro.

La proyección vertical es una elipse, cuyo eje mayor es la proyección $a'b'$ del diámetro paralelo a la charnela y cuyo eje menor es la proyección $c'd'$ del diámetro normal a ella.

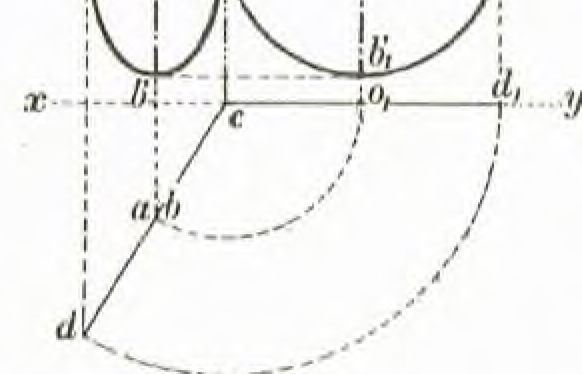


Fig. 99

Circunferencia situada en un plano cualquiera (fig. 100). — Este caso general es muy importante para la representación de los cuerpos redondos y sus secciones planas.

Las dos proyecciones son elipses en las que *el eje mayor es la proyección del diámetro paralelo al plano de proyección* considerado. Éste es el único diámetro que se proyecta en verdadera magnitud. Determinado este diámetro, sólo falta determinar la proyección del diámetro correspondiente al eje menor de la elipse. Conocidos los ejes de ésta, se puede dibujar por el método de la tira de papel.

Conviene observar que, para cada proyección de la circunferencia, tenemos que buscar los ejes de la elipse correspondiente, pues los ejes de una elipse no se corresponden en proyección con los de la otra. Las segundas proyecciones de los ejes de una de las elipses son diámetros conjugados en la otra elipse.

Método. — La circunferencia queda definida por su centro oo', su radio y una recta cualquiera de su plano que no pase por oo'. Sea, por ejemplo, la horizontal hk.

Abatimos el plano alrededor de hk como charnela. El centro oo' viene abatido en o_1.

Con el radio dado dibujamos la circunferencia y, a continuación, deshacemos el abatimiento. Conviene obtener los ejes de la elipse como hemos dicho ya. Es interesante saber hacer el desabatimiento de cualquier punto de la circunferencia y trazar la tangente en él. En especial, deben hallarse los siguientes puntos de la elipse:

El más alto y el más bajo, en los cuales la tangente es horizontal;
El más cercano y el más lejano, en los cuales la tangente es frontal;
El más a la derecha y el más a la izquierda, en los cuales la tangente es de perfil.

Abatimiento del centro. Si la recta dada, Δ, del plano no es horizontal, se determina, por mediación de ella y el centro, una horizontal hk. El centro oo' lo abatimos en o_1 con ayuda de la frontal of, $o'f'$; también podemos abatirlo con ayuda del triángulo $o\omega o_2$.

Eje mayor ab *de la proyección horizontal.* Es la proyección horizontal del diámetro horizontal AB, paralelo a la charnela. Su abatimiento es a_1b_1. Desabatido, es ab. Su centro oo' es el de la circunferencia en ambas proyecciones. Su proyección vertical $a'b'$ es paralela a xy.

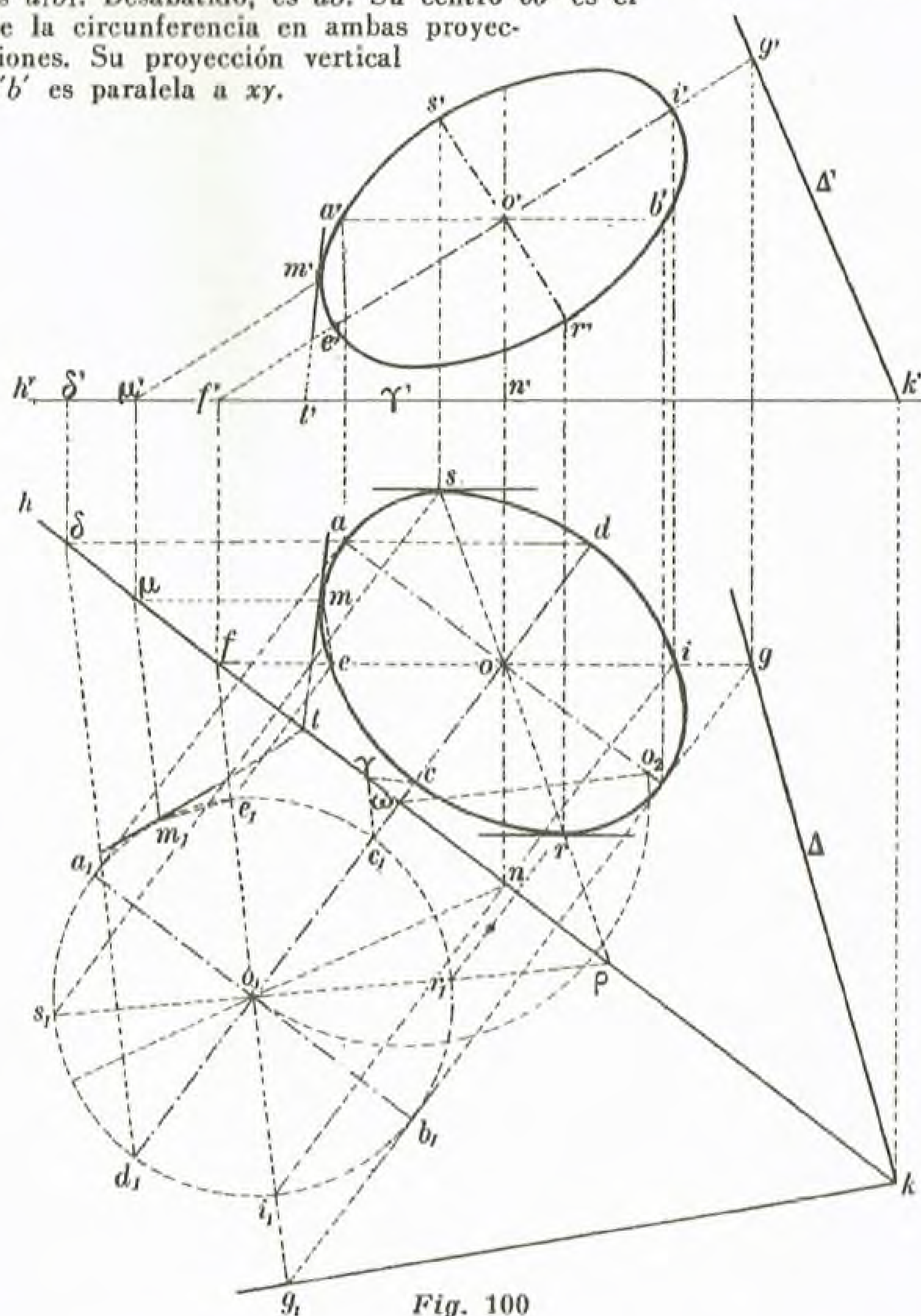


Fig. 100

Eje menor cd *de la proyección horizontal.* Es la proyección horizontal del diámetro CD, perpendicular al AB, que es línea de máxima pendiente del plano. Abatido, es c_1d_1. Lo hemos desabatido en cd con ayuda de las frontales $c_1\delta$ y $d_1\delta$. No hemos hallado la proyección vertical $c'd'$ para no sobrecargar el dibujo. Las proyecciones c' y d' corresponden a los puntos más alto y más bajo de la proyección vertical. En esta proyección, $a'b'$ y $c'd'$ serán diámetros conjugados.

Eje mayor e'i' *de la proyección vertical.* Es la proyección vertical del diámetro frontal EI. La paralela a xy por o corta en f la charnela y este punto, unido con o_1, nos proporciona su abatimiento e_1i_1. Deshecho el abatimiento, tenemos la proyección vertical $e'i'$. No es preciso hallar ei. Basta con hallar $f'i'$ y llevar $f'e' = fe_1$ y $f'i' = fi_1$.

Eje menor r's' *de la proyección vertical.* Es la proyección vertical del diámetro RS, perpendicular al EI. Su abatimiento es r_1s_1, perpendicular a e_1i_1. Deshecho el abatimiento, resultan sus proyecciones rs, $r's'$. La proyección $r's'$ es el eje menor de la elipse, proyección vertical.

Las proyecciones horizontales rs y ei son diámetros conjugados de la elipse, proyección horizontal. En esta proyección, el punto r es el más cercano y el punto s es el más alejado.

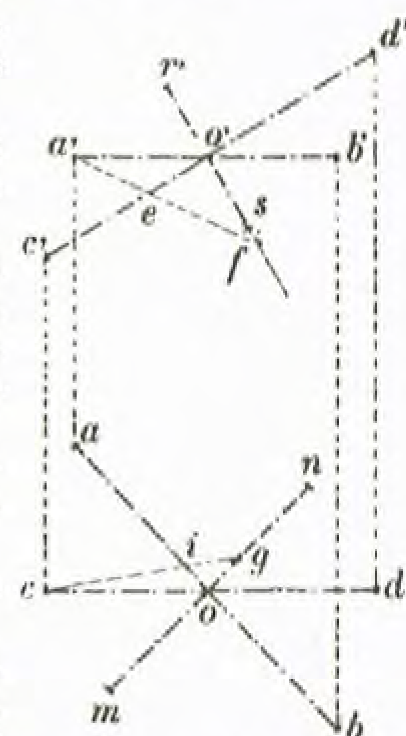
El desabatimiento de r_1s_1 lo hemos hecho con la ayuda del centro o y el punto ρ, de encuentro con la charnela.

Punto cualquiera mm' *y tangente en él.* El punto m_1 lo desabatimos con la ayuda de la frontal $m_1\mu$; la normal por m_1 a la charnela (que no se ha dibujado), corta en m la paralela a xy trazada por μ.

La tangente a la elipse en m pasa por t, punto de intersección de la charnela con la tangente a la circunferencia en m_1.

En proyección vertical, m' está sobre la frontal μ', y la tangente en m' pasa por t'.

Diámetro de perfil. En proyección horizontal, es la perpendicular on' a la línea de tierra. Abatido, es no_1. Los extremos de este diámetro nos proporcionan, al desabatir, el diámetro de perfil.


Fig. 101

Si trazamos el diámetro perpendicular a no_1 en el abatimiento, tendremos los puntos más a la izquierda y más a la derecha.

Tangente a la elipse, paralela a un recta Δ *o que pasa por un punto* G. Abatimos la recta Δ. Un punto del abatimiento es el k, perteneciente a la charnela. Abatimos otro punto gg', con ayuda de la frontal gf, $g'f'$, en g_1. El diámetro perpendicular a kg_1 nos proporciona los puntos i_1 y e_1, que, desabatidos, son ii' y ee'. Las paralelas por estos

puntos a las proyecciones △, △′ de la recta, nos proporcionan las tangentes pedidas.

Si queremos trazar la tangente desde un punto G a la circunferencia, abatimos este punto en g_1. Desde g_1 trazamos las tangentes a la circunferencia y desabatimos los puntos de contacto. Uniendo las proyecciones de éstos con g y g', respectivamente, tenemos la solución.

Procedimiento rápido para determinar los ejes menores de las proyecciones de una circunferencia (*fig.* 101). — Se trata del caso en que la circunferencia está determinada por un diámetro frontal $c'd'$ y otro horizontal ab. Los semiejes mayores son: $oa = ob = o'c' = o'd' = R$.

Con un radio R y centro a' describimos un arco que corta la dirección del eje menor en f. Uniendo a' con f obtenemos el punto e sobre $c'd'$: $a'e$ es la longitud del semieje menor, en la proyección vertical; $a'e = o'r' = o's'$.

Análogamente, con centro en c y radio R describimos un arco que corta la dirección del eje menor en g. Uniendo c con g obtenemos el punto i sobre ab: ci es la longitud del semieje menor, en la proyección horizontal; $ci = om = on$.

Representación de poliedros

Prisma con una base en un plano de proyección. Prisma con la base en un plano cualquiera. Puntuación de un prisma (o de un poliedro) convexo. Paralelepípedo y cubo. Cubo con una diagonal vertical. Sección recta y desarrollo de la superficie lateral. Intersección de una recta y un prisma. Pirámide. Pirámide de vértice dado y base situada sobre el plano horizontal. Pirámide con la base en un plano cualquiera. Hallar las proyecciones de una pirámide, dadas la base y la verdadera magnitud de las aristas laterales. Tetraedro regular con una arista horizontal y otra de punta situada sobre el plano horizontal. Intersección de una recta △ con una pirámide SABCD

DEFINICIONES. *Se llama* **superficie prismática** *la superficie engendrada por la traslación de un polígono plano paralelamente a una recta fija.*

Se llama **prisma** *el sólido interior a una superficie prismática y limitado por ésta y dos planos paralelos, que cortan dicha superficie según dos polígonos iguales, llamados bases del prisma.*

Las caras laterales del prisma son paralelogramos. Las aristas laterales son todas paralelas.

La sección que produce en la superficie prismática un plano perpendicular a sus aristas, se llama **sección recta.**

Prisma con una base en un plano de proyección. — Para representarlo por sus proyecciones dibujamos, primeramente, la base en su verdadera magnitud sobre el plano dado. La segunda proyección de la base se encontrará en la línea de tierra. Trazamos, después, las paralelas por los vértices de la base a la dirección dada de las aristas. La segunda base tiene las mismas proyecciones, trasladadas una magnitud igual a la longitud de las aristas laterales.

Prisma con la base en un plano cualquiera. — *a*) Se conoce una de las proyecciones de la base. Sea la vertical. Se trata de hallar las proyecciones horizontales de cada uno de los vértices de la base, conociendo el plano PαQ de ésta y las proyecciones verticales de dichos vértices (*fig.* 102).

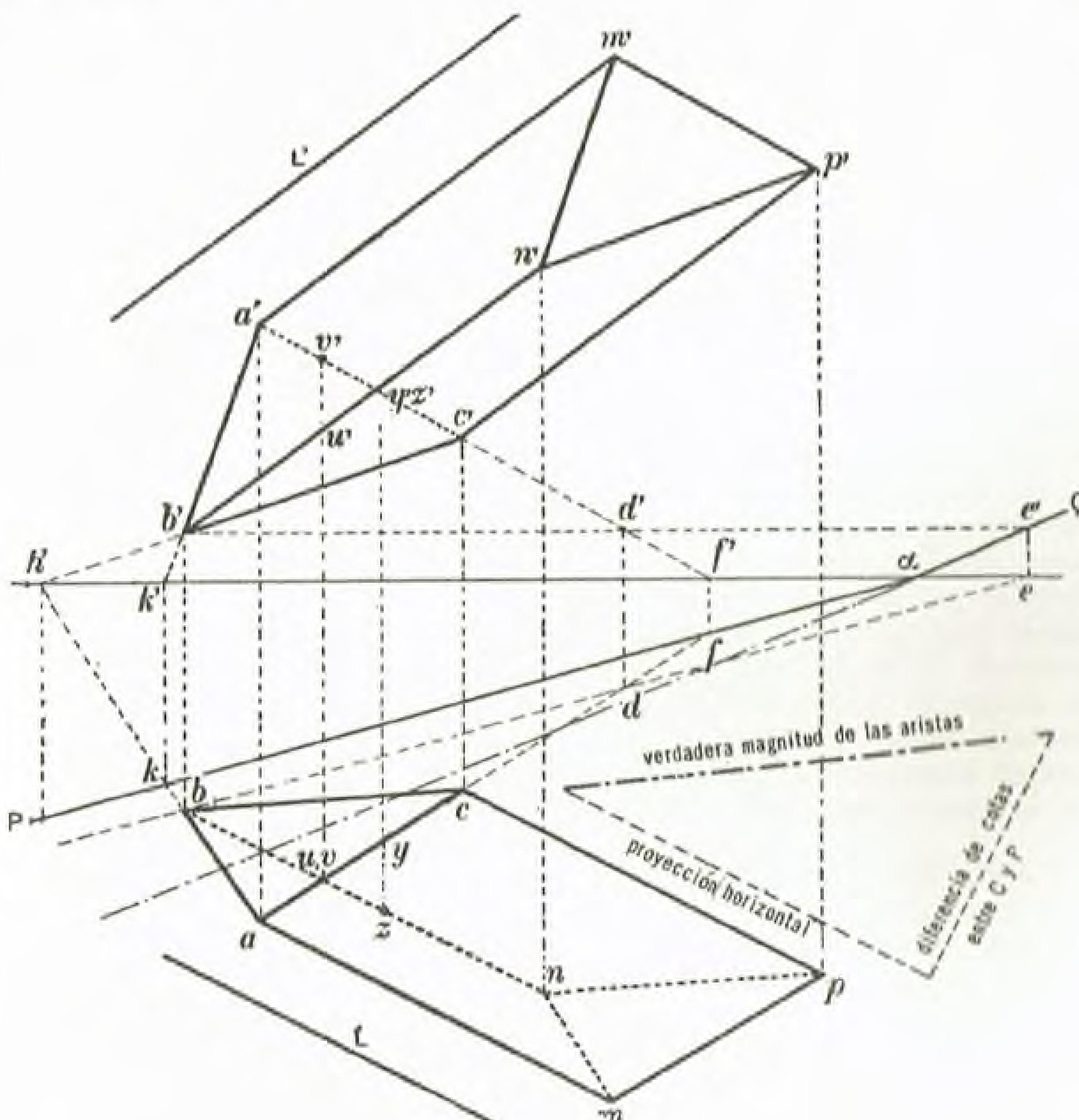


Fig. 102

Basta para ello con hacer pasar por cada vértice una recta del plano y sobre ella se hallará la proyección horizontal buscada. Esta recta auxiliar, para mayor facilidad, será un lado del polígono de la base, o bien una horizontal o una frontal del plano.

Si el plano de la base es vertical, las proyecciones horizontales de los vértices se encontrarán en las intersecciones de las líneas de referencia con la traza horizontal del plano.

Las proyecciones de la segunda base se hallarán como en el caso anterior.

b) Se conoce la verdadera magnitud de la base y su plano. Este es el caso más frecuente.

Si el plano de la base es de canto, se toma este plano como nuevo plano horizontal de proyección. En la nueva proyección horizontal, la base estará en verdadera magnitud y puede dibujarse.

La proyección vertical correspondiente estará sobre la línea de tierra. Volviendo a los primitivos planos de proyección, tendremos la base situada en el dibujo. El resto es igual que antes. También podíamos haber abatido el plano de la base sobre el horizontal, girándolo alrededor de su traza con este plano. Dibujamos el polígono, y deshacemos el abatimiento. Así hemos hecho con el prisma recto de base exagonal de la fig. 103. Las aristas laterales de este prisma se proyectan verticalmente en verdadera magnitud, por ser rectas frontales.

Si el plano de la base es vertical, tomamos éste como nuevo plano vertical de proyección. En este nuevo plano vertical, la base se proyectará en verdadera magnitud y podemos dibujarla. El resto es igual que antes. También podíamos haber girado el plano, como en el caso anterior, alrededor de su traza vertical, etc.

Si la base está sobre un plano de perfil, consideremos éste como un caso particular del plano vertical. También puede abatirse la base sobre cualquiera de los planos de proyección.

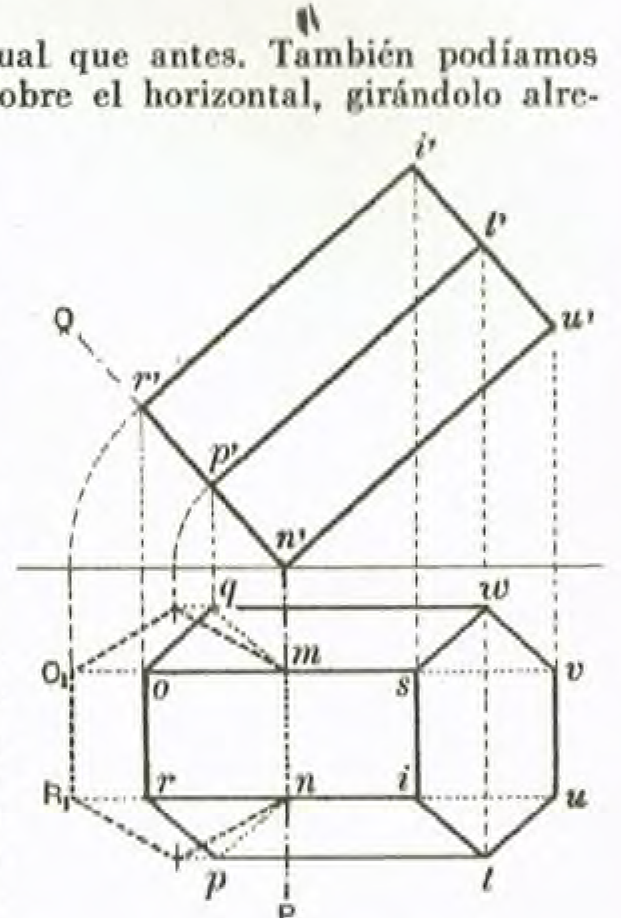


Fig. 103

Si la base está situada en un plano cualquiera, este plano puede transformarse en plano de canto por un cambio de plano vertical de proyección, tomando la nueva línea de tierra perpendicular a su traza horizontal; entonces, tenemos el problema reducido a un caso ya estudiado. Sin embargo, por un abatimiento del plano sobre cualquiera de los planos de proyección obtenemos la solución más rápida y sencillamente.

Puntuación de un prisma (o de un poliedro) convexo. —

1º Los contornos aparentes, *abcpm* y $a'b'c'p'm'$, de cada proyección, se ven totalmente (*fig.* 102).

2º Si dos aristas se cortan en una cualquiera de sus proyecciones, dentro del contorno aparente, una de ellas es vista y la otra está oculta. Por ejemplo, *ac* y *bn*.

3º Si en una proyección, un vértice está situado en el interior del contorno aparente, las aristas que salen de él son todas vistas o están todas ocultas. En la figura 102, las aristas *nb*, *np* y *nm*, que salen de *n*, están todas ocultas. En la figura 103, las aristas *ir*, *is*, e *it*, que salen de *i*, son todas vistas.

4º En la fig. 102, veamos cuál de las dos proyecciones que se cortan, *ac* y *bn*, es vista. Consideremos las proyecciones verticales u' y v' del punto de cruce, sobre cada una de las rectas AC y BN. El punto v, v' tiene mayor cota que el u, u', luego AC se cruza con BN por encima de ella. Así, pues, *ac* es vista y *bn* está oculta.

5º Análogamente, veamos cuál de las dos proyecciones verticales, $a'c'$ y $b'n'$, es vista. El punto z, z' sobre BN tiene mayor alejamiento que el punto y, y' sobre AC. Luego $b'n'$ se ve y $a'c'$ está oculta.

6º Todo punto interior al contorno aparente y perteneciente a una arista oculta, está oculto. Así, la proyección *n* está oculta (*fig.* 102).

7º Toda arista que sale de un vértice oculto, está oculta.

8º Todas las aristas de una cara vista son también vistas.

Paralelepípedo y cubo. — Son casos particulares del prisma. Tienen ocho vértices, doce aristas y seis caras. Las doce aristas son paralelas entre sí en tres grupos de cuatro aristas cada uno.

En el cubo, las seis caras son cuadrados iguales, cuyo lado es la arista del cubo.

Cubo con una diagonal vertical. — El cubo en esta posición es un caso muy interesante. Sus proyecciones se obtienen rápidamente, teniendo en cuenta las propiedades siguientes (*fig.* 104):

1ª La proyección horizontal es, en contorno aparente, un exágono regular. Los lados del exágono y los radios correspondientes de su circunferencia circunscrita forman seis rombos, tres vistos y tres ocultos, que son las proyecciones de las seis caras del cubo;

2ª Si colocamos cuatro aristas paralelas al plano vertical de proyección, la proyección del cubo sobre este plano es, en contorno aparente, un rectángulo inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es la diagonal dada.

Si nos dan la arista, la diagonal de una cara es $\delta = a\sqrt{2}$. La dia-

gonal del cubo es: $d = \sqrt{a^2 + \delta^2} = a\sqrt{3}$. Estas magnitudes pueden hallarse gráficamente.

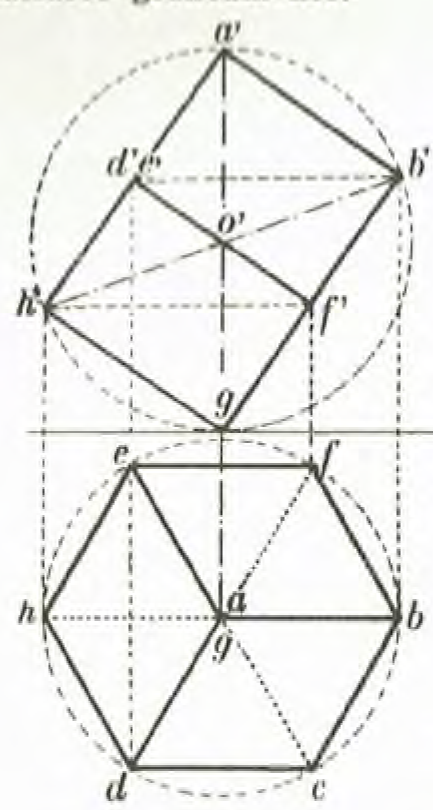


Fig. 104

Este rectángulo se descompone en otros dos rectángulos iguales, cuyas diagonales horizontales dividen la diagonal vertical del cubo en tres segmentos iguales.

Sección recta y desarrollo de la superficie lateral. — Se obtienen rápidamente, con la ayuda de un abatimiento. Lo mismo puede decirse en el caso de troncos de prisma.

Si el prisma es recto y tiene su base sobre uno de los planos de proyección, su sección recta se confunde sobre este plano con la proyección de la base, que se proyecta en su verdadera magnitud.

Intersección de una recta y un prisma. — Se hace pasar por la recta un plano paralelo a las aristas laterales del prisma. Este plano corta la base en dos puntos. Trazando las paralelas por éstos a las aristas del prisma, tenemos las dos rectas de intersección de dicho plano con él. Estas rectas cortan la dada (por ser coplanarias las tres) en dos puntos, que son la solución del problema.

En lugar del plano utilizado, podíamos haber escogido como auxiliar otro plano cualquiera, y, en particular, uno de los planos proyectantes de la recta dada. Pero, normalmente, el primer procedimiento explicado es el más corto.

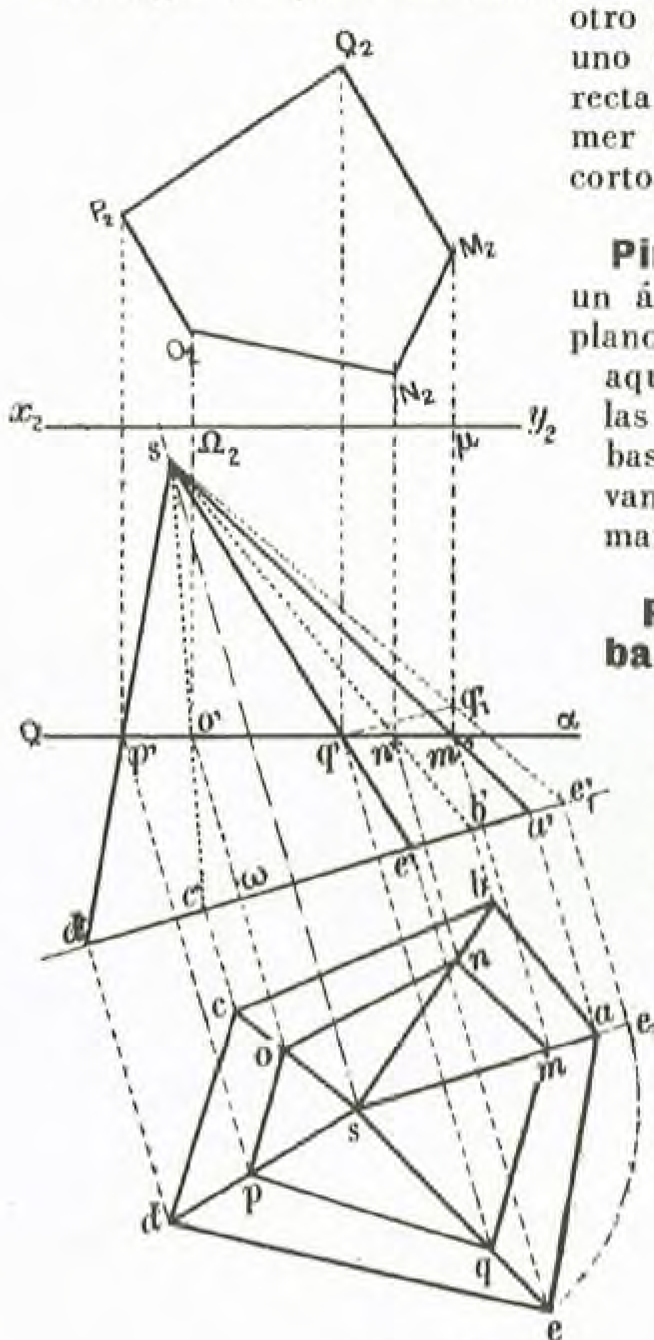


Fig. 105

Pirámide. — Es el sólido interior a un ángulo poliedro y limitado por un plano que corta todas las aristas de aquél. La intersección del plano con las aristas es un polígono, llamado base de la pirámide. Las aristas que van desde el vértice a la base se llaman aristas laterales.

Pirámide de vértice dado y base situada sobre el plano horizontal (*fig* 105). — La representación es inmediata (la línea de tierra se ha dibujado oblicua a las dos direcciones del papel). La sección por un plano de canto o vertical se halla fácilmente. La sección por el plano de canto αQ coincide con esta traza en la proyección vertical. La proyección horizontal se obtiene con ayuda de las líneas de referencia.

La verdadera magnitud de una arista SE puede obtenerse por el método del triángulo rectángulo o, también, haciendo un cambio de plano vertical para poner la recta SE de frente; para ello, tomamos la nueva línea de tierra x_1y_1, paralela a la proyección horizontal *se*. Es preferible, sin embargo, girar la arista SE alrededor de la vertical que pase por uno de sus puntos, por ejemplo, la que pasa por *ss'*. Entonces, la proyección *se* viene a ocupar la posición se_1, paralela a *xy*, sin cambiar de longitud; *e'* viene a e'_1; la verdadera magnitud de $\overline{SE}$ es el segmento $\overline{s'e'_1}$.

Análogamente, se obtendrían las verdaderas magnitudes de las demás aristas. Sobre ellas, pueden hallarse las distancias del vértice S de la pirámide a cada uno de los vértices de la sección plana MNOPQ. Así, la distancia, en verdadera magnitud, de $\overline{SQ}$ es $\overline{s'q'_1}$.

Con las verdaderas magnitudes de las aristas podemos hacer el desarrollo de la superficie lateral (*fig.* 106). Éste se obtiene construyendo una sucesión de triángulos que tienen dos a dos un lado común.

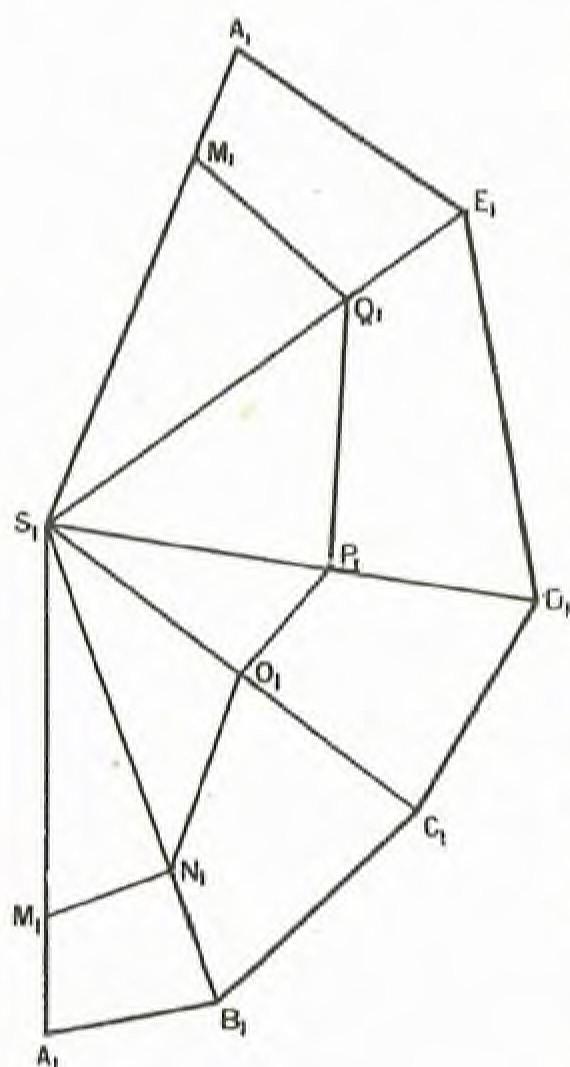


Fig. 106

La verdadera magnitud de la sección plana se suele hallar abatiendo el plano secante, alrededor de su traza, sobre el horizontal de proyección.

Podemos hacer un cambio de plano horizontal de proyección tomando un nuevo plano de canto paralelo al dado. Para ello, se coloca la nueva línea de tierra x_2y_2 paralela a αQ. La nueva proyección horizontal $M_2N_2O_2P_2Q$ es la verdadera magnitud de la sección MNOPQ.

Pirámide con la base en un plano cualquiera. — Si una de las proyecciones de la base es conocida, determinamos la otra, sabiendo que pertenece a un plano dado, como hemos visto con el prisma. Se unen las proyecciones del vértice a las proyecciones homónimas de cada uno de los vértices de la base, y tenemos representada la pirámide.

Si conocemos la verdadera magnitud de la base, hacemos un cambio de plano para transformar el plano de la base en vertical o de canto.

Más rápido que esto es auxiliarnos con un abatimiento del plano de la base sobre cualquiera de los planos de proyección.

Hallar las proyecciones de una pirámide, dadas la base y la verdadera magnitud de las aristas laterales. — Este problema es posible en dos casos:

1° *En las pirámides regulares:* En efecto, situada la base, trazamos por su centro la perpendicular a su plano. Sobre esta perpendicular, siempre habrá un punto cuya distancia a los vértices de la base sea la dada. Sólo en el caso en que esta distancia sea menor que el radio del círculo circunscrito a la base, carecerá de solución el problema;

2° En los *tetraedros* o pirámides triangulares cualesquiera (*figura* 107). Si una cara está sobre el plano horizontal de proyección, abatimos las otras caras sobre dicho plano, alrededor de sus trazas AC, AB y BC. Obtenemos así los puntos S_1, S_2 y S_3. Desabatiendo estos puntos, las normales por ellos a las charnelas se cortarán en *s*, que es la proyección horizontal del vértice S del tetraedro. La segunda proyección *s'* se obtiene sobre la línea de referencia *sh'*, conociendo su cota *s'h'*. Esta magnitud es el cateto SH de un triángulo rectángulo SHC, cuya hipotenusa SC es la verdadera magnitud de una arista lateral, y el otro cateto CH es igual a la proyección horizontal *sc* de la misma arista.

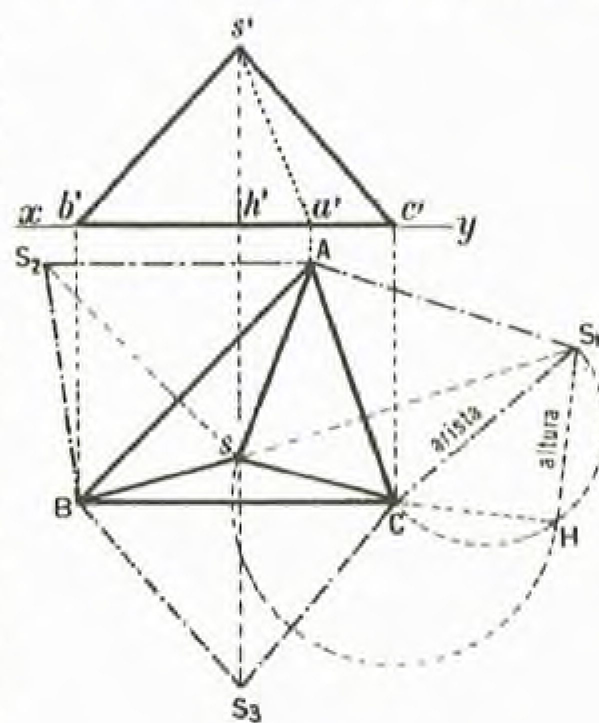


Fig. 107

Si la base del tetraedro está sobre un plano de canto (o vertical), se reduce al caso anterior por medio de un cambio del plano horizontal (o vertical) de proyección.

En el caso general de una pirámide regular, cuya base está situada sobre un plano de canto (o vertical), se abate también dicha base sobre el plano horizontal (o vertical), donde pueda dibujarse. Se deshace el abatimiento, y tenemos sus dos proyecciones (*fig.* 108). En la pirámide de la fig. 108, la altura es una recta frontal, luego se proyectará verticalmente en su verdadera magnitud.

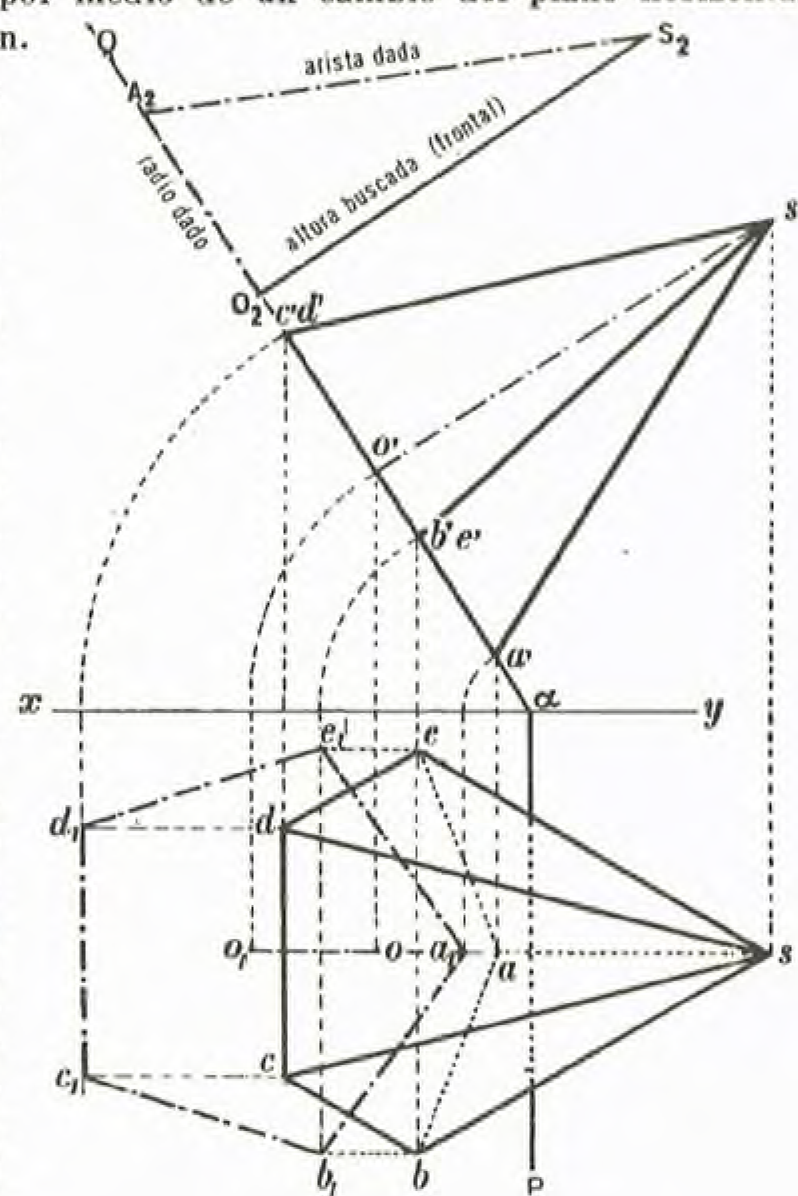


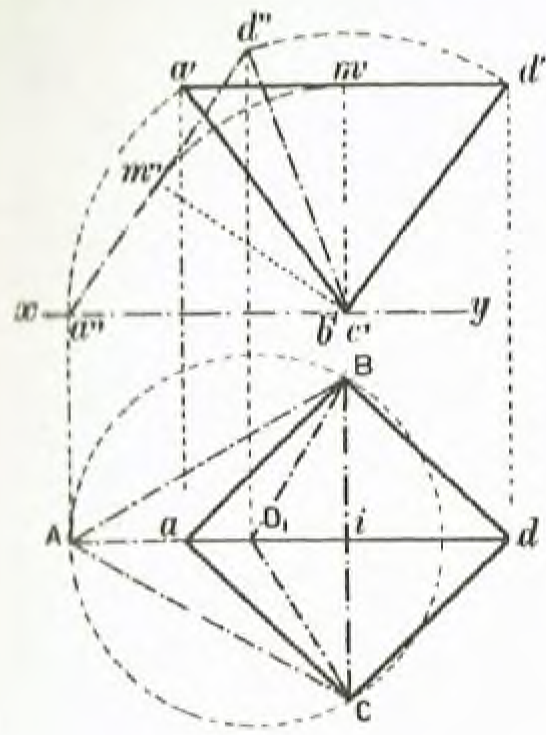
Fig. 108

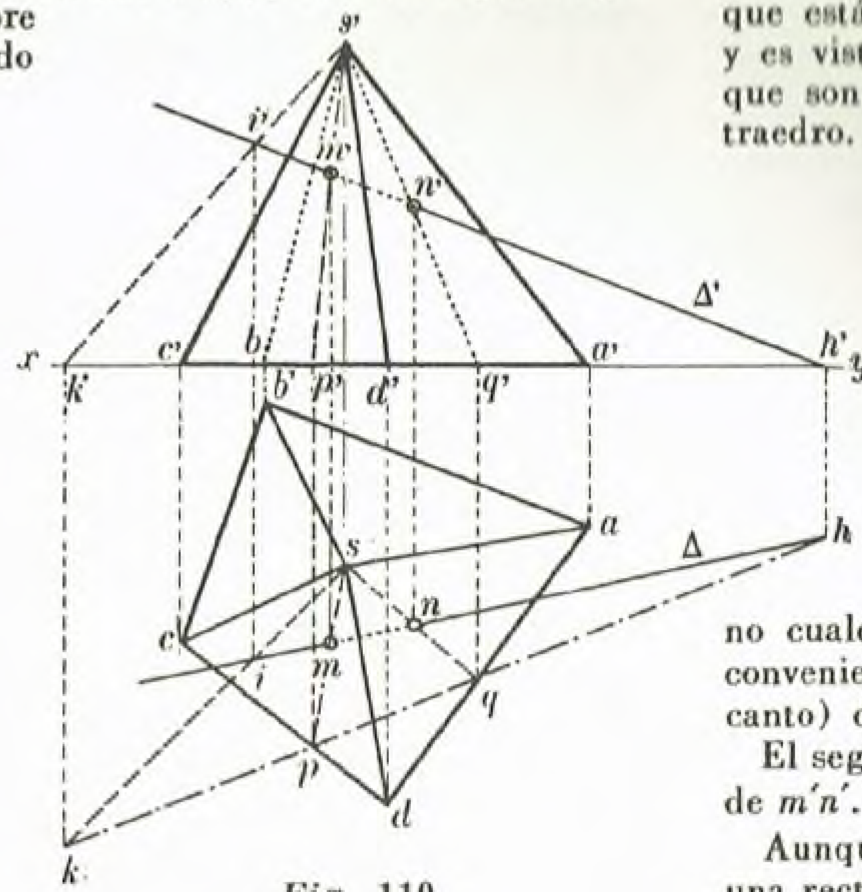
Tetraedro regular con una arista horizontal y otra de punta situada sobre el plano horizontal (*fig.* 109). — Suponemos el tetraedro apoyado en el plano horizontal sobre una cara ABC, siendo BC perpendicular a *xy*. El cuarto vértice D se proyectará horizontalmente en el centro D_1 del triángulo ABC. La proyección vertical *d''* de D_1 se encuentra sobre la línea de referencia correspondiente y a una distancia de *a''* igual a la verdadera magnitud de la arista, por ser AD_1 *a''d''* una recta frontal. Tenemos así el tetraedro de proyecciones $ABCD_1$, *a''b'c'd''*, apoyado sobre H.

Giramos esta posición del tetraedro un ángulo, dado por el arco *m''m'*, hasta colocar horizontal la arista frontal AD. Las proyecciones *a''* y *d''* vienen a *a'* y *d'*, respectivamente. Las proyecciones horizontales A y D_1 se desplazan paralelamente a *xy*, hasta ocupar las posiciones *a* y *d*. Los puntos B y C no se mueven, por pertenecer a la charnela de giro. Tenemos así las proyecciones buscadas, *a*BC*d*, *a'b'c'd'*.

Observación importante. Un tetraedro regular, con una arista situada

en un plano de proyección, y perpendicular a xy, y la arista opuesta paralela a este plano, se proyecta sobre él según los lados de un cuadrado


Fig. 109


Fig. 110

y sus diagonales. Una de éstas representa la arista contenida en el plano, que está oculta, y la otra representa la arista paralela a dicho plano y es vista. Los cuatro lados del cuadrado representan las otras aristas, que son vistas, por ser el contorno aparente de la proyección del tetraedro.

Intersección de una recta △ con una pirámide SABCD (*fig.* 110). — Unimos S con un punto cualquiera I de la recta △. La recta SI, que pertenece al plano (S,△), corta el plano horizontal en kk'. La recta △ corta este mismo plano en hh'. La recta (kh, $k'h'$), traza horizontal del plano (S,△), corta en p y q la base de la pirámide. Las rectas SP y SQ cortan △ en mm' y nn', que son los puntos de intersección buscados.

En lugar del plano (S,△) podemos utilizar otro plano cualquiera que pase por △. Aparte del utilizado por nosotros, es conveniente, otras veces, uno de los planos proyectantes (vertical o de canto) de la recta △.

El segmento mn, interior al sólido, está oculto. Lo mismo puede decirse de $m'n'$.

Aunque las proyecciones $m'i'$ y $s'c'$ se cortan, ambas son vistas, pues una recta MI no tiene espesor.

Intersección de poliedros

Método general de determinación. Penetración de un prisma recto por un prisma oblicuo. Las dos bases abc y defg están sobre un plano de proyección. Intersección de dos prismas oblicuos. Mordedura. Intersección de dos pirámides. Intersección de un prisma con una pirámide

DEFINICIONES. *Se dice que dos poliedros tienen* **intersección** *cuando sus superficies exteriores tienen puntos comunes.*

Si uno de los poliedros atraviesa totalmente el otro, tenemos un caso de **penetración.** La intersección se compone, entonces, de dos polígonos planos o alabeados, llamados de entrada y de salida.

Si cada uno de los dos poliedros tiene aristas no cortadas por el otro, se trata de una **mordedura.** Sólo hay un polígono de intersección.

Existe un caso intermedio en el que dos líneas de intersección (de entrada y salida) tienen un punto común.

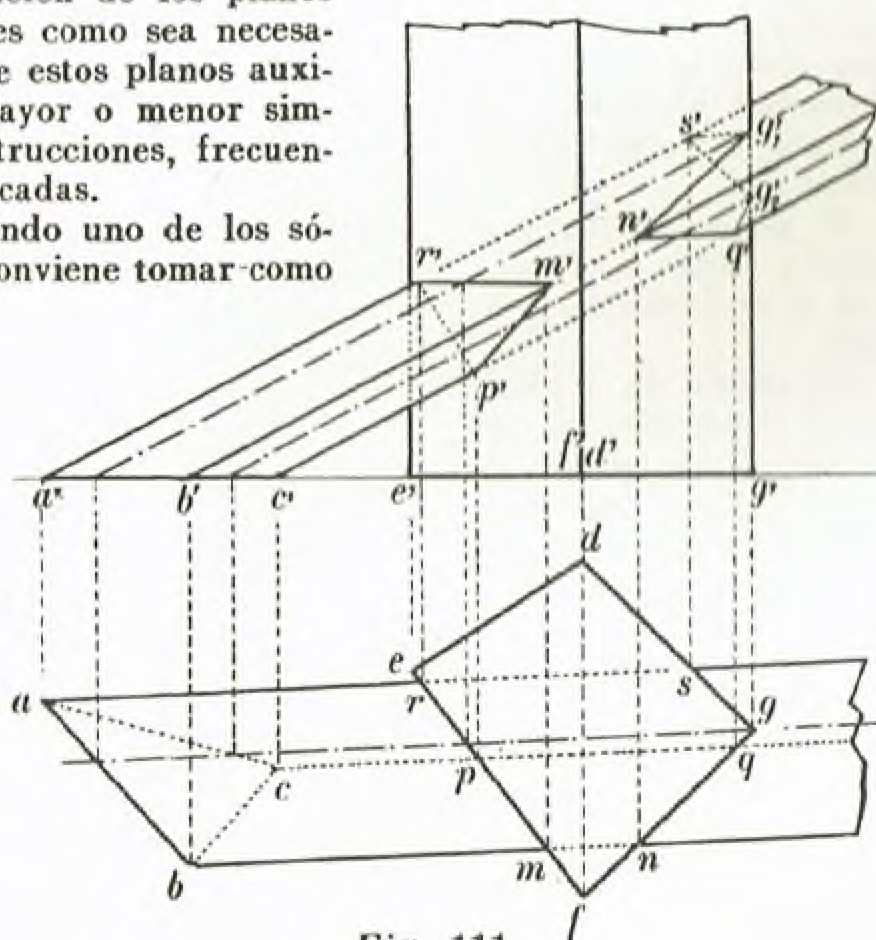
Se llama **sólido común** *la parte de un poliedro contenida totalmente en el otro.*

Método general de determinación. — Para encontrar la intersección de dos poliedros nos servimos de planos auxiliares. Estos cortan cada poliedro, en general, según dos polígonos. Los puntos comunes a estos polígonos son puntos de la intersección buscada. Planos que producen fácil intersección en cada uno de los poliedros, son los paralelos a los de proyección y los perpendiculares a ellos.

Se repite la operación de los planos auxiliares tantas veces como sea necesario. De la elección de estos planos auxiliares depende la mayor o menor simplicidad de las construcciones, frecuentemente muy complicadas.

En particular, cuando uno de los sólidos es un prisma, conviene tomar como planos auxiliares los paralelos a sus aristas laterales. La intersección de estos planos con el prisma son rectas paralelas a dichas aristas.

Si uno de los sólidos es una pirámide, los planos auxiliares deben pasar por su vértice; las intersecciones con ella son dos rectas que pasan por dicho vértice; una de ellas puede ser una arista lateral de la pirámide.


Fig. 111

Penetración de un prisma recto por un prisma oblicuo. Las dos bases abc y defg están sobre un plano de proyección. — Sea este plano el horizontal, por ejemplo (*fig.* 111).

Tomamos como auxiliares los planos verticales cuyas trazas horizontales son paralelas a las proyecciones homónimas de las aristas laterales del prisma oblicuo. Tres de estos planos son los proyectantes de dichas aristas, que cortan el otro prisma en los puntos p y q, m y n, r y s. Los dos últimos son los planos límites.

La arista g del prisma recto corta el oblicuo en los puntos g'_1 y g'_2. Es la única arista de aquel prisma que corta éste.

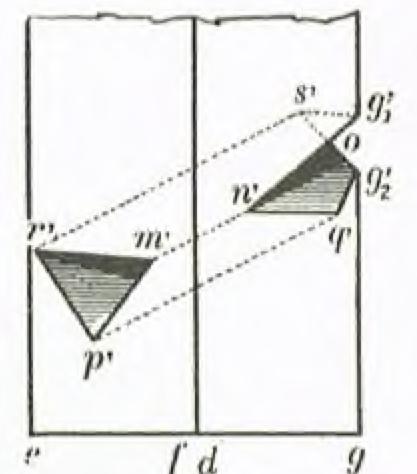
El orden de unión de los puntos obtenidos lo hallamos considerando sucesivamente los polígonos de entrada y de salida. Se encuentran así los polígonos $p'm'r'$ y $q'n'g'_1s'g'_2$.

En la representación del conjunto de los dos poliedros, las rectas $q'g'_2$, g'_2s', $s'g'_1$ y $r'p'$ están ocultas, por pertenecer a caras ocultas de uno u otro poliedro.

Los segmentos de aristas de un poliedro dentro del otro, tales como RS, MN, PQ y G_1G_2, se representan con líneas de puntos.

En la representación del prisma penetrado (*fig.* 112), el vértice s' es el único oculto de la intersección, pues las dos aristas que salen de él, $s'g'_1$ y $s'o$, están ocultas.

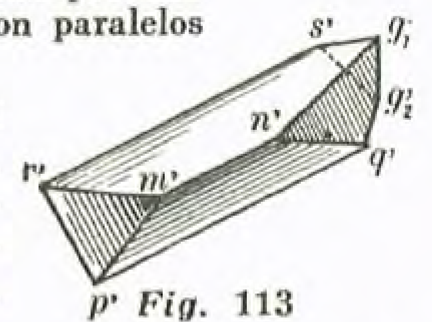
En la representación del sólido común (*figura* 113) la única recta oculta es $s'g'_2$.


Fig. 112

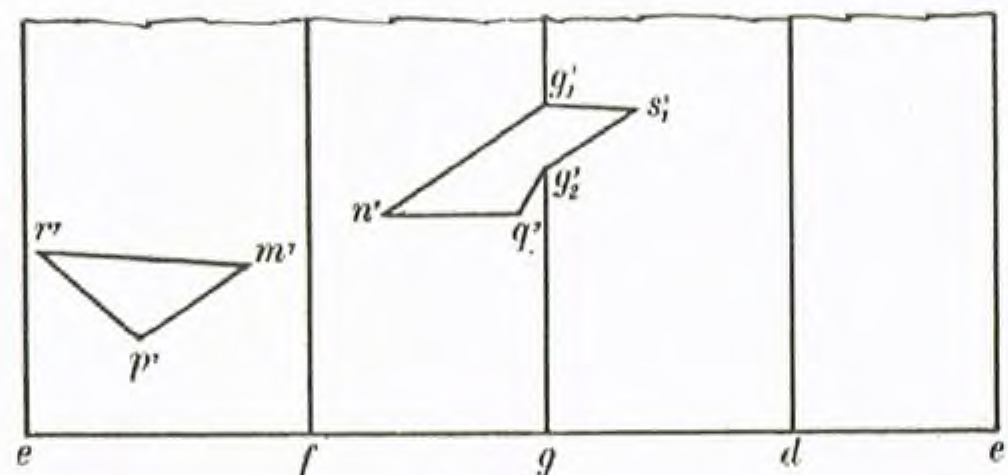
El desarrollo lateral del prisma recto (*figura* 114) se obtiene rápidamente, pues sus aristas laterales se proyectan en verdadera magnitud en el plano vertical y su base se proyecta horizontalmente también en su verdadera magnitud.

Intersección de dos prismas oblicuos. Mordedura (*fig.* 115). — Se toman como planos auxiliares los que pasan por una arista lateral de uno de los prismas, ABC, y son paralelos a las aristas del otro, MNP.

Un plano de éstos es el de traza horizontal A-VII-VIII que corta MN en VII y NP en VIII, y las caras correspondientes del prisma MNP según las paralelas VII-7 y VIII-8 a sus aristas laterales. Estas últimas rectas cortan la arista A del prisma ABC en los puntos 7 y 8.


Fig. 113

Otro plano auxiliar es el paralelo al anterior y que contiene la arista C. Su traza horizontal es C-V-VI, que corta MN y PN en los puntos V y VI, respectivamente, y las caras correspondientes según las paralelas V-5 y VI-6 a las aristas laterales. Estas rectas cortan la arista C en los puntos 5 y 6.


Fig. 114

Análogamente, el plano paralelo a los anteriores, que contiene la arista P, nos proporciona los puntos 1 y 3 de intersección de esta arista con las caras AB y BC, respectivamente. El plano paralelo al anterior, que contiene la arista M, nos proporciona los puntos 2 y 4 de intersección de esta arista con las caras AB y BC.

De la misma forma se obtendrían todos los puntos de la mordedura, que se unen en el orden 8, 1, 2, 7, 5, 4, 3, 6, sabiendo que dos puntos consecutivos han de pertenecer simultáneamente a una misma cara del prisma ABC y a una misma cara del prisma MNP.

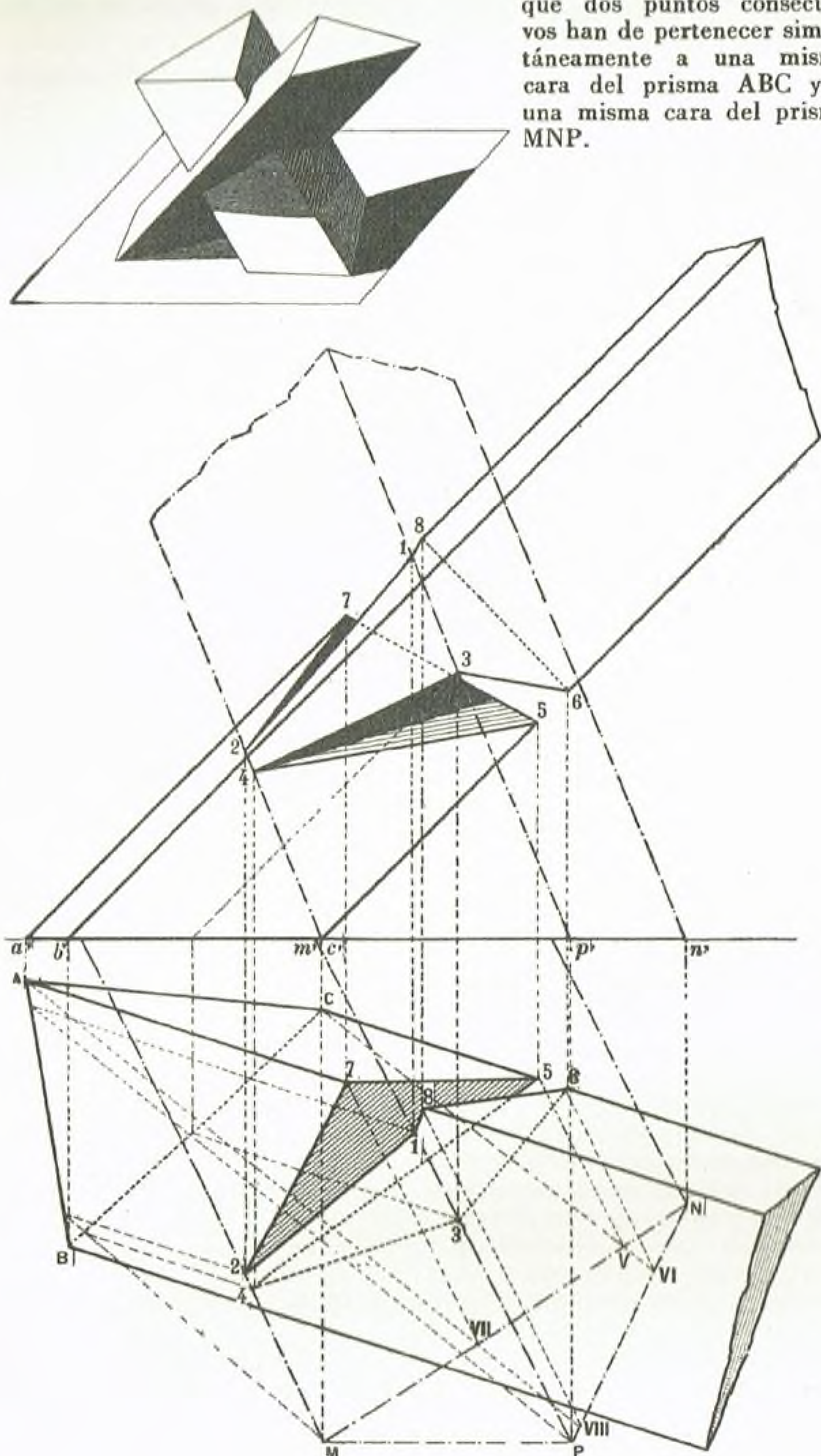


Fig. 115

Intersección de dos pirámides. — Consideremos dos pirámides SABC y S_1DEF, con sus bases en dos planos cualesquiera (*fig.* 116). Tomamos como planos auxiliares los que pasan por ambos vértices y contienen una arista lateral de una de las pirámides. Designemos por σ y σ_1 las trazas de la recta SS_1 con los planos P y P_1 de las bases.

Nosotros sólo vamos a manejar las proyecciones horizontales de las pirámides. Las proyecciones verticales únicamente nos servirán para determinar los puntos σ y σ_1 y la intersección UV de los planos P y P_1.

Los planos auxiliares cortarán P y P_1 según dos rectas que se cortarán en un punto de la recta UV.

Consideremos el plano que pasa por ss_1 y la arista s_1f; su traza sobre P_1 es $\sigma_1 f$, que nos proporciona δ sobre uv, luego la traza de este plano secante sobre P es $\sigma\delta$, que corta en f_1 y f_2 los lados ac y ab de la base de la pirámide s; por tanto, el plano secante corta esta pirámide según las rectas sf_1 y sf_2, que nos proporcionan, al cortarse con s_1f, los puntos de intersección p y q de esta arista con la pirámide s.

Análogamente, el plano cuya traza sobre P_1 es $\sigma_1 e$ nos proporciona las rectas sd_1 y sd_2 sobre la pirámide s; estas rectas cortan en t y r s_1d; es decir, t y r son los puntos de intersección de la arista s_1d con la pirámide s.

El plano de traza $\sigma_1 e$ sobre P_1 nos da el punto φ sobre uv; la recta $\sigma\varphi$ no corta la base abc; esto significa que la arista s_1e no corta la pirámide s.

Operamos del mismo modo sobre el plano P; la recta σb es la traza sobre él de un plano secante que corta la pirámide s_1 según las rectas s_1b_1 y s_1b_2; estas rectas cortan sb en los puntos l y m; estos son, por tanto, los puntos de intersección de la arista sb con la pirámide s_1.

La recta σc es la traza sobre P de un plano secante que corta la pirámide s_1 según las rectas s_1c_1 y s_1c_2; estas rectas cortan sc en g y h, que son los puntos de intersección de dicha arista con la pirámide s_1.

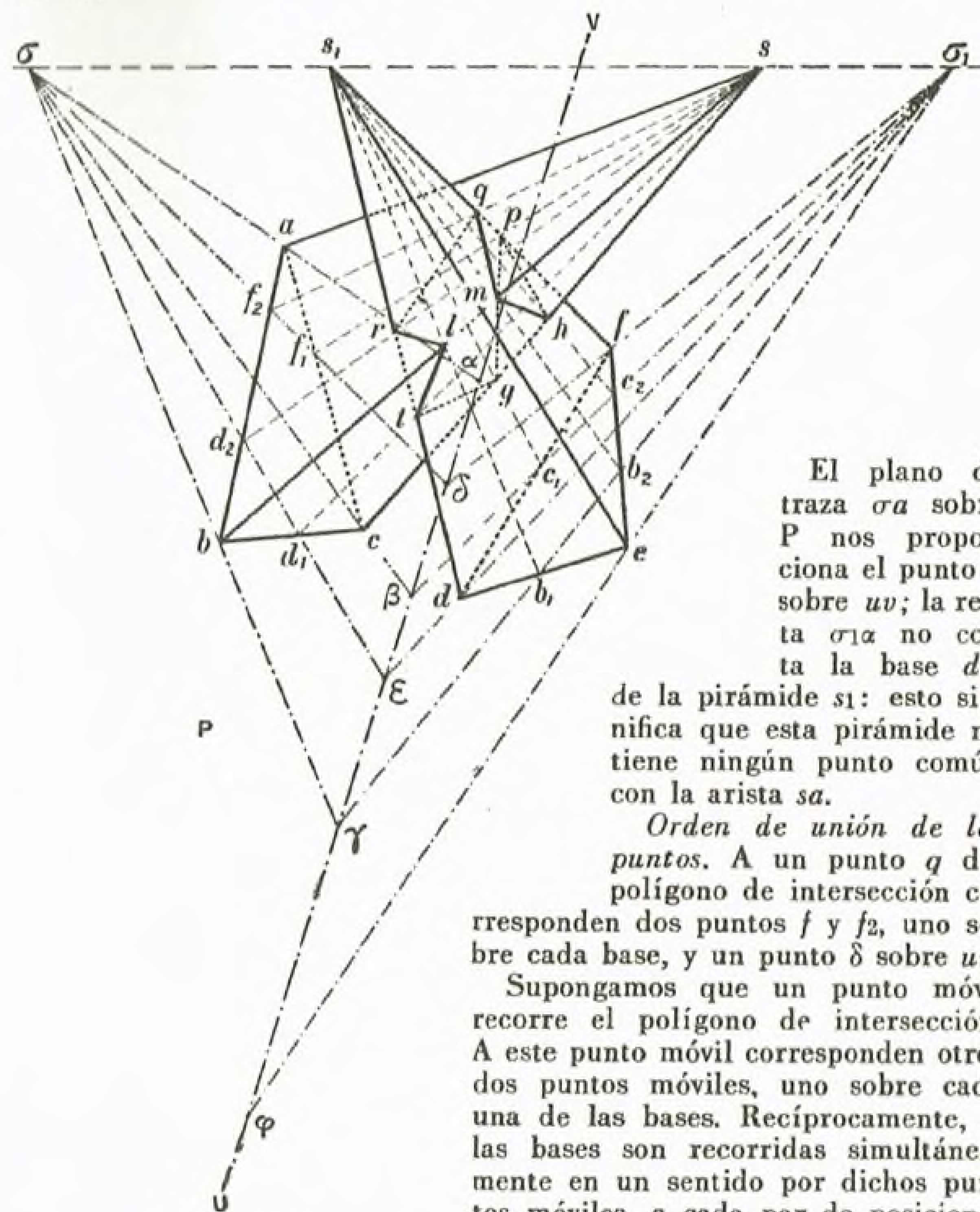


Fig. 116

El plano de traza σa sobre P nos proporciona el punto α sobre uv; la recta $\sigma_1\alpha$ no corta la base def de la pirámide s_1: esto significa que esta pirámide no tiene ningún punto común con la arista sa.

Orden de unión de los puntos. A un punto q del polígono de intersección corresponden dos puntos f y f_2, uno sobre cada base, y un punto δ sobre uv.

Supongamos que un punto móvil recorre el polígono de intersección. A este punto móvil corresponden otros dos puntos móviles, uno sobre cada una de las bases. Recíprocamente, si las bases son recorridas simultáneamente en un sentido por dichos puntos móviles, a cada par de posiciones de éstos corresponde un solo punto sobre el polígono de intersección. De esta forma podemos hallar el orden de unión de los puntos de intersección como sigue:

Partimos de un punto q, por ejemplo. Desplacemos el punto móvil sobre abc, en el sentido f_2b, y sobre fde, en el sentido fd.

La pareja de puntos f, f_2 nos proporciona el vértice q; d y d_2 nos proporcionan el vértice r; b y b_1 nos dan l.

En b_1 ya no podemos seguir en el mismo sentido, pues la porción b_1eb_2 no corresponde a ningún punto de intersección; por tanto, el móvil que recorre fde cambiará de sentido y retrocede hacia d. Sin embargo, el móvil que recorre abc sigue su camino.

El plano auxiliar empleado $\sigma\sigma_1\gamma$, que pasa por b, se llama plano límite.

Al seguir de b hacia d_1 y retroceder de b_1 hacia d, la pareja de puntos d, d_1 nos da el vértice t; c, c_1 nos proporcionan g; f_1, f nos proporcionan p.

En f_1 ya no podemos seguir el recorrido hacia a, pues la porción f_1af_2 no corresponde a ningún punto de intersección; por tanto, el móvil que recorre abc cambia de sentido y retrocede hacia c. El móvil que recorre fde sigue su camino hacia c_2. El plano $\sigma\sigma_1\delta$ es otro plano límite.

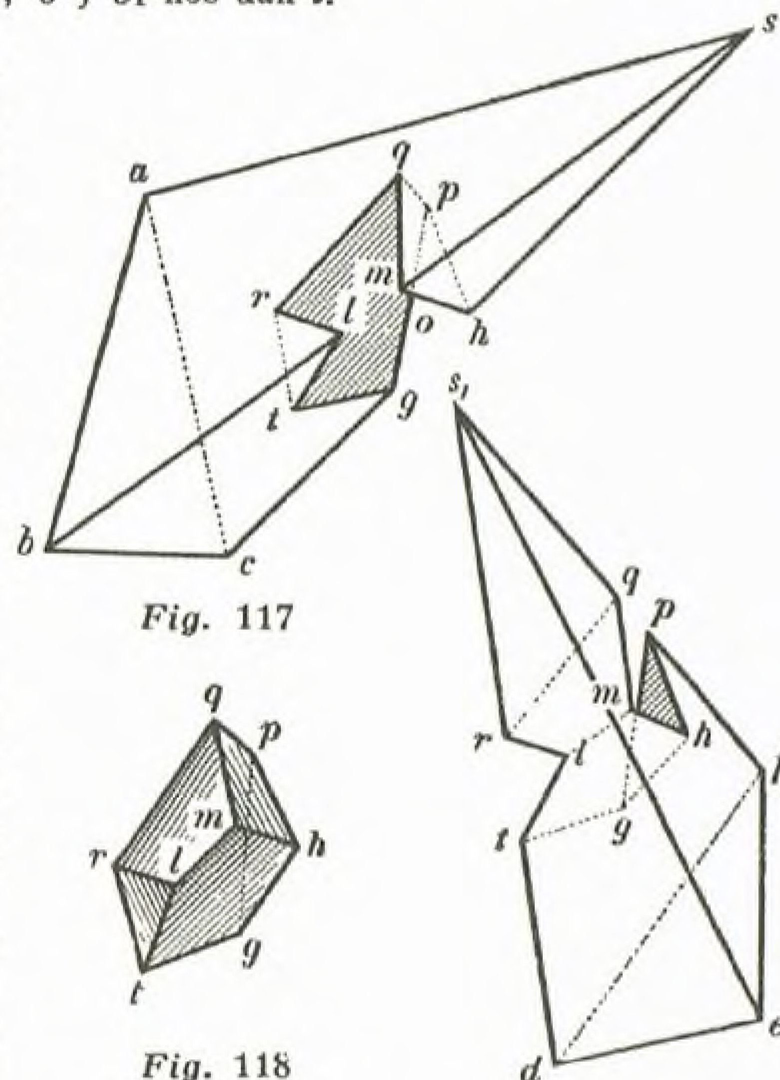


Fig. 117

Fig. 118

La pareja de puntos c, c_2 nos da el vértice h; b, b_2 nos proporcionan el vértice m. En b_2 tenemos que retroceder otra vez sobre la base def; los puntos f, f_2 nos proporcionan el punto q, de donde salimos; luego la intersección la hemos recorrido totalmente y es un polígono cerrado.

En un caso de mordedura como éste que hemos tratado, debemos pasar en el recorrido hecho por todos los vértices de la intersección. Si no es así, la intersección hallada será falsa.

Representación del conjunto de las dos pirámides. Para la debida representación del conjunto, con sus partes vistas y ocultas, hay que tener en cuenta:

1º Un lado del polígono de intersección es visto si las dos caras de las pirámides a las que pertenece son vistas: rl, lt, mq y mh son vistos, los demás lados están ocultos;

2º Las porciones de aristas de una de las pirámides contenidas en

la otra se representan con líneas de puntos: éste es el caso de *rt*, *gh*, *pq* y *lm*;

3º Toda arista vista que va hacia un punto visto de la intersección es vista hasta este punto; si una arista vista va hacia un punto oculto de la intersección, dicha arista es oculta antes de llegar a ese punto; así, *dt* es totalmente vista hasta *t*; sin embargo, *fp* se oculta antes de llegar a *p*.

La arista s_1e no corta la pirámide *s*; el plano auxiliar $\sigma\sigma_1\varphi$ que pasa por ella está por delante del plano límite $\sigma\sigma_1\gamma$, luego s_1e es completamente vista. En cambio, la arista *sa*, que no corta la pirámide s_1, está por detrás del plano límite $\sigma\sigma_1\delta$; luego dicha arista está oculta en el segmento correspondiente al contorno aparente de la pirámide s_1.

Representación de una de las pirámides, S, *mordida por la otra* (fig. 117). 1º Se dibuja el polígono de intersección con sus partes vistas y ocultas, como si la pirámide S estuviera entera;

2º Se suprimen las partes de las aristas de S contenidas en S_1; es decir, *lm* y *gh*;

3º Se trazan las líneas *rt* y *pq*, porciones de aristas de S_1 contenidas en S, observando su visibilidad;

4º De las líneas anteriores, se observará si alguna forma parte del contorno aparente que queremos representar y se dibujará de trazo lleno; tal es el caso del segmento *go*.

Sólido común (fig. 118). La única arista oculta es la *gp*. Las demás son todas vistas: unas, según el apartado 1º del párrafo anterior; las otras, por ser del contorno aparente del sólido común.

Intersección de un prisma con una pirámide (*fig.* 119). — Se tomarán como planos auxiliares los que pasan por el vértice de la pirámide y son paralelos a las aristas laterales del prisma. Consideremos los dos sólidos con su base sobre el plano horizontal de proyección. Tracemos la recta $s\sigma$, $s'\sigma'$, paralela a las aristas laterales del prisma. Su traza horizontal es σ. Todos los planos que pasen por esta recta cortarán la pirámide según dos rectas que pasan por el vértice, y el prisma según otras dos rectas, paralelas a sus aristas laterales. Nosotros emplearemos los planos que contengan una arista, bien sea de la pirámide o del prisma. Sea el plano que contiene la arista M del prisma; su traza horizontal es σM, que corta en O e I los lados de la base de la pirámide y las caras laterales de ésta según las rectas SO y SI. Los puntos de intersección *o* e *i* de estas rectas con la arista M son dos puntos de la intersección buscada. Son puntos de retroceso por ser un plano límite el auxiliar empleado.

Se opera del mismo modo con todos los planos auxiliares. Así, el plano que pasa por σS y contiene la arista SC de la pirámide tiene por traza horizontal σC; esta traza corta en *v* y *x* los lados de la base del prisma; las paralelas por estos puntos a las aristas laterales del prisma nos dan, al cortarse con SC, dos nuevos puntos de la intersección.

Se ve fácilmente que se trata de un caso de mordedura. Para la unión ordenada de los puntos obtenidos de la intersección, se procede como en el caso anteriormente estudiado de las dos pirámides.

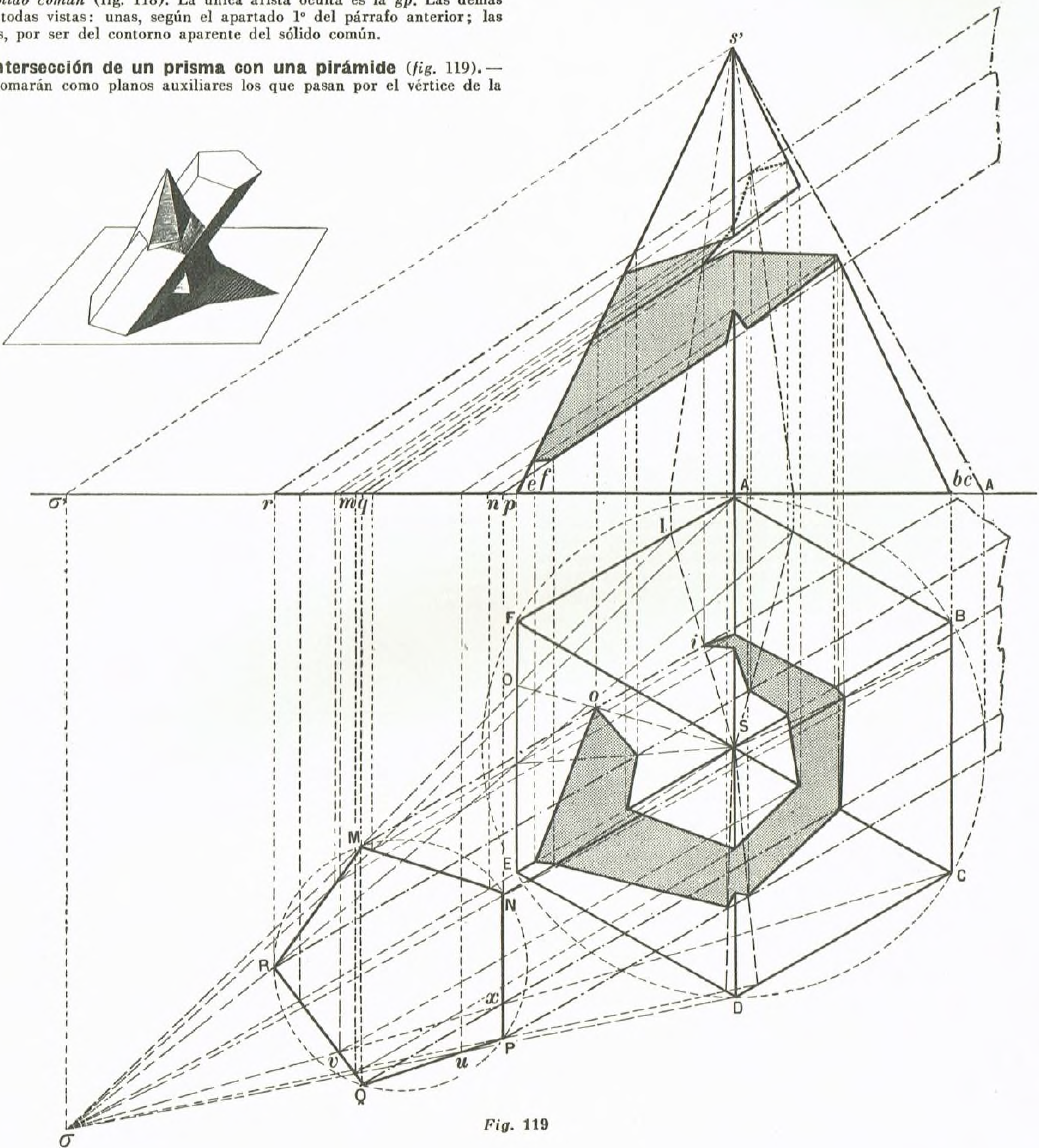


Fig. 119

Representación de cuerpos redondos

Cilindro circular recto. Cono circular recto. Esfera. Superficies regladas. Superficies regladas desarrollables. Plano tangente. Cilindro de revolución. Secciones planas. Partes vistas y ocultas. Tangentes a las curvas. Cono circular recto. Cono circular oblicuo. Esfera. ***Aplicación:*** **Intersección de un tetraedro regular con la esfera tangente a sus aristas**

Definiciones. *Los cuerpos redondos más usuales (cilindro, cono y esfera) son sólidos limitados, al menos parcialmente, por una superficie geométrica curva.*

Una **superficie geométrica** *puede ser definida como engendrada por el desplazamiento de una línea según una ley matemática.*

Esta línea que se desplaza se denomina **generatriz.**

Las **superficies de revolución** *son engendradas por el giro de una generatriz alrededor de un eje.*

Cilindro circular recto. — Es engendrado por el giro de una recta (generatriz) alrededor de un eje paralelo a ella; el sólido es limitado por dos planos normales al eje que cortan la superficie cilíndrica según dos circunferencias iguales, bases del cilindro.

Cono circular recto. — Es engendrado por el giro de una recta (generatriz) alrededor de un eje que la corta; el punto común al eje y a la generatriz es el vértice del cono; el sólido está limitado por un plano normal al eje, que corta la superficie cónica según una circunferencia, llamada base del cono.

Esfera. — Es engendrada por el giro de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Se llama *meridiano o sección meridiana* de un cuerpo de revolución la sección producida en él por un plano que pasa por el eje. La sección meridiana de un cilindro es un rectángulo; la de un cono es un triángulo isósceles; la de una esfera es una circunferencia máxima; la de un toro es otra circunferencia. La sección meridiana de un elipsoide, hiperboloide o paraboloide es la cónica correspondiente.

Todos los meridianos de un mismo cuerpo de revolución son iguales.

Se llama *paralelo* de un cuerpo de revolución la sección producida en él por un plano normal al eje. Esta sección es siempre una circunferencia.

Superficies regladas. — Se llaman superficies regladas, las engendradas por el desplazamiento de una recta: el plano, el cilindro, el cono, el hiperboloide. Pueden considerarse también como superficies engendradas por una recta *(generatriz)* al desplazarse guiada por una línea *(directriz).*

El *cilindro* es engendrado por una recta que se desplaza paralelamente a una dirección dada y apoyándose constantemente sobre la directriz. En su caso más general, esta directriz es una curva cualquiera; si la directriz es una recta, la superficie engendrada es un plano; si la directriz es una circunferencia, el cilindro engendrado es circular; si la directriz es una circunferencia situada sobre un plano perpendicular a la generatriz, se engendra un cilindro circular recto o de revolución.

El *cono* es engendrado por una recta que se desplaza, pasando por un punto fijo (vértice) y apoyándose sobre la directriz. En su caso más general, la directriz es una curva cualquiera; si es una recta, la superficie engendrada es un plano; si es una circunferencia, se engendra un cono circular; por último, si la directriz es una circunferencia, cuyo centro es el pie de la perpendicular bajada del vértice a su plano, el cono engendrado es circular, recto o de revolución.

Superficies regladas desarrollables. — Una superficie reglada es desarrollable si puede hacerse coincidir sobre un plano sin ninguna deformación ni rotura. Puede demostrarse que sus generatrices están, *dos a dos*, situadas en un mismo plano. Tal es el caso del cilindro y el cono.

Plano tangente. — El plano tangente a una superficie curva en un punto dado es el lugar geométrico de las tangentes en dicho punto a las líneas que pasan por él, trazadas sobre la superficie. En general, este plano existe (*fig.* 120).

En efecto, consideremos la generatriz GM y dos líneas planas cualesquiera MA y MB que pasan por M; los puntos A y B son las intersecciones de estas líneas con una segunda posición G' de la generatriz.

Las tangentes MS y MT a las curvas MB y MA, respectivamente, determinan un plano, que es el límite del plano formado por las cuerdas MA y MB cuando los puntos A y B se acercan al punto M. Pero en el momento de confundirse A y B con M, la recta AB, perteneciente al plano MAB, se transforma en la tangente MI a la generatriz G; por tanto, esta tangente pertenece al plano de las otras dos tangentes.

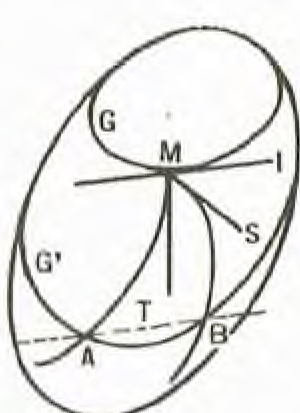


Fig. 120

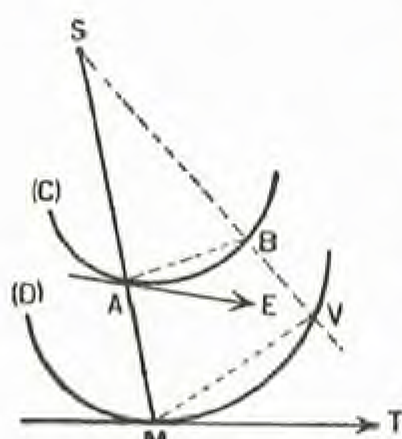


Fig. 121

Luego el plano formado por MI y MT contiene la tangente MS a otra línea cualquiera MB que pasa por M.

Teorema. *El plano tangente en un punto a una superficie reglada desarrollable contiene la generatriz que pasa por dicho punto y la tangente a la directriz, en su punto de intersección con la generatriz.*

Dicho de otro modo, los planos tangentes en un punto a una superficie reglada desarrollable están confundidos para todos los puntos de una misma generatriz. Ésta recibe el nombre de generatriz de contacto (fig. 121).

En primer lugar, el plano tangente a una superficie reglada en un punto A contiene la generatriz que pasa por dicho punto, pues la tangente en él a la generatriz considerada es esta misma generatriz. Otra recta del plano es la tangente AE en el punto A a una curva cualquiera (C), trazada sobre la superficie. Este plano puede considerarse como la posición límite del plano SAB, secante a la superficie, al girar alrededor de SA hasta que la cuerda AB se confunda con la tangente AE a la curva (C).

El plano secante SAB corta la directriz (D) según una secante MV, uno de cuyos puntos, M, está situado sobre la generatriz SM. Al girar el plano alrededor de SM, el punto V se aproxima al M, al mismo tiempo que el B se aproxima al A. En el límite, las generatrices SV y SM se confunden y, entonces, igual que AE es tangente a la directriz (C), resulta MT tangente a la directriz (D).

El plano tangente está definido, por tanto, por la generatriz SM y la tangente MT a la directriz (D) en el punto de intersección de ésta con la generatriz considerada. Este plano tangente es el mismo para cualquier punto de dicha generatriz.

En el caso de la figura, la superficie desarrollable es un cono, por pasar las dos generatrices por un punto S. Si las generatrices fueran paralelas, la superficie sería un cilindro, que puede considerarse como caso particular de un cono, con el vértice en el infinito.

Corolarios. 1º *Todos los planos tangentes a un cono pasan por el vértice; todos los planos tangentes a un cilindro son paralelos a las generatrices.*

2º *En un cono o en un cilindro de revolución, el plano tangente es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.*

3º *Las generatrices de los contornos aparentes del cono y el cilindro son las trazas de los planos tangentes límites.*

Cilindro de revolución. — Consideremos un cilindro de revolución de eje oblicuo AB, limitado por el plano horizontal de proyección y por el plano de la sección recta que pasa por B (*fig.* 122).

Si cortamos la sección recta de centro B por un plano frontal y otro horizontal, obtenemos dos diámetros que se proyectan en su verdadera magnitud: uno es frontal, *c'd'*, y el otro es horizontal, *ef*.

Las generatrices del contorno aparente son paralelas a las proyecciones del eje y están limitadas, por un lado, por los extremos del diámetro de la sección recta que se proyecta en verdadera magnitud; y por el otro lado, por *g'h'* sobre *xy*, para la proyección vertical, y por el diámetro que pasa por *a*, paralelo al *ef*, para la proyección horizontal.

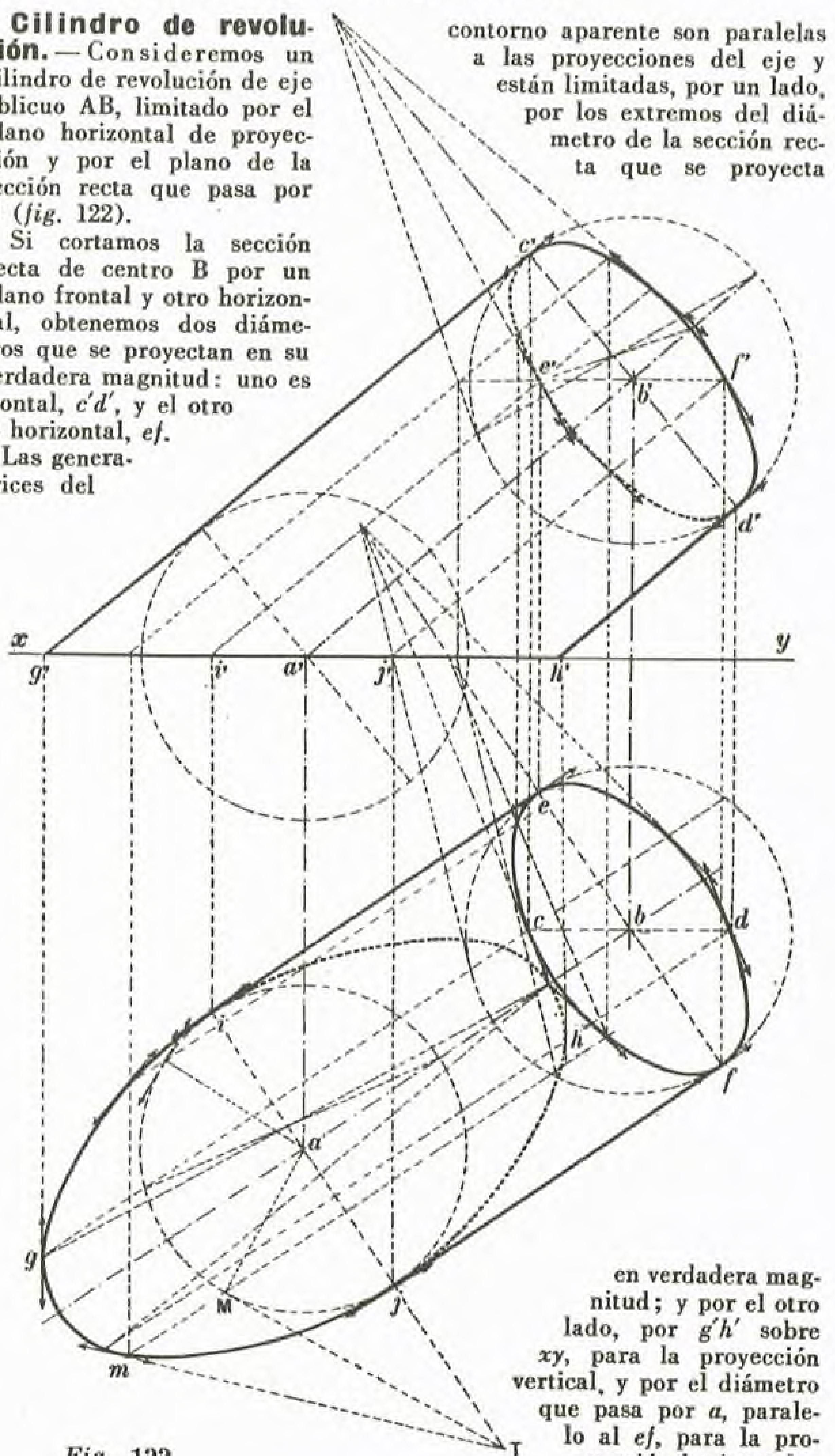


Fig. 122

Secciones planas. — La sección horizontal es una elipse, que se proyecta verticalmente sobre xy, según la recta $g'h'$. La proyección horizontal es, naturalmente, la verdadera magnitud de dicha sección. El eje menor de esta elipse es el diámetro ij normal al eje. Para determinar el eje mayor, giremos el plano vertical que contiene al eje del cilindro, alrededor de un eje vertical, hasta ponerlo en posición frontal; las nuevas generatrices del contorno aparente del cilindro sobre el plano vertical de proyección nos proporcionan la verdadera magnitud que buscamos del eje mayor de la elipse. Esta construcción no está hecha en la figura para no sobrecargarla. Volvemos a la posición inicial del cilindro y dibujamos la elipse.

Sobre esta elipse se determinan las proyecciones g y h de los puntos más a la izquierda y más a la derecha, teniendo en cuenta que las generatrices que pasan por estos dos puntos encuentran la sección recta de centro B en los extremos c y d de su diámetro frontal. Luego g estará en la intersección de la generatriz que pasa por c con la línea de referencia trazada por g'. Análogamente se obtendría h.

La sección recta es una circunferencia de diámetro 2R. Construimos su proyección vertical, sabiendo que es una elipse de eje mayor $c'd' = 2R$. El eje menor puede obtenerse por intersección del plano con las dos generatrices que se proyectan verticalmente en $a'b'$. Puede hallarse su verdadera magnitud por un giro que lo deje horizontal o frontal.

De una manera análoga se obtendrá el eje menor de la elipse proyección horizontal. Los puntos c, d y e', f' nos servirán de comprobación para el dibujo de las elipses.

Partes vistas y ocultas. — En proyección vertical, la parte de sección recta $c'e'd'$, situada por detrás del contorno aparente, está oculta; todo lo demás es visto. En proyección horizontal, toda la sección recta es vista. El arco igj de la base, que forma parte del contorno aparente, es visto; el otro arco, ihj, está bajo el cilindro, que lo suponemos opaco, luego está oculto.

Fig. 123

Tangentes a las curvas. — Para las tres elipses, las tangentes en sus vértices son perpendiculares, respectivamente, a los ejes que pasan por ellos.

En la base, las tangentes en g y h son perpendiculares a la línea de tierra. En efecto, estas perpendiculares son las trazas horizontales de los planos de canto, tangentes al cilindro según las generatrices $g'c'$ y $h'd'$.

Para obtener la tangente en un punto cualquiera m de una elipse, trazamos la circunferencia sobre uno de los ejes como diámetro (en nuestro caso, sobre ij); se traza la tangente a ella en el punto M correspondiente al m, que cortará en T el eje ij. La tangente pedida se obtiene uniendo T con m. Esta construcción se debe a una relación de afinidad existente entre la circunferencia y la elipse, que no procede tratar aquí.

Cono circular recto. — Si la base está situada sobre el plano horizontal, el contorno aparente sobre este plano se reduce al círculo de la base. El contorno aparente vertical está limitado por un segmento $a'b'$ de la línea de tierra y por las trazas $s'a'$ y $s'b'$ de los planos de canto tangentes al cono en los puntos de la base más a la izquierda y más a la derecha (*fig.* 123).

Si queremos situar este cono con la base sobre un plano de canto y apoyado por una generatriz sobre el plano horizontal, basta con hacer un giro alrededor de un eje de punta aa'; el ángulo del giro será $s'a'x$. La proyección vertical no cambiará de forma, sólo de posición; en la proyección horizontal, la base se proyectará según una elipse, cuyo eje menor será la nueva proyección horizontal del diámetro AB (A no varía en el giro), y el eje mayor igual al diámetro de la circunferencia. Esta elipse y las tangentes trazadas a ella desde la nueva proyección s_1 del vértice nos proporcionan el contorno aparente del cono.

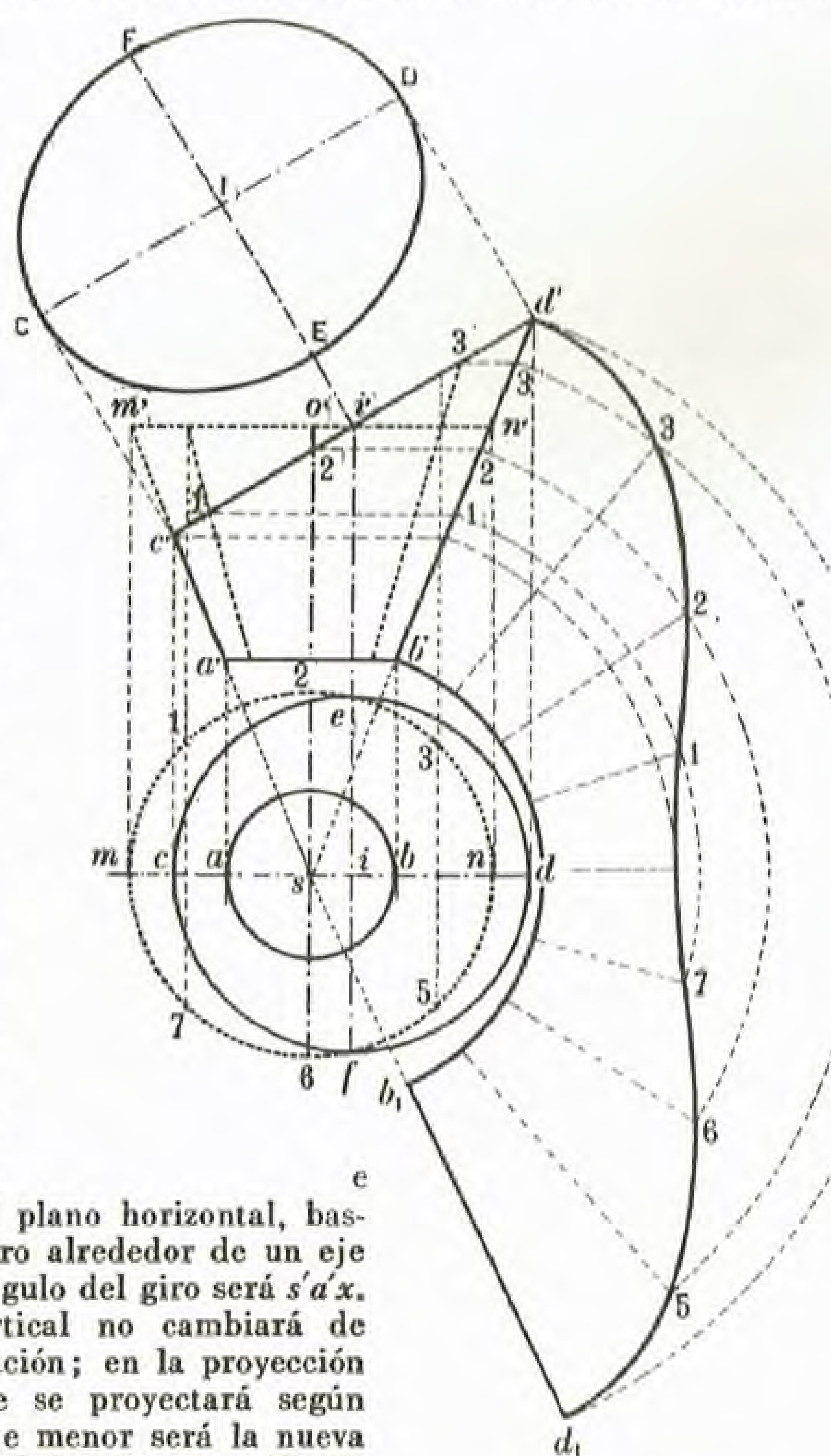


Fig. 124

Por medio de dos giros podríamos situar un cono de dimensiones dadas en una posición cualquiera.

Sección plana (fig. 124). Sea un cono de revolución de eje vertical, cuyo vértice s está situado en el plano horizontal de proyección.

La sección producida en este cono por un plano horizontal se proyecta horizontalmente en verdadera magnitud. Si $a'b'$ es la traza del plano secante, esta proyección es la circunferencia de centro s y diámetro $ab = a'b'$.

La sección producida en este cono por un plano de canto de traza vertical $c'd'$ es una elipse cuyo eje mayor es el segmento $c'd'$. El eje menor de esta elipse está situado en el plano secante y es perpendicular al eje mayor en su punto medio i'; es, por tanto, una recta de punta cuya proyección horizontal, en verdadera magnitud, es ef. Para determinar esta proyección, observemos que dicho eje está situado en el plano horizontal de traza $m'n'$, que produce en el cono una sección circular de diámetro $m'n'$, que se proyecta horizontalmente en verdadera magnitud según una circunferencia de centro s y diámetro $mn = m'n'$. Por tanto, el eje menor que buscamos es la cuerda EF de esta circunferencia, cuya proyección horizontal es ef.

La proyección horizontal de la sección es otra elipse, cuyos ejes son los segmentos cd y ef. Según la pendiente del plano secante, ef será el eje mayor o el eje menor; si cd y ef son iguales, la proyección es una circunferencia.

Verdadera magnitud de la sección elíptica. Se obtiene abatiendo el plano sobre el horizontal o el vertical de proyección. En nuestro caso, hemos abatido sobre el vertical: el eje mayor CD se conserva paralelo a $c'd'$ y el eje menor FE = ef lo situamos perpendicularmente a él. A continuación, dibujamos la elipse con el auxilio de una tira de papel. Como se observa, no es necesario abatir un cierto número de puntos pertenecientes a la elipse, pues esto sería un procedimiento muy engorroso y lento.

Desarrollo de la superficie lateral (fig. 124). Si el cono está limitado por una sección recta, todas las generatrices tienen la misma longitud y el desarrollo de su superficie lateral será un sector circular de radio igual a la generatriz y cuyo ángulo, en grados sexagesimales, vale:

$$\alpha = 360° \cdot \frac{R}{G},$$

siendo: R = radio de la sección recta; G = generatriz del cono.

Si el plano límite es el horizontal de traza $a'b'$, el desarrollo del cono es el sector $sb'b_1$; análogamente, el sector circular $sd'd_1$ es el desarrollo del cono limitado por el plano horizontal que pasa por d'. La diferencia entre estos sectores es el desarrollo de un tronco de cono de bases paralelas.

Para dibujar el desarrollo de la sección oblicua, consideremos un cierto número de generatrices, ocho por ejemplo, que divide la circunferencia de una sección recta $m'n'$ en ese mismo número de partes iguales. Estas generatrices cortan el plano secante en los puntos correspondientes de su traza y podemos obtener su verdadera magnitud girándolas alrededor del eje vertical del cono hasta ponerlas en posición frontal sobre sd'. Estas generatrices, iguales entre sí dos a dos, son trasladadas en su verdadera magnitud por medio de los arcos de centro s hasta los radios correspondientes del sector, que dividen éste en ocho partes iguales.

El desarrollo de la superficie cónica limitada por el plano de canto $c'd'$ y el plano horizontal $a'b'$ es la superficie plana $b'd'321765d_1b_1b'$.

Cono circular oblicuo (*fig.* 125). — Sea un cono de directriz circular de diámetro ab, situada sobre el plano horizontal. El vértice ss' está situado en el plano de perfil que pasa por el centro y por delante de aquélla.

El contorno aparente se obtiene, en proyección horizontal, trazando por s las tangentes sd y sc al círculo de la directriz. Estas rectas son las trazas horizontales de los planos tangentes límites. En proyección vertical, el contorno aparente está limitado por las generatrices $s'f'$, $s'e'$ y la recta $f'e'$, proyección de la directriz.

Hemos limitado este cono por un plano frontal, cuya sección es, en general, una elipse; en nuestro caso, sin embargo, los ejes de la sección son iguales, luego se trata de una circunferencia.

Si abatimos el plano de perfil que pasa por el vértice, sobre el horizontal, obtenemos en verdadera magnitud la sección s_1ab que dicho plano produce en el cono.

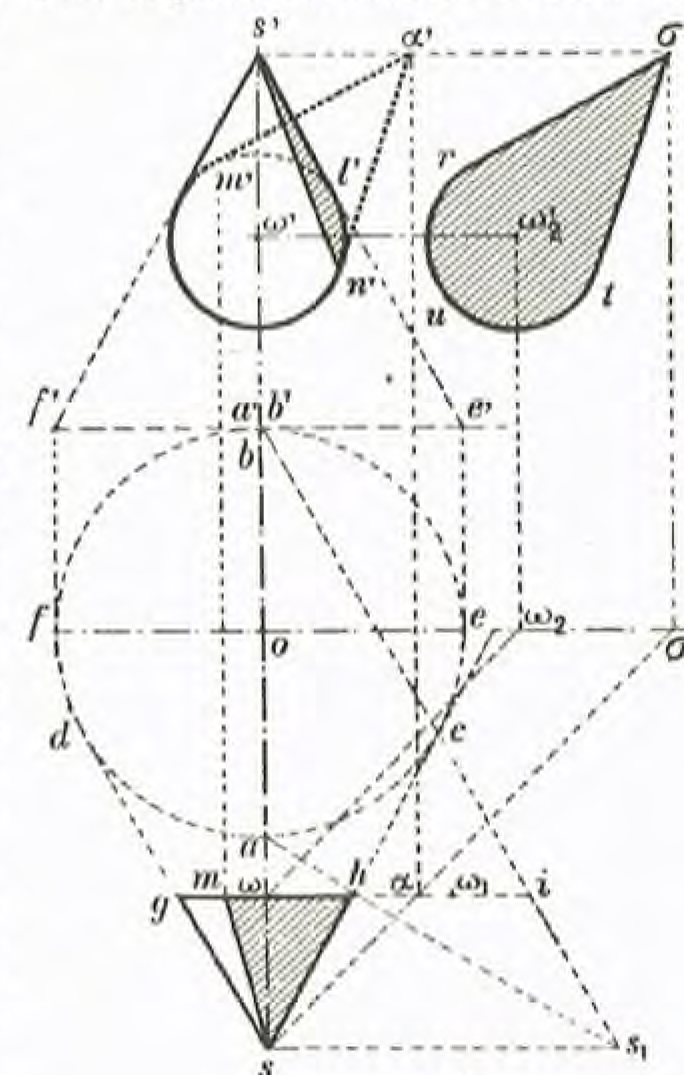


Fig. 125

Sombra propia del cono. Suponemos el cono iluminado por rayos luminosos paralelos, horizontales, dirigidos de izquierda a derecha y formando un ángulo de 45° con el plano vertical de proyección.

Para determinar la sombra, tracemos por el vértice ss' una paralela a la dirección de la luz, que corta el plano frontal de la base en el punto α, α'. Los planos tangentes al cono que pasan por la recta $s\alpha$, $s'\alpha'$ cortan el plano de la base según las rectas $\alpha'm'$ y $\alpha'n'$, tan-

gentes a ella. Estas tangentes se obtienen directamente sobre el plano frontal.

La superficie del cono con sombra propia está limitada por las generatrices $s'm'$ y $s'n'$, pero en proyección vertical sólo vemos la parte limitada por $s'l'$ y $s'n'$; análogamente, en proyección horizontal sólo vemos la parte de sombra *smh*.

Sombra proyectada del cono. Veamos la sombra que proyecta el cono sobre el plano frontal de traza *fe*, que pasa por el punto medio *o* de *ab*.

Esta sombra estará limitada por los planos tangentes al cono y paralelos a los rayos luminosos.

Determinemos la traza $\sigma\sigma'$ que produce en el plano frontal el rayo luminoso que pasa por el vértice. La paralela a los rayos luminosos que pasa por el centro ω, ω' de la base corta el mismo plano en el punto ω_2, ω'_2. Este punto será el centro de la sombra proyectada por la base, que es un círculo de igual radio, por tratarse de las intersecciones de una superficie cilíndrica con dos planos paralelos.

Esfera. — Una esfera se proyecta sobre los planos de proyección según dos círculos máximos, que son las intersecciones con dichos planos, de los cilindros circunscritos a la esfera y perpendiculares a ellos.

Dada una proyección de un punto de la esfera, podemos hallar la otra. Sea, por ejemplo, la proyección horizontal m (*fig.* 126). Hacemos pasar por este punto un plano frontal, de traza *cd*, que corta la esfera según una circunferencia que se proyecta verticalmente en verdadera magnitud. La proyección vertical del punto M se encuentra sobre dicha circunferencia. Existen dos soluciones, m' y n'. Estas dos soluciones son válidas también para la proyección horizontal *n*, situada sobre la circunferencia que se proyecta en *ef*, siendo $ef = cd$.

Podíamos haber considerado, también, el plano horizontal que pasa por *m*, que corta la esfera según una circunferencia de radio *om*, cuya proyección vertical es $g'h'$.

Sobre esta recta y en su intersección con la línea de referencia que pasa por *m*, encontramos la segunda proyección, m'.

Fig. 126

Plano tangente en un punto de la esfera (fig. 126). El plano ha de ser perpendicular al diámetro que pasa por el punto de contacto. Si este punto es el m, m', una horizontal del plano es mk, $m'k'$, siendo mk perpendicular a om; una frontal del plano es $m\varphi$, $m'\varphi'$, siendo $m'\varphi'$ perpendicular a $o'm'$. Luego el plano tangente a la esfera en M viene determinado por las rectas MK y Mϕ.

Sección plana de la esfera. Consideremos dos casos:

1º Por un plano paralelo a uno de los de proyección (*fig.* 126). Sobre este plano se proyecta en verdadera magnitud; sobre el otro, según una recta. La sección producida por el plano horizontal $k'h'$ es la recta $g'h'$, en proyección vertical; en proyección horizontal, es el círculo de diámetro $gh = g'h'$.

La sección producida por el plano frontal φd es, en proyección horizontal, la recta *cd*, y en proyección vertical, el círculo de diámetro $c'd' = cd$;

2º Por un plano perpendicular a un plano de proyección. Sea un plano de canto (*fig.* 127). La proyección vertical de la sección es el segmento $c'd'$. El problema consiste en hallar la proyección horizontal del círculo, que se proyecta verticalmente según el diámetro $c'd'$. Esta proyección es una elipse, cuyo centro es la proyección *i* del punto medio de dicho diámetro; el eje mayor es la recta de punta $aib = c'd'$; el eje menor *cd* es paralelo a *xy*, y está limitado por las líneas de referencia que pasan por c' y d'.

Determinada la elipse por sus dos ejes, es fácil dibujarla por cualquier procedimiento.

Si queremos hallar la proyección *m* de un punto de la elipse cuya otra proyección m' es conocida, trazamos el plano horizontal que pasa por m'. La sección en la esfera es una circunferencia, y sobre ésta se encontrarán las dos soluciones, *m* y *n*, que satisfacen al problema.

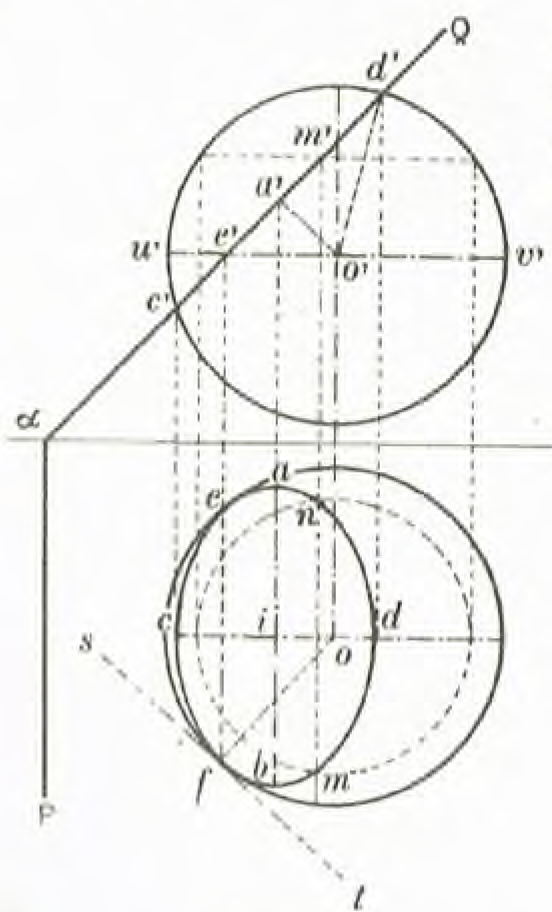


Fig. 127

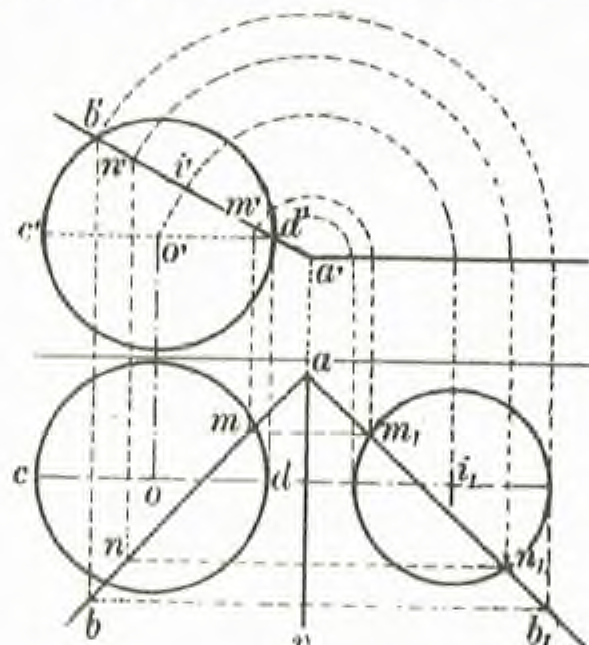


Fig. 128

Es interesante determinar los puntos de contacto de la elipse con el contorno aparente de la esfera. Estos puntos se encontrarán sobre el ecuador $u'v'$ de la esfera. El punto de intersección, e', con la traza αQ del plano, nos da las soluciones *e* y *f*. La tangente a la elipse en el punto *f* es la recta *sft*, tangente en ese punto al contorno aparente de la esfera.

Si queremos hallar la tangente a la elipse en un punto M cualquiera, basta con hallar el plano tangente a la esfera en ese punto. La intersección de este plano y el secante es la recta pedida.

Si el plano secante fuera vertical, la proyección horizontal de la sección sería un segmento; la proyección vertical se obtendría de un modo análogo al estudiado.

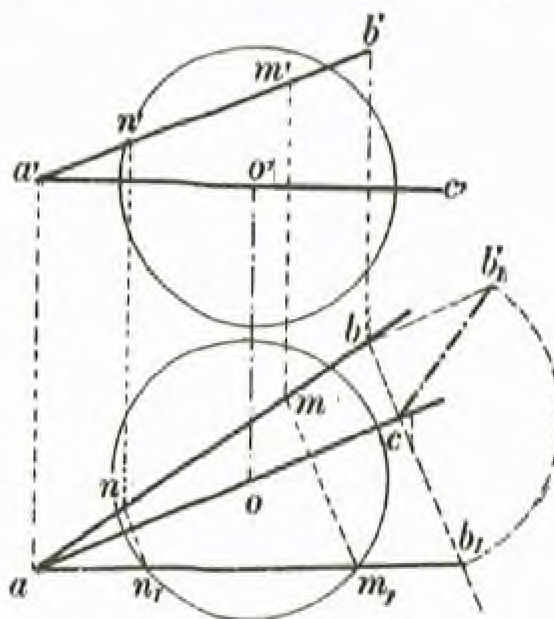


Fig. 129

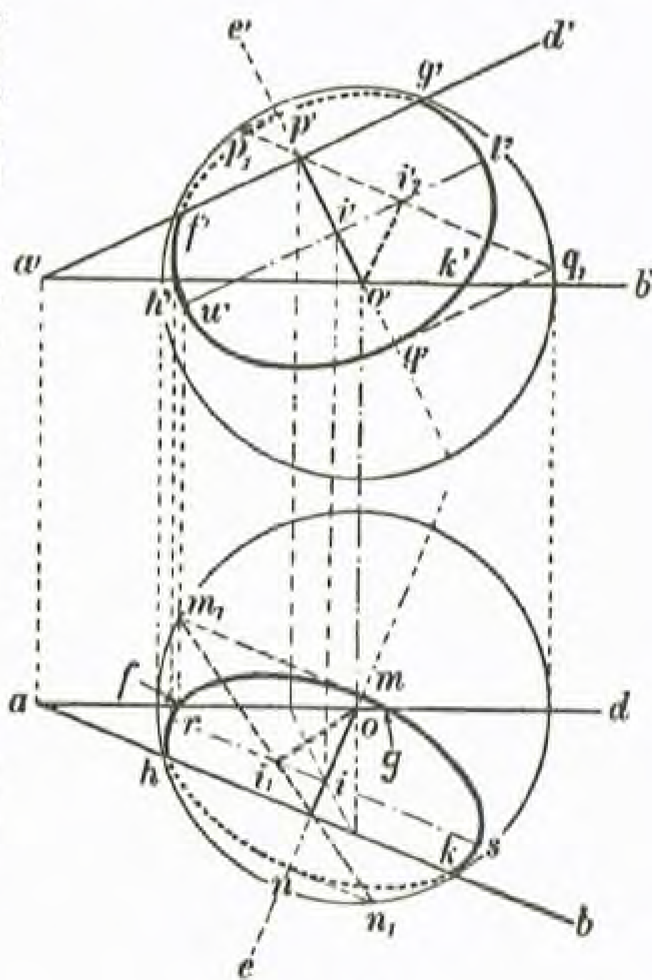


Fig. 130

Intersección de una esfera con una recta (fig. 128). Se hace pasar un plano por la recta, que produce una sección circular en la esfera. Los puntos comunes a la recta y a esta circunferencia son la solución pedida.

Como plano auxiliar, podemos tomar uno de los planos proyectantes de la recta dada. Si la recta es horizontal o frontal (la *cd*, cd' de la figura 127), la solución es inmediata: los puntos pedidos son *c*, c' y *d*, d'.

Si la recta es una cualquiera, la intersección de ella con la elipse es sólo aproximada, a menos de hacer una construcción geométrica para determinar los focos. Resulta más rápido abatir el plano proyectante de la recta sobre un plano frontal (si es vertical) o sobre un plano horizontal (si es de canto, *fig.* 128). En el abatimiento, hemos determinado los puntos m_1 y n_1 de intersección de la recta con la circunferencia. Deshecho el abatimiento, tenemos las proyecciones de los puntos pedidos, *m*, m' y *n*, n'.

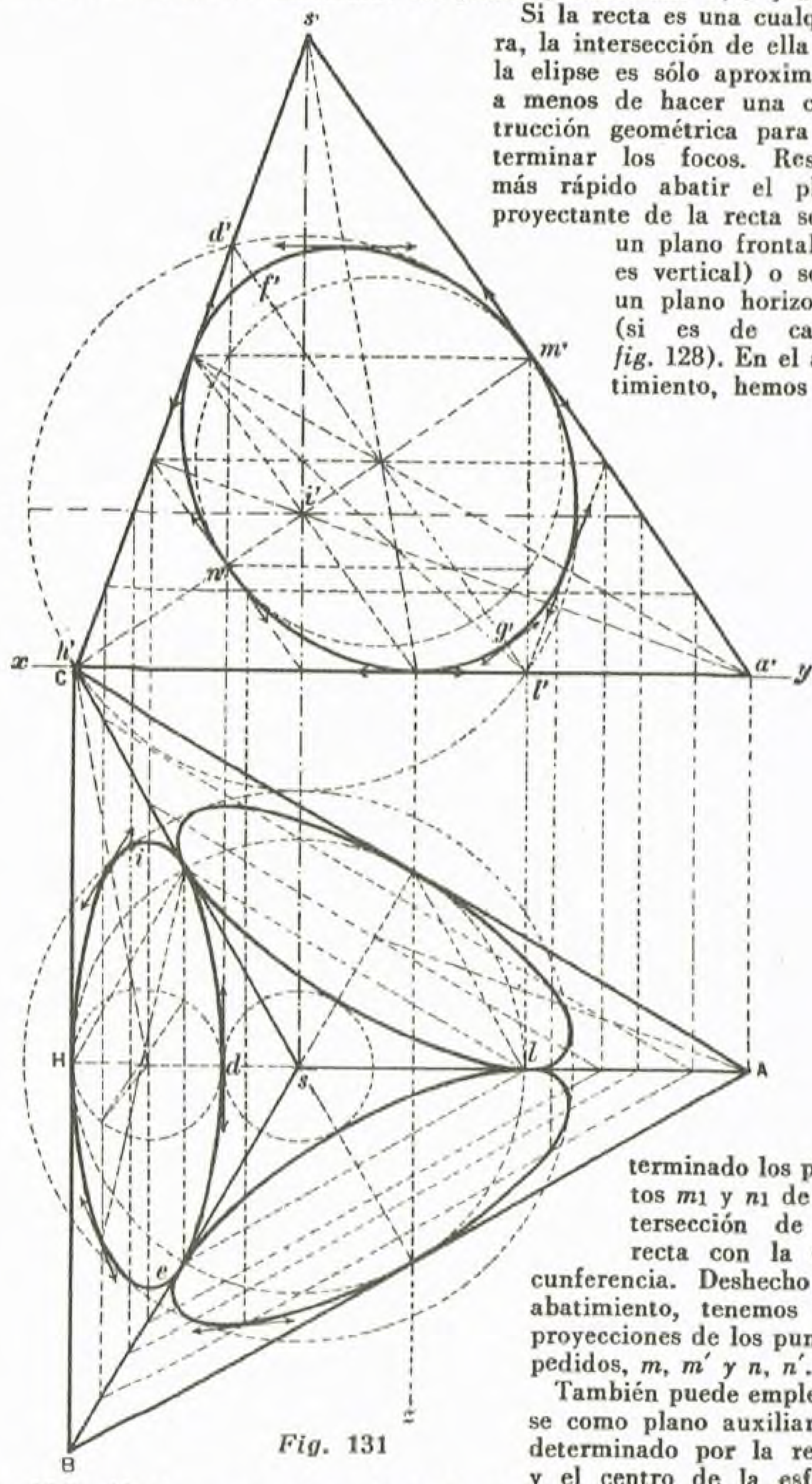


Fig. 131

También puede emplearse como plano auxiliar el determinado por la recta y el centro de la esfera (*fig.* 129). Abatimos este plano alrededor de la horizontal *ao* que pasa por el centro. La circunferencia sección queda confundida en el abatimiento con el contorno aparente de la esfera. La recta *ab*, $a'b'$ queda abatida en ab_1 (el punto *a* no se mueve, por ser de la charnela). Los puntos de intersección son m_1 y n_1, que desabatidos quedan en *m*, m' y *n*, n'.

Sección de la esfera por un plano cualquiera (fig. 130). Podemos determinar el plano por la horizontal AB y la frontal AD que pasan por las proyecciones o' y o del centro de la esfera, es decir, que tienen la misma cota y el mismo alejamiento, respectivamente, que dicho centro. Desde el centro O trazamos la perpendicular OE sobre el plano, cuyo pie es el centro I de la sección. Podemos abatir el plano y dibujar la circunferencia de la sección, y, luego, deshacer el abatimiento. En el caso de la figura, hemos hallado los ejes de las elipses en cada proyección y los puntos de contacto con el contorno aparente de la esfera.

Los puntos de contacto con el contorno aparente horizontal están sobre la horizontal AB del plano, en h y k; los del contorno aparente vertical son f' y g', sobre la frontal AD.

El eje mayor de la proyección horizontal es la proyección del diámetro horizontal de la sección. El eje mayor de la proyección vertical es la proyección del diámetro frontal de la sección. Para hallar la verdadera magnitud de estos ejes, abatimos los planos perpendiculares a AB y AD, respectivamente, que pasan por O.

En el abatimiento de estos planos, la recta OI resulta abatida en oi_1 y $o'i_2$, respectivamente. La verdadera magnitud buscada es $m_1n_1 = p_1q_1$, siendo estos segmentos las perpendiculares en i_1 e i'_2 a oi_1 y $o'i'_2$, respectivamente.

Llevando esta magnitud a rs y $u't'$, tenemos los ejes mayores de las elipses.

Los ejes menores se obtienen al deshacer el abatiminto de los diámetros m_1n_1 y p_1q_1, en mn y $p'q'$, respectivamente. Estos diámetros son perpendiculares, uno de ellos, a las horizontales, y el otro, a las frontales del plano.

APLICACIÓN

Intersección de un tetraedro regular con la esfera tangente a sus aristas (*fig.* 131). — Sea un tetraedro regular, apoyado por una cara ABC en el plano horizontal de proyección, siendo la arista BC una recta de punta. Dibujada esta cara, el cuarto vértice, S, coincidirá con el centro de ella en la proyección horizontal. La proyección vertical de ABC está sobre la línea de tierra. Por ser sA paralela a xy, su proyección vertical $s'a'$ es la verdadera magnitud de la arista. El centro de la esfera tangente a las aristas del tetraedro coincide con el centro de éste. El radio se obtiene por una sencilla construcción geométrica.

Las secciones producidas en la esfera por las caras del tetraedro son cuatro círculos iguales. Uno de ellos está situado en el plano horizontal de proyección; su proyección horizontal es él mismo; su proyección vertical es el diámetro $h'l'$.

La sección que produce el plano de canto sBC se proyecta verticalmente según $h'd'$ y horizontalmente según una elipse cuyos ejes ie y Hd se obtienen considerando el plano abatido sobre el horizontal; el abatimiento coincidirá con el círculo de la cara ABC y al deshacer el abatimiento encontramos dichos ejes ie y Hd.

Las secciones producidas por las caras sAB y sAC se proyectan horizontalmente según dos elipses iguales a la anterior. Verticalmente se proyectan ambas secciones según una misma elipse. Su eje mayor es el diámetro frontal $f'g'$, paralelo a las frontales de dichas caras. El eje menor $m'n'$ es la proyección del diámetro perpendicular al anterior, limitado por el punto medio m' de $s'a'$ y el punto n', simétrico del anterior con respecto al centro de la esfera.

Si quitamos la esfera, la huella dejada por ella en el tetraedro está limitada por tres arcos de círculos máximos, que quedan ocultos en ambas proyecciones. La sección circular de la cara ABC queda oculta también; las otras tres secciones circulares son vistas en proyección horizontal.

En proyección vertical, se ve la cara sAB superpuesta a la sAC; las otras dos caras, sBC y ABC, se reducen a sus trazas respectivas, $h's'$ y $h'a'$; la elipse de la cara sAB es vista, y la de la cara sAC, que está detrás de ella, queda oculta.

BIBLIOGRAFÍA. — GIMÉNEZ ARRIBAS: *Estudio de los Sistemas de Representación.* - A. TAIBO: *Geometría Descriptiva y sus aplicaciones.*

Planos acotados

Línea recta

Representación de la línea recta. — En el sistema de representación de Planos acotados, una recta viene definida por su proyección sobre el plano horizontal (H) de comparación y la cota de dos de sus puntos, a (2), b (5) (*fig.* 132).

La *distancia horizontal* entre dos puntos A y B es la longitud $ab = d$.

La *distancia vertical* entre dos puntos A y B es la diferencia aritmética de sus cotas, $c - c'$.

Para *abatir* una recta sobre el plano de comparación, se hace girar su plano proyectante alrededor de la traza ab, hasta hacerlo coincidir con el plano (H). A la recta ab se le llama *charnela de giro.* En el giro, las proyectantes Aa y Bb se mantienen perpendiculares a la charnela. El abatimiento de AB sobre (H) es A_1B_1 y su verdadera magnitud es

$$AB = A_1B_1 = \sqrt{d^2 + (c - c')^2}.$$

Se llama *pendiente de una recta* la relación entre las distancias vertical y horizontal de dos puntos A y B de dicha recta:

$$p = \frac{c - c'}{d} = \frac{B_1D_1}{A_1D_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Es decir, la pendiente de una recta queda definida por la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el plano de proyección.

Se llama *módulo* o *intervalo* de una recta la distancia horizontal de dos de sus puntos cuya distancia vertical es la unidad. El módulo es la inversa de la pendiente:

$$m = \frac{1}{p} = \frac{d}{c - c'} = \frac{d}{h} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Hallar la cota de un punto cuya proyección se conoce (fig. 132). Se abate el plano proyectante de la recta sobre el plano de proyección, alrededor de su traza ab; el punto dado por su proyección m quedará en M_1 y su cota vendrá dada por el segmento mM_1.

A la inversa, queremos hallar la proyección de un punto M, cuya cota conocemos. Sobre una perpendicular bB_1 a la proyección de la recta llevamos un segmento bE_1 igual a dicha cota. Por E_1 trazamos la paralela a ab que encuentra en $M_1A_1B_1$. Se refiere este punto a m, que es la proyección buscada, según una perpendicular a la charnela ab.

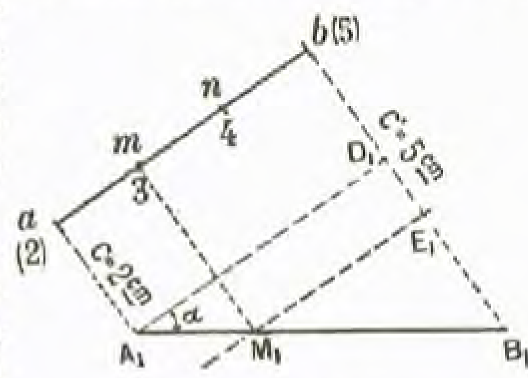


Fig. 132

Graduación de una recta. Se hace marcando sobre el abatimiento de la recta los puntos de cota redonda 3, 4, etc., y refiriéndolos a la proyección. Pero, en el caso de la fig. 132, se hace más fácilmente dividiendo la proyección ab en tres partes iguales y acotando los puntos m (3) y n (4).

Rectas concurrentes. — TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas definidas por sus proyecciones acotadas sean concurrentes es que el punto común a sus proyecciones tenga la misma cota según las graduaciones de ambas rectas* (fig. 133).

1º Si las rectas son concurrentes en el espacio en M, la proyección de este punto estará sobre las proyecciones de ambas rectas y será, por tanto, su intersección m;

2º Si se cumple esta condición, las dos rectas pasan en el espacio por un mismo punto M; es decir, son concurrentes.

OBSERVACIÓN. — Cuando las proyecciones de dos rectas se cortan fuera de los límites del dibujo, se puede ver si esas rectas son concurrentes:

1º Trazando dos rectas que se apoyen sobre las dadas y viendo si éstas son concurrentes, porque en este caso las dadas también lo son por estar todas ellas contenidas en un mismo plano (*fig.* 134).

2º Uniendo puntos de la misma cota en ambas rectas, obtendremos rectas paralelas que serán las horizontales del plano formado por las rectas dadas (*fig.* 135).

Si las proyecciones de dos rectas están confundidas, estas rectas son concurrentes; también pueden ser paralelas, y ello se verá abatiendo el plano proyectante.



Fig. 133

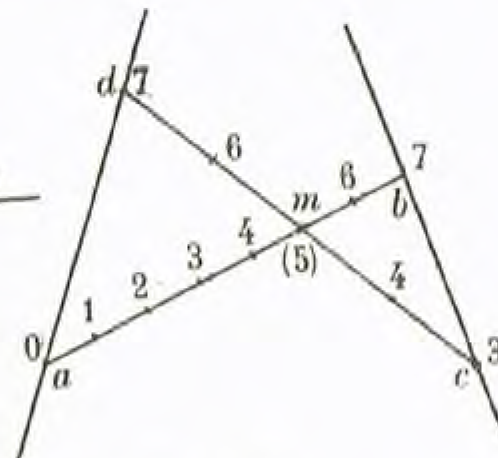


Fig. 134

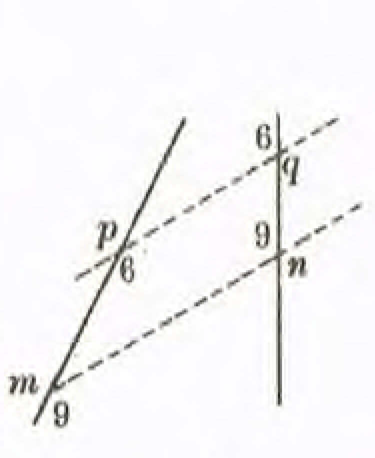


Fig. 135

Rectas paralelas. — TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus proyecciones horizontales sean paralelas y sus pendientes, o sus intervalos, sean iguales y del mismo sentido* (fig. 136). Veámoslo:

1º Si dos rectas son paralelas, sus planos proyectantes y, por tanto,

sus proyecciones también lo son. Los ángulos formados por cada una de estas rectas y la vertical que proyecta uno de sus puntos son iguales por tener los lados paralelos. Por consiguiente, las tangentes de estos ángulos son iguales y también lo son los intervalos de las rectas.

2° La condición expuesta es suficiente, pues, si ésta se cumple, los planos proyectantes son paralelos, así como los ángulos formados con una horizontal o una vertical del plano. Por otra parte, la igualdad de los intervalos supone el paralelismo de las rectas 3-3, 4-4, 5-5, que determinan un plano, y las rectas AB y CD serán las intersecciones de este plano con los planos proyectantes de *ab* y *cd*, que son paralelos. Por tanto, también serán paralelas AB y CD.

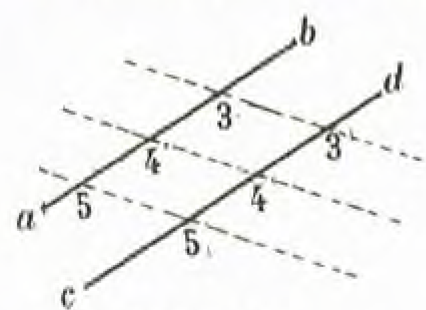


Fig. 136

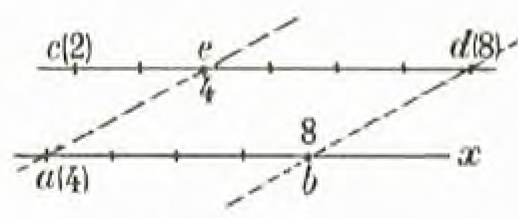


Fig. 137

Problema. — *Trazar por un punto dado* A *una paralela a otra recta dada CD* (fig. 137).

Por la proyección *a* del punto, se traza una recta *ax* paralela a la proyección *cd* de la recta y se une *a* con el punto *e*, de igual cota, de la recta *cd*. La paralela a *ae* trazada por un segundo punto *d* de *cd* permite determinar la recta buscada *ab* por la cota de dos de sus puntos.

Si la recta *cd* dada es una horizontal, basta con trazar otra horizontal por *a*, paralela a la dada.

El plano

Representación del plano. — Un plano puede estar definido:

1° Por las proyecciones acotadas de un punto y una recta;

2° Por dos rectas concurrentes;

3° Por dos rectas paralelas.

Un plano vertical queda determinado por su traza, o intersección con el plano (H) de comparación. Un plano horizontal queda determinado por su cota sobre (H).

Horizontales de un plano (*fig.* 138). — Las horizontales CD, EF de un plano (P) son las intersecciones de este plano con sendos planos horizontales; son paralelas al plano de comparación y están definidas por sus cotas, siendo paralelas entre sí. La horizontal HK de cota cero es la traza horizontal del plano.

Línea de máxima pendiente de un plano (*fig.* 138). — Se llama línea de máxima pendiente de un plano cualquier recta contenida en el plano y que sea perpendicular a sus horizontales.

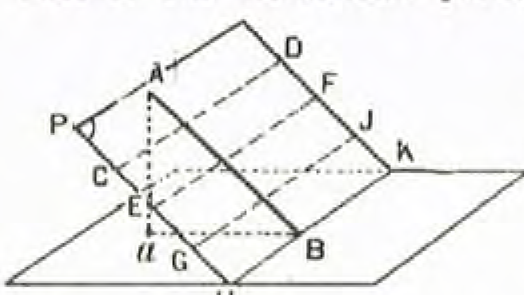


Fig. 138

1° Por un punto A de un plano pasa siempre una línea de máxima pendiente de dicho plano y sólo una. Se la distingue por un trazo doble.

2° Todas las líneas de máxima pendiente de un plano son paralelas entre sí en el espacio. Por tanto, también lo serán sus proyecciones sobre un mismo plano de comparación.

3° Las proyecciones de una línea de máxima pendiente y de una horizontal del plano son perpendiculares entre sí, por tratarse de la proyección de un ángulo recto sobre un plano paralelo a uno de sus lados.

4° Un plano horizontal tiene todas sus rectas con pendiente nula, luego en este caso no puede hablarse de línea de máxima pendiente.

5° Un plano queda determinado por una línea de máxima pendiente, pues la perpendicular trazada a su proyección, por un punto de cota dada, es una horizontal del plano, concurrente con la línea de máxima pendiente. Para definir un plano vertical, no basta con la línea de máxima pendiente, pues ésta queda en proyección reducida a un punto. Se necesita otra recta, generalmente su traza horizontal.

PROBLEMAS

1° *Por un punto dado* a *de un plano definido por este punto y una recta* CD, *trazar las horizontales y la línea de máxima pendiente de este plano* (fig. 139).

Se une el punto dado *a* con el punto *e* de la misma cota en la recta *cd*. Las paralelas a *ae* nos dan las diferentes horizontales del plano.

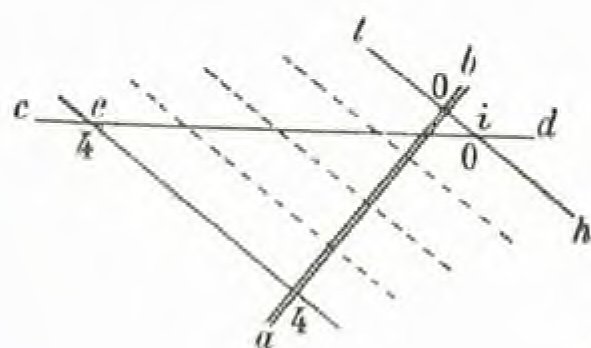


Fig. 139

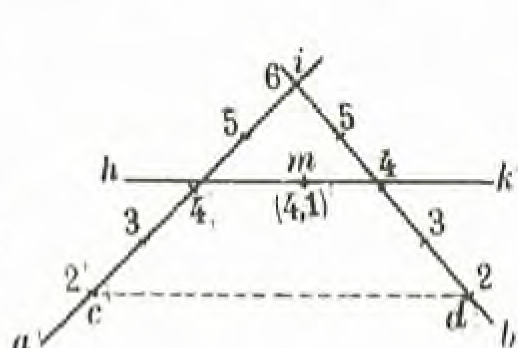


Fig. 140

Trazando una perpendicular *ab* por *a* a estas horizontales, tendremos una línea de máxima pendiente. La horizontal que pasa por el punto *i*, de cota cero de la recta *cd*, es la traza con el plano de comparación. En la figura están con trazo discontinuo las horizontales de cota redonda.

2° *Hallar la cota de un punto de un plano dado por su proyección* m.

Si el plano está definido por dos rectas concurrentes (o paralelas), se traza en primer lugar una horizontal, uniendo dos puntos de igual cota de cada una de las rectas *ai*, *bi* dadas; se traza luego la horizontal *hk*, que pasa por *m*, y se lee la cota 4,1 en cualquiera de las dos rectas dadas, graduadas, que definen el plano (*fig.* 140).

Si el plano está definido por su línea de máxima pendiente graduada, la horizontal que pasa por el punto *m* dado será perpendicular a ella y la solución es inmediata (*fig.* 141).

3° *Determinar si un punto está por encima o por debajo de un plano.*

Se procede como en el caso anterior, y según que la cota del punto sea superior o inferior a la de la horizontal que pasa por su proyección, el punto estará por encima o por debajo del plano.

4° *Graduar una recta de un plano, conociendo su proyección* pq (figura 141).

Se trazan las horizontales, perpendiculares a la línea de máxima pendiente, y en sus intersecciones con la recta dada en *p* y *q* ponemos las cotas correspondientes, 6 y 1, respectivamente.

5° *Determinar si una recta pertenece a un plano dado* (fig. 141).

Se busca la cota de dos puntos de la recta del plano que tiene por proyección la misma recta dada *pq*. Si estas dos cotas coinciden con las correspondientes de la recta dada, ésta pertenece al plano. Si resultan las cotas *p* (8) y *q* (12), por ejemplo, la recta *pq* estará fuera del plano definido por la línea de máxima pendiente 0-6.

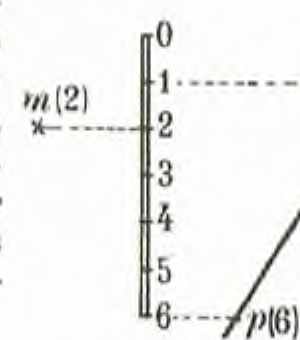


Fig. 141

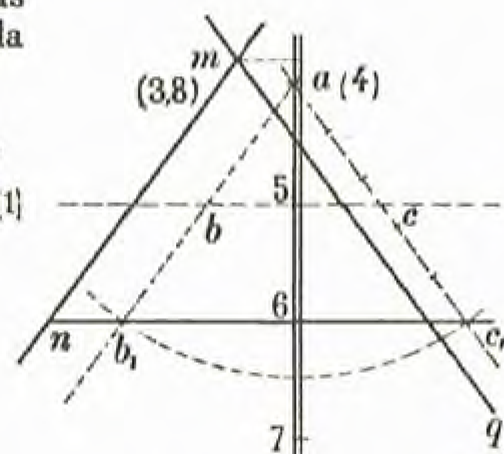


Fig. 142

6° *Por un punto* m *de un plano definido por su línea de máxima pendiente, trazar una recta de pendiente dada en el plano* (fig. 142).

Sea *a* (4) el punto dado y, suponiendo el problema resuelto, sea ab_1 la recta buscada. Se observa que el segmento *ab* de esta recta, comprendido entre dos horizontales consecutivas, es igual al intervalo $i = \frac{1}{p} = \frac{5}{2}$, siendo, por ejemplo, la pendiente dada, $p = \frac{2}{5}$.

Un segundo punto *b* de la recta está situado en la intersección de la horizontal de cota 4 ± 1 con la circunferencia de centro *a* y radio $i = \frac{5}{2}$.

Si este punto *b* queda muy cerca del primero, se considera una horizontal de cota 4 ± 2, 4 ± 3, 4 ± 4, etc., y se halla la intersección con la circunferencia de radio $2i$, $3i$, $4i$, etc. En particular, cuando la pendiente viene expresada por un número fraccionario, en nuestro caso, $p = \frac{2}{5}$, se tomará para radio el denominador de $i = \frac{1}{p} = \frac{5}{2}$, es decir, $ab_1 = 2i$ y como horizontal la b_1c_1, de cota $4 + 2$.

Observación. Este problema tiene dos soluciones, una o ninguna, según que la pendiente dada sea menor, igual o mayor que la del plano.

Si el punto dado fuera el *m* (3,8), fuera de la línea de máxima pendiente dada, se trazan las paralelas *mn* y *mq* a las ab_1 y ac_1, o bien puede cortarse la horizontal de cota $3{,}8 \pm 2$ con la circunferencia de centro *m* y radio $2i$.

7° *Por una recta dada* ab, *hacer pasar un plano de pendiente dada* (fig. 143).

Supongamos el problema resuelto y sea (P) el plano buscado, definido por su línea de máxima pendiente. El segmento *ad* valdría $4i$, luego la horizontal *cd* será tangente a la circunferencia de centro *a* y radio $4i$.

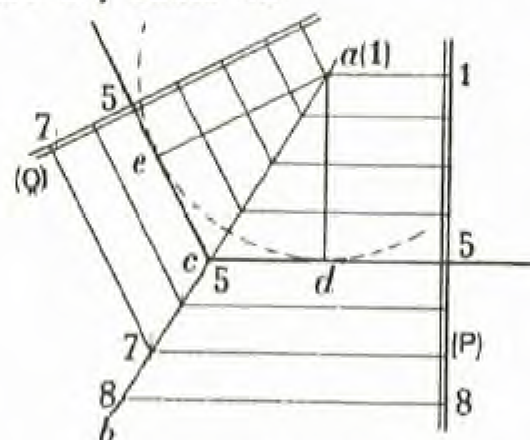


Fig. 143

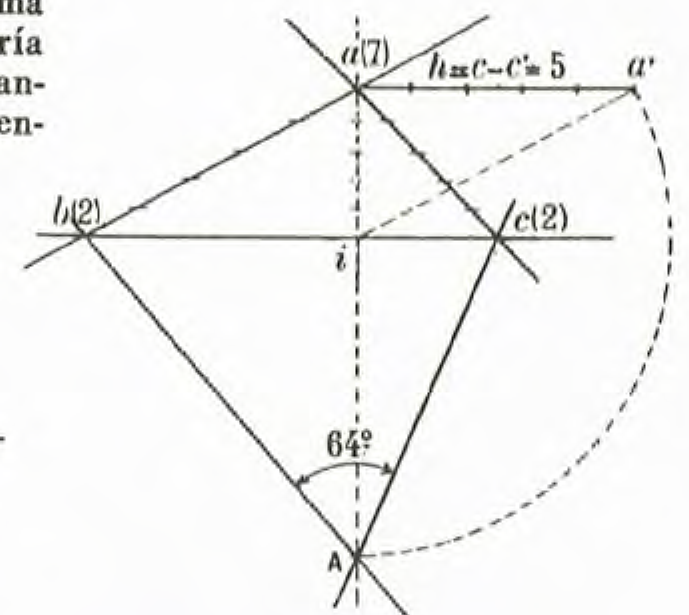


Fig. 144

Habrá dos soluciones, una o ninguna, según que la pendiente de la recta sea menor, igual o mayor que la dada del plano; o, lo que es lo mismo, según que el intervalo de la recta sea mayor, igual o menor

que el del plano. En nuestro caso las dos soluciones son los planos (P) y (Q), cuya intersección es naturalmente la recta dada *ab*.

8º *Hallar el ángulo que forman dos rectas concurrentes* (fig. 144).

Se abate el punto común *a* a las dos rectas *ab* y *ac* sobre un plano horizontal, H (2), haciéndole girar alrededor de la horizontal de cota (2). El punto *a* queda abatido en A y la verdadera magnitud del segmento *ia* es

$$ia' = \sqrt{d^2 + h^2} = i\mathrm{A}.$$

Uniendo A con *b* y *c*, el ángulo $\widehat{\mathrm{BAC}}$ en el espacio será igual al $b\widehat{\mathrm{A}}c = 64°$.

Rectas y planos paralelos

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano es que esta rceta sea paralela a una recta del plano.*

Por un punto dado pasan infinitas rectas paralelas a un plano dado y, recíprocamente, hay infinidad de planos paralelos a una recta dada.

Por una recta dada *ab*, se puede hacer pasar un plano paralelo a una recta dada *cd* (*fig.* 145). En efecto, basta trazar por un punto *a* de la primera una paralela *ae* a la segunda, y graduarla con el mismo intervalo e igual sentido que ella. Las rectas *ab* y *ae* determinan el plano buscado, que pasa por *ab* y es paralelo a *cd*.

La recta *eh*, obtenida uniendo dos puntos de igual cota (9), en *ab* y *al*, es una horizontal del plano y la perpendicular *ap* será una línea de máxima pendiente.

Las dos rectas paralelas *ae* y *bd* determinan otro plano, en el cual *ef* es una horizontal, y la perpendicular *aq*, una línea de máxima pendiente.

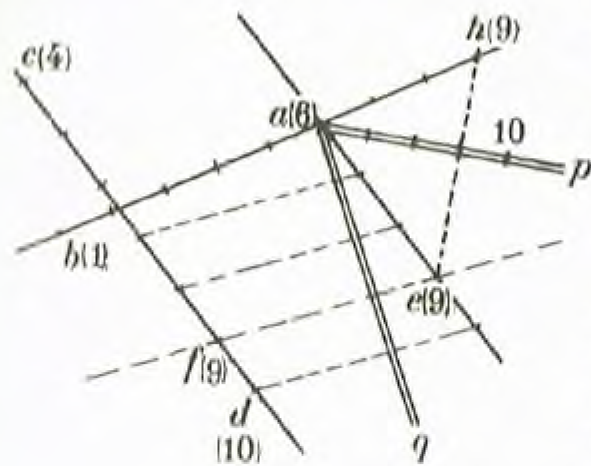


Fig. 145

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que dos planos sean paralelos es que uno de ellos contenga dos rectas concurrentes paralelas al otro.*

En particular, dos planos son paralelos cuando sus líneas de máxima pendiente son paralelas y sus graduaciones están en el mismo sentido y con igual intervalo.

Problema. *Por un punto dado* a, *hacer pasar un plano paralelo a otro dado* (fig. 146).

Si la línea de máxima pendiente del plano dado es la *mp*, la del plano buscado será la *ab*, paralela a la primera, con igual intervalo que ella y graduada en el mismo sentido.

Si el primer plano viene definido por dos rectas concurrentes *mp* y *mn*, se trazan *ab* y *ad* paralelas a ellas y el plano pedido será el formado por estas rectas. Sus horizontales serán paralelas a las del primer plano.

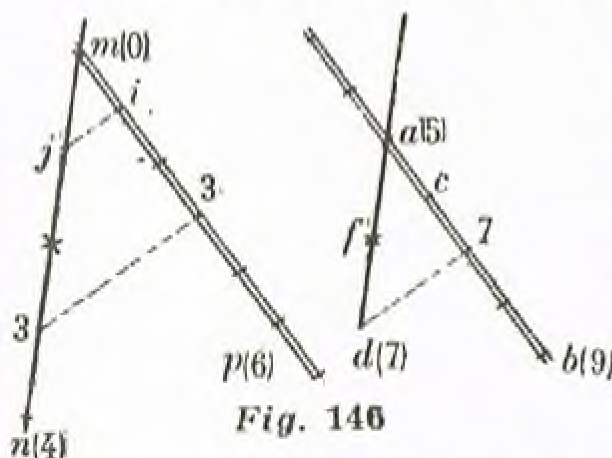


Fig. 146

Si el plano está definido por dos rectas paralelas, se puede sustituir una de ellas por una recta que se apoye en ellas y se procede como se ha descrito.

Intersección de rectas y planos

Intersección de dos planos. — Se cortan los planos dados por otros dos planos auxiliares cuya intersección sea fácil de hallar y tendremos dos pares de rectas que se cortarán y los dos puntos obtenidos nos fijan la recta intersección buscada. Los planos auxiliares más útiles generalmente serán horizontales y verticales.

Problema. *Intersección de dos planos definidos por sus líneas de máxima pendiente* ab *y* mn (fig. 147).

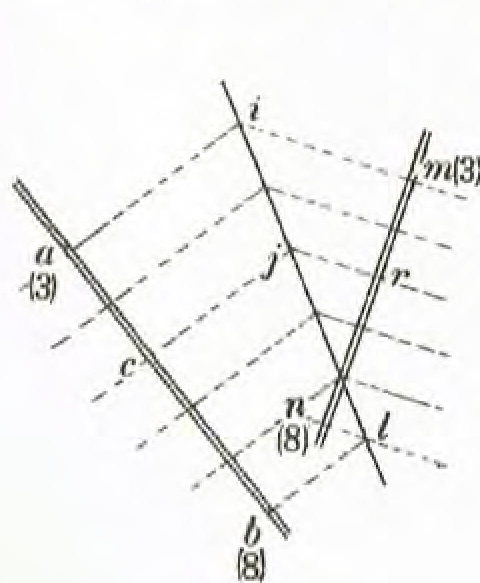


Fig. 147

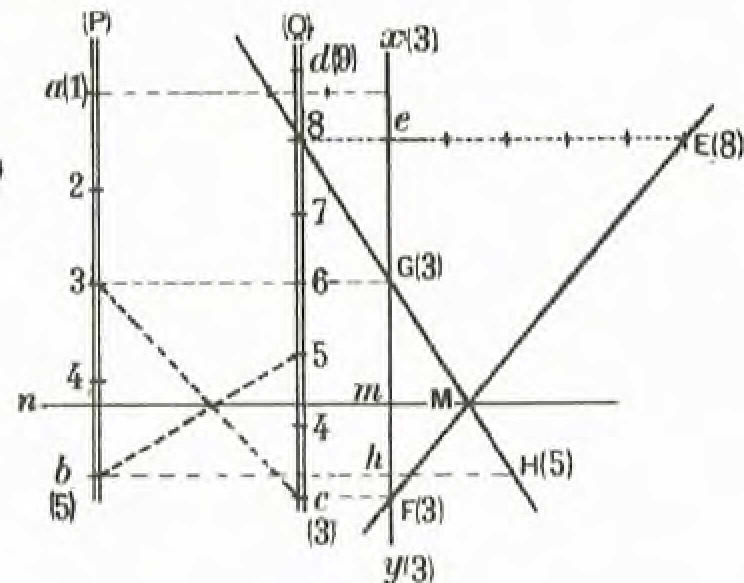


Fig. 148

Por dos puntos de igual cota (3), *a* y *m*, trazamos las horizontales que se cortan en *i*. Del mismo modo, las horizontales de cota (8) por *b* y *n* nos proporcionan el punto *l*. Los puntos *i* y *l* son comunes a los dos planos dados y al tercero auxiliar, el horizontal (3) y el horizontal (8), respectivamente: luego pertenecen a los dos primeros. Uniéndolos tendremos la intersección buscada *il*.

Para comprobar el resultado, hallemos un tercer punto, *j*, de la intersección por mediación del plano H (5) y que ha de encontrarse en la recta *il* hallada.

Caso particular (fig. 148). *Las líneas de máxima pendiente de los planos dados* (P) *y* (Q) *son paralelas.*

Las horizontales de ambos planos serán paralelas entre sí y la intersección de ellos también lo será. Basta hallar un punto de ésta. Para ello, cortamos por un plano auxiliar vertical, paralelo a las líneas de máxima pendiente dadas, y las intersecciones con (P) y (Q) son dos líneas de máxima pendiente. Abatiendo sobre el plano horizontal H (3), estas intersecciones son EF y GH. El punto buscado es el M, que nos proporciona la recta solución *mn* de cota 4,2.

Se abrevia el procedimiento utilizando las horizontales *c* (3) y *b* (5) que se apoyan en las líneas de máxima pendiente de los planos (P) y (Q). Por su intersección trazamos la perpendicular *mn* a las líneas de máxima pendiente, que es la solución buscada.

Intersección de una recta con un plano. — Para obtener el punto I de intersección de una recta (D) y un plano (P), se hace pasar por la recta un plano auxiliar (Q) que cortará el plano dado según una recta (Δ). El punto de intersección de (Δ) y (D) será el punto I buscado. Si (Δ) y (D) son paralelas, será porque la recta (Δ) es paralela al plano (P) y no existe intersección. Si (Δ) se confunde con (D), es que la recta (D) dada está contenida en el plano (P) dado.

En la *fig.* 149, se toma como plano auxiliar el formado por las horizontales *ac* y *bd*, arbitrarias. La intersección con el plano (P) es la recta *cd* que encuentra la *ab* en el punto *m* buscado.

Casos particulares.

1º *La recta dada es una horizontal, por ejemplo* bd (fig. 149). La intersección buscada es el punto de encuentro con la horizontal de igual cota 6 del plano, es decir, el punto *d*.

2º *La recta dada es una vertical* v (fig. 149). El punto buscado tiene la misma proyección *v* que la recta. La cota correspondiente se halla trazando por *v* una paralela a las horizontales del plano dado y en la línea de máxima pendiente graduada se lee su valor (3).

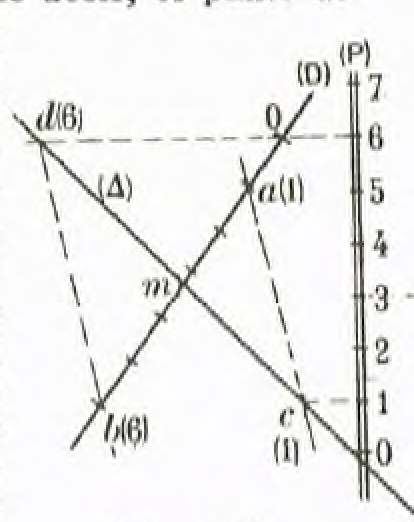


Fig. 149

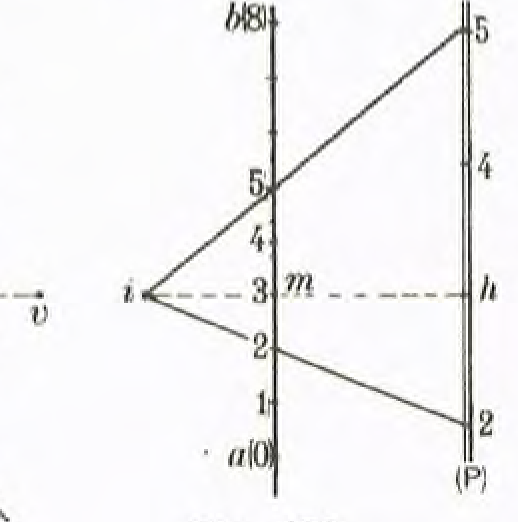


Fig. 150

3º *La proyección de la recta es paralela a la línea de máxima pendiente del plano* (fig. 150).

Tomamos como plano auxiliar el que tiene por línea de máxima pendiente la recta dada *ab*. Para hallar la intersección de este plano con el dado (P) nos valemos del procedimiento abreviado explicado antes, en el caso de tener las líneas de máxima pendiente paralelas. Las horizontales de cotas (5) y (2) nos proporcionan el punto *i*, y la recta *ih* será la intersección de (P) con el plano auxiliar. El punto común a *ih* y *ab* será el punto *m* buscado.

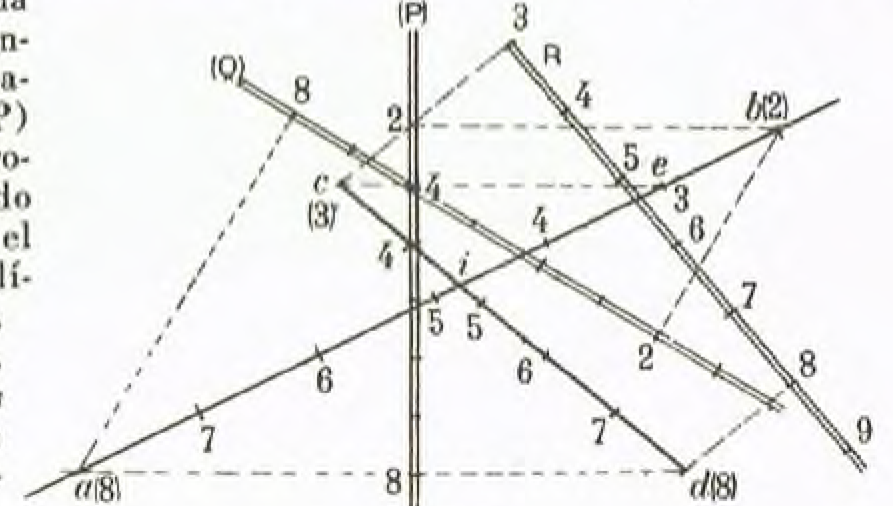


Fig. 151

4º *El plano dado es horizontal.* La intersección de la recta con este plano será el punto de ella que tenga la misma cota que el plano.

5º *El plano dado es vertical.* La proyección del punto de intersección será en este caso el punto común a la traza del plano y a la proyección de la recta. La cota será la correspondiente a la recta en ese punto.

Intersección de tres planos. — Se halla la intersección de la recta común a dos de ellos con el tercero (*fig.* 151): *ab* es la intersección de (P) y (Q). Ésta determina con una horizontal cualquiera *ad* un plano auxiliar que corta al tercer plano (R) según la recta *cd*. El punto de intersección *i* de *ab* y *cd* es el punto buscado, común a los tres planos dados (P), (Q) y (R). Su cota, leída en cualquiera de esas rectas o en una de las líneas de máxima pendiente de los planos, es 5,3.

Rectas y planos perpendiculares

Teorema. *Las condiciones necesarias y suficientes para que una recta sea perpendicular a un plano son:*

1ª *La proyección de la recta ha de ser paralela a la línea de máxima pendiente del plano;*

2ª *Su intervalo ha de ser el inverso del correspondiente al plano;*

3ª *Su graduación debe ser en sentido inverso a la del plano* (figura 152).

Las condiciones son necesarias. Si la recta AB es perpendicular al plano (P), lo será a todas las rectas de este plano y se proyectará sobre (H) según una perpendicular a la traza MN de (P), igual que las líneas de máxima pendiente, luego será paralela a éstas.

Por el pie B de la perpendicular AB a (P) tracemos la línea de máxima pendiente BD. La recta DA es proyección común a DB y BA. El triángulo DBA es rectángulo.

La pendiente del plano es $p = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{1}{i}$.

La pendiente de la recta AB es $\dfrac{DB}{AB} = \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{p} = i$.

La graduación de AB crece de A hacia *b*, siguiendo el sentido AD; la graduación de la línea de máxima pendiente DB crece de D hacia *b*, según el sentido DA, que es el sentido inverso.

Las condiciones son suficientes. Si la proyección de AB es paralela a una línea de máxima pendiente, está situada en un plano perpendicular a las horizontales del plano considerado y la intersección de estos planos es una línea de máxima pendiente BD. Si, además, el intervalo de AB es el inverso del de DB, se tiene

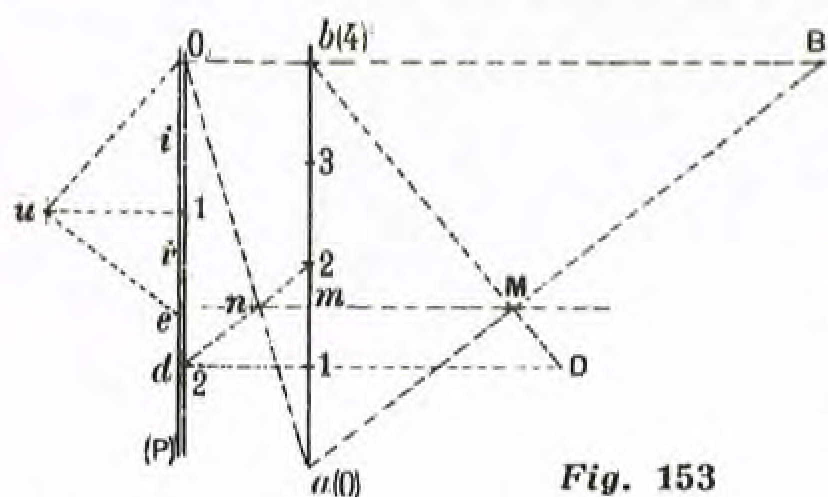


Fig. 152

$$i' = \operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{i} = p = \operatorname{tg}\alpha.$$

Luego los ángulos α y β son complementarios; además, tienen sus lados DB y AB que se dirigen en sentido contrario, por ser sus graduaciones inversas; luego el ángulo $\widehat{DBA}$ es recto. La recta considerada es ortogonal a las dos rectas DB y MN del plano (P), luego es perpendicular a este plano.

PROBLEMAS

1° *Trazar la perpendicular desde un punto dado* A *a un plano* (P) *y determinar la distancia del punto al plano* (fig. 153).

Por la proyección *a* trazamos una paralela *ab* a la línea de máxima pendiente del plano y la graduamos en sentido contrario a ésta y con el intervalo inverso. Para determinar éste, se construye el triángulo rectángulo *oue*, llevando *ol* igual a la unidad y siendo $ul = i$, con lo que $el = i'$ es el intervalo buscado. Esta recta *ab* es la proyección de la perpendicular buscada. Hallemos su traza con el plano (P). Abatimos el plano proyectante de *ab* sobre el de proyección, girándolo alrededor de su traza *ab* y queda la recta abatida en *a*B. La línea de máxima pendiente de (P), que pasa por *b*, queda abatida en *b*D y su intersección con *a*B nos da el punto M, que, referido a su proyección *m*, nos da el punto buscado, pie de la perpendicular trazada desde el punto *a* al plano (P).

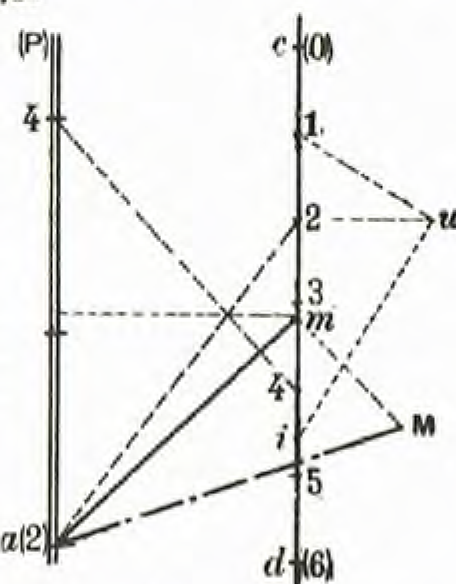


Fig. 153

El valor de la distancia nos lo da, en el abatimiento, el segmento *a*M, en verdadera magnitud.

Se abrevia el procedimiento uniendo los puntos 2-2 y 0-0, que nos dan el punto *n*, y la normal por éste a *ab* nos da el punto *m*. Sobre la recta graduada, leemos la distancia $am = 1{,}6$.

2° *Por un punto dado* a, *trazar un plano perpendicular a una recta dada* cd *y hallar la distancia del punto a la recta* (fig. 154).

Se traza por *a* una paralela a *cd*, graduada en sentido contrario a ella y con el intervalo inverso, que será la línea de máxima pendiente del plano pedido. Para hallar ese intervalo, se construye el triángulo rectángulo 1*ui*, siendo $u\text{-}2 = 1$ (unidad). El segmento *i*-2 es el intervalo i' del plano. Con este intervalo, dibujamos la línea de máxima pendiente de (P).

Con ayuda de las horizontales 4-4 y 2-2, obtenemos el punto *m*, intersección de (P) con *cd*. La distancia, en verdadera magnitud, de *am*, la tendremos en *a*M, abatiendo sobre el plano horizontal de cota 2, para lo que se ha trazado la perpendicular *m*M $= 3{,}1 - 2 = 1{,}1$.

Fig. 154

3° *Por una recta dada* ab, *trazar un plano* (P) *perpendicular a otro plano dado* (Q).

Por un punto cualquiera *a* de la recta se traza la perpendicular al plano (Q). Esta perpendicular, junto con la recta dada, determinan un plano, que es el buscado.

4.° *Trazar la perpendicular común a dos rectas* ab y cd *y determinar la mínima distancia entre éstas* (fig. 155).

Por un punto *e* de *ab*, trazamos *ef*, paralela a *dc*. La línea de máxima pendiente del plano formado por las rectas *ab* y *ef* nos da la dirección de la perpendicular común que buscamos. El intervalo del plano es *pe*, la unidad *pu* y el intervalo de la recta es *pi*, siendo *ui* perpendicular a *eu*.

Por un punto *c* de *dc*, trazamos una paralela *ch* a la dirección de la perpendicular común. Las rectas *dc* y *ch* determinan un plano que contiene la perpendicular común y que corta *ab* en el punto *n*, hallado con el auxilio de las horizontales de los planos *dch* y *aef*. La perpendicular común pasa por *n* y será *nk*, paralela a la dirección primeramente hallada. (El punto *k* no tiene por qué estar sobre *hl*; es coincidencia casual.)

5° *Hallar el ángulo de dos planos* (fig. 156).

Con auxilio de las horizontales (2) y (4) hallamos la intersección

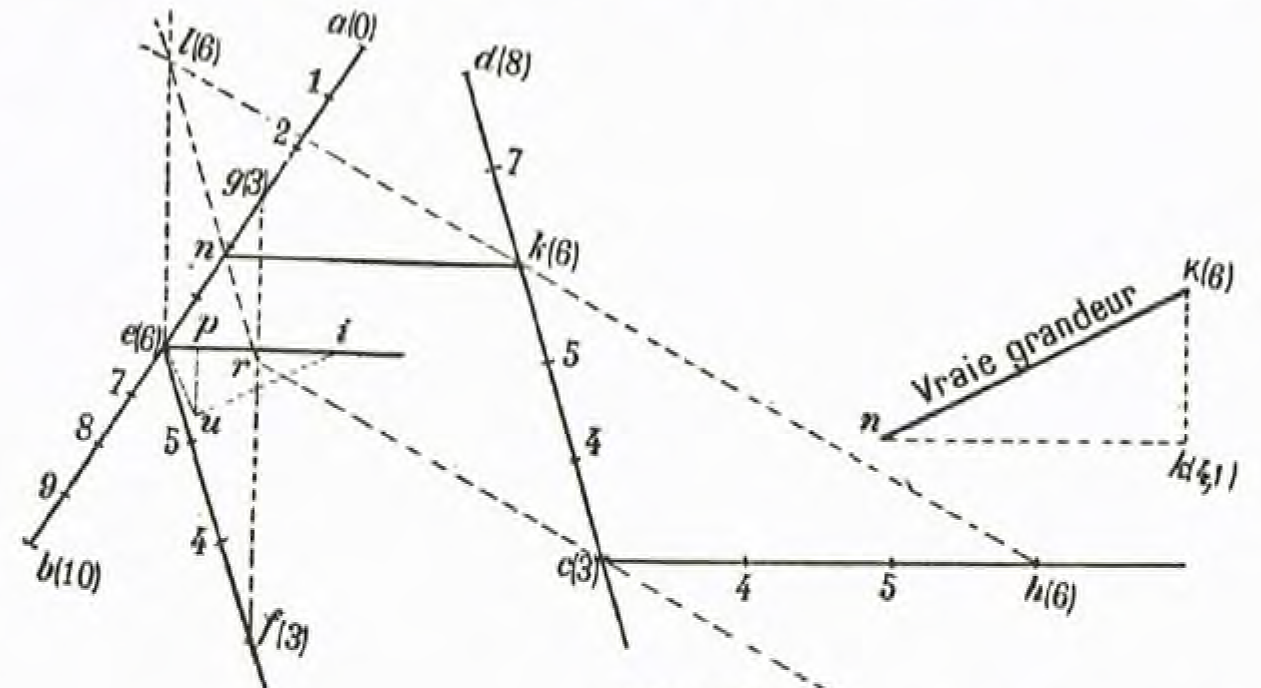


Fig. 155

ab de los planos (P) y (Q). Por un punto *c* de esta intersección, arista del diedro cuyo ángulo buscamos, trazamos el plano (R) perpendicular a esta arista. Este plano tiene su línea de máxima pendiente paralela a *ab*, su intervalo es el inverso del de esta recta, y está graduada en sentido contrario. En el dibujo es *cb* el intervalo de la recta *ab*, *cu* la unidad y *ci* el intervalo del plano (R), siendo *ui* perpendicular a *bu*.

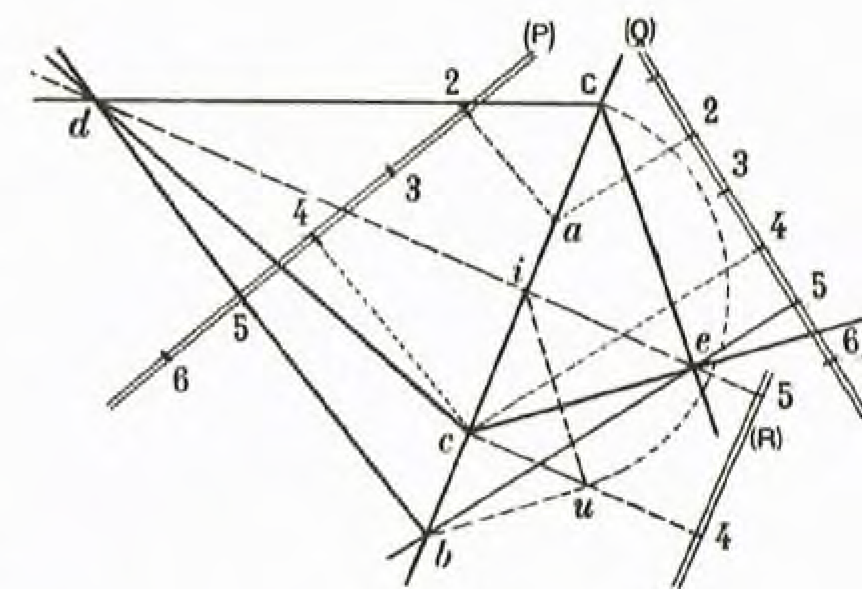


Fig. 156

Las intersecciones de (P) y (Q) con (R) son *cd* y *ce*, respectivamente, siendo *c* el punto común a los tres planos, y *d* y *e* se han obtenido con auxilio de las horizontales de cota 5 de dichos planos.

El ángulo rectilíneo del diedro (P), (Q) es en el espacio $\widehat{DCE}$ y en proyección $\widehat{dce}$. Se abate éste alrededor de la horizontal *die* de cota 5. Para ello, se traza la perpendicular *cu*, igual a la unidad (diferencia de cotas 5-4), y el punto *c* viene abatido en C, haciendo centro en *i* con radio *iu*, que es la verdadera magnitud del segmento *ic*. El ángulo pedido es $\widehat{dCe} = 110°$.

Superficies topográficas

Definiciones. *Se conoce con el nombre de* **superficie topográfica** *la superficie de un terreno que no es posible definir por propiedades geométricas rigurosas.* Se la representa por la proyección, sobre un plano horizontal de comparación, de sus líneas de intersección con diversos planos horizontales, generalmente equidistantes. Estas líneas de intersección se llaman **curvas de nivel** y se determinan por la nivelación del terreno.

La superficie de terreno comprendida entre dos curvas de nivel se considera engendrada por una recta que se mueve apoyándose en las dos curvas de nivel y siendo normal a una de ellas (será también casi normal a la otra si la diferencia de nivel entre las dos es suficientemente pequeña). Es evidente que el terreno real estará más fielmente representado por sus curvas de nivel cuando la equidistancia entre ellas sea más pequeña.

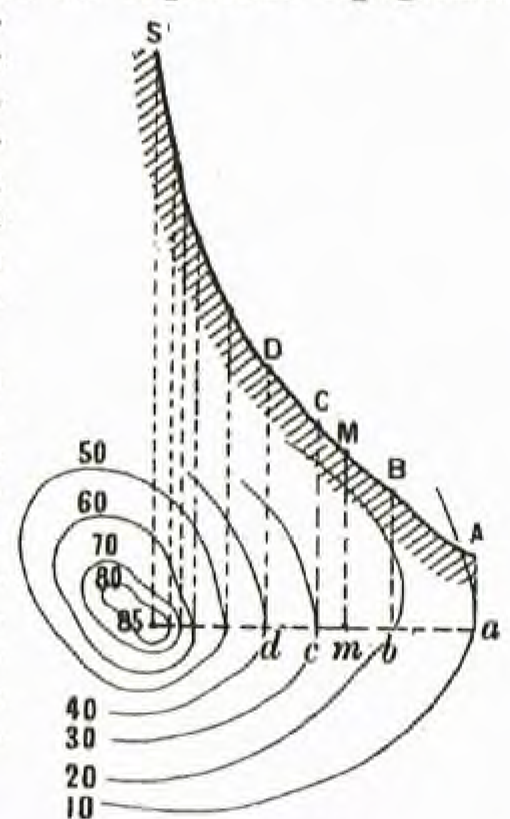


Fig. 157

Perfil de una superficie topográfica (*fig.* 157). — *Se llama* **perfil** *de una superficie topográfica su intersección con un plano vertical.* Este

plano está determinado por su traza *a*-85 con el plano horizontal de comparación. Por los puntos de intersección de esta línea con las curvas de nivel se trazan las perpendiculares *a*A, *b*B, *c*C, ... 85S y sobre éstas se llevan, a la escala adoptada (1 mm por metro), las cotas de los puntos en A, B, C, ... S, obteniéndose así el abatimiento del perfil, que puede construirse aparte para no sobrecargar el dibujo.

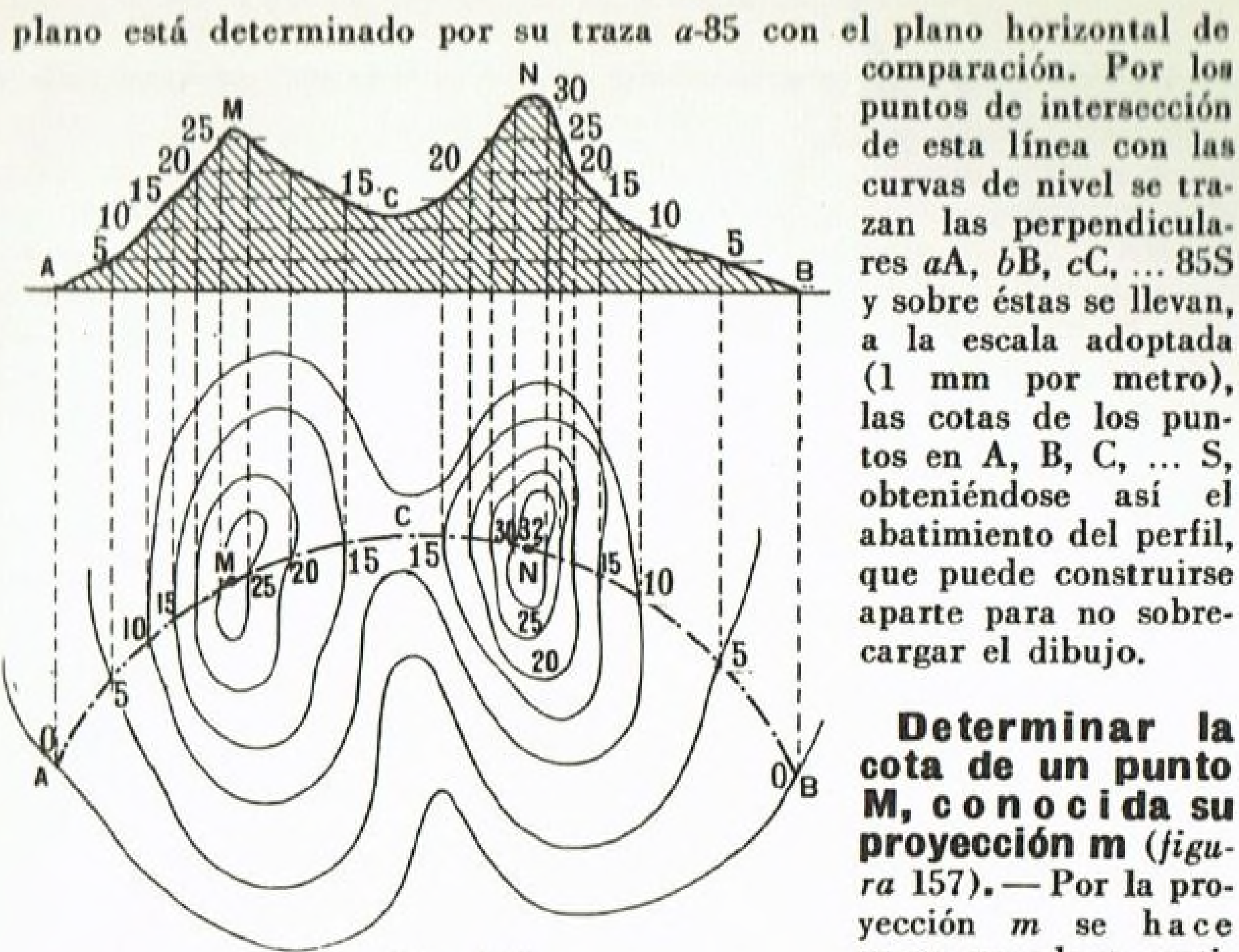
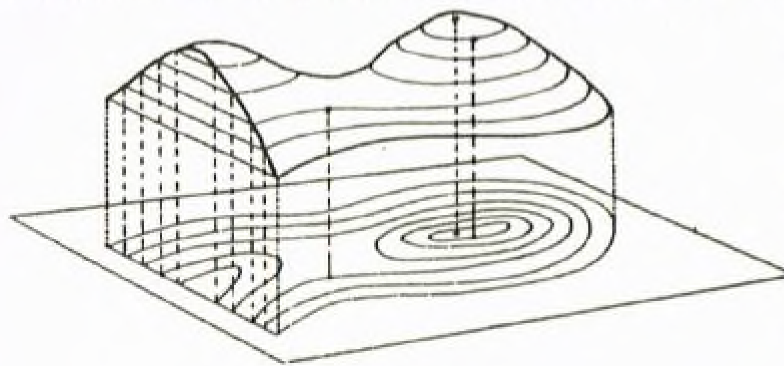


Fig. 158

Determinar la cota de un punto M, conocida su proyección m (*figura* 157). — Por la proyección *m* se hace pasar un plano vertical *a*-85 y se abate el perfil correspondiente. Se traza la perpendicular por *m* a *a*-85 hasta encontrar en M el perfil abatido. La cota viene determinada, en la escala adoptada por el segmento *m*M = 25 m.


Fig. 159

Observaciones. 1ª El problema inverso es indeterminado. El lugar de los puntos de una cota dada sobre una superficie topográfica es una *curva interpolada* entre dos curvas de nivel, a una distancia de ellas proporcional a las diferencias de cotas entre la dada para el punto y las correspondientes a las dos curvas de nivel consideradas.

2ª Se puede determinar también el perfil de un terreno según una línea curva AMCNB (*fig.* 158). Para ello, se halla la intersección de la superficie del terreno con la superficie cilíndrica de directriz AMCNB. Ésto es el caso de una carretera, ferrocarril, canal, etc. El perfil se dibuja desarrollando la curva de que se trata y llevando sobre los puntos A, M, C, N, B, las normales y sobre ellas las cotas correspondientes.

Sección plana de una superficie topográfica (*fig.* 160). — Se halla la intersección de cada curva de nivel del terreno con la correspondiente de igual cota del plano y se obtienen los puntos *a*, *b*, *c*, ..., *m*, ..., *c′ b′*, *a′*, que unidos nos dan la sección buscada. Esta sección puede ser el límite de una plataforma plana de pendiente determinada establecida sobre el terreno.

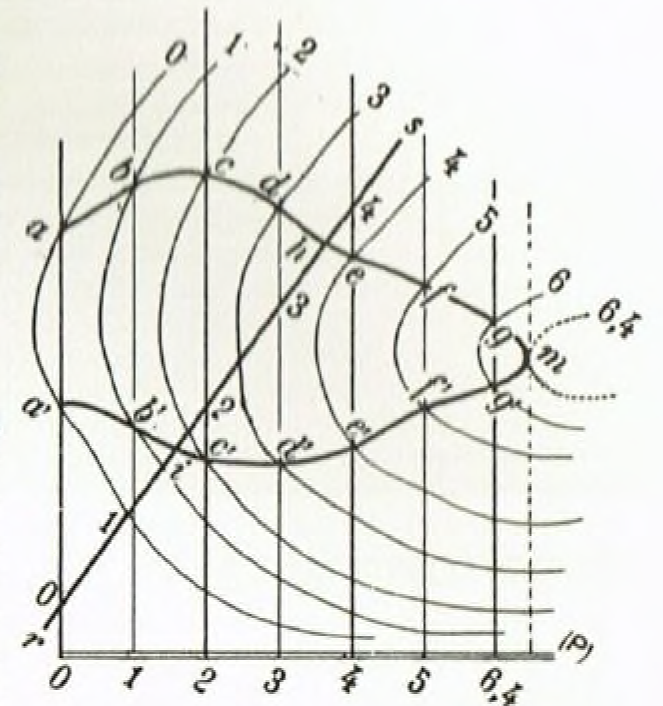


Fig. 160

Intersección de una recta con una superficie topográfica (*fig.* 160). — Sea la recta *rs*. Hacemos pasar por ella un plano (P), trazando por sus puntos de cota redonda unas paralelas cualesquiera. La intersección de este plano con el terreno es la curva *abc* ... *m* ... *c′b′a′* y la intersección de esta curva con la recta dada nos da los puntos *i* y *h*, soluciones del problema.

BIBLIOGRAFÍA. — A. Taibo: *Geometría Descriptiva y sus aplicaciones.* — J. Giménez Arribas: *Estudio de los sistemas de Representación.*



Cálculo trigonométrico en el siglo XVI. Determinación de la latitud de un lugar por medio de la ballesta o «palo de Jacob» (Doc. Biblioteca Nacional, París) [*Fot. Giraudon*]

Trigonometría

Datos históricos. — La trigonometría fue inventada por Hiparco (hacia 190-125 a. de J. C.), pero el primer tratado, "*De triangulis*", sobre esta ciencia fue escrito en el año 1464 por **Regiomontano** (1436-1476). Esta obra, que se imprimió en Nuremberg el año 1533, comprende las trigonometrías plana y esférica, empleando sólo el seno y el coseno como funciones trigonométricas.

Objeto de la trigonometría. — El término "trigonometría" proviene del griego (*trigonos*, triángulo, y *metron*, medida). Como su nombre expresa, esta ciencia se ocupa del cálculo de todos los elementos del triángulo (lados, alturas, medianas, bisectrices, radios de círculos notables, superficies y ángulos). La trigonometría, al incorporar los ángulos a los cálculos relativos al triángulo complementan la geometría, que establece sus teorías en función solamente de las longitudes de los diversos elementos del triángulo, sin considerar los ángulos. Este primer objeto de la trigonometría ha sido ampliamente rebasado y hoy su uso se hace imprescindible para comprender las matemáticas más simples. Además de esta trigonometría plana, existe una trigonometría esférica que permite resolver los problemas de triedros en el espacio.

Funciones circulares

Vectores: Suma vectorial. Proyecciones sobre una recta. Proyecciones de dos vectores situados en un mismo soporte o en soportes paralelos. Proyecciones ortogonales. — **Arcos y ángulos orientados:** Unidades de ángulos. Ángulos de dos semirrectas en un plano orientado. Arcos orientados sobre un círculo. Observaciones aplicables a arcos de círculo con un origen común. — **Definición de las funciones circulares:** Círculo trigonométrico. Funciones seno y coseno. Relación fundamental. Valores notables de las funciones coseno, seno y tangente. — **Variaciones de las funciones circulares:** Variación del coseno. Cosenoide. Variación del seno. Senoide. Relación entre el seno y el coseno. Variación de la tangente. Tangentoide. Variación de la cotangente. Cotangentoide. — **Cálculo de las funciones circulares:** Relaciones entre las funciones circulares de un arco. Reducción de un arco al primer cuadrante. Cálculo de las líneas trigonométricas de los arcos $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. — **Funciones circulares inversas:** Inversión del seno. Inversión del coseno. Inversión de la tangente. Simplificación de expresiones. Formas útiles. Cálculos prácticos. Uso de las tablas trigonométricas. — **Adición y multiplicación de arcos:** Adición de arcos. Multiplicación de los arcos por 2. Fórmulas que dan las funciones circulares de un arco en función de la tangente del arco mitad. Multiplicación de los arcos por 3. División de los arcos por 2. Transformación en producto de una suma o diferencia de funciones circulares. Empleo de ángulos auxiliares en los cálculos.

Vectores

Suma vectorial. — Consideremos n vectores $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$ (*fig.* 1).

Se llama **suma vectorial** de estos vectores, en el orden dado, el vector obtenido así: Por un punto O cualquiera del espacio se traza el vector $\overrightarrow{Oa_1}$, equipolente al vector $\overrightarrow{A_1B_1}$; por a_1 se traza el vector $\overrightarrow{a_1a_2}$ equipolente a $\overrightarrow{A_2B_2}$; por a_2, el vector $\overrightarrow{a_2a_3}$, equipolente a $\overrightarrow{A_3B_3}$ y así sucesivamente, hasta trazar el vector $\overrightarrow{a_{n-1}\, a_n}$ equipolente al vector $\overrightarrow{A_nB_n}$. El vector $\overrightarrow{Oa_n}$ es la suma de los vectores dados,

$$\overrightarrow{Oa_n} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}.$$

En virtud de las propiedades **conmutativa** y **asociativa** de los vectores, la suma de éstos no cambia si se altera el orden de los sumandos o se sustituye cada uno de ellos por un vector equipolente.

En efecto, se puede cambiar el orden de dos vectores consecutivos $\overrightarrow{A_2B_2}$ y $\overrightarrow{A_3B_3}$ (ver en la figura 1 las poligonales $Oa_1a_2a_3$ y $Oa_1b_2a_3$ cuya suma es el vector $\overrightarrow{Oa_3}$), y por tanto también se puede cambiar el orden de dos vectores cualesquiera.

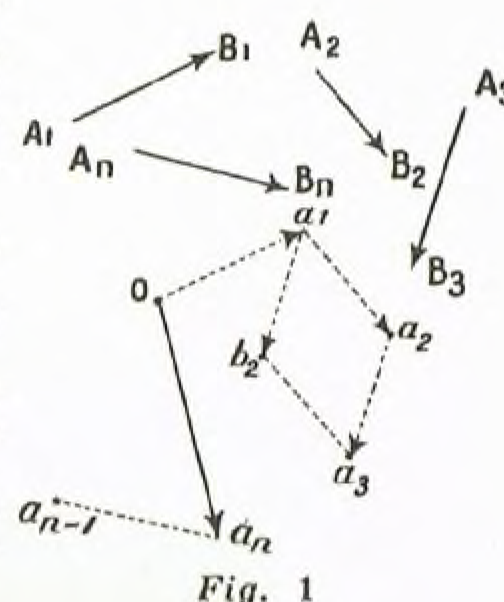


Fig. 1

Si todos los vectores tienen el mismo origen, O, puede hallarse su suma construyendo una poligonal tomando O como origen. Al vector obtenido se le llama **resultante** de los vectores dados.

Proyecciones sobre una recta. — Sea una recta (△) y un plano (P) no paralelo a ella. *Se llama* **proyección de un punto A del espacio sobre la recta (△), paralelamente al plano (P),** *la traza* a, *sobre* (△), *del plano que es paralelo a* (P) *y pasa por* A (fig. 2). Las proyecciones a y b dan la proyección $\overrightarrow{ab}$ del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre la recta (△), paralelamente al plano (P).

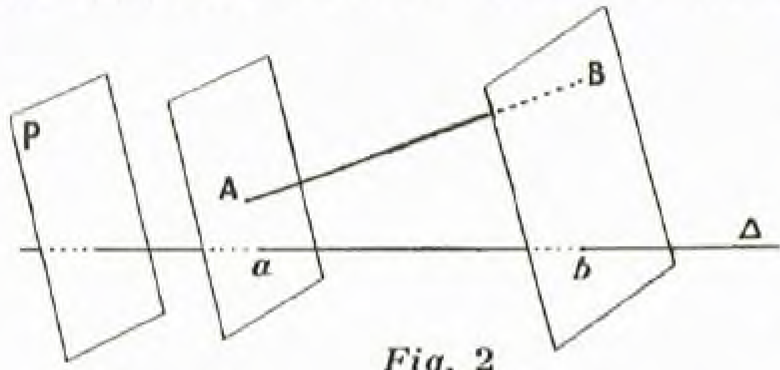


Fig. 2

Dos vectores equipolentes se proyectan en otros dos vectores también equipolentes. Siendo a, b, c, d, e las proyecciones de los puntos de la poligonal ABCDE sobre la recta (△) [*fig.* 3], se puede escribir

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de},$$

de donde resulta el teorema siguiente:

Teorema. *La proyección de la suma vectorial de varios vectores sobre una recta, paralelamente a un plano, es la suma vectorial de las proyecciones de los vectores dados.*

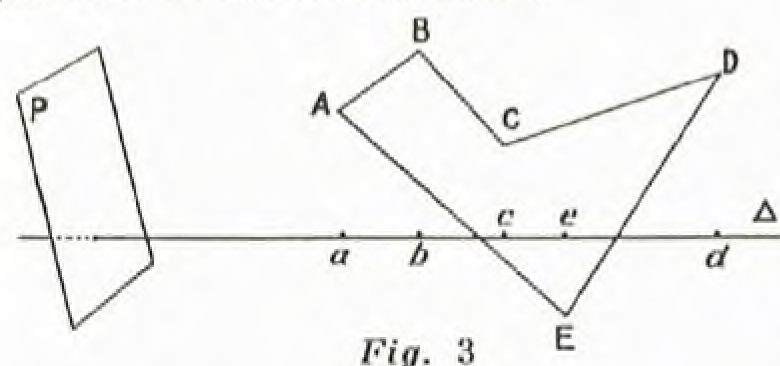


Fig. 3

Si orientamos la recta (△), podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema. *El valor algebraico de la proyección de la suma vectorial de varios vectores sobre un eje es la suma algebraica de los valores algebraicos de las proyecciones de esos vectores* (*fig.* 3):

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de}.$$

Proyecciones de dos vectores situados en un mismo soporte o en soportes paralelos. — Sean los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, situados sobre un mismo soporte (*fig.* 4), que se proyectan en $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$. Según el teorema de Thales

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}}$$

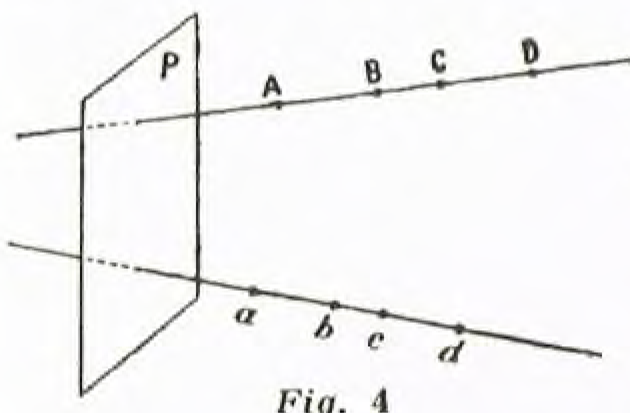


Fig. 4

y esta propiedad subsiste si los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$ están situados sobre soportes paralelos, pues los vectores equipolentes se proyectan según vectores equipolentes.

Teorema. *La relación entre dos vectores paralelos se conserva en proyección.*

Proyecciones ortogonales. — Si el plano (P) de proyección es perpendicular a la recta (△), la proyección a de A sobre (△), paralelamente a (P), se denomina **proyección ortogonal** y es, en este caso, el pie de la perpendicular trazada desde A sobre (△).

Arcos y ángulos orientados

Unidades de ángulos. — Para medir ángulos se usan tres clases de unidades:

El **grado sexagesimal,** que es la noventaava parte de un ángulo recto. La sesentaava parte del grado sexagesimal es el minuto sexagesimal y la sesentaava parte de éste es el segundo sexagesimal.

El **grado centesimal,** centésima parte del ángulo recto. Comprende cien minutos centesimales, y éstos, a su vez, tienen cien segundos centesimales.

El **radián,** medida del ángulo central de un círculo, cuya longitud de arco es el radio de ese círculo.

En grados sexagesimales, el círculo tiene 360°, que corresponden en centesimales a 400^g; en radianes su medida es 2π. Siendo R el radio, el perímetro de la circunferencia es $2\pi R$. Según esto, la longitud de un arco de circunferencia se obtiene multiplicando el número que mide su radio por el número que mide en radianes su ángulo central correspondiente.

Angulos de dos semirrectas en un plano orientado. — Para operar con los arcos y ángulos algebraicamente, tomamos en el plano un sentido positivo de rotación. Es corriente tomar como sentido positivo el contrario al del movimiento de las agujas de un reloj.

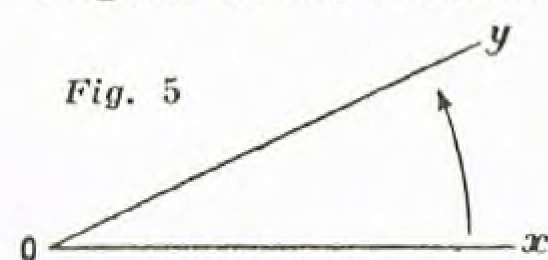


Fig. 5

El ángulo que forma la semirrecta Ox con la semirrecta Oy (*fig.* 5) viene medido por el giro que hay que dar a la primera para que coincida con la segunda. Según que el giro sea en sentido positivo o negativo, así será el ángulo. Si para hacer coincidir Ox con Oy se ha girado la primera semirrecta α radianes en sentido positivo, un giro posterior de 2π radianes (en cualquier sentido) hará coincidir de nuevo Ox con Oy, pues

$$\widehat{Ox,\, Oy} = \alpha + 2k\pi.$$

Evidentemente,

$$\widehat{Oy,\, Ox} = -\alpha + 2k'\pi.$$

A los ángulos que forman n semirrectas de un mismo origen O en un plano, se les puede aplicar la fórmula de Chasles, similar a la utilizada antes para los vectores (*fig.* 6):

$$\widehat{OD_1,\, OD_2} + \widehat{OD_2,\, OD_3} + \ldots + \widehat{OD_n,\, OD_1} = 2k\pi,$$

donde cada ángulo del primer miembro puede tener infinitos valores, diferenciados entre sí en un múltiplo de 2π.

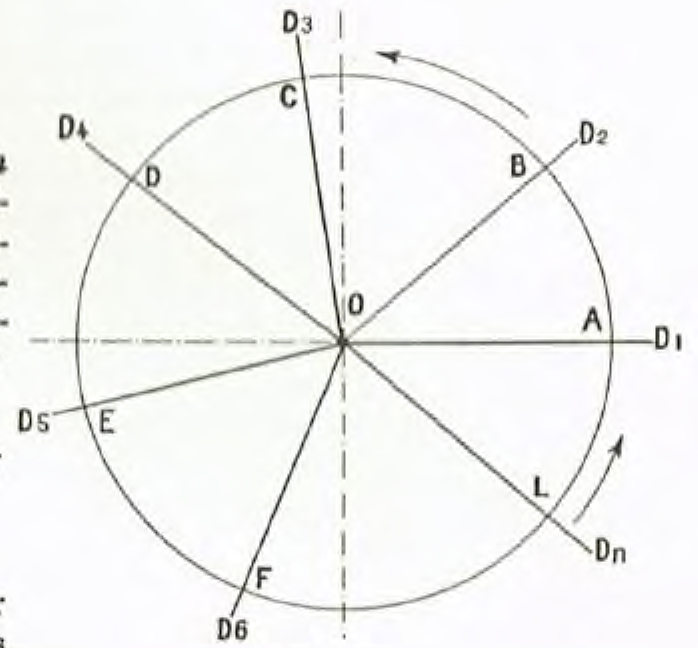


Fig. 6

Arcos orientados sobre un círculo (*fig.* 7). — Sea una circunferencia de centro O y dos puntos en ella, A y B, y fijado el sentido positivo de rotación. Consideremos todos los arcos que tienen por origen A y por extremo B. Evidentemente hay una infinidad de arcos que cumplen esta condición según sea el sentido de giro y según el número de veces que describimos el círculo de A a B, antes de detenernos en este último punto.

Fig. 7

Como a cada arco corresponde un ángulo central, en la fórmula

$$\widehat{OA,\, OB} = \alpha + 2k\pi$$

podemos expresar los arcos en radianes y representarlos algebraicamente por la expresión:

$$\widehat{AB} = \alpha + 2k\pi.$$

Los arcos $\widehat{BA}$ podemos representarlos por la fórmula

$$\widehat{BA} = -\alpha + 2k'\pi.$$

Aplicando la fórmula de Chasles a los arcos orientados (*fig.* 6) se tiene,

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \ldots + \widehat{LA} = 2k\pi,$$

pudiendo cada arco estar definido por infinitos valores que difieren entre sí en un múltiplo de 2π.

Observaciones aplicables a arcos de círculo con un origen común (*fig.* 8). — 1ª Dos arcos que difieren en un múltiplo par de π tienen sus extremos confundidos, y recíprocamente.

2ª Dos arcos que difieren en un múltiplo impar de π tienen sus extremos M y M_1 diametralmente opuestos, y recíprocamente.

3ª Dos arcos opuestos tienen sus extremos M y M_2 simétricos con relación al diámetro que pasa por el origen A, y recíprocamente (lo mismo puede decirse de los arcos cuya suma es $2k\pi$).

4ª Dos arcos suplementarios (cuya suma es π) tienen sus extremos M y M_3 sobre una paralela al diámetro que pasa por el origen de arcos, y recíprocamente [aplicable esto a dos arcos cuya suma sea $(2k + 1)\pi$].

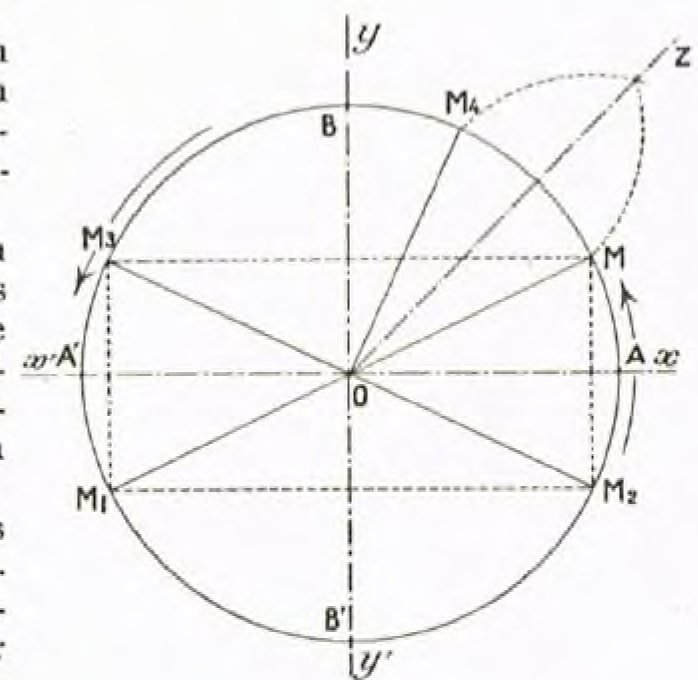


Fig. 8

5ª Dos arcos complementarios (cuya suma es $\frac{\pi}{2}$) tienen sus extremos M y M_4 simétricos con relación a la bisectriz del primer cuadrante (también es aplicable esto a los arcos cuya suma es $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

Definición de las funciones circulares

Círculo trigonométrico. — *Se llama círculo trigonométrico un círculo de radio igual a la unidad y orientado en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj.*

A partir del punto A, como origen (*fig.* 9), marquemos los puntos B, A', B', tales que,

$$\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} \qquad \widehat{AA'} = \pi, \qquad \widehat{AB} = \frac{3\pi}{2}$$

El círculo trigonométrico queda así dividido en cuatro cuadrantes: el primero $\widehat{AB}$, el segundo $\widehat{BA'}$, el tercero $\widehat{A'B'}$ y el cuarto $\widehat{B'A}$.

Sea M un punto cualquiera del círculo. El ángulo formado por las semirrectas OA y OM se llama ángulo polar del punto M y vale

$$\widehat{OA, OM} = \theta + 2k\pi.$$

Como se ve, hay infinitos ángulos polares que satisfacen esta fórmula y se diferencian dos de ellos entre sí en un múltiplo par de π.

En el caso inverso, dado un ángulo polar, sólo hay un punto M del círculo que tenga ese ángulo polar.

Funciones seno y coseno. — Los diámetros rectangulares A'OA y B'OB (*fig.* 9) nos definen unos ejes de coordenadas cartesianas, donde el punto M, de ángulo polar θ, tiene por abscisa el valor algebraico del vector $\overrightarrow{OP}$, proyección de $\overrightarrow{OM}$ sobre $x'x$, y por ordenada el valor algebraico del vector $\overrightarrow{OQ}$, proyección de $\overrightarrow{OM}$ sobre $y'y$.

La abscisa de M se llama **coseno** del ángulo θ o del arco θ. La ordenada de M se llama **seno** del mismo ángulo o arco θ, y se escribe así

$$\cos\theta = \overrightarrow{OP}, \qquad \text{sen}\,\theta = \overrightarrow{OQ}.$$

Existen, además del seno y el coseno, otras dos *funciones circulares*:

La **tangente,** que es el cociente del seno por el coseno;

La **cotangente,** que es la inversa de la tangente.

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}, \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}.$$

Relación fundamental. — Aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo OPM (*fig.* 9), se tiene: $\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$ o, empleando los valores antes definidos, $(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\,\theta)^2 = 1$, que se escribe para más facilidad así: $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.

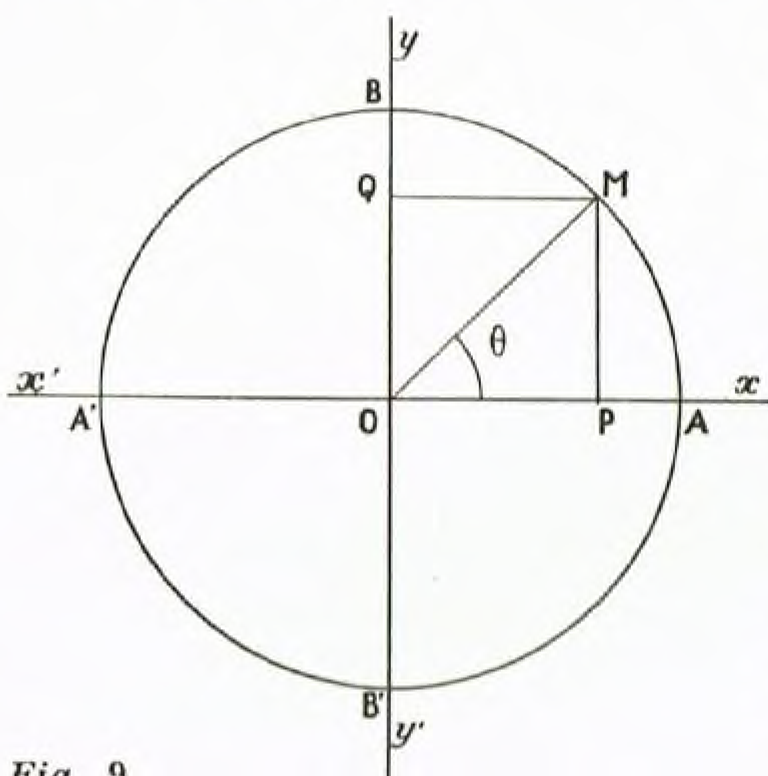


Fig. 9

OBSERVACIÓN: El coseno del ángulo θ que forma la dirección positiva del eje $x'x$ con la dirección del vector unitario $\overrightarrow{OM}$, es igual al valor de la proyección ortogonal de este vector sobre el eje. De aquí se deduce:

El valor algebraico de la proyección ortogonal de un vector sobre un eje es el producto del valor algebraico del vector por el coseno del ángulo que forman las direcciones positivas del vector y del eje de proyección.

En efecto, la relación $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\omega U}$ (*fig.* 10), que mide el valor algebraico de $\overrightarrow{AB}$ (siendo $\overrightarrow{\omega U}$ el vector unidad), se conserva en proyección, luego se puede ecribir:

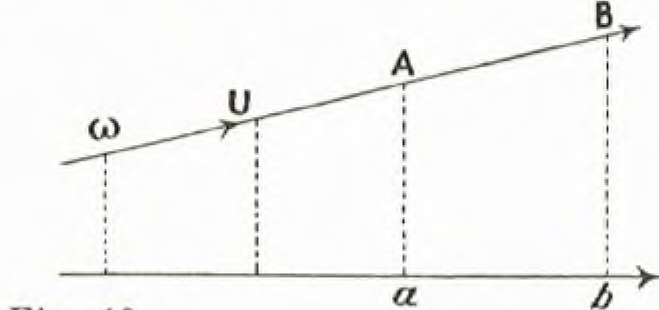


Fig. 10

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\cos\theta}, \text{ de donde,}$$

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{AB}\cos\theta.$$

Valores notables de las funciones coseno, seno y tangente. — Utilizando como medida de ángulos el *radián*, se pueden deducir los valores siguientes:

$$\begin{cases} \cos 0 = 1, & \text{sen}\,0 = 0, & \text{tg}\,0 = 0, \\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0, & \text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1, & \text{tg}\dfrac{\pi}{2} = \infty. \\ \cos\pi = -1, & \text{sen}\,\pi = 0, & \text{tg}\,\pi = 0, \\ \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0, & \text{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1, & \text{tg}\dfrac{3\pi}{2} = \infty. \end{cases}$$

El seno y el coseno son funciones periódicas, cuyo período es 2π. La tangente es una función periódica de período π. En efecto,

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 2k\pi),$$
$$\text{sen}\,x = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 2k\pi),$$
$$\begin{cases} \cos x = -\cos(x + \pi) = -\cos[x + (2k+1)\pi] \\ \text{sen}\,x = -\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}[x + (2k+1)\pi], \end{cases}$$
$$\text{tg}\,x = \text{tg}(x + \pi) = \text{tg}[x + (2k+1)\pi].$$

En arcos opuestos
$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x, \\ \text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x, \\ \text{tg}(-x) = -\text{tg}\,x. \end{cases}$$

En arcos suplementarios
$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x, \\ \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,x, \\ \text{tg}(\pi - x) = -\text{tg}\,x. \end{cases}$$

En arcos complementarios
$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\,x, \\ \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \\ \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\text{tg}\,x} = \text{cotg}\,x. \end{cases}$$

Variaciones de las funciones circulares

Variación del coseno. Cosenoide. — En el círculo trigonométrico (*fig.* 11) puede observarse la variación del vector $\overrightarrow{\omega P}$, representativo del coseno al moverse el punto M sobre la circunferencia. Los valores que toma se resumen en el esquema siguiente:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1

Pasemos estos valores a un sistema de coordenadas cartesianas Ox, Oy, llevando los valores del ángulo sobre el eje de abscisas y los del coseno sobre el de ordenadas. Como el período del coseno es 2π, basta llevar paralelamente un número indefinido de veces la curva representativa del período 2π para tener la curva ilimitada, llamada cosenoide, que nos proporciona todos los valores del coseno de un ángulo (en el eje de ordenadas) entrando en el eje de abscisas con el valor de dicho ángulo. Los puntos de encuentro de la cosenoide con el eje de abscisas son centros de simetría. Todas las rectas $x = k\pi$, son ejes de simetría de la curva.

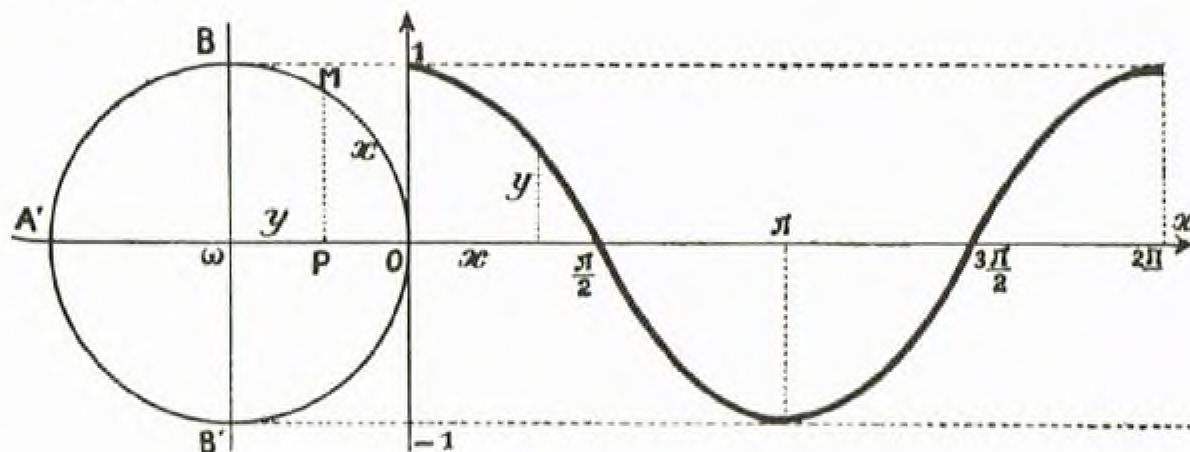


Fig. 11

Variación del seno. Senoide. — Las variaciones del vector $\overrightarrow{PM}$, representativo del seno, al moverse el punto M sobre la circunferencia, quedan resumidas en el cuadro:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

La curva representativa de estos valores se deduce de la cosenoide de la fig. 11, trasladando el eje Oy paralelamente a sí mismo a una distancia $\dfrac{3\pi}{2}$. La curva obtenida así se llama senoide (*fig.* 12) y sus intersecciones con el eje de abscisas son centros de simetría de la curva. Los ejes de simetría vienen representados por las rectas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

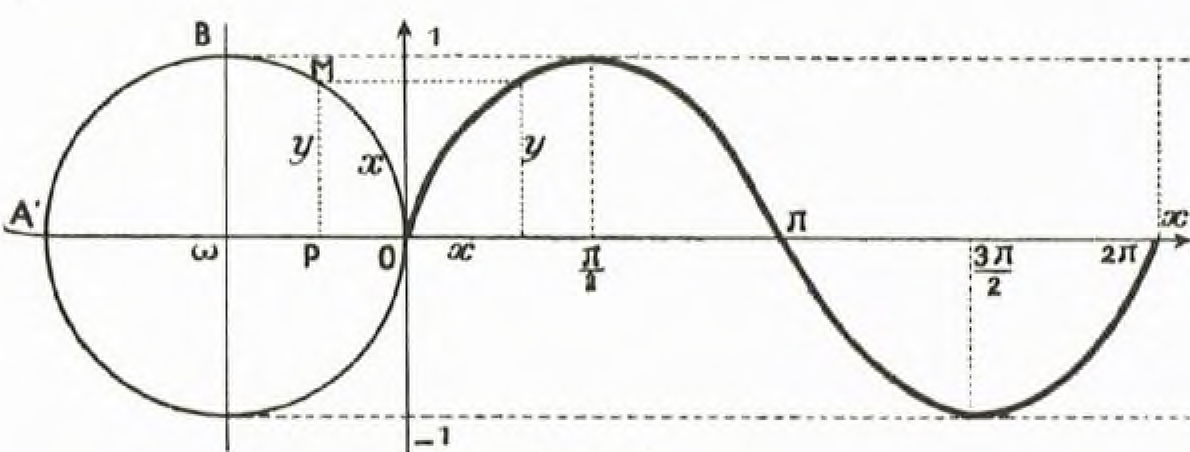


Fig. 12

Relación entre el seno y el coseno. — Tomemos un punto M sobre el círculo trigonométrico. Tendremos (*fig.* 13),

$$\widehat{AM} = x, \qquad \overrightarrow{OP} = \cos x.$$

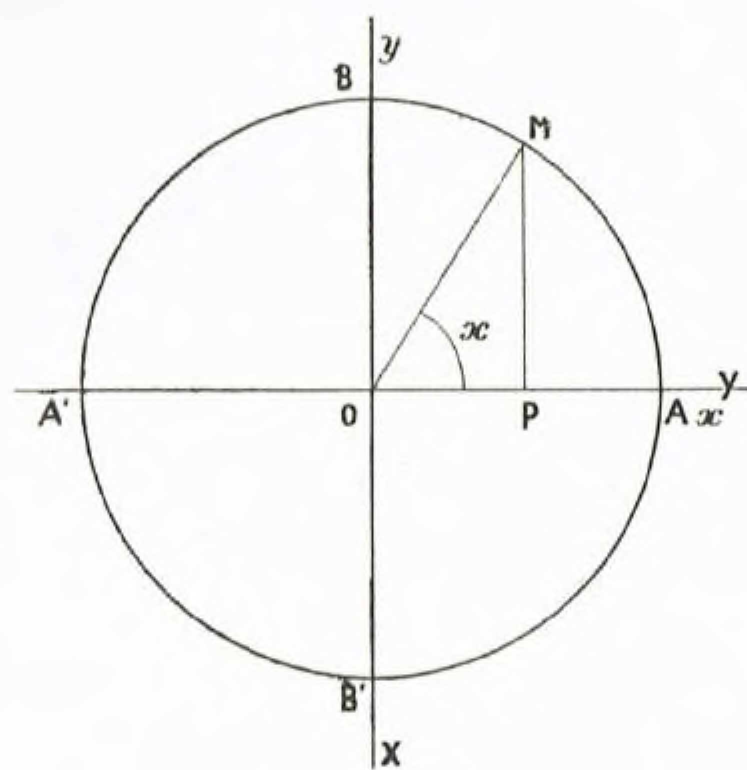


Fig. 13

Si tomamos como origen de los arcos el punto B' en lugar de A, estaría OX sobre OB' y OY sobre OA. Entonces, sería

$$\widehat{B'M} = \widehat{B'A} + \widehat{AM} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi,$$

y de aquí se deduce,

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Sustituyendo x por $x + \frac{\pi}{2}$ en esta fórmula, queda

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x.$$

De la relación

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

se deduce que la cosenoide se obtiene efectuando una traslación paralela de la senoide hacia el eje Ox negativo en una magnitud $\frac{\pi}{2}$.

Variación de la tangente. Tangentoide. — Aplicando el teorema de Thales, en la *fig.* 14,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{\omega P}} = \frac{\overrightarrow{OT}}{\overrightarrow{\omega O}} = \overrightarrow{OT},$$

luego la tangente la representamos por las variaciones de OT al moverse M y podemos deducir el siguiente cuadro de valores:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
tg x	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0

Con estos valores y otros intermedios construimos la curva de la *fig* 14 (en trazo lleno) llamada tangentoide. Los puntos donde corta el eje de abscisas son centros de simetría de la curva. El período es π.

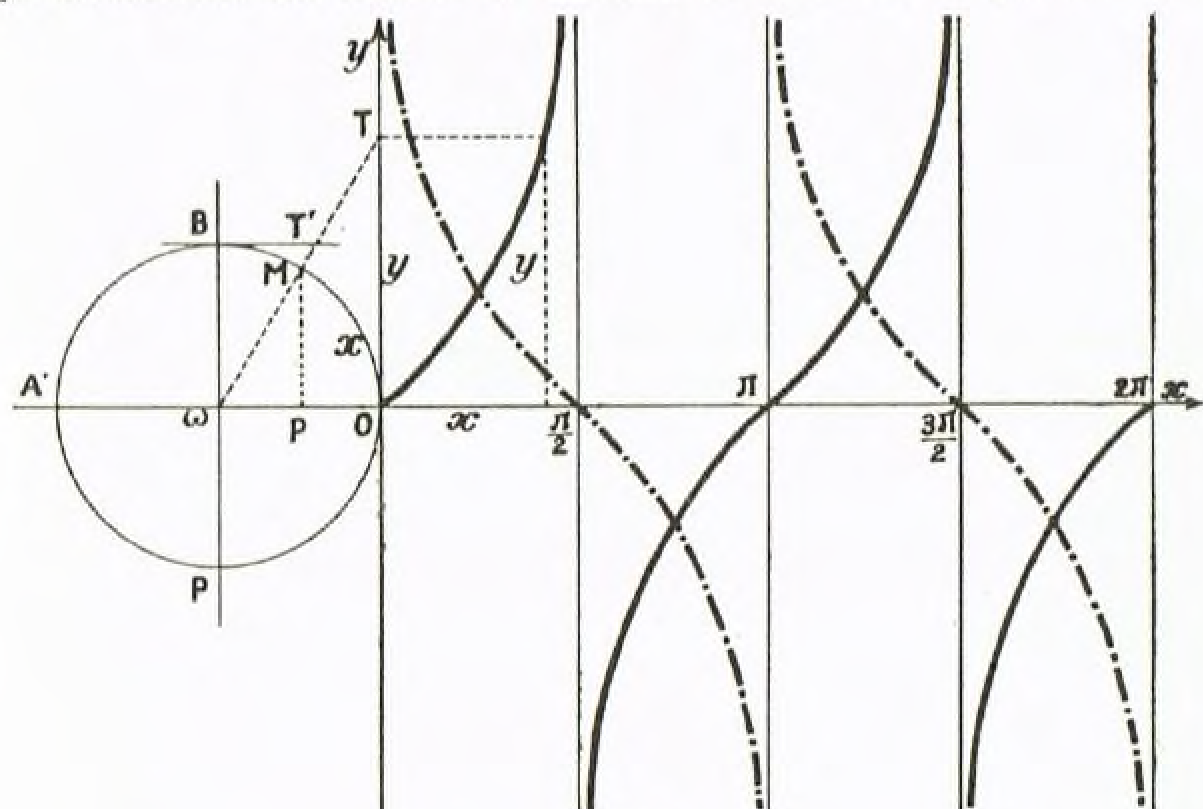


Fig. 14

Variación de la cotangente. Cotangentoide. — Con análoga demostración a la utilizada para la tangente se deduce que la cotangente viene definida en cada situación de M por el vector $\overrightarrow{BT'}$.

Antes hemos deducido que

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x, \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \end{cases}$$

luego dividiendo miembro a miembro estas igualdades se tiene,

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

de esta relación resulta que la curva representativa de la cotangente, la cotangentoide, es simétrica de la tangentoide con respecto a la recta, $x = \frac{\pi}{2}$. En la misma fig. 14 se ha representado la cotangentoide en trazo discontinuo.

Éste es el resumen esquemático de los valores de la cotangente.

Cálculo de las funciones circulares

Relaciones entre las funciones circulares de un arco. — Las relaciones

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

indican que las funciones circulares no son independientes, sino que conocido el valor de una de ellas pueden deducirse los valores de las otras. Se pueden presentar dos problemas:

1º Dado el valor de una función circular, encontrar el arco correspondiente. En general, hay varias soluciones.

2º Dado un arco y una de sus funciones circulares, encontrar los valores de las otras líneas trigonométricas. Este problema sólo tiene una solución.

PROBLEMAS. 1º *Conociendo sen* x, *calcular cos* x *y tg* x (fig. 15).

Sea $\operatorname{sen} x = b$ un número comprendido entre -1 y $+1$. Las soluciones pedidas son:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - b^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{\pm\sqrt{1 - b^2}}.$$

Como se ve, hay dos soluciones para el coseno y otras dos para la tangente. En efecto, al dato $\operatorname{sen} x = b$, corresponden una doble infinidad de arcos de las formas $a + 2k\pi$, $\pi - a + 2k'\pi$, que tienen dos valores opuestos para el coseno y otros dos valores opuestos para la tangente.

Si se hubiese determinado el arco x, que corresponde al valor dado del seno, sólo habría una solución para el coseno y otra para la tangente, cuyo signo, positivo o negativo, vendrá determinado por el cuadrante donde se encuentre el extremo del arco.

Fig. 15

2º *Conocido cos* x, *hallar sen* x *y tg* x (fig. 16).

El valor $\cos x = b$, estará comprendido entre -1 y $+1$. Las soluciones pedidas son

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - b^2}, \qquad \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}.$$

Estas dos soluciones se comprenden por el hecho de que el dato $\cos x = b$ lo satisfacen un doble número de infinitos valores de arcos $a + 2k\pi$, $-a + 2k\pi$, a los cuales corresponden dos valores opuestos para el seno y otros dos valores opuestos para la tangente.

Si se hubiese determinado el arco x correspondiente al valor dado del coseno, sólo habría una solución para el seno y otra para la tangente, cuyo signo será el que corresponda según el cuadrante donde se encuentre el extremo del arco.

Fig. 16

3º *Conociendo tg* x, *hallar sen* x *y cos* x (fig. 17).

Sea $\operatorname{tg} x = b$ un número cualquiera.

De las relaciones $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = b$, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se obtienen los valores:

$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + b^2}},$$

$$\operatorname{sen} x = \pm\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

Luego hay dos soluciones al problema. Esto se explica por el hecho de que al dato $\operatorname{tg} x = b$ corresponde una doble infinidad de arcos, dados por las fórmulas $a + 2k\pi$, $a + (2k + 1)\pi$. A estos dos grupos de arcos les corresponden dos grupos de valores opuestos para el seno y otros dos grupos de valores opuestos para el coseno. Si se hubiese determinado el arco correspondiente al valor dado de la tangente, sólo habría una solución para el seno y otra para el coseno, cuyo signo queda determinado por el cuadrante donde se encuentre el extremo del arco.

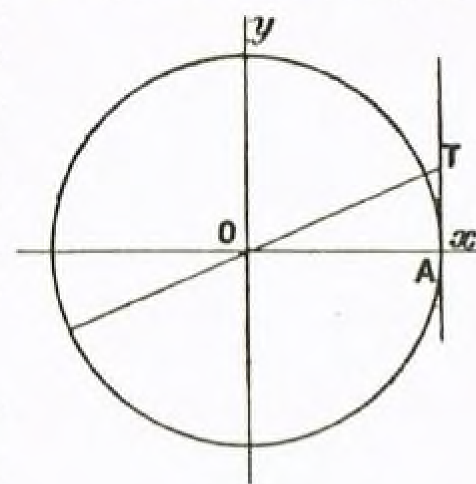


Fig. 17

Reducción de un arco al primer cuadrante. — Sea un arco cualquiera α. Siempre existe un número entero k tal que $2k\pi \leqq \alpha < 2(k + 1)\pi$; luego se puede poner $0 \leqq \alpha - 2k\pi < 2\pi$. Consideremos el arco $\beta = \alpha - 2k\pi$, tal que esté comprendido entre 0 y

2π. Tendrá las mismas líneas trigonométricas que el arco α. Pueden presentarse cuatro casos:

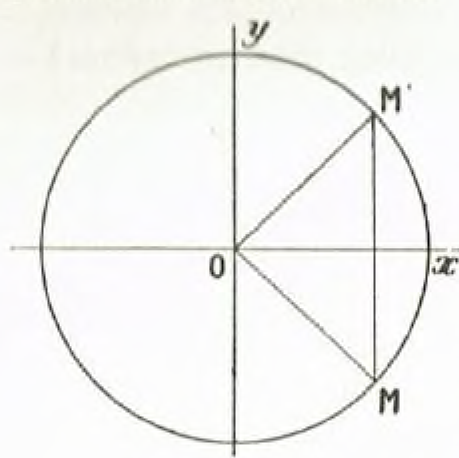


Fig. 18

1° El arco β tiene su extremo en el primer cuadrante. No hay problema entonces;

2° El arco β termina en el segundo cuadrante. Consideraremos su suplemento $\pi - \beta$, que termina en el primer cuadrante. Sus senos son iguales y sus cosenos, opuestos (*fig.* 15);

3° El arco β termina en el tercer cuadrante. Se considerará el arco $\beta - \pi$, que tiene su extremo en el primer cuadrante. Sus senos y cosenos son opuestos a los de β (*fig.* 17);

4° El arco β tiene su extremo en el cuarto cuadrante. Tomaremos el arco $2\pi - \beta$, que está comprendido en el primer cuadrante y tiene su coseno igual que el del arco dado. Sus senos son opuestos (*fig.* 18).

Cálculo de las líneas trigonométricas de los arcos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. — Observemos que:

El seno de un arco comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ es la mitad de la cuerda del arco doble en el círculo trigonométrico.

El seno de $\frac{\pi}{n}$ es la mitad del lado del polígono regular convexo de n lados inscrito en el círculo trigonométrico.

Si $n = 3$, sen $\frac{\pi}{3} = \frac{l_3}{2}$, siendo l_3 el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo trigonométrico; luego sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si $n = 4$, sen $\frac{\pi}{4} = \frac{l_4}{2}$, siendo l_4 el lado del cuadrado inscrito en el círculo trigonométrico; luego sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $n = 6$, sen $\frac{\pi}{6} = \frac{l_6}{2}$, siendo l_6 el lado del exágono regular inscrito en el círculo trigonométrico; luego sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. En resumen, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Es necesario saber de memoria estos valores. Observemos que siendo $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ complementarios, resulta en efecto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6},\quad \cos\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}.$$

Ejercicio. *Hallar las funciones circulares del arco* $\alpha = \frac{27\pi}{4}$.

$$6\pi < \alpha < 8\pi$$

$$0 < \alpha - 6\pi < 2\pi$$

$$\beta = \alpha - 6\pi = \frac{3\pi}{4} \text{ (ángulo suplementario de } \frac{\pi}{4}\text{).}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Funciones circulares inversas

Inversión del seno. — El problema de la inversión del seno consiste en hallar los arcos o ángulos que tengan por seno un valor dado x. Estos arcos se representan por la notación y = arco sen x, que significa que y es el arco cuyo seno vale x, o bien, x = sen y.

Hay una doble infinidad de estos arcos y; en efecto, estando x comprendido entre -1 y $+1$, siempre hay un arco y sólo uno que estando comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ tiene por seno el valor x (*fig.* 19). A este arco se le llama Arco sen x. Los demás arcos son los que expresan las fórmulas:

$$\text{Arc sen } x + 2k\pi,$$

$$\pi - \text{Arco sen } x + 2k'\pi, = -\text{Arco sen } x + (2k' + 1)\pi.$$

Inversión del coseno. — Los arcos y que corresponden al valor dado x del coseno, se expresan por la fórmula y = Arco cos x (estando x comprendido entre -1 y $+1$). Entre estos arcos hay uno solo comprendido entre 0 y π, que se denomina Arco cos x. Los demás arcos son los expresados por las fórmulas:

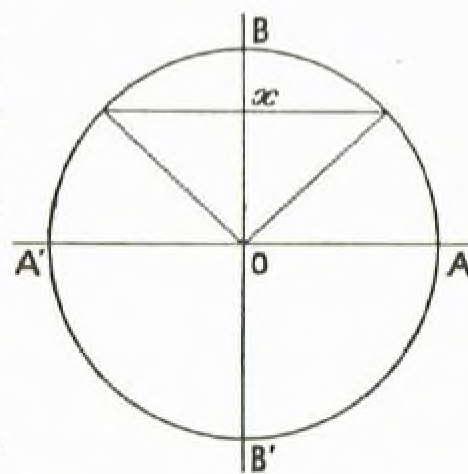


Fig. 19

$$\text{Arco cos } x + 2k\pi, \quad -\text{Arco cos } x + 2k'\pi.$$

Inversión de la tangente. — Los arcos y correspondientes a una tangente de valor dado x se representan por la fórmula y = arco tg x. Siempre hay un arco y uno sólo comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, llamado Arco tg x, que satisface esta fórmula. Los demás arcos que tienen por tangente el valor dado, x, se obtienen por la fórmula:

$$y = \text{Arco tg } x + k\pi.$$

Ejemplos numéricos.

1° *Buscar los arcos* sen $-\frac{1}{2}$.

$$\text{Arco sen} -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6} \begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ y = \dfrac{7\pi}{6} + 2k'\pi. \end{cases}$$

2° *Hallar los arcos* cos $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Arco cos } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

3° *Encontrar los arcos tg* $\sqrt{3}$.

$$\text{Arco tg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3};\ y = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Aplicación a la resolución de ecuaciones.

1° *Sea la ecuación cos* $3x$ = *sen* $5x$.

$$\cos 3x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \operatorname{sen} 5x,$$

de donde

$$5x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$$

ó

$$5x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + (2k' + 1)\pi.$$

De estas relaciones se obtienen las siguientes:

$$\begin{cases} 8x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + (2k' + 1)\pi, \end{cases}$$

de donde deducimos los dos grupos de soluciones

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi. \end{cases}$$

Las soluciones del primer grupo (*fig.* 20) son los arcos cuyos extremos coinciden con los vértices del octógono regular inscrito en el círculo trigonométrico, uno de cuyos vértices coincide con el extremo del arco $\frac{\pi}{16}$.

Las soluciones del segundo grupo son los arcos cuyos extremos son los de un diámetro, uno de cuyos extremos es el punto de la circunferencia correspondiente al arco $\frac{\pi}{4}$.

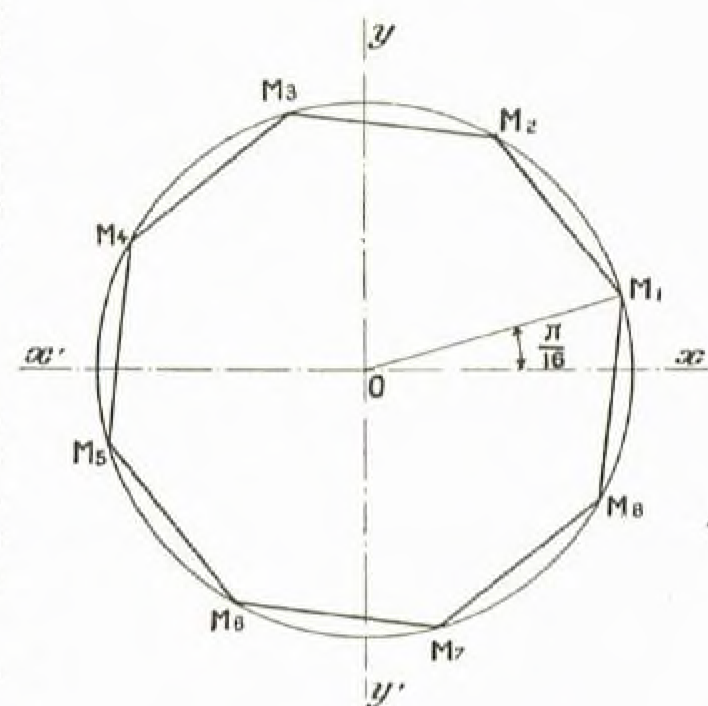


Fig. 20

2° *Sea la ecuación tg* x . *tg* $3x = -1$.

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg} 3x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right),$$

luego $3x - \frac{\pi}{2} = x + k\pi$, de donde $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

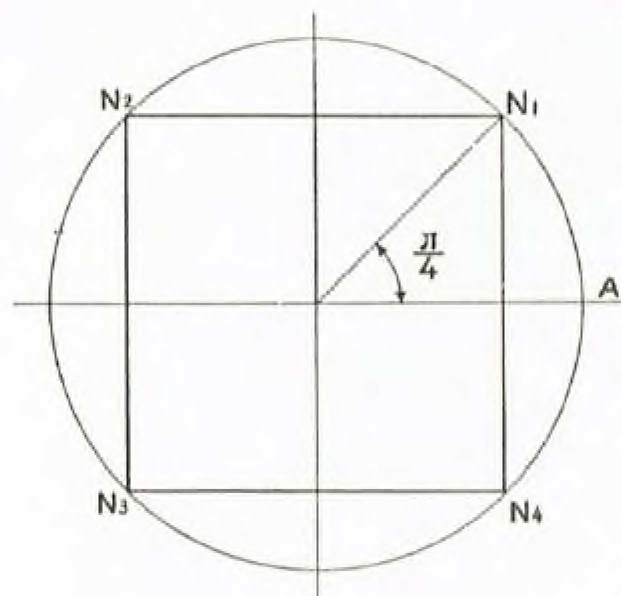


Fig. 21

Todas las soluciones vienen expresadas por $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Gráficamente vienen expresadas por los arcos cuyos extremos son los vértices del cuadrado inscrito en el círculo trigonométrico, uno de cuyos vértices es el extremo del arco $\frac{\pi}{4}$ (*fig.* 21).

Simplificación de expresiones. — Con auxilio de la relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ podemos simplificar algunas expresiones algebraicas donde entren estas funciones circulares. Por ejemplo:

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cdot (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \operatorname{sen}^6 x + 3 \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 = 1.$$

Si una expresión es simétrica en sen x y cos x, es posible muchas veces simplificarla, análogamente a como lo hemos hecho en este ejemplo.

Fórmulas útiles.

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x},$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Cálculos prácticos. Uso de las tablas trigonométricas. — Las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos entre 0° y 90° (o 0 g y 100 g) pueden deducirse:

1° De las tablas de valores naturales. Éstas constan de seis columnas. La primera contiene los valores del arco de grado en grado (sexagesimal o centesimal) y con subdivisiones de minuto o de diez minutos, desde 0° a 45° (o 0 g a 50 g). Las columnas 2ª a 5ª contienen en la línea horizontal de cada arco el valor correspondiente de las funciones seno, tangente, cotangente y coseno. La sexta columna contiene de abajo hacia arriba los valores de los arcos de 45° a 90° (o de 50 g a 100 g), de tal forma que los valores de las columnas 1ª y 6ª que coinciden sobre una línea horizontal son los de dos arcos complementarios. Por debajo de las columnas 2ª a 5ª están escritas las abreviaturas cos, cotg, tg, sen;

2° De las tablas de logaritmos, semejantes a las precedentes y que ya se han descrito en el Álgebra.

Adición y multiplicación de arcos

Adición de arcos. — Conociendo las líneas trigonométricas de dos arcos a y b, se trata de calcular las correspondientes al arco $(a + b)$.

Sea el círculo trigonométrico y los dos arcos (*fig.* 22):

$$\widehat{AM} = a, \quad \widehat{MN} = b.$$

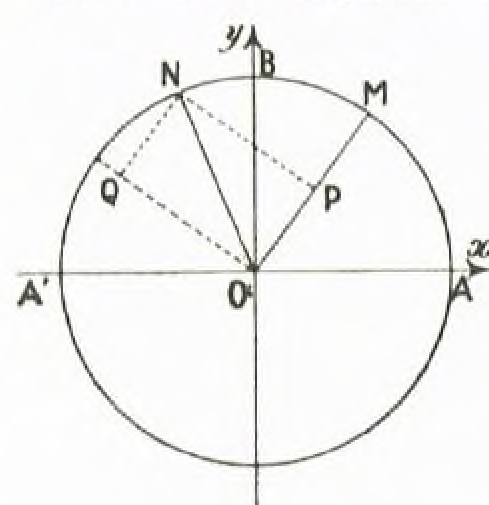


Fig. 22.

Giremos el radio OM en el sentido positivo 90° y proyectemos N sobre él, antes y después del giro, en P y Q. Será,

$$\overrightarrow{OP} = \cos b, \quad \overrightarrow{OQ} = \operatorname{sen} b.$$

Proyectemos sobre el eje Ox la relación vectorial,

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN}$$

y podremos escribir:

$$\cos(a + b) = \cos b \cos(\widehat{Ox, OM}) + \operatorname{sen} b \cos(\widehat{Ox, OQ}) = \cos b \cos a + \operatorname{sen} b \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

de donde tenemos la fórmula fundamental:

(1) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$

Cambiando de signo el arco b y teniendo en cuenta que

$$\cos(-b) = \cos b, \quad \operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b,$$

tenemos la relación,

(2) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$

Vamos a calcular $\operatorname{sen}(a + b)$:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b.$$

(3) $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$

y cambiando b por $-b$:

(4) $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a.$

De las fórmulas (1) y (3) se deduce:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(5) $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$

Cambiando b por $-b$, tenemos:

(6) $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$

Conociendo las funciones circulares de dos arcos, podemos calcular mediante las seis fórmulas precedentes las líneas trigonométricas de los arcos que son suma o diferencia de ellos. Si se presenta el caso también pueden calcularse las funciones circulares de un arco, suma de otros varios:

$$\cos(a + b + c) = \cos(a + b)\cos c - \operatorname{sen}(a + b)\operatorname{sen} c = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)\cos c - (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)\operatorname{sen} c = \cos a \cos b \cos c - \cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a - \cos c \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Multiplicación de los arcos por 2. — Si hacemos $a = b$ en las fórmulas (1), (3) y (5), obtenemos:

(7) $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a;$

(8) $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a;$

(9) $\operatorname{tg} 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

De la fórmula (7) se puede obtener:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{ó} \quad \cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a,$$

de donde $\begin{cases} 1 + \cos 2a = 2\cos^2 a, \\ 1 - \cos 2a = 2\operatorname{sen}^2 a. \end{cases}$

Fórmulas que dan las funciones circulares de un arco en función de la tangente del arco mitad.

Se puede escribir

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}},$$

$$\operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}},$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}.$$

Suponiendo $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = t$, se tienen las expresiones de cos a, sen a y tg a en función de t:

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \operatorname{sen} a = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Multiplicación de los arcos por 3.

$$\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} a = (\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cos a = \cos^3 a - 3\operatorname{sen}^2 a \cos a = \cos^3 a - 3(1 - \cos^2 a)\cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cos a + \operatorname{sen} a \cos 2a = 2\operatorname{sen} a \cos^2 a + \operatorname{sen} a(\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a) = 3\operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a = 3\operatorname{sen} a(1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^3 a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a.$$

$$\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a.$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{sen} 3a}{\cos 3a} = \frac{3\operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a}{\cos^3 a - 3\operatorname{sen}^2 a \cos a} = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}.$$

División de los arcos por 2. — Este problema consiste en hallar las líneas trigonométricas del arco $\frac{a}{2}$, conociendo las del arco a.

Consideremos las fórmulas obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} 2\cos^2 \dfrac{a}{2} = 1 + \cos a, \\ 2\,\text{sen}^2 \dfrac{a}{2} = 1 - \cos a. \end{cases}$$

Con ayuda de estas expresiones podemos obtener los valores de $\cos \frac{a}{2}$ y $\text{sen} \frac{a}{2}$ en función de $\cos a$:

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \quad \text{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

de donde,

$$\text{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Explicación del doble signo. Vemos que en todas estas fórmulas sólo figura una función circular, que es el coseno del arco dado; luego podemos suponer el arco dado por su coseno.

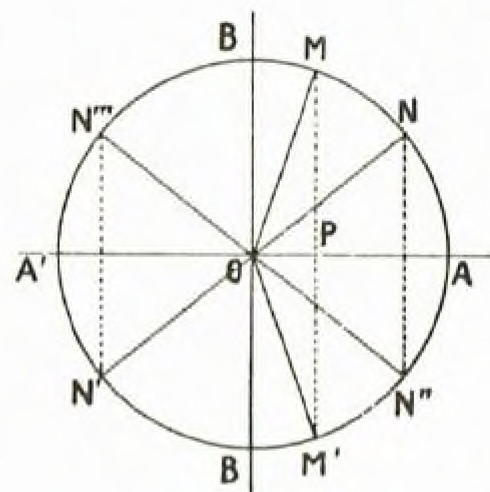


Fig. 23

Todos los arcos a cuyo coseno $\overrightarrow{OP}$ es conocido están contenidos en una de las fórmulas

$$a + 2k\pi, \quad -a + 2k'\pi.$$

Todos los arcos $\frac{a}{2}$ vendrán, pues, dados por las fórmulas

$$\frac{a}{2} + k\pi, \quad -\frac{a}{2} + k'\pi,$$

es decir, estos arcos tendrán sus extremidades en los puntos N, N', N'', N''' (*fig.* 23) que son los puntos medios de los arcos $\widehat{AM}$ y $\widehat{AM'}$. Los valores posibles para el seno, el coseno y la tangente de todos los arcos $\frac{a}{2}$ son siempre dos, iguales en valor absoluto y de signo contrario.

Pero si fijamos el arco a, sólo habrá un valor para el seno, el coseno y la tangente del arco $\frac{a}{2}$, cuyo signo único determinaremos según el cuadrante en que se encuentre el extremo del arco de que se trata.

EJERCICIO. *Hallar las líneas trigonométricas del arco* $\frac{\pi}{8}$.

Si suponemos

$$\frac{a}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad \cos a = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \text{sen} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \text{tg} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \\ \qquad = \sqrt{2} - 1. \end{cases}$$

Transformación en producto de una suma o diferencia de funciones circulares. — El objeto de esta transformación es facilitar el cálculo logarítmico; en efecto, el logaritmo de un producto de funciones circulares se calcula inmediatamente. Si se utilizaran los logaritmos separadamente para cada sumando, el cálculo sería más laborioso.

Tomemos las fórmulas ya conocidas:

$$\begin{cases} \text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a, \\ \text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \cos b - \text{sen}\, b \cos a, \\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b, \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b, \end{cases}$$

sumándolas y restándolas miembro a miembro:

$$\begin{cases} \text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2\,\text{sen}\, a \cos b, \\ \text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2\,\text{sen}\, b \cos a, \\ \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b, \\ \cos(a + b) - \cos(a - b) = -2\,\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b. \end{cases}$$

Suponiendo: $a + b = p$, $a - b = q$, se tiene:

(10) $$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2\,\text{sen} \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

(11) $$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\,\text{sen} \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}.$$

(12) $$\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

(13) $$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen} \frac{p + q}{2}\, \text{sen} \frac{p - q}{2}.$$

Estas fórmulas, que deben saberse de memoria, son las pedidas. Se tiene también:

$$\text{tg}\, p + \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} + \frac{\text{sen}\, q}{\cos q} = \frac{\text{sen}\, p \cos q + \text{sen}\, q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\text{sen}(p + q)}{\cos p \cos q}$$

Tenemos, pues, las dos nuevas fórmulas de transformación:

(14) $$\text{tg}\, p + \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p + q)}{\cos p \cos q}.$$

(15) $$\text{tg}\, p - \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}(p - q)}{\cos p \cos q}.$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN. *Transformar en productos las expresiones:*

$$\begin{cases} M = \text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c - \text{sen}(a + b + c); \\ N = \cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c). \end{cases}$$

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2\,\text{sen} \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2},$$

$$\text{sen}\, c - \text{sen}(a + b + c) = -2\,\text{sen} \frac{a + b}{2} \cos \frac{a + b + 2c}{2},$$

$$M = 2\,\text{sen} \frac{a + b}{2} \left[\cos \frac{a - b}{2} - \cos \frac{a + b + 2c}{2} \right]$$

$$M = 4\,\text{sen} \frac{a + b}{2}\, \text{sen} \frac{b + c}{2}\, \text{sen} \frac{c + a}{2}. \qquad (1)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2},$$

$$\cos c + \cos(a + b + c) = 2\cos \frac{a + b + 2c}{2} \cos \frac{a + b}{2},$$

$$N = 2\cos \frac{a + b}{2} \left[\cos \frac{a - b}{2} + \cos \frac{a + b + 2c}{2} \right]$$

$$N = 4\cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{b + c}{2} \cos \frac{c + a}{2}. \qquad (2)$$

Si a, b, c son los ángulos de un triángulo: $a + b + c = \pi$,

$$\frac{a + b}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}, \quad \text{sen} \frac{a + b}{2} = \cos \frac{c}{2}, \quad \cos \frac{a + b}{2} = \text{sen} \frac{c}{2}.$$

Sea un triángulo de ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Se tiene:

$$\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}, \qquad \frac{\widehat{C} + \widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2},$$

$$\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2},$$

y

$$\text{sen}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \text{sen}\, 180^\circ = 0,$$

y de las relaciones (1) y (2), deduciremos:

$$\begin{cases} \text{sen}\, \widehat{A} + \text{sen}\, \widehat{B} + \text{sen}\, \widehat{C} = 4\cos \dfrac{\widehat{A}}{2} \cos \dfrac{\widehat{B}}{2} \cos \dfrac{\widehat{C}}{2}, \\ \cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} - 1 = 4\,\text{sen} \dfrac{\widehat{A}}{2}\, \text{sen} \dfrac{\widehat{B}}{2}\, \text{sen} \dfrac{\widehat{C}}{2}. \end{cases}$$

Empleo de ángulos auxiliares en los cálculos. — A veces es muy útil introducir en los cálculos funciones circulares nuevas que permiten simplificar aquéllos por alguna transformación trigonométrica.

Transformar un binomio A + B *o* A — B *en producto.*

Se puede suponer que A es mayor que B:

$$A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right) \text{ y } A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right).$$

Podemos poner $\frac{B}{A} = \cos \varphi$, puesto que $0 < \frac{B}{A} < 1$, luego:

$$\begin{cases} A + B = 2A \cos^2 \dfrac{\varphi}{2}, \\ A - B = 2A\, \text{sen}^2 \dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{A + B}{A - B} = \cot^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Como se ve, el ángulo φ es fácilmente calculable por logaritmos y se pueden calcular también log (A + B) y log (A — B) sin necesidad de hallar previamente A y B, si estos dos números los conocemos sólo por sus logaritmos.

Valiéndonos del mismo ángulo auxiliar φ, siendo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$, se encuentra:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{A^2\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right)},$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \left|\frac{A}{\cos \varphi}\right|.$$

Si suponemos $\frac{B}{A} = \cos \varphi$, tendremos:

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{A^2\left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right)} = |A \operatorname{sen} \varphi|.$$

Ecuaciones trigonométricas

Métodos generales para la resolución de una ecuación algebraica en sen x y cos x. Ecuación clásica a sen x + b cos x = c. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

DEFINICIONES. *Se dice de una ecuación que es* **trigonométrica** *cuando en ella figura alguna de sus incógnitas en forma de línea trigonométrica.*

Nosotros sólo nos ocuparemos de las ecuaciones donde entren las líneas trigonométricas de un solo arco o de sus múltiplos o submúltiplos.

Sea una ecuación de este género, que contenga las líneas trigonométricas de un arco x, de diversos múltiplos de x y de varios submúltiplos de x, tales como $\frac{x}{n}, \frac{x}{n'}, \frac{x}{n''}, \ldots$; tomemos el mínimo común múltiplo N de $n, n', n'', \ldots$; la ecuación considerada contendrá entonces solamente las líneas trigonométricas del arco $y = \frac{x}{N}$, y de varios arcos, múltiplos de y. Estas líneas trigonométricas podremos expresarlas en función de cos y y sen y, y nos quedará la ecuación de la forma,

$$f(\cos y, \operatorname{sen} y) = 0.$$

Métodos generales para la resolución de una ecuación algebraica en sen x y cos x. — La ecuación es de la forma

$$f(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0.$$

Si una de las líneas trigonométricas, por ejemplo sen x, *sólo figura en forma de potencias pares, se puede poner cos* x = u.

Entonces la ecuación $g(\cos x, \operatorname{sen}^2 x)$ quedará así:

$$g(u, 1 - u^2) = 0.$$

Se resuelve esta ecuación y obtenemos sus raíces $u_1, u_2, u_3 \ldots$ Para hallar las soluciones de x, es preciso resolver las ecuaciones $\cos x = u_1$; $\cos x = u_2$, $\cos x = u_3 \ldots$

EJEMPLO. *Resolver la ecuación*

$$\cos 3x - 2 \cos x + 1 = 0.$$

Pongámosla de la forma $f(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0$. Teniendo en cuenta que $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$, quedará,

$$\cos^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x - 2 \cos x + 1 = 0.$$

Como $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, suponiendo $\cos x = u$, quedará:

$$u^3 - 3(1 - u^2)u - 2u + 1 = 0.$$
$$4u^3 - 5u + 1 = 0.$$

Siendo 1 raíz de esta ecuación, se puede poner

$$(u - 1)(4u^2 + 4u - 1) = 0.$$

Las raíces son, pues, $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$; $u_3 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$.

Resolvamos ahora las ecuaciones $\cos x = u$:

De $\cos x = 1$ se tienen las soluciones $x = 2k\pi$.

De $\cos x = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ no se obtiene solución real, pues no existe ningún arco cuyo coseno sea inferior a -1.

De $\cos x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} = 0{,}20710$ se obtienen las soluciones $x = \pm 78° 2'51'' + 360° \cdot k'$. Luego, en resumen, tenemos la triple infinidad de soluciones de la ecuación dada:

$$2k\pi;\ + 78° 2'51'' + 360° \cdot k';\ - 78° 2'51'' + 360° \cdot k''.$$

Si en la ecuación dada $g(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0$ *las líneas sen* x *y cos* x *sólo entran en forma de potencias pares, o en el producto sen* x · *cos* x, se puede tomar como variable auxiliar $2x$. En efecto:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};\ \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}.$$

EJEMPLO. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \cos 4x.$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \cos 4x,$$

$$\frac{1 + \cos^2 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} = \cos 4x$$

o bien $2 + 2 \cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 4 \cos 4x.$

Se puede ahora poner $\cos^2 2x$ y $\operatorname{sen}^2 2x$ en función de $\cos 4x$:

$$2 + 1 + \cos 4x + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 4 \cos 4x,$$

de donde $\frac{7}{2} = \frac{7}{2} \cos 4x$ ó $\cos 4x = 1$; luego las soluciones de la ecuación son

$$4x = 2k\pi \quad \text{o} \quad x = k\frac{\pi}{2}.$$

Si el polinomio dado f *(sen* x, *cos* x) = 0 *es homogéneo en sen* x *y cos* x, se puede expresar la ecuación en función de tg x, sin más que dividir el primer miembro de la ecuación por la potencia más alta en cos x.

EJEMPLO. — *Sea la ecuación* $\sqrt{3} \cos^3 x + \cos^2 x \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 0.$

Dividiendo los dos miembros por $\cos^3 x$, y suponiendo $\operatorname{tg} x = t$, resulta:

$$-t^3 - \sqrt{3}\, t^2 + t + \sqrt{3} = 0,$$
$$t^3 + \sqrt{3}\, t^2 - t - \sqrt{3} = 0.$$

Resolvamos esta ecuación de tercer grado. Se puede poner así:

$$(t^2 - 1)(t + \sqrt{3}) = 0.$$

Esta ecuación nos proporciona las soluciones,

$$t = \pm 1, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$t = -\sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{3} + k'\pi.$$

A veces se puede hacer que aparezca la homogeneidad en algunas ecuaciones que aparentemente no son homogéneas:

Si en $f(\operatorname{sen} x, \cos x) = 0$ los grados de los diversos monomios en sen x y cos x tienen la misma paridad, se puede hacer la ecuación homogénea en sen x y cos x mediante la introducción en ella de factores de la forma $(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)^p$.

EJEMPLO. Sea $a \cos^3 x + b \operatorname{sen} x + c \cos x$.

Este polinomio puede ponerse así: $a \cos^3 x + (b \operatorname{sen} x + c \cos x) \cdot (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$ y ya queda homogéneo.

CASO GENERAL. — Si no se trata de alguno de los casos particulares citados, se puede poner $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, y expresar sen x y cos x en función de t;

Sea la ecuación $f(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0$; quedará así:

$$f\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) = 0.$$

Ecuación clásica: a sen x + b cos x = c. — Teniendo en cuenta lo dicho en el último párrafo, supongamos $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

La ecuación quedará,

$$\frac{2at}{1 + t^2} + \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} = c,$$

$$(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0.$$

Si las raíces de esta ecuación son t_1 y t_2, tendremos las soluciones:

$$x = 2 \operatorname{Arco} \operatorname{tg} t_1 + 2k\pi,$$
$$x = 2 \operatorname{Arco} \operatorname{tg} t_2 + 2k\pi.$$

Para que las raíces t_1 y t_2 sean reales es preciso que,

$$a^2 - (c - b)(c + b) \geq 0 \quad \text{ó} \quad a^2 + b^2 - c^2 \geq 0.$$

Este método se emplea en los problemas donde se pida una discusión de las soluciones. Esta discusión, como se ve, es la conocida de la ecuación de segundo grado.

Segundo método de resolución. — Este método consiste en el empleo, ya usado antes, de un ángulo auxiliar.

Se hace $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$,

de donde

$$a\,[\text{sen } x + \text{tg } \alpha \cos x] = c,$$

$$\frac{a}{\cos \alpha}\,(\text{sen } x \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cos x) = c,$$

$$\text{sen } (x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha.$$

El problema es posible si

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha \leqq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} \leqq 1 \quad \text{ó} \quad a^2 + b^2 - c^2 \geqq 0.$$

Si esta condición se cumple, supongamos

$$\text{arco sen}\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right) = \beta,$$

y las soluciones son

$$\begin{cases} x = \beta + 2k\pi - \alpha, \\ x = \pi - \beta + 2k'\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\text{o} \quad \begin{cases} x = \beta - \alpha + 2k\pi, \\ x = -(\alpha + \beta) + (2k' + 1)\pi. \end{cases}$$

Este método, que permite el empleo del cálculo logarítmico, se utiliza sobre todo en los problemas numéricos.

Método gráfico (*fig.* 24).—Supongamos $\cos x = X$, $\text{sen } x = Y$.

X e Y son las coordenadas de la extremidad del arco x en el círculo trigonométrico $X^2 + Y^2 = 1$, siendo los ejes de coordenadas Ox (eje de cosenos) y Oy (eje de senos). Por tanto, estas coordenadas deben verificar la ecuación de la recta

$$aY + bX = c.$$

Los puntos de intersección del círculo con esta recta nos proporcionan, por sus coordenadas, las líneas trigonométricas de los arcos x, soluciones de la ecuación

Fig. 24

$$a \text{ sen } x + b \cos x = c.$$

Ejemplo. *Resolver la ecuación* (1) $\text{sen } x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$

Como $\sqrt{3} = \text{tg}\,\frac{\pi}{3}$, será:

$$(2) \qquad \text{sen } x + \text{tg}\,\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2},$$

$$(3) \qquad \text{sen } x + \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x = \sqrt{2},$$

$$(4) \qquad \text{sen } x \cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3},$$

$$(5) \qquad \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4};$$

luego las soluciones son:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{12} + 2k\pi, \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi. \end{cases}$$

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. — Estudiaremos dos tipos de sistemas de ecuaciones: en el primero, los arcos desconocidos entrarán a la vez en forma algébrica y en forma trigonométrica; en el segundo, las incógnitas sólo entrarán en forma trigonométrica.

En ninguno de los dos casos se puede dar una regla general para la resolución. A veces es conveniente calcular la suma y la diferencia de las incógnitas.

Problemas. 1° *Calcular dos arcos, conociendo su suma y la suma de sus cosenos.*

$$\text{I} \quad \begin{cases} x + y = \alpha, \\ \cos x + \cos y = a. \end{cases}$$

La suma de los cosenos puede transformarse en producto:

$$\text{II} \quad \begin{cases} x + y = \alpha \ (1) \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a. \end{cases}$$

Se puede poner: (2) $\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$

Utilicemos un arco auxiliar, $\beta = \text{Arco cos}\,\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; tendremos

$$\frac{x-y}{2} = \pm\,\beta + 2k\pi;$$

esta ecuación con la (I) nos dan los dos sistemas

$$\text{III} \quad \begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = +\,2\beta + 4k\pi, \end{cases} \qquad \text{IV} \quad \begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = -\,2\beta + 4k'\pi. \end{cases}$$

De éstos, se obtienen los dos grupos de soluciones

$$\text{III}' \quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} + \beta + 2k\pi, \\ y = \dfrac{\alpha}{2} - \beta - 2k\pi. \end{cases} \qquad \text{IV}' \quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} - \beta + 2k'\pi. \\ y = \dfrac{\alpha}{2} + \beta - 2k'\pi. \end{cases}$$

El sistema tiene solución si se cumple la condición $\dfrac{a^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} \leqq 1.$

2° *Calcular dos arcos, conociendo su suma y la suma de sus tangentes.*

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \text{tg } x + \text{tg } y = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \alpha, \\ \dfrac{\text{sen}\,(x+y)}{\cos x \cos y} = a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\text{sen } \alpha}{a}. \end{cases}$$

Pero teniendo en cuenta que $2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$, se tiene,

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \cos(x - y) = \dfrac{2\,\text{sen } \alpha}{a} - \cos\alpha. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es ya fácil de resolver y nos proporciona los arcos pedidos.

3° *Calcular dos arcos, conociendo su suma y el producto de sus senos.*

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \text{sen } x \text{ sen } y = a, \\ 2 \text{ sen } x \text{ sen } y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \cos(x - y) = \cos\alpha + 2a. \end{cases}$$

De esta última ecuación se obtiene el valor de $x - y$, y para acabar de resolver el problema se sigue una marcha análoga a la del problema 1°.

4° *Hallar dos arcos, conociendo su suma y el cociente de sus tangentes.*

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \dfrac{\text{tg } x}{\text{tg } y} = a, \quad \dfrac{\text{sen } x \cos y}{\cos x \text{ sen } y} = a \end{cases}$$

$$\text{o} \quad \frac{a-1}{a+1} = \frac{\text{sen } x \cos y - \cos x \text{ sen } y}{\cos x \text{ sen } y + \text{sen } x \cos y},$$

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ \dfrac{\text{sen}\,(x-y)}{\text{sen}\,(x+y)} = \dfrac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

$$\text{o} \quad \begin{cases} x + y = \alpha, \\ \text{sen}\,(x - y) = \dfrac{a-1}{a+1}\,\text{sen } \alpha. \end{cases}$$

De esta última ecuación se obtiene el valor de $x - y$, y nos hallamos como en el caso 1°.

5° *Calcular dos arcos, conociendo la suma de sus senos y la de sus cosenos.*

$$\begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = a, \\ \cos x + \cos y = b \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2\,\text{sen}\,\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a, \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = b. \end{cases}$$

Dividiendo estas ecuaciones, miembro a miembro: $\text{tg}\,\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{a}{b}$, de donde obtenemos el valor de $x + y$, y ya queda reducido el problema al del caso 1°.

6° *Calcular dos arcos, conociendo la suma de sus tangentes y la tangente de su suma.*

$$\begin{cases} \text{tg } x + \text{tg } y = a, \\ \text{tg}\,(x + y) = b. \end{cases}$$

De la igualdad $\text{tg}\,(x + y) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y} = \dfrac{a}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y} = b$, se obtiene:

$$\text{tg } x \text{ tg } y = \frac{b - a}{b}.$$

Conociendo la suma y el producto de las tangentes de los arcos, formamos la ecuación de segundo grado,

$$X^2 - aX + \frac{b-a}{b} = 0,$$

cuyas raíces son tg x y tg y.

Para que el problema tenga solución, es preciso que $a^2 - 4\frac{b-a}{b} \geqq 0$.

Resolución de triángulos

Relaciones fundamentales en un triángulo. Relaciones en un triángulo rectángulo. Primera relación fundamental. Segunda relación fundamental. Tercera relación fundamental. Resolución de triángulos. Resolución de triángulos rectángulos. Cálculo de los elementos más usuales de un triángulo y de un cuadrilátero convexo inscriptible. Cuadrilátero convexo inscriptible. Problemas topográficos

Relaciones fundamentales en un triángulo. — Los ángulos de un triángulo los designaremos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, y sus lados opuestos a, b y c, respectivamente.

Un triángulo queda perfectamente determinado cuando se conocen tres de sus elementos, entre los que se encuentre, al menos, un segmento. Los demás elementos pueden calcularse apoyándonos en los dados y con el auxilio de las relaciones fundamentales entre todos ellos, que seguidamente vamos a demostrar.

Relaciones en un triángulo rectángulo. — TEOREMA. *En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo que forma con ella.*

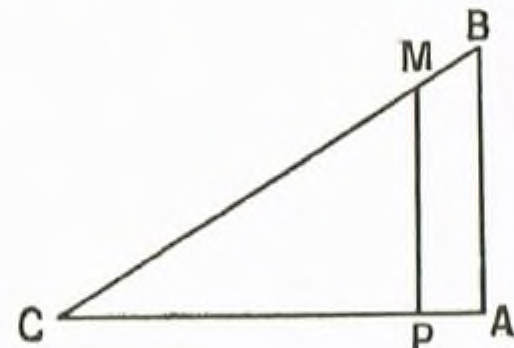


Fig. 25

Sea el triángulo CAB (*fig.* 25). Sean $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ los sentidos positivos de estas rectas. El valor algebraico del vector $\overrightarrow{CA}$ se confunde con la medida b del lado CA. Análogamente, es $\overrightarrow{CB} = a$ y uno de los ángulos que forman las direcciones positivas de CA y CB es el ángulo agudo C. Llevemos sobre CB el vector $\overrightarrow{CM}$ igual a la unidad positiva. El valor algebraico del vector $\overrightarrow{CP}$, proyección de $\overrightarrow{CM}$, es precisamente cos $\widehat{C}$.

Apliquemos el teorema de Thales:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CP}} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CM}}.$$

Si sustituimos estos vectores por sus valores algebraicos, tenemos:

$$\frac{b}{\cos \widehat{C}} = \frac{a}{1}, \text{ de donde, } \quad (1) \quad b = a \cos \widehat{C}.$$

Análogamente, será (2) $c = a \cos \widehat{B}$.

TEOREMA. *En un triángulo rectángulo, cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto a ese cateto.*

En efecto, los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios y por tanto el seno de uno de ellos es igual al coseno del otro. Podemos, pues, poner:

(3) $b = a \operatorname{sen} \widehat{B}$ (4) $c = a \operatorname{sen} \widehat{C}$.

TEOREMA. *En un triángulo rectángulo, cada cateto es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero o por la cotangente del ángulo opuesto al segundo.*

Si dividimos miembro a miembro las ecuaciones (4) y (1) y las (3) y (2), obtenemos,

(5) $c = b \operatorname{tg} \widehat{C}$, (6) $b = c \operatorname{tg} \widehat{B}$.

Pero sabemos que $\operatorname{cotg} \widehat{B} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}\right) = \operatorname{tg} \widehat{C}$, luego

(7) $c = b \operatorname{cotg} \widehat{B}$, (8) $b = c \operatorname{cotg} \widehat{C}$.

Primera relación fundamental. — *En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo opuesto al primero.*

Sabemos por la geometría que si el ángulo $\widehat{A}$ es agudo se verifica (*fig.* 26):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AH;$$

si el ángulo $\widehat{A}$ es obtuso, se tiene (*fig.* 27):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB \cdot AH.$$

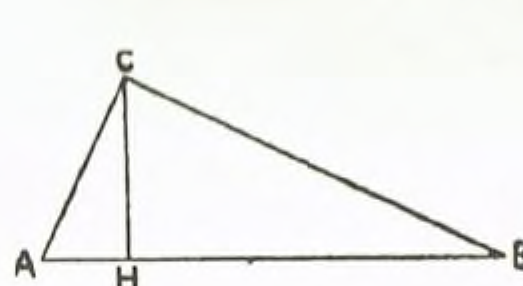


Fig. 26

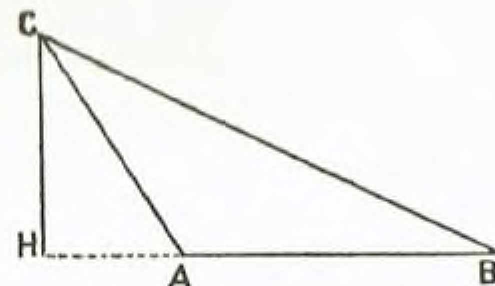


Fig. 27

En el primer caso, es $AH = AC \cdot \cos \widehat{A}$.

En el segundo caso, es $AH = -AC \cdot \cos \widehat{A}$.

Como se ve, se puede generalizar y poner, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos \widehat{A}$.

Entre los seis elementos de un triángulo se tiene el siguiente sistema de tres relaciones:

$$\text{I} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \widehat{B}, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}. \end{cases}$$

Segunda relación fundamental. — *En un triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.*

En las figuras 26 y 27 podemos observar que

$CH = AC \operatorname{sen} \widehat{CAH} = BC \operatorname{sen} \widehat{CBH}$, luego $b \operatorname{sen} \widehat{A} = a \operatorname{sen} \widehat{B}$. De esta relación deducimos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}.$$

Análogamente será $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$, luego tenemos un segundo sistema de tres relaciones:

$$\text{II} \begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}, \\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi. \end{cases}$$

Tercera relación fundamental. — *En un triángulo, un lado cualquiera es igual a la suma de los productos de los otros dos lados por el coseno del ángulo que forman con el primero.*

Proyectando el contorno formado por dos lados sobre el tercero, se obtiene en cada caso una de las tres relaciones que siguen:

$$\begin{cases} a = b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B}, \\ b = c \cos \widehat{A} + a \cos \widehat{C}, \\ c = a \cos \widehat{B} + b \cos \widehat{A}. \end{cases}$$

Resolución de triángulos. — Resolver un triángulo es calcular cada uno de los elementos desconocidos y la superficie apoyándonos en los elementos conocidos. Generalmente, el cálculo se hace con auxilio de los logaritmos.

1er CASO. *Resolver un triángulo conociendo un lado y sus ángulos adyacentes.*

Datos: a, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Incógnitas: b, c, $\widehat{A}$, S.

El ángulo que falta por conocer, es $\widehat{A} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{C})$.

De las relaciones $\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$, obtenemos:

$$b = \frac{a \text{ sen } \widehat{B}}{\text{sen } \widehat{A}}; \qquad c = \frac{a \text{ sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}}.$$

Superficie: $S = \dfrac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{CH} = \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } \widehat{A}$; sustituyendo estos valores por los obtenidos antes:

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \text{ sen } \widehat{B} \text{ sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}}.$$

2º CASO. *Resolver un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido.*

Datos: b, c, $\widehat{A}$ (si $b \geq c$, también será $\widehat{C} \geq \widehat{B}$).

Incógnitas: a, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, S.

EJEMPLO NUMÉRICO: 1er CASO

Datos:	Fórmulas:	Resultados:
$a = 794{,}86$	$\widehat{A} = \pi - (\widehat{B} + \widehat{C})$	$\widehat{A} = 68°22'51''$
$\widehat{B} = 73°45'23''$	$b = \dfrac{a \text{ sen } \widehat{B}}{\text{sen } \widehat{A}}$	$b = 820{,}88$
$\widehat{C} = 37°51'46''$	$c = \dfrac{a \text{ sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}}$	$c = 524{,}79$
	$S = \dfrac{1}{2} \dfrac{a^2 \text{ sen } \widehat{B} \text{ sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}}$	$S = 200\,241$

Cálculo de $\widehat{A}$: $180° = 179°59'60''$ $\widehat{B} + \widehat{C} = 111°37'\ 9''$ $\widehat{A} = 68°22'51''$ Cálculo de b: $\log a = 2{,}900\,29$ $\log \text{sen } \widehat{B} = \bar{1}{,}982\,31$ $\text{colog sen } \widehat{A} = 0{,}031\,68$ $\log b = 2{,}914\,28$ $b = 820{,}88$ Cálculo de c: $\log a = 2{,}900\,29$ $\log \text{sen } \widehat{C} = \bar{1}{,}788\,01$ $\text{colog sen } \widehat{A} = 0{,}031\,68$ $\log c = 2{,}719\,98$ $c = 524{,}79$ Cálculo de S: $2 \log a = 5{,}800\,58$ $\log \text{sen } \widehat{B} = \bar{1}{,}982\,31$ $\log \text{sen } \widehat{C} = \bar{1}{,}788\,01$ $\text{colog sen } \widehat{A} = 0{,}031\,68$ $\text{colog } 2 = \bar{1}{,}698\,97$ $\log S = 5{,}301\,55$ $S = 200\,241$	Cálculos auxiliares: $\log 794{,}8 = 2{,}900\,26$ ($\Delta = 5$) $6 = 3$ $\log a = 2{,}900\,29$ $\log \text{sen } 68°22' = \bar{1}{,}968\,28$ ($\Delta = 5$) $51'' = 4$ $\log \text{sen } \widehat{A} = \bar{1}{,}968\,32$ $\log \text{sen } 73°45' = 1{,}982\,29$ ($\Delta = 4$) $23'' = 2$ $\log \text{sen } \widehat{B} = \bar{1}{,}982\,31$ $\log \text{sen } 37°51' = \bar{1}{,}787\,88$ ($\Delta = 17$) $46'' = 13$ $\log \text{sen } \widehat{C} = \bar{1}{,}788\,01$ ($\Delta = 5$) $2{,}914\,24 = \log 820{,}8$ $+ 4$ $,08$ $2{,}914\,28 = \log 820{,}88$ ($\Delta = 8$) $2{,}719\,91 = \log 524{,}7$ $+ 7 =$ $,09$ $2{,}719\,98 = \log 524{,}79$ ($\Delta = 22$) $5{,}301\,46 = \log 2\,002$ $+ 9 =$ $,41$ $5{,}301\,55 = \log 200\,241$

Con ayuda de las relaciones del sistema II, podemos establecer

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \pi - \widehat{A}.$$

$$\frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = \frac{b + c}{\text{sen } \widehat{B} + \text{sen } \widehat{C}} = \frac{b - c}{\text{sen } \widehat{B} - \text{sen } \widehat{C}}$$

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{2 \text{ sen } \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \cos \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}}{2 \text{ sen } \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \cos \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}} = \frac{\text{tg } \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}}{\text{tg } \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}},$$

de donde

$$\text{tg } \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{b - c}{b + c} \text{ cotg } \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Como $0 \leq \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$, si suponemos

$$\frac{\alpha}{2} = \text{Arco tg} \left[\frac{b - c}{b + c} \text{ cotg } \frac{\widehat{A}}{2} \right]$$

se tiene
$$\begin{cases} \widehat{B} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\alpha}{2}, \\ \widehat{C} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\widehat{A}}{2} - \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Y, por último, tenemos:

$$a = b \frac{\text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}},$$

$$S = \frac{1}{2} bc \text{ sen A}.$$

EJEMPLO NUMÉRICO: 2º CASO

Datos:	Fórmulas:	Resultados:
$b = 675{,}26$ $c = 548{,}75$ $\widehat{A} = 65{,}456$ gr	$\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 100 \text{ gr} - \dfrac{\widehat{A}}{2}$ $\text{tg} \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \dfrac{b - c}{b + c} \text{ cotg } \dfrac{\widehat{A}}{2}$	$\widehat{B} = 78{,}795\,6$ gr $\widehat{C} = 55{,}748\,4$ gr
	$a = b \dfrac{\text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}}$;	$a = 611{,}89$
	$S = \dfrac{1}{2} bc \text{ sen } \widehat{A}$	$S = 158\,657$

Cálculo de $\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$ $= 100 \text{ gr} - \dfrac{\widehat{A}}{2}$: $\dfrac{\widehat{A}}{2} = 32{,}728$ gr $\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 67{,}272$ gr Cálculo de $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$: $\log b - c = 2{,}102\,12$ $\text{colog } b + c = \bar{4}{,}912\,22$ $\log \text{cotg} \dfrac{\widehat{A}}{2} = 0{,}248\,15$ $\log \text{tg} \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \bar{1}{,}262\,49$ $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 11{,}523\,6$ gr Cálculo de $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$: $\dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 67{,}272$ gr $\dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 11{,}523\,6$ gr $\widehat{B} = 78{,}795\,6$ gr $\widehat{C} = 55{,}748\,4$ gr Cálculo de a: $\log b = 2{,}829\,47$ $\log \text{sen } \widehat{A} = \bar{1}{,}932\,65$ $\text{colog sen } \widehat{B} = 0{,}024\,55$ $\log a = 2{,}786\,67$ $a = 611{,}89$ Cálculo de S: $\log b = 2{,}829\,47$ $\log c = 2{,}739\,37$ $\log \text{sen } \widehat{A} = \bar{1}{,}932\,65$ $\text{colog } 2 = 1{,}698\,97$ $5{,}200\,46$ $S = 158\,657$	Cálculos auxiliares: $b - c = 126{,}51$ $b + c = 1\,224{,}01$ $\log 126{,}5 = 2{,}102\,09$ ($\Delta = 34$) $1 = 3$ $\log 126{,}51 = 2{,}102\,12$ $\log 1\,224 = 3{,}087\,78$ $\log \text{cotg } 32{,}72 \text{ gr} = 0{,}248\,28$ $+ 8 = - 13$ $\log \text{cotg } 32{,}728 \text{ gr} = 0{,}248\,15$ ($\Delta = 38$) $\bar{1}{,}262\,35 = \log 11{,}52$ gr $+ 14 =$ 36 $\bar{1}{,}262\,49 = \log 11{,}523\,6$ gr ($\Delta = 4$) $\log \text{sen } 65{,}45 \text{ gr} = \bar{1}{,}932\,63$ $+ 6 = 2$ $\log \text{sen } 65{,}456 \text{ gr} = \bar{1}{,}932\,65$ ($\Delta = 2$) $\log \text{sen } 78{,}79 \text{ gr} = \bar{1}{,}975\,44$ $+ 57 = 1$ $\log \text{sen } 78{,}795\,6 \text{ gr} = \bar{1}{,}975\,45$ ($\Delta = 7$) $2{,}786\,61 = \log 611{,}8$ $+ 6 = 9$ $2{,}786\,67 = \log 611{,}89$ $\log 548{,}7 = 2{,}739\,33$ $+ 5 = 4$ $\log 548{,}75 = 2{,}739\,37$

DISCUSIÓN. — Los valores encontrados para a, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, deben ser positivos. Es evidente que los dos primeros lo son.

Para que $\widehat{C}$ sea positivo, por ser $0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, es preciso que

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}$$

o
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2}$$

o
$$\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2} < \operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Esta condición se cumple inexorablemente; luego el problema es siempre posible y admite una solución única.

OBSERVACIONES. — 1ª El lado a se puede calcular también por la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.$$

2ª Si los lados b y c vienen dados por sus logaritmos y no necesitamos sus valores numéricos, podemos evitar el hallar éstos. En efecto:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Suponiendo $\frac{c}{b} = \operatorname{tg}\theta$:

$$\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}} = \frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),$$

de donde:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2},$$

fórmula calculable por logaritmos, sin tener que obtener $b - c$ y $b + c$.

3er CASO (caso dudoso). — *Resolver un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

Datos: a, b, $\widehat{A}$.

Incógnitas: c, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, S.

La relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$ nos da: $\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}$.

Para que exista solución al problema es preciso que $\frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A} \leq 1$.

Si esta condición se cumple, hay dos soluciones posibles para $\widehat{B}$:

$$\widehat{B_1} = \alpha = \operatorname{Arc\,sen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}\right)$$

y
$$\widehat{B_2} = \pi - \alpha.$$

A estas soluciones de $\widehat{B}$ les corresponden para $\widehat{C}$ los valores $\pi - \widehat{A} - \alpha$ y $\alpha - \widehat{A}$, respectivamente. Una vez conocidos los ángulos, será:

$$c = \frac{a\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\widehat{C}.$$

En resumen, existen dos soluciones posibles al problema:

$$\begin{cases} (1)\ \widehat{B_1} = \alpha, & \widehat{C_1} = \pi - \widehat{A} - \alpha,\ c_1 = \dfrac{a\operatorname{sen}\widehat{C_1}}{\operatorname{sen}\widehat{A}},\ S_1 = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\widehat{C_1} \\ (2)\ \widehat{B_2} = \pi - \alpha, & \widehat{C_2} = \alpha - \widehat{A},\ c_2 = \dfrac{a\operatorname{sen}\widehat{C_2}}{\operatorname{sen}\widehat{A}},\ S_2 = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\widehat{C_2}. \end{cases}$$

Para que estas soluciones sean válidas, es preciso que los valores encontrados para $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ sean positivos.

En la solución (1), $\widehat{B_1} > 0$, luego para que $\widehat{C_1}$ sea positivo, ha de ser:

$$\alpha < \pi - \widehat{A}.$$

Si $\widehat{A} \leq \frac{\pi}{2}$, $\pi - \widehat{A} \geq \frac{\pi}{2}$, luego por ser α un ángulo agudo, la condición anterior se cumple.

Si $\widehat{A} \leq \frac{\pi}{2}$, es preciso que $\frac{b\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} < \operatorname{sen}\widehat{A}$, o sea $b < a$.

En resumen
$$\begin{cases} \widehat{A} \leq \dfrac{\pi}{2},\ b\operatorname{sen}\widehat{A} < a\ :\ \text{la solución (1) vale.} \\ \widehat{A} > \dfrac{\pi}{2},\ b < a\ :\ \text{la solución (1) vale.} \end{cases}$$

En la solución (2), $\widehat{B_2} > 0$, será $\widehat{C_2} > 0$ si $\alpha > \widehat{A}$ o (por ser α y, por tanto, $\widehat{A}$, agudos) si

$$\operatorname{sen}\alpha > \operatorname{sen}\widehat{A}$$

$$\frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A} > \operatorname{sen}\widehat{A}$$

$$b > a.$$

En resumen, $\widehat{A} < \frac{\pi}{2}$, $b\operatorname{sen}\widehat{A} < a < b$: la solución (2), vale.

Si $b\operatorname{sen}\widehat{A} = a$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{C} = \frac{\pi}{2} - $ A, y $c = a\operatorname{cotg}\widehat{A}$. Esta solución sólo es válida si $\widehat{A}$ es agudo, pues en caso contrario sería c negativo.

Reuniendo todas estas conclusiones, tenemos:

$$\widehat{A} < \frac{\pi}{2}\begin{cases} b < a, & 1 \text{ solución,} \\ b\operatorname{sen}\widehat{A} < a < b, & 2 \text{ soluciones,} \\ b\operatorname{sen}\widehat{A} = a \text{ ó } a = b, & 1 \text{ solución.} \end{cases}$$

En todos los demás casos, no hay solución.

Esta discusión se puede hacer, tratando de construir geométricamente el triángulo, conocidos a, b y $\widehat{A}$. Se traza el arco capaz del ángulo $\widehat{A}$ sobre el lado BC = a. Con centro en C se traza una circunferencia de radio b. En la intersección de estas dos líneas se encontrará el tercer vértice A.

Si $\widehat{A}$ es obtuso (*fig.* 28), hay una solución única, si $b < a$; si $b > a$, no hay solución al problema.

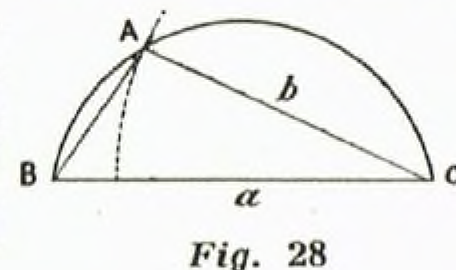


Fig. 28

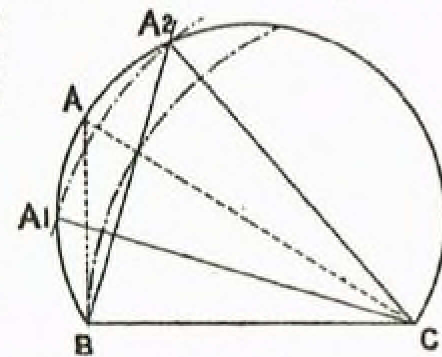


Fig. 29

Si $\widehat{A}$ es agudo (*fig.* 29) hay:

Una solución, si $b < a$.

Dos soluciones, si $\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} > b > a$ o si $b\operatorname{sen}\widehat{A} < a < b$.

Ninguna solución, si $b > \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$ o si $b\operatorname{sen}\widehat{A} > a$.

4º CASO. — *Resolver un triángulo, conociendo sus tres lados.*

Datos: a, b, c.

Incógnitas: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Las relaciones del sistema fundamental (1) nos proporcionan

$$\begin{cases} \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \\ \cos\widehat{B} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \\ \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

Transformemos estas fórmulas en otras, calculables por logaritmos:

$$1 - \cos\widehat{A} = 2\operatorname{sen}^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc},$$

$$1 + \cos\widehat{A} = 2\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}.$$

Ejemplo numérico: 3er caso

Datos	Fórmulas:	Resultados:
$a = 703{,}95$ $b = 864{,}53$ $\widehat{A} = 53°18'35''$	$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}$ $\widehat{C} = \pi - \widehat{A} - \widehat{B}$ $c = \frac{a\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$ $S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\widehat{C}$	1ª solución $\widehat{B}_1 = 80°$ $\widehat{C}_1 = 46°41'25''$ $c_1 = 638{,}8$ $S_1 = 221\,421$ 2ª solución $\widehat{B}_2 = 100°$ $\widehat{C}_2 = 26°41'25''$ $c_2 = 394{,}3$ $S_2 = 136\,675$

	Cálculos auxiliares:
Cálculo de $\widehat{B}$: $\log b = 2{,}936\,78$ $\operatorname{colog} a = \bar{3}{,}152\,46$ $\log\operatorname{sen}\widehat{A} = \bar{1}{,}904\,11$ $\log\operatorname{sen}\widehat{B} = \bar{1}{,}993\,35$ $\widehat{B}_1 = 80°,\quad \widehat{B}_2 = 100°$ Cálculo de $\widehat{C}$: $\widehat{C}_1 = 180° - 80° - 53°18'35'' = 46°41'25''$ $\widehat{C}_2 = 180° - 100° - 53°18'35'' = 26°41'25''$ Cálculo de c: $\log a = 2{,}847\,54$ $\log\operatorname{sen}\widehat{C}_1 = \bar{1}{,}861\,93$ $\operatorname{colog}\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}095\,89$ $\log c_1 = 2{,}805\,36$ $c_1 = 638{,}8$ $\log a = 2{,}847\,54$ $\log\operatorname{sen}\widehat{C}_2 = \bar{1}{,}652\,40$ $\operatorname{colog}\operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}095\,89$ $\log c_2 = 2{,}595\,83$ $c_2 = 394{,}3$ Cálculo de S: $\log a = 2{,}847\,54$ $\log b = 2{,}936\,78$ $\log\operatorname{sen}\widehat{C}_1 = \bar{1}{,}861\,93$ $\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}698\,97$ $\log S_1 = 5{,}345\,22$ $S_1 = 221\,441$ $\log a = 2{,}847\,54$ $\log b = 2{,}936\,78$ $\log\operatorname{sen}\widehat{C}_2 = \bar{1}{,}652\,40$ $\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}698\,97$ $\log S_2 = 5{,}135\,69$ $S_2 = 136\,675$	$\log 864{,}5 = 2{,}936\,76 \quad (\Delta = 6)$ $3 = 2$ $\log 864{,}53 = 2{,}936\,78$ $\log 703{,}9 = 2{,}847\,51 \quad (\Delta = 6)$ $5 = 3$ $\log 703{,}95 = 2{,}847\,54$ $\log\operatorname{sen} 53°18' = \bar{1}{,}904\,05 \quad (\Delta = 10)$ $35'' = 6$ $\log\operatorname{sen} 53°18'35'' = \bar{1}\,904\,11$ $\log\operatorname{sen} 46°41' = \bar{1}{,}861\,88 \quad (\Delta = 12)$ $25'' = 5$ $\log\operatorname{sen} 46°41'25'' = \bar{1}{,}861\,93$ $\log\operatorname{sen} 26°41' = \bar{1}{,}652\,30 \quad (\Delta = 25)$ $25'' = 10$ $\log\operatorname{sen} 26°41'25'' = \bar{1}{,}652\,40$ $5{,}345\,18 = \log 221\,4..$ $+\ 4 = 21$ $(\Delta = 19)\quad 5{,}345\,22 = \log 221\,421$ $5{,}135\,45 = \log 136\,6..$ $+\ 24 = 75$ $(\Delta = 32)\quad 5{,}135\,69 = \log 136\,675$

Suponiendo:

$$\begin{cases} a + b + c = 2p, \\ a + b - c = 2(p - c), \\ b + c - a = 2(p - a), \\ c + a - b = 2(p - b), \end{cases} \qquad \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)},$$

los valores $\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2}$ son positivos, luego podemos escribir:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Estas fórmulas las simplificamos introduciendo el valor r del radio del círculo inscrito en el triángulo. Sabemos que

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr,$$

luego,

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Por tanto, las fórmulas que buscábamos son:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{p-a},\ \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{r}{p-b},\ \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r}{p-c};\ S = pr.$$

Resolución de triángulos rectángulos. —

1º *Conociendo la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* $\widehat{B}$.

$$\widehat{C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B},\ b = a\operatorname{sen}\widehat{B},\ c = a\cos\widehat{B},\ S = \frac{bc}{2} = \frac{a^2\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{B}}{2}.$$

2º *Conociendo un cateto* b *y un ángulo agudo* $\widehat{B}$.

$$\widehat{C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B},\ a = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}},\ c = b\operatorname{tg}\widehat{C},\ S = \frac{bc}{2} = \frac{b^2\operatorname{tg}\widehat{C}}{2}.$$

Ejemplo numérico: 4º caso

Datos:	Fórmulas:	Resultados:
$a = 125{,}71$ $b = 102{,}57$ $c = 86{,}54$	$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ $\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{p-a}$ $\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{r}{p-b}$ $\operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r}{p-c}$ $S = pr$	$\widehat{A} = 92{,}066$ gr $\widehat{B} = 60{,}063$ gr $\widehat{C} = 47{,}871$ gr $S = 4\,403{,}7$

	Cálculos auxiliares:
$2p = 314{,}82$ $p = 157{,}41$ $p - a = 31{,}70$ $p - b = 54{,}84$ $p - c = 70{,}87$ Cálculo de $\log r$: $\log(p-a) = 1{,}501\,06$ $\log(p-b) = 1{,}739\,10$ $\log(p-c) = 1{,}850\,46$ $\operatorname{colog} p = \bar{3}{,}802\,97$ $2\log r = 2{,}893\,59$ $\log r = 1{,}446\,795$ Cálculo de $\widehat{A}$: $\log r = 1{,}446\,795$ $\operatorname{colog}(p-a) = \bar{2}{,}498\,94$ $\log\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \bar{1}{,}945\,735$ $\frac{\widehat{A}}{2} = 46{,}033\,2$ gr Cálculo de $\widehat{B}$: $\log r = 1{,}446\,795$ $\operatorname{colog}(p-b) = \bar{2}{,}260\,90$ $\log\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \bar{1}{,}707\,695$ $\frac{\widehat{B}}{2} = 30{,}031\,5$ gr Cálculo de $\widehat{C}$: $\log r = 1{,}446\,705$ $\operatorname{colog}(p-c) = \bar{2}{,}149\,54$ $\log\operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = \bar{1}{,}596\,335$ $\frac{\widehat{C}}{2} = 23{,}935\,7$ gr Cálculo de S: $\log p = 2{,}197\,03$ $\log r = 1{,}446\,79$ $\log S = 3{,}643\,82$ $S = 4\,403{,}1$	$\log 157{,}4 = 2{,}197\,00 \quad (\Delta = 28)$ $1 \quad 3$ $\log 157{,}41 = 2{,}197\,03$ $(\Delta = 14)\ \bar{1}{,}945\,69 = \log\operatorname{tg} 46{,}03$ gr $+\ 45 \quad 32$ $\bar{1}{,}945\,735 = \log\operatorname{tg} 46{,}033\,2$ gr $(\Delta = 17)\ \bar{1}{,}707\,67 = \log\operatorname{tg} 30{,}03$ gr $+\ 25 \quad 15$ $\bar{1}{,}707\,695 = \log\operatorname{tg} 30{,}031\,5$ gr $(\Delta = 20)\ \bar{1}{,}596\,22 = \log\operatorname{tg} 23{,}93$ gr $+\ 115 \quad 57$ $\bar{1}{,}596\,335 = \log\operatorname{tg} 23{,}935\,7$ gr $(\Delta = 10)\ 3{,}643\,75 = \log 4\,403$ $+\ 7 \quad 7$ $3{,}643\,82 = \log 4\,403{,}7$

3° *Conociendo la hipotenusa* a *y un cateto* b. (Para que este problema sea posible tiene que cumplirse la condición, $b < a$). $\widehat{B}$ viene determinado por

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a},\ \widehat{C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B},\ c = a \cos \widehat{B},\ S = \frac{bc}{2} = \frac{b^2 \operatorname{tg} \widehat{C}}{2};$$

4° *Conociendo los dos catetos* b *y* c. $\widehat{B}$ viene determinado por

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c},\ \widehat{C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B},\ a = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}},\ S = \frac{bc}{2}.$$

Cálculo de los elementos más usuales de un triángulo y de un cuadrilátero convexo inscriptible. — *Algunas fórmulas útiles en un triángulo cualquiera:*

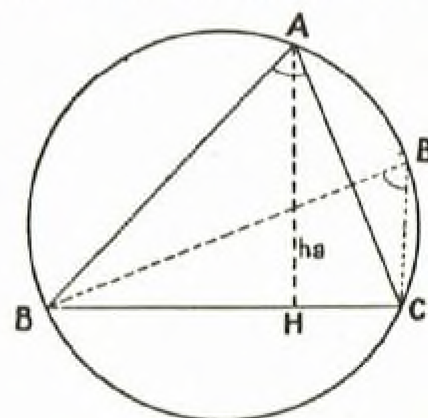


Fig. 30

1° *Radio del círculo circunscrito.* — El diámetro del círculo circunscrito a un triángulo es igual al cociente de un lado dividido por el seno del ángulo opuesto. Sea el triángulo ABC y su círculo circunscrito (*fig.* 30). Tracemos el diámetro BB′. El triángulo BCB′ es rectángulo y, por tanto, se tiene

$$BC = BB' \operatorname{sen} \widehat{BB'C}.$$

El ángulo $\widehat{BB'C}$ es igual o suplementario al ángulo $\widehat{A}$. En cualquiera de estos dos casos es $\operatorname{sen} \widehat{BB'C} = \operatorname{sen} \widehat{A}$, luego la fórmula anterior queda así:

$$a = 2\,R \operatorname{sen} \widehat{A}.$$

Las fórmulas fundamentales del segundo sistema pueden ponerse, por tanto, de esta forma:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2\,R;$$

2° *Altura en función de los lados.* — Teniendo en cuenta la fórmula de la superficie del triángulo en función de sus lados, tenemos:

$$\frac{1}{2}\,a h_a = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

$$h_a = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{a}$$

Análogamente, será:

$$h_b = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{b},$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{c};$$

3° *Radio del círculo inscrito en función de un lado y de los ángulos.* — Sea ω el centro del círculo inscrito (*fig.* 31). En todos los casos es:

$$BC = BI + IC = r \operatorname{cotg} \frac{\widehat{B}}{2} + r \operatorname{cotg} \frac{\widehat{C}}{2},$$

de donde,

$$r = \frac{a}{\operatorname{cotg} \frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\widehat{C}}{2}}.$$

Ahora bien,

$$\operatorname{cotg} \frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\widehat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{\cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\widehat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\widehat{C}}{2}}.$$

Luego, finalmente,

$$r = a\,\frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\widehat{C}}{2}}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}};$$

4° *Radios de los círculos exinscritos en función de los tres lados.* — El área del triángulo ABC (*fig.* 32) es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABω′ y ACω′, menos el área del triángulo Bω′C.

Estos tres triángulos tienen por altura el radio r_a del círculo exinscrito correspondiente al ángulo $\widehat{A}$, y por base los lados b, c, a, respectivamente, luego:

$$S = \frac{1}{2}\,r_a\,(b + c - a) = r_a\,(p - a).$$

Sustituyendo S por su valor en función de los tres lados, tenemos:

$$r_a = \sqrt{\frac{p\,(p-b)\,(p-c)}{p-a}}.$$

Análogamente,

$$r_b = \sqrt{\frac{p\,(p-c)\,(p-a)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)}{p-c}};$$

5° *Radios de los círculos exinscritos en función de un lado y de los ángulos.* — En todos los casos se tiene,

$$BC = BI + IC$$

$$= r_a \left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}\right) \right] =$$

$$= r_a \left(\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2} \right)$$

Sabemos que

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} + \operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{\cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2}}.$$

Por consiguiente, es:

$$r_a = a\,\frac{\cos \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{C}}{2}}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}}.$$

Análogamente,

$$r_b = b\,\frac{\cos \frac{\widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\cos \frac{\widehat{B}}{2}}, \qquad r_c = c\,\frac{\cos \frac{\widehat{A}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2}}{\cos \frac{\widehat{C}}{2}};$$

6° *Cálculo de las bisectrices interiores en función de los lados y de los ángulos.* — Sea el triángulo ABC y la bisectriz AD (*fig.* 33). La superficie del triángulo ABC es la suma de las superficies de los triángulos ABD y DAC. Designemos por d_a la longitud del segmento AD:

$$c d_a \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} + b d_a \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2} = bc \operatorname{sen} \widehat{A};$$

$$d_a = \frac{bc \operatorname{sen} \widehat{A}}{(b+c) \operatorname{sen} \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}.$$

Análogamente,

$$d_b = \frac{2ca \cos \frac{\widehat{B}}{2}}{c+a}, \qquad d_c = \frac{2\,ab \cos \frac{\widehat{C}}{2}}{a+b}.$$

Sustituyendo b y c por sus valores, $\dfrac{a \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$ y $\dfrac{a \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$, respectivamente, se encuentran las fórmulas:

$$d_a = \frac{a \operatorname{sen} \widehat{B} \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A} \cos \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}, \qquad d_b = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{C} \operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{B} \cos \frac{\widehat{C}-\widehat{A}}{2}}$$

$$d_c = \frac{c \operatorname{sen} \widehat{A} \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{C} \cos \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}.$$

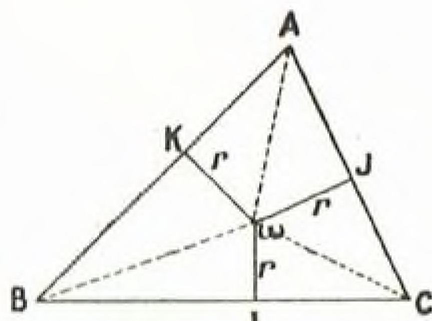


Fig. 31

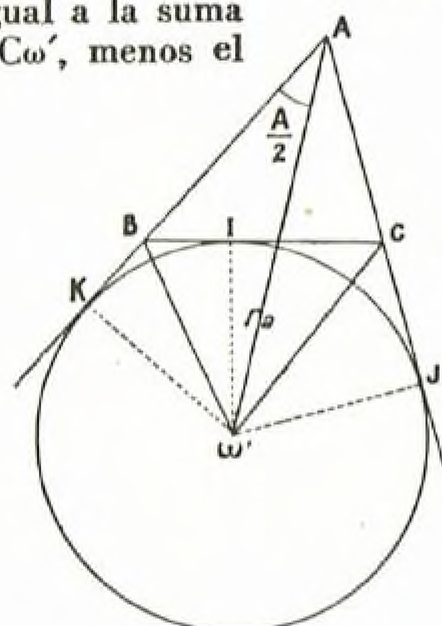


Fig. 32

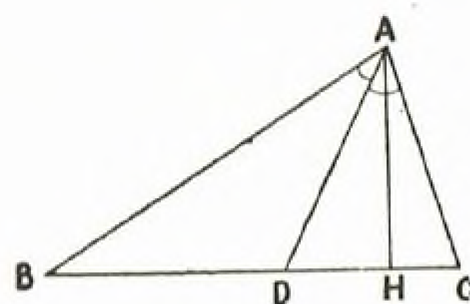


Fig. 33

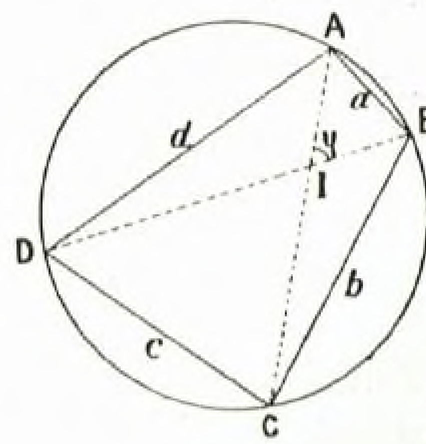


Fig. 34

Cuadrilátero convexo inscriptible. — Observemos primeramente, dados los cuatro lados por orden de recorrido del perímetro del cuadrilátero, si ellos definen un único cuadrilátero convexo inscriptible (*fig.* 34). Esto se cumplirá si se pueden calcular los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, tales que $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$, $\widehat{B} + \widehat{D} = \pi$, en función de los lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

De los triángulos DAB y CDB, podemos deducir el valor de la diagonal BD:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{C}.$$

Siendo $\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A}$, se tiene

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A} = b^2 + c^2 + 2bc \cos \widehat{A}, \text{ luego:}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)}.$$

Se puede obtener el valor de $\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2}$ por medio de una fórmula calculable por logaritmos:

$$\begin{cases} 1 - \cos \widehat{A} = \dfrac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad + bc)} = \dfrac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2\,(ad + bc)}, \\ 1 + \cos \widehat{A} = \dfrac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \dfrac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2\,(ad + bc)}, \end{cases}$$

Haciendo unas transformaciones, se tiene:

$$\begin{cases} 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{(b + c + a - d)\,(b + c - a + d)}{2(ad + bc)} = \\ \qquad = \dfrac{2(p - a)\,(p - d)}{ad + bc}, \\ 2 \cos^2 \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{(a + d + b - c)\,(a + d - b + c)}{2(ad + bc)} = \\ \qquad = \dfrac{2(p - b)\,(p - c)}{ad + bc}; \end{cases}$$

suponiendo $a + b + c + d = 2p$ y dividiendo estas dos ecuaciones miembro a miembro, se obtiene

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - d)}{(p - b)\,(p - c)}}.$$

Análogamente:

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - a)}{(p - c)\,(p - d)}}.$$

Discusión. — Sea a el lado mayor del cuadrilátero. Los valores $p - b$, $p - c$, $p - d$ son, entonces, positivos. Para que $p - a$ sea también positivo se ha de cumplir:

$$b + c + d > a.$$

Esta es la condición que ha de cumplirse necesariamente para que las fórmulas obtenidas tengan sentido.

Conocido el ángulo $\widehat{A}$ en función de los lados, puede construirse el triángulo DAB, definido por a, d, $\widehat{A}$. Se construye luego el triángulo BCD del que se conocen sus tres lados: el lado BD, en posición y los lados $BC = b$ y $DC = c$, en longitud. Para ello se toma el punto C de intersección (situado al otro lado de A con respecto a BD) de los arcos de círculo con centros en B y D y radios b y c respectivamente.

En el cuadrilátero convexo construido, el ángulo $\widehat{B}$ ha de ser igual al obtenido por la fórmula:

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - a)}{(p - c)\,(p - d)}}.$$

Cálculo de las diagonales.

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A}$$

$$= a^2 + d^2 - 2ad\, \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} =$$

$$= \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc},$$

$$BD^2 = \frac{(ab + cd)\,(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Análogamente,

$$AC^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd},$$

de donde resulta,
$$\begin{cases} BD \cdot AC = ac + bd. \\ \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{ab + cd}{ad + bc}. \end{cases}$$

Estas dos últimas fórmulas expresan los dos teoremas de Ptolomeo, conocidos ya por la Geometría:

1º *El producto de las diagonales de un cuadrilátero convexo inscriptible es igual a la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos.*

2º *En un cuadrilátero inscriptible, la razón de sus diagonales es igual a la razón de las sumas de productos de los lados que concurren en sus extremos.*

Problemas topográficos. — Por medio de la Trigonometría podemos hallar la distancia entre dos puntos situados sobre un terreno en el que no se puede medir dicha distancia directamente. Para ello nos auxiliaremos de otras longitudes y ángulos fácilmente medibles y que relacionamos con la distancia buscada en figuras geométricas capaces de determinarla. (Ver Topografía.)

Trigonometría esférica

Triángulo esférico. — *Se llama* **triángulo esférico** *la figura* ABC *comprendida entre tres arcos de círculos máximos trazados sobre una esfera.*

Trazando los radios OA, OB, OC, que unen el centro de la esfera con los vértices del triángulo esférico (*fig.* 35) y considerando los planos que determinan estos radios dos a dos, obtenemos el triedro OABC, cuyas caras AOB, BOC, COA tienen por medida los lados c, a, b del triángulo esférico, respectivamente.

Los diedros formados por los semiplanos de los lados son los **ángulos del triángulo esférico.** El círculo máximo normal al diámetro que pasa por A cortará los lados AB y AC en D y E, respectivamente. El ángulo $\widehat{A}$ viene medido por el arco $\widehat{DE}$, cuando el radio de la esfera es la unidad.

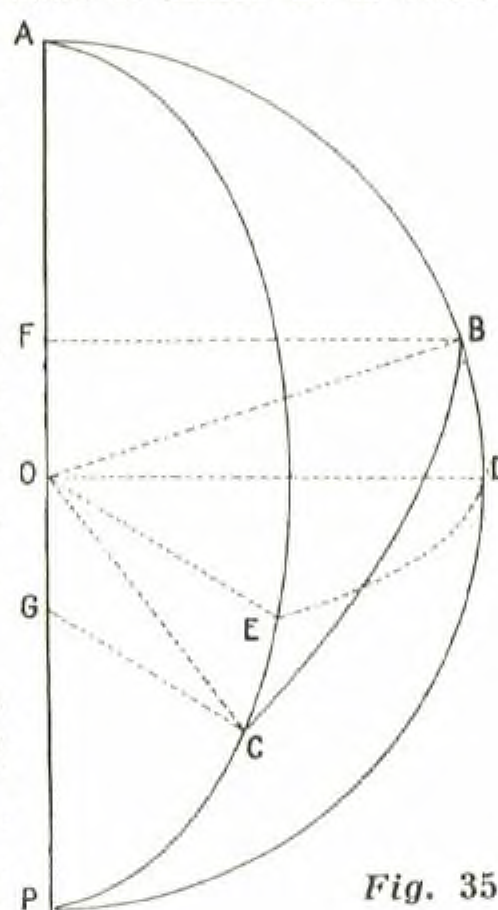


Fig. 35

Relaciones entre los lados y los ángulos. — Por los extremos B y C de los lados tracemos las perpendiculares BF y CG al radio OA. Siendo el radio de la esfera la unidad y tomando el punto A como origen para los lados AB y AC, tenemos:

$$\overrightarrow{FB} = \operatorname{sen} c, \qquad \overrightarrow{GC} = \operatorname{sen} b,$$

$$\overrightarrow{OF} = \cos c, \qquad \overrightarrow{OG} = \cos b.$$

Si proyectamos el contorno OFB sobre OC, podemos escribir:

$$\text{Proy. de } \overrightarrow{OF} + \text{Proy. de } \overrightarrow{FB} = \text{Proy. de } \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{OF} \cos (\widehat{OF, OC}) + \overrightarrow{FB} \cos (\widehat{FB, OC}) = \overrightarrow{OB} \cos (\widehat{OB, OC}). \quad (1)$$

De esta igualdad conocemos los valores

$$\overrightarrow{OF} = \cos c, \quad \overrightarrow{FB} = \operatorname{sen} c, \quad \overrightarrow{OB} = 1,$$

$$(\widehat{OF, OC}) = \text{med. } \widehat{AC} = b, \quad (\widehat{OB, OC}) = \text{med. } \widehat{BC} = a.$$

Nos falta el valor de $\cos (\widehat{FB, OC})$. Para calcularlo, proyectemos el contorno OGC sobre $\overrightarrow{FB}$:

$$\text{Proy. de } \overrightarrow{OG} + \text{Proy. de } \overrightarrow{GC} = \text{Proy. de } \overrightarrow{OC}.$$

La proyección de $\overrightarrow{OG}$ sobre $\overrightarrow{FB}$ es nula por ser perpendiculares ambos vectores;

$$\overrightarrow{GC} = \operatorname{sen} b, \quad \overrightarrow{OC} = 1,$$

$$(\widehat{GC, FB}) = (\widehat{OE, OD}) = \text{diedro BAOC} = \widehat{A}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Proy. de } \overrightarrow{GC} \text{ sobre } \overrightarrow{FB} = \operatorname{sen} b \cos \widehat{A}, \\ \text{Proy. de } \overrightarrow{OC} \text{ sobre } \overrightarrow{FB} = \cos (\widehat{FB, OC}), \end{array}\right\} \text{ luego } \cos (\widehat{FB, OC}) =$$

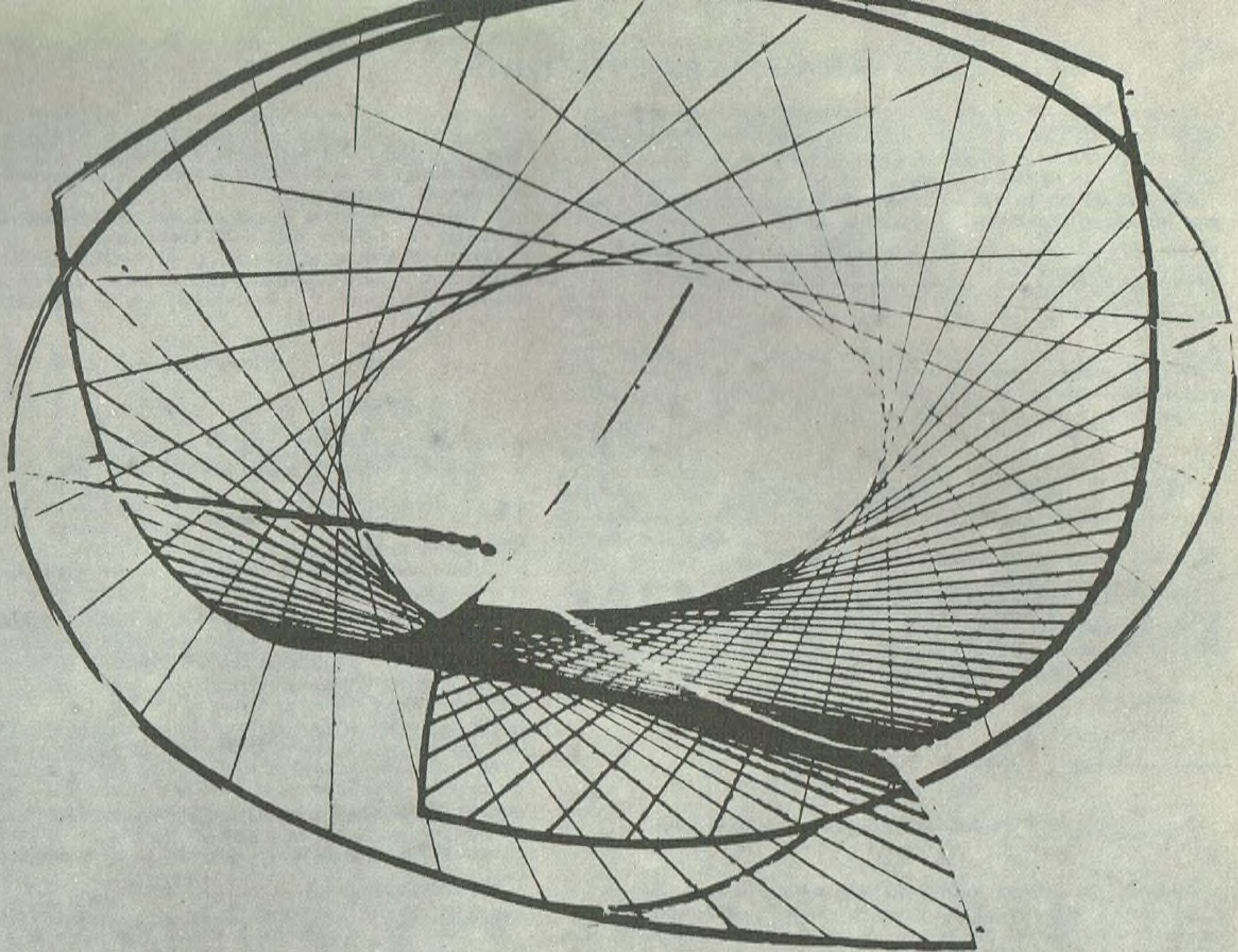
$= \operatorname{sen} b \cdot \cos \widehat{A}.$

La ecuación (1) queda así: $\cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos \widehat{A} = \cos a.$

Por permutación circular obtendremos otras dos ecuaciones que junto con la anterior forman un sistema de tres ecuaciones que relacionan entre sí los lados y los ángulos de un triángulo esférico:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \widehat{A}, \\ \cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos \widehat{B}, \\ \cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \widehat{C}. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA. — Olabarrieta: *Geometría y Trigonometría.* — Octavio de Toledo: *Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica.* — Avello Ugalde: *Trigonometría plana y esférica.*



Superficie engendrada por las tangentes a una cúbica izquierda (*Doc. Palais de la Découverte*, París)

Geometría analítica
Funciones

Sistemas de coordenadas

Recta orientada o eje. Vector. Valor algébrico de un vector. Suma geométrica de dos vectores consecutivos. Teorema de Chasles. Abscisa de un punto. Cambio de origen sobre un eje. Generalización. Teorema de Chasles. Determinación de un punto sobre un plano. Coordenadas cartesianas ortogonales (o rectangulares). Orientación de un plano. Consecuencias de la definición. Otros sistemas de coordenadas. Coordenadas cartesianas oblicuas. Coordenadas polares. Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas. Coordenadas cartesianas en el espacio. Otros sistemas de coordenadas en el espacio

Recta orientada o eje. — *Se llama* **recta orientada** *o* **eje** *cualquier recta sobre la que se ha indicado un sentido positivo,* que se designa por una flecha o por la notación $x'x$ (*fig.* 1).

x' A B x

Fig. 1

El sentido contrario es el sentido negativo.

Vector. — *Se denomina* **vector** $\overrightarrow{AB}$ *una porción de recta sobre la que se ha fijado un origen* A *y un extremo* B.

Valor algébrico de un vector. — *Si un vector está sobre un eje* (que se llama **soporte**), el valor algébrico de este vector es el número algébrico que tiene por valor absoluto la medida del segmento y cuyo signo es positivo o negativo según que para ir del origen al extremo del vector haya que seguir el sentido positivo o negativo del eje.

Observación importante. Se designa por $\overrightarrow{AB}$ el vector, y por $\overline{AB}$ su valor algébrico. Es $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Suma geométrica de dos vectores consecutivos. — Dos vectores son consecutivos cuando el extremo del primero coincide con el origen del segundo.

La suma geométrica de dos vectores consecutivos es el vector que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del segundo (fig. 2).

$\overrightarrow{AC}$ es la suma geométrica de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

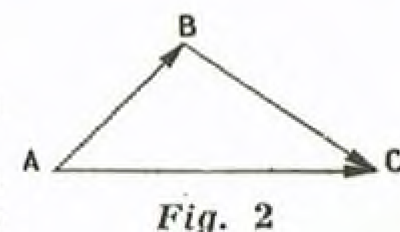


Fig. 2

En general, la relación que existe entre los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y su suma geométrica $\overrightarrow{AC}$ es bastante complicada, interviniendo el ángulo $\widehat{ABC}$. Sólo *en el caso en que los vectores consecutivos son soportados por un mismo eje hay una relación simple y general* entre los valores algébricos de cada uno de los vectores y de la suma.

Teorema de Chasles. — *El valor algébrico de la suma geométrica de dos vectores consecutivos soportados por un eje común es igual a la suma algébrica de los valores algébricos de los dos vectores.*

Para demostrar este teorema, se consideran tres puntos, A, B, C, sobre un eje y se observa que cualquiera que sea la disposición de ellos (*figs.* 3, 4 y 5), el valor algébrico del vector $\overrightarrow{AC}$ es precisamente la suma algébrica de los valores algébricos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Esto se representa por la siguiente importantísima fórmula:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Abscisa de un punto. — Consideremos un eje $x'x$ (*fig.* 6) y tomemos un **origen** O sobre él.

Fig. 3 *Fig.* 4

La abscisa de un punto cualquiera, M, de la recta es el valor algébrico del vector $\overrightarrow{OM}$. Este valor puede ser positivo, negativo o nulo; en este último caso, el punto M coincide con O. Recíprocamente, a todo número algébrico corresponde un punto sobre el eje que tiene ese número por abscisa.

Fig. 5 *Fig.* 6

Teorema. *El valor algébrico de un vector soportado por un eje es igual a la abscisa de su extremo menos la abscisa de su origen.*

Consideremos el eje $x'x$ (*fig.* 7), el origen O y el vector $\overrightarrow{AB}$. Cualesquiera que sean los tres puntos O, A, B, siempre será, por el teorema de Chasles,

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}.$$

Ahora bien,

$$\overline{AO} = -\overline{OA},$$

por consiguiente,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Observación. Si a y b son las abscisas de A y B, se tiene,

$$\overline{AB} = b - a.$$

Cambio de origen sobre un eje. — Consideremos un eje $x'x$, el origen O y, sobre el eje, un punto de abscisa x'. Tomemos un nuevo origen O′ cuya abscisa con relación al origen O es X. Según la relación del párrafo anterior, se tiene:

$$\overline{O'M} = \overline{OM} - \overline{OO'},$$

o bien,

$$x = x - X .$$

Es decir, *la abscisa* x′ *de un punto con relación a un nuevo origen es igual a la abscisa* x *de ese punto con relación al primer origen, menos la abscisa* X *del nuevo origen con relación al primero.*

Generalización. — Se llama suma geométrica de varios vectores consecutivos el vector que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del último (*fig.* 8).

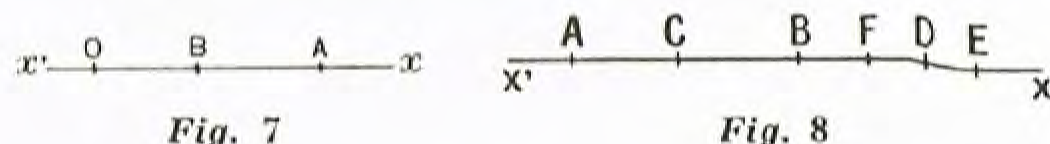


Fig. 7 *Fig.* 8

En el caso particular en que los *vectores consecutivos son soportados por un mismo eje*, hay una relación muy importante entre el valor algébrico de la suma geométrica y los valores algébricos de los vectores.

Teorema de Chasles. — *El valor algébrico de la suma geométrica de varios vectores consecutivos alineados sobre un mismo eje es igual a la suma algébrica de los valores algébricos de cada uno de los vectores.* Este teorema se expresa por la siguiente fórmula llamada relación de Chasles:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} = \overline{AF}.$$

Corolario. Si se toman n puntos cualesquiera A, B, C, ..., K, L, sobre un eje orientado, se verifica

$$\overline{AB} + \overline{BC} + ... + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

Esta relación se obtiene de la de Chasles, puesto que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + ... + \overline{KL} = \overline{AL}.$$

Fig. 9

Problema. *Hallar la abscisa* x *del punto medio,* M, *del segmento* AB, *siendo* a *y* b *las abscisas de* A *y* B, *respectivamente* (fig. 9).

Se tiene, $\overline{AM} = \overline{MB}$. Pero $\overline{AM} = x - a$, $\overline{MB} = b - x$.

Luego $x - a = b - x$ y, por tanto, $x = \dfrac{a + b}{2}$.

Determinación de un punto sobre un plano. Coordenadas cartesianas ortogonales (o rectangulares). — Ya hemos visto que la posición de un punto sobre un eje se determina por su abscisa respecto a un origen; ahora vamos a determinar la posición de un punto sobre un plano. Tracemos dos rectas $x'x$, $y'y$ (*fig.* 10) perpendiculares y sea O su punto de intersección. Tomemos como sentidos positivos de estas rectas los Ox y Oy. Sea M un punto cualquiera del plano y tracemos las rectas MQ y MP, paralelas a los ejes Ox y Oy, respectivamente. Al valor algébrico del vector $\overrightarrow{OP}$ se le llama **abscisa** del punto M. El valor algébrico del vector $\overrightarrow{OQ}$ es la **ordenada** del punto M. A cada punto M le corresponde siempre una abscisa y sólo una. Lo mismo puede decirse de la ordenada.

El conjunto de la abscisa y la ordenada de un punto se denomina **coordenadas** de ese punto.

Los ejes $x'x$ e $y'y$ se llaman **ejes de coordenadas;** su punto de intersección O se llama **origen de coordenadas.**

Recíprocamente, si se conocen las dos coordenadas de un punto, éste queda perfectamente definido sobre el plano, pues la abscisa permite determinar el punto P y la ordenada fija el punto Q.

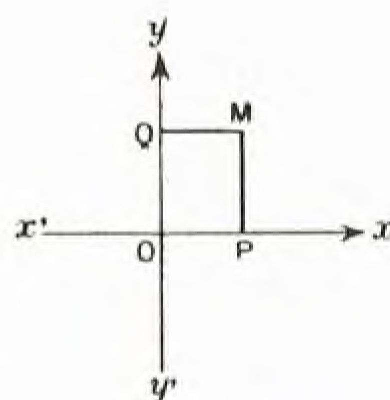


Fig. 10

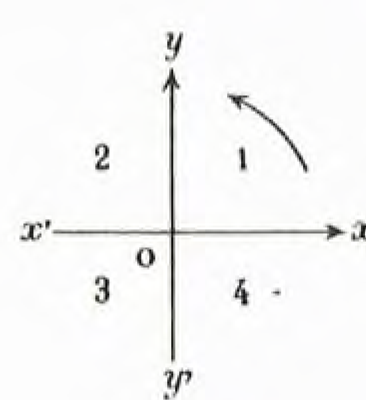


Fig. 11

Orientación de un plano. — Si se tiene un plano y un punto O fijo sobre él, se dice que el **plano está orientado,** cuando se ha fijado en él un sentido positivo de rotación alrededor del punto O.

Consideremos un plano sobre el que se han trazado los ejes de coordenadas $x'x$, $y'y$, que se cortan en O (*fig.* 11).

Sea el sentido positivo del eje de abscisas el Ox. Supongamos que el semieje Ox gira alrededor de O en el sentido positivo de rotación (que, generalmente, es el inverso al de las agujas de un reloj). Después de girar un ángulo recto, el semieje Ox vendrá a confundirse con el semieje Oy. Si continuamos la rotación, el semieje Ox irá pasando sucesivamente por las posiciones Ox' y Oy'; los ángulos rectos descritos sucesivamente por Ox se numeran en el mismo orden, 1, 2, 3, 4.

Consecuencias de la definición. — Todo punto M situado en el ángulo recto xOy tiene su abscisa y su ordenada positivas (*fig.* 12).

Un punto M″ situado en el ángulo yOx' tiene su abscisa negativa y su ordenada positiva.

Un punto M‴ situado en el ángulo $x'Oy'$ tiene su abscisa y su ordenada negativas.

Por último, un punto M′ situado en el ángulo $y'Ox$, tiene su abscisa positiva y su ordenada negativa.

Dos puntos que tienen igual abscisa y sus ordenadas opuestas, son simétricos con respecto al eje $x'x$. Dos puntos que tienen igual ordenada y sus abscisas opuestas, son simétricos con respecto al eje $y'y$. Dos puntos que tienen sus abscisas opuestas y sus ordenadas también opuestas son simétricos respecto al origen.

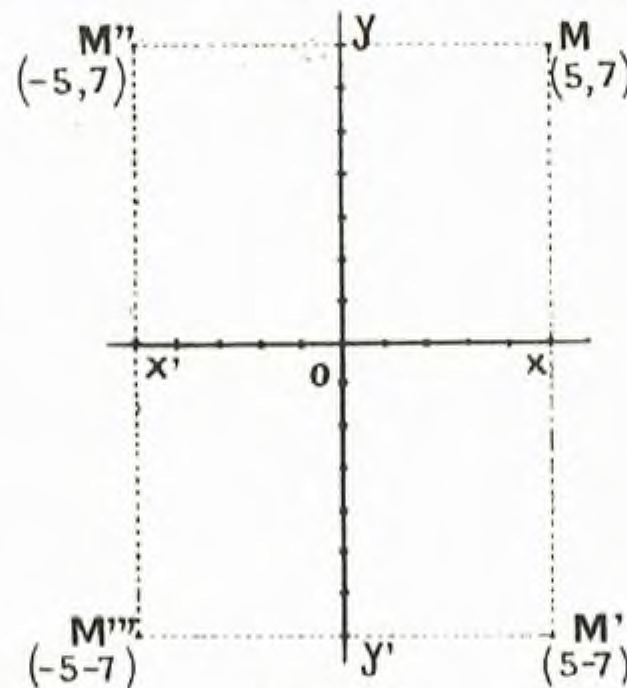


Fig. 12

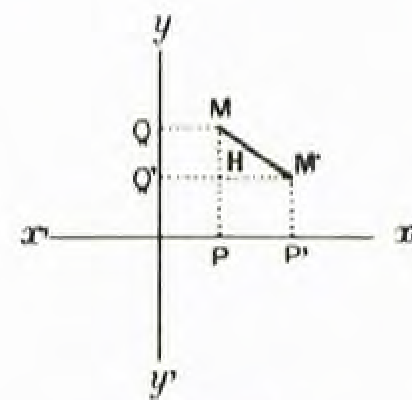


Fig. 13

Conociendo las coordenadas x, y, *del punto* M (fig. 13), x′, y′, *del punto* M′, *calcular la distancia entre estos dos puntos.*

Trazamos desde M y M′ las perpendiculares a los dos ejes. En el triángulo rectángulo MHM′, tenemos

$$MM'^2 = MH^2 + M'H^2.$$

Pero, MH = QQ′ y M′H = P′P, porque son segmentos de rectas paralelas comprendidos entre rectas paralelas.

Por otra parte, según el teorema de Chasles, tenemos:

$$\overline{QQ'} = \overline{OQ'} - \overline{OQ} = x' - x,$$

$$\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = y' - y.$$

Luego, finalmente, se tiene:

$$MM'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$

Otros sistemas de coordenadas. — Un sistema de coordenadas planas es un conjunto de dos números que definen la posición del punto sobre el plano.

Hay, por tanto, una infinidad de sistemas de coordenadas. Veamos algunos.

Coordenadas cartesianas oblicuas. — Este sistema de coordenadas es análogo al de coordenadas cartesianas rectangulares, con la única diferencia de que los ejes no son perpendiculares entre sí.

Los ejes orientados $x'x$ e $y'y$ (*fig.* 14) forman un ángulo θ. Siendo M un punto cualquiera del plano, sus coordenadas se obtienen trazando las paralelas a los ejes:

$$\text{Abscisa de M} = \overline{OP},$$

$$\text{Ordenada de M} = \overline{OQ}.$$

Coordenadas polares. — Sea un plano orientado y sobre él tomemos un eje Ox (*fig.* 15) y un punto O de este eje, que se llaman *eje polar* y *polo*, respectivamente. La posición de un punto M del plano

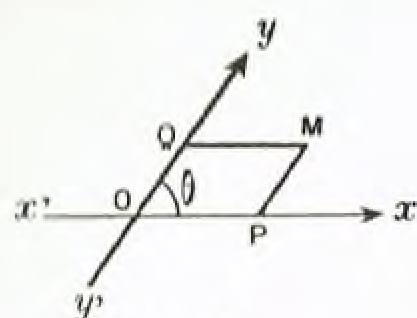


Fig. 14

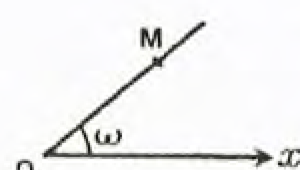


Fig. 15

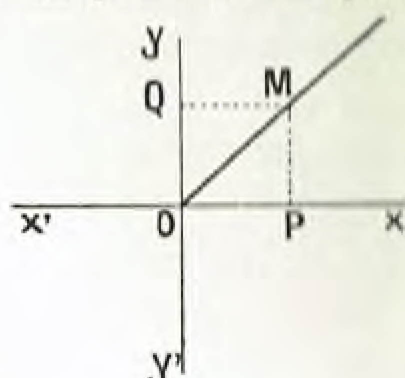


Fig. 16

viene definida por el **ángulo** ω que forma la dirección positiva del eje Ox con la dirección positiva de la recta OM y por el **valor algébrico** ρ del vector $\overrightarrow{OM}$; ω es el ángulo polar, ρ es el radio vector; ω y ρ son las **coordenadas polares** del punto M.

A un sistema de valores de ω y ρ corresponde un solo punto del plano. Pero a un punto del plano (distinto del polo) corresponde una doble infinidad de valores de ω y ρ. Si conservamos el mismo sentido positivo sobre OM, se encuentran una infinidad de sistemas de coordenadas definidos por ρ y por $\omega + k \cdot 360^{\circ}$ ó $\omega + k \cdot 400^{g}$ ó $\omega + 2k\pi$ (según que los ángulos vengan medidos en grados sexagesimales, grados centesimales o radianes), siendo ω uno de los ángulos $(\widehat{OM, Ox})$ y k un número entero.

Si cambiamos la dirección positiva sobre la recta OM, tenemos una nueva infinidad de coordenadas para el punto M: $-\rho$ y $\omega + (180^{\circ} + k \cdot 360^{\circ})$ ó $\omega + (200^{g} + k \cdot 400^{g})$ ó $\omega + (2k + 1)\pi$.

Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas. — Sea el sistema de coordenadas polares de la figura 16. Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas siguiente: el eje $x'x$ de abscisas es el eje polar; el eje $y'y$ de ordenadas es la perpendicular a $x'x$ trazada por O.

Entre las coordenadas cartesianas así definidas y las coordenadas polares se tienen las relaciones $x = \rho \cos \omega$, y $y = \rho \operatorname{sen} \omega$.

Observación. Aunque ya hemos indicado que existen otros sistemas de coordenadas, los más empleados son las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares.

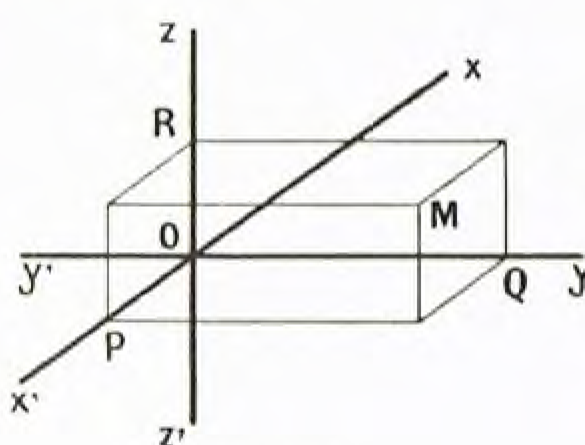


Fig. 17

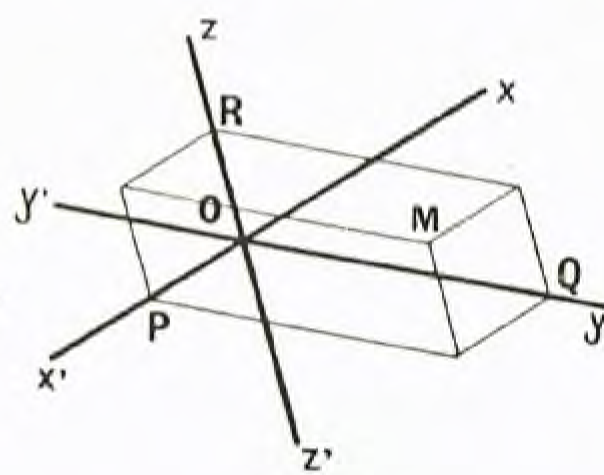


Fig. 18

Coordenadas cartesianas en el espacio. — Análogamente a como en el plano definimos la posición de un punto por dos coordenadas, en el espacio necesitamos tres coordenadas para fijar la situación de un punto. El sistema de coordenadas más sencillo es el de *coordenadas cartesianas ortogonales*.

Sean tres ejes que se cortan dos a dos en ángulo recto (*fig.* 17). Los planos que estos ejes forman entre sí dos a dos se llaman planos de coordenadas. Consideremos un punto M en el espacio y formemos el paralelepípedo de la figura, trazando por M las paralelas a los tres ejes. Las tres coordenadas de M son: la *abscisa*, que es el valor algébrico del vector $\overrightarrow{OP}$, medido sobre el eje $x'x$; la *ordenada*, que es el valor algébrico del vector $\overrightarrow{OQ}$, medida sobre el eje $y'y$; la *cota*, que es el valor algébrico del vector $\overrightarrow{OR}$, medido sobre el eje $z'z$.

$$x = \overline{OP}, \quad y = \overline{OQ}, \quad z = \overline{OR}.$$

A cada punto del espacio le corresponde un sistema de coordenadas y, recíprocamente, a todo sistema de tres números le corresponde un punto en el espacio.

Observación. Estas definiciones valen también si los ejes no se cortan dos a dos perpendicularmente, sino que son oblicuos entre sí (sin estar contenidos los tres en un mismo plano). En este caso tenemos un sistema de *coordenadas cartesianas oblicuas* (*fig.* 18). Este sistema de coordenadas no se suele utilizar, pues los cálculos son más complicados que en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

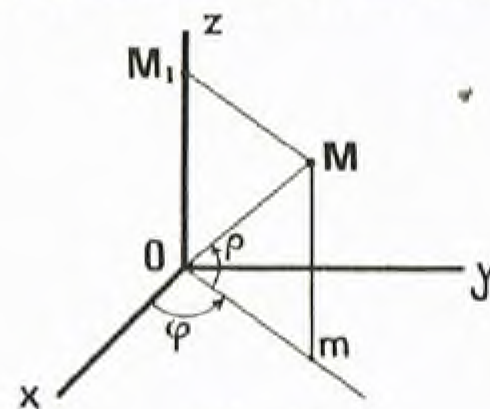


Fig. 19

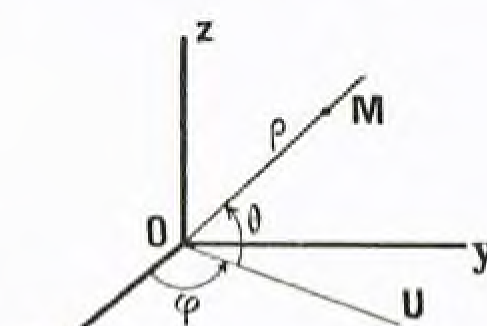


Fig. 20

Otros sistemas de coordenadas en el espacio. — a) *Coordenadas cilíndricas o semipolares* (*fig.* 19).

Un punto M queda determinado en este sistema, refiriéndolo a un plano (en el que su proyección ortogonal está definida por sus coordenadas polares) y a un eje $z'Oz$ perpendicular a este plano y que pasa por el polo O. Las coordenadas cilíndricas de M son: el *ángulo polar* φ, el *radio vector* Om y la *cota* $\overline{OM_1}$.

b) *Coordenadas polares o esféricas* (fig. 20).

En un triedro de coordenadas ortogonales $Oxyz$, un punto M determina con el eje Oz un semiplano que corta el plano xOy según la semirrecta OU. El punto M queda perfectamente definido por: 1°, el ángulo φ que forma la semirrecta Ox con la semirrecta OU; 2°, el ángulo θ que forman OU y OM entre sí (contado positivamente hacia Oz); 3°, la longitud ρ del segmento OM. Las coordenadas esféricas o polares de M son φ, θ y ρ.

Funciones

Terminología. Intervalo. Función definida. Límites. Aplicación de estos teoremas. Continuidad. Propiedades. Función creciente y función decreciente. Máximo y mínimo. Propiedades. Representación gráfica. Empleo de curvas representativas. Estudio de las variaciones de una función. Función de varias variables. — **Función lineal.** Significado de las constantes a y b. Recíproco. Generalización importante. — **Variación del trinomio de segundo grado:** Primer caso particular $y = x^2$. Curva representativa. Segundo caso particular $y = (x - a)^2$. Caso general $y = ax^2 + bx + c$. Curva representativa.—**Función homográfica:** Primer caso particular $y = \frac{1}{x}$. Curva representativa. Asíntotas. Caso particular: $y = \frac{1}{x - a}$. Curva representativa. Caso general: $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$. Curvas representativas. Consejos para las aplicaciones

La experiencia y la física nos proporcionan numerosos ejemplos de funciones:

La longitud de una barra de hierro es función de su temperatura: a cada temperatura, la barra de hierro tiene una longitud determinada. La superficie de un cuadrado es función de la longitud del lado: a cada valor que damos al lado corresponde un valor determinado a la superficie del cuadrado. En un viaje que hacemos en automóvil, el número que marca el cuentakilómetros es función del tiempo que ha durado el viaje: a cada valor de este tiempo corresponde un número marcado por el contador.

Se pueden multiplicar los ejemplos. Uno de los objetos de la física es precisamente encontrar las leyes (o funciones) por las que se rigen los fenómenos estudiados.

Definición (Cauchy). *Se dice que* y *es función de la variable* x *cuando a todo valor de* x *(tomado de un determinado conjunto de valores) corresponde un valor de* y.

Se escribe así, $y = f(x)$. En matemáticas, se estudian particularmente las funciones en las que la relación que liga a la variable con la función es precisamente una relación matemática.

Ejemplos:

$$y = 3x - 1,$$

$$y = \frac{3 + x}{x - 1}, \quad y = \sqrt{x - 5}, \quad y = \frac{5}{\sqrt{x - 5}}, \quad y = \cos x.$$

Es de gran utilidad, para el estudio de la física, encontrar funciones matemáticas como leyes para los fenómenos, pues éstos quedan entonces perfectamente definidos.

Terminología. — Una función se denomina *explícita* cuando, como en los ejemplos precedentes, la y está despejada en un miembro.

Se denominan *implícitas* aquellas funciones que están ligadas a su variable x por una ecuación no resuelta: $3x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$, define una función implícita. Las funciones se llaman *algébricas* cuando para calcular el valor de y la variable x ha de someterse sólo a operaciones algébricas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación). Por ejemplo,

$$y = 4x^2 - 5x^2 + 12, \quad y = \sqrt{\frac{x - 5}{x^4 + 2}}.$$

Una función que no es algébrica es una función *trascendente*. Por ejemplo,

$$y = \log x, \quad y = a^x, \quad y = \cos x,$$

Una función es *racional* cuando la variable no está afectada por ningún radical.

En general, una función racional es el cociente de dos polinomios enteros en x. Si este cociente se reduce a un polinomio entero en x de grado n, la función se llama racional entera o simplemente *entera*. En otro caso, la función es *fraccionaria*.

Intervalo. — *Se llama* **intervalo (a, b)** *el conjunto de todos los valores comprendidos entre* a *y* b, *comprendidos ellos mismos.*

El intervalo (0, 1) está formado por todos lo números comprendidos entre 0 y 1, comprendidos el 0 y el 1.

Función definida. — *Se dice que* **una función es definida** *para un valor de la variable, cuando a ese valor de la variable corresponde otro valor para la función.*

Una función es definida en un intervalo, cuando esa función es definida para cada uno de los valores de ese intervalo.

EJEMPLOS: $y = 4x^2 + 3$ es definida para todos los valores de x.

$y = \frac{5}{x-2}$ deja de ser definida para el valor $x = 2$, pues la división por cero es imposible.

$y = \sqrt{x-2}$ sólo es definida para los valores $x \geqq 2$, pues la raíz cuadrada de un número negativo no existe.

$y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ sólo es definida para $x > 2$.

Límites. — Dada una función, se ve, en general, si es definida para cierto valor de la variable. No obstante, existen funciones de las que no se puede decir inmediatamente si están definidas o no para ciertos valores de la variable.

Si una función creemos que está definida para un valor x_0, consideremos los sucesivos valores que toma la función para otros valores de la variable próximos a x_0. Si al acercarse a x_0 los valores de la variable, también se acercan a un cierto valor L los valores de la función, se dice que la función y tiende hacia L cuando la variable x tiende hacia x_0.

Es también interesante saber los valores que toma la función cuando la variable crece indefinidamente, en sentido positivo o negativo.

Para tratar estos problemas con la debida precisión, vamos a dar algunas definiciones importantes.

DEFINICIÓN. *Se dice que una función* y *de la variable* x *tiende hacia un límite* y_0, *cuando* x *tiende hacia* x_0, *si a todo número positivo* ϵ, *tan pequeño como queramos, se le puede hacer corresponder un número positivo* α, *tal que siendo* $|x - x_0| < \alpha$ *sea también* $|y - y_0| < \epsilon$.

EJEMPLO. Demostremos que $y = 2x - 3$ tiende hacia 1 cuando x tiende hacia 2.

En efecto, $y - 1 = 2x - 4$. Para que se cumpla $|y - 1| < \epsilon$, es necesario y suficiente que sea $-\epsilon < 2x - 4 < \epsilon$. De aquí deducimos:

$$-\frac{\epsilon}{2} < x - 2 < \frac{\epsilon}{2}, \quad |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es suficiente, por tanto, en este caso, con tomar $\alpha = \frac{\epsilon}{2}$.

OBSERVACIÓN. Si a la variable se le dan valores tan próximos a x_0 como queramos, pero siempre mayores que x_0, obtenemos un límite para la función que se llama límite a la derecha de x_0. Análogamente, si damos a la variable valores próximos a x_0, pero siempre menores que este valor, el límite que obtenemos se llama límite a la izquierda de x_0. Estos dos límites no siempre existen, y caso de existir pueden no ser iguales. En este caso se dice que la función no es *definida* para el valor x_0 considerado.

DEFINICIÓN. *Se dice que la función* y *de* x *tiende hacia* $+\infty$ *cuando* x *tiende hacia* x_0, *si dado un número* A *positivo, tan grande como se quiera, se puede encontrar un número positivo* α *tal que, cumpliéndose la desigualdad* $|x - x_0| < \alpha$, *sea* $y > A$.

Se dice que la función y *de* x *tiende hacia* $-\infty$ *cuando* x *tiende hacia* x_0, *si dado un número* A *positivo, tan grande como se quiera, se puede encontrar un número positivo* α *tal que cumpliéndose la desigualdad* $|x - x_0| < \alpha$, *sea* $y < -A$.

EJEMPLO. Consideremos la función $y = \frac{1}{x}$. Esta función no está definida para $x = 0$. Hagamos tender x hacia cero por valores positivos. De $\frac{1}{x} > A$, se deduce, si x es positivo, $x < \frac{1}{A}$. Luego $\frac{1}{x}$ tiende hacia $+\infty$ si x tiende hacia cero por valores positivos. Si x es negativo, de $\frac{1}{x} < -A$ se obtiene $x > \frac{1}{A}$: luego cuando x tiende hacia cero por valores negativos, $\frac{1}{x}$ tiende hacia $-\infty$.

DEFINICIÓN. *Se dice que* y *tiende hacia un límite* y_0 *cuando* x *tiende hacia* $+\infty$, *si a todo número positivo* ϵ, *tan pequeño como se quiera, se le puede hacer corresponder un número positivo,* A, *tal que, cumpliéndose la desigualdad* $x > A$, *se verifique también la desigualdad* $|y - y_0| < \epsilon$.

Hay otras definiciones análogas para expresar que y tiende hacia un límite y_0 cuando x tiende hacia $-\infty$, y también que y tiende hacia el infinito cuando x aumenta indefinidamente.

Valiéndonos de estas definiciones podemos demostrar con todo rigor los siguientes teoremas.

TEOREMA. *Si dos funciones* f (x) *y* g (x) *tienden hacia los límites finitos* A *y* B, *respectivamente, cuando* x *tiende hacia* x_0 (o hacia $\pm\infty$), *la función* f (x) + g (x) *tiende hacia* A + B *cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $\pm\infty$).

Este teorema se hace extensible:

a) Al caso en que $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas hacia $+\infty$ (o hacia $-\infty$);

b) Al caso de la suma de un número cualquiera de funciones.

TEOREMA. *Si dos funciones* $f(x)$ *y* g (x) *tienden hacia los límites* A *y* B, *finitos, cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $+\infty$ *ó* $-\infty$), *la función* f (x) — g (x) *tiende hacia* A — B *cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $+\infty$ ó $-\infty$).

Pueden hacerse observaciones análogas a las hechas en el teorema anterior.

TEOREMA. *Si dos funciones* f (x) *y* g (x) *tienden hacia los límites* A *y* B, *finitos, cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $\pm\infty$), *el producto* f (x) · g (x) *tiende hacia* A · B *cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $\pm\infty$).

Este teorema se puede extender al caso en que $f(x)$ y $g(x)$ tienen límites infinitos de la manera siguiente:

Si $f(x)$ tiende hacia $+\infty$ y $g(x)$ tiende hacia $+\infty$, el producto tiende hacia $+\infty$; lo mismo sería si $f(x)$ y $g(x)$ tienden ambas hacia $-\infty$.

Si $f(x)$ tiende hacia $+\infty$ y $g(x)$ tiende hacia $-\infty$, o recíprocamente, el producto tiende hacia $-\infty$.

TEOREMA. *Si dos funciones* f (x) *y* g (x) *tienden, respectivamente, hacia los límites finitos* A *y* B (*no siendo* B *nulo*), *cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $\pm\infty$) *el cociente* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *tiene por límite* $\frac{A}{B}$ *cuando* x *tiende hacia* x_0 (*o hacia* $\pm\infty$).

Este teorema es aplicable al caso siguiente:

Si $g(x)$ tiende hacia B $\neq$ o y $f(x)$ tiende hacia $+\infty$ (ó $-\infty$), el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiende hacia $+\infty$ (ó $-\infty$) si B es positivo y hacia $-\infty$ (ó $+\infty$) si B es negativo.

Aplicación de estos teoremas. — Supongamos que se trata de hallar el límite de la función:

$y = x^2 - x + \frac{\sqrt{x-1}}{x}$, cuando x tiende hacia 1, a la derecha.

Los límites parciales son: x^2 tiende hacia 1; x tiende hacia 1; $\sqrt{x-1}$ tiende hacia 0, luego y tiende hacia $1 - 1 + \frac{0}{1}$, es decir, el límite buscado es 0.

Continuidad. — De una manera simple puede decirse que una función $y = f(x)$ que está *definida* para un valor x_0 de la variable, es continua para este valor si al dar a x valores próximos a x_0 los valores que toma $f(x)$ son próximos a f (x_0). Se puede también decir que $f(x)$ tiende hacia $f(x_0)$ cuando x tiende hacia x_0. Para precisar más el concepto de continuidad, vamos a dar la definición siguiente:

DEFINICIÓN. *Una función* y = f (x), *definida para un valor* x_0 *de la variable, es continua para este valor si a todo número positivo* ϵ, *tan pequeño como queramos, se le puede hacer corresponder un número positivo* α *tal que siendo* $|x - x_0| < \alpha$, *sea también* $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

OBSERVACIÓN. Una función que para $x = x_0$ no es continua, es discontinua para este valor de la variable. El caso más frecuente es el de una función que no está definida para un cierto valor x_0, pero que, sin embargo, sí está definida en las proximidades de x_0. La función es entonces discontinua, si los límites de la función, a la derecha y a la izquierda de x_0, son desiguales. A la diferencia entre estos dos límites se le llama *salto* de la función.

DEFINICIÓN. *Una función* y = f (x) *es continua en un intervalo, si ella es continua para todos los valores de la variable comprendidos en ese intervalo.*

EJEMPLO. La función $y = \frac{}{x}$, que ya hemos tratado antes, es definida y continua para todos los valores de x, excepto para $x = 0$. A este valor corresponde una discontinuidad en la curva representativa de la función. De la misma manera, la función $y = \frac{1}{x-3}$ deja de ser definida y continua para el valor $x = 3$.

El número que marca el cuentakilómetros de un automóvil es, como hemos visto, una función del tiempo: ésta es una función discontinua, y los saltos son, en general, de cien metros.

Propiedades. — Utilizando la definición precedente, se demuestra que:

1º Si varias funciones de x son continuas, su suma es una función continua;

2º Si una función de x es continua, su producto por un número constante es una función continua;

3º Todo polinomio entero en x es una función continua para todos los valores de la variable;

4º Si varias funciones de x son continuas para $x = a$, su producto es una función continua para $x = a$; por tanto, una potencia entera y positiva de una función continua es una función continua;

5º Si dos funciones de x son continuas para $x = a$, su cociente es una función continua para $x = a$, excepto si para este valor el denominador es nulo;

6ª Una función continua bajo un radical de exponente impar es una función continua.

Una función continua bajo un radical de exponente par es una función continua para los valores de la variable que hacen positiva o nula la función dada bajo el radical.

Función creciente y función decreciente. — Una función es creciente en un intervalo (a, b) si, en este intervalo, varía en el mismo sentido que la variable. En caso contrario es decreciente. De una manera más precisa, una función $y = f(x)$ es creciente (o decreciente) en un intervalo, si siendo $x_1 > x_0$, se cumple, $f(x_1) > f(x_0)$ [ó $f(x_1) < f(x_0)$] *cualesquiera que sean los dos números* x_1 y x_0 *tomados en el intervalo considerado.*

Se puede también decir que la función $y = f(x)$ es creciente (o decreciente) en un intervalo, si el cociente $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ es positivo (o negativo), cualquiera que sea el par de valores x_0 y x_1 tomados en el intervalo considerado.

Máximo y mínimo. — Si una función $y = f(x)$ es creciente para valores de la variable muy cercanos a un cierto valor x_0, pero menores que él, y es, en cambio, decreciente para valores de la variable muy cercanos a x_0 y mayores que él, se dice que esa función pasa por un *máximo* para el valor $x = x_0$.

Si una función $y = f(x)$ es decreciente para valores de la variable muy cercanos a un cierto valor x_0, pero menores que él, y es, en cambio, creciente para valores de la variable muy cercanos a x_0 y mayores que él, se dice que esa función pasa por un *mínimo* para el valor $x = x_0$.

Ejemplo. El volumen de una masa determinada de agua pura es una función de la temperatura, con un mínimo en el valor 4°. En el intervalo (0°, 4°) es una función decreciente y en el intervalo (4°, 100°) es una función creciente.

Propiedades. — Pueden demostrarse estas propiedades:

1ª Las funciones $y = f(x)$, $y = f(x) + C$, varían en el mismo sentido, siendo C una constante;

2ª Las funciones $y = f(x)$, $y = C \cdot f(x)$, varían en el mismo sentido o en el contrario, según que la constante C sea positiva o negativa;

3ª Las funciones $y = f(x)$, $y = [f(x)]^2$ varían en el mismo sentido para los valores positivos de y. Para valores de y negativos, estas funciones varían en sentido contrario;

4ª La función $y = \dfrac{1}{f(x)}$ varía en sentido contrario que la función $y = f(x)$.

Representación gráfica. — Sea una función $y = f(x)$, definida en un cierto intervalo (a, b) (*fig.* 21).

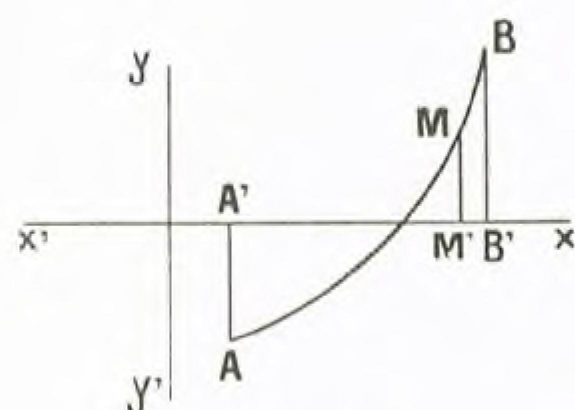


Fig. 21

Fig. 22

Para representar gráficamente esta función en este intervalo, dibujemos todos los puntos, tales como el M, de abscisa x (comprendido este valor en el intervalo considerado) y de ordenada el valor correspondiente de $y = f(x)$. El arco de curva que resulta al unir todos los puntos M es la representación gráfica perdida.

El empleo de curvas representativas de la variación de las funciones está muy generalizado. En física, se utilizan muchas de estas curvas, que se denominan *diagramas*: curvas de dilatación, curva representativa de la variación de un volumen de gas sometido a presiones variables (ley de Mariotte, *fig.* 22), etc. Los economistas utilizan curvas representativas de la producción, en función del tiempo. Los servicios de explotación de ferrocarriles se auxilian de diagramas representativos de la marcha de los trenes.

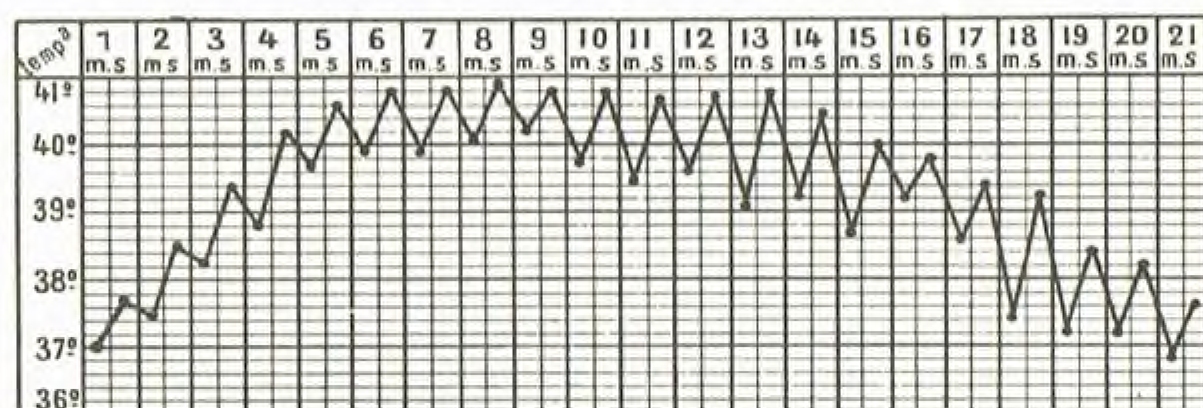


Fig. 23

Hay veces que no podemos tener una curva completa, pero sí disponemos de una curva aproximada, formada por cierto número de puntos que se unen por trazos rectos: la curva de temperatura de un enfermo (*fig.* 23), la curva de las variaciones de la presión atmosférica (*fig.* 24).

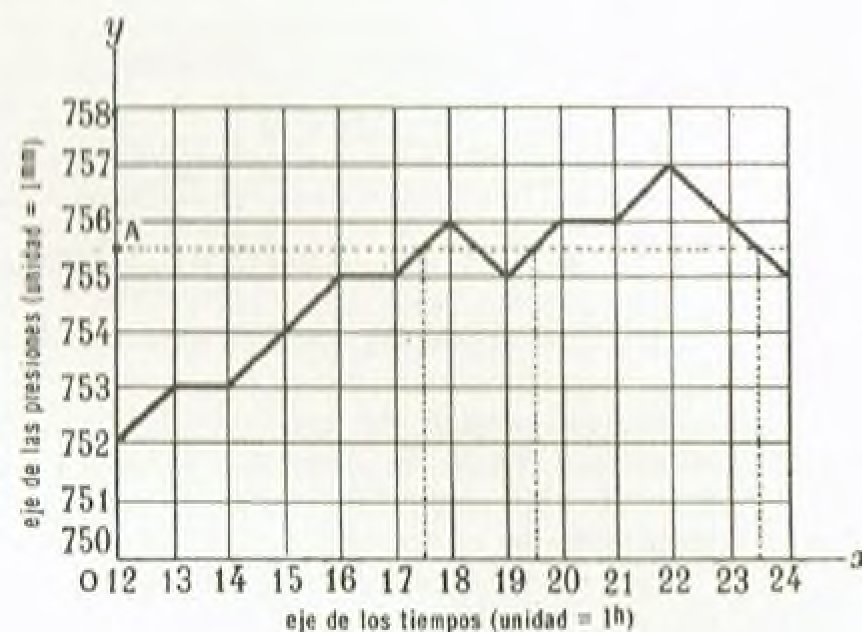


Fig. 24

Existen aparatos que proporcionan directamente la curva representativa de una función por medio de mecanismos especiales: barómetro registrador, termómetro registrador, registrador de la velocidad de una locomotora, etc. Estos aparatos, por razones de sencillez de construcción, utilizan exclusivamente las coordenadas cartesianas.

Empleo de curvas representativas. — La curva representativa de una función nos proporciona numerosos datos interesantes (*figs.* 23, 24). Vemos si la función es creciente o decreciente, sus máximos y mínimos, su signo (*fig.* 25).

Los puntos donde la curva corta el eje $x'x$ corresponden a las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. De aquí el procedimiento gráfico para encontrar las raíces aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ dibujando la curva aproximada de la función $y = f(x)$. Análogamente, para resolver gráficamente la ecuación $f(x) = k$, se miden las abscisas de los puntos de intersección de la curva $y = f(x)$ con la recta $y = k$. Se puede también resolver gráficamente la ecuación $f(x) = g(x)$ dibujando las curvas de las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$. Los puntos de intersección de estas curvas nos dan, por sus abscisas, las raíces de la ecuación (*fig.* 26).

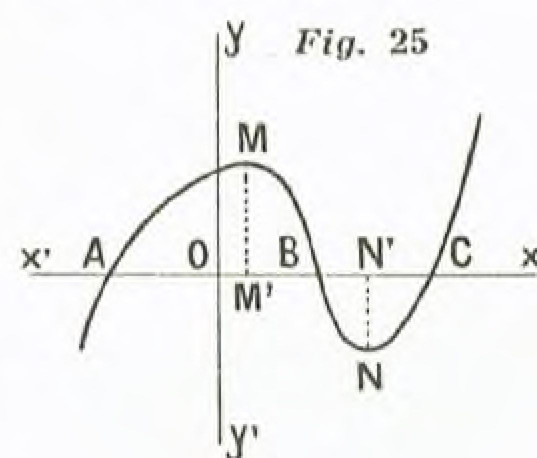


Fig. 25

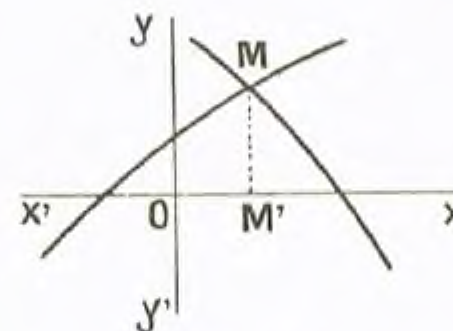


Fig. 26

Estudio de las variaciones de una función. — Se harán las siguientes operaciones, por este orden:

1° Buscar los intervalos en que la función es definida y continua.

2° Dividir estos intervalos en intervalos parciales, en los que la función varía siempre en el mismo sentido. Indicar este sentido. Calcular los máximos y mínimos. Estudiar lo que ocurre en las fronteras entre intervalos y, si hay lugar, cuando la variable aumenta indefinidamente. Estos resultados pueden resumirse en un cuadro.

3° Hacer la representación gráfica (si esto es posible), con todos los datos obtenidos antes.

Función de varias variables. — Se dice que z es función de dos variables, x, y, cuando a cada valor de estas variables (pertenecientes a conjuntos determinados de valores) corresponde un valor para z. Por ejemplo, la función $z = x^2 - 2xy + y^2$ es una función de x e y.

En física, el volumen de una determinada masa de gas es función de la temperatura y de la presión.

Se puede hacer extensivo a estas funciones todo lo expuesto referente a las funciones definidas y continuas.

Función lineal

Definición. *Se llama* **función lineal** *a toda función de la forma* $y = ax + b$, *es decir, un binomio de primer grado en* x (*siendo* $a \neq 0$).

La función lineal está definida para todos los valores de la variable y es siempre continua.

Teorema. *La función* $y = ax + b$ *es creciente o decreciente, según que a sea positivo o negativo.*

En efecto, demos a x dos valores cualesquiera x_0 y x_1. La función toma dos valores,

$$y_0 = ax_0 + b, \qquad y_1 = ax_1 + b,$$

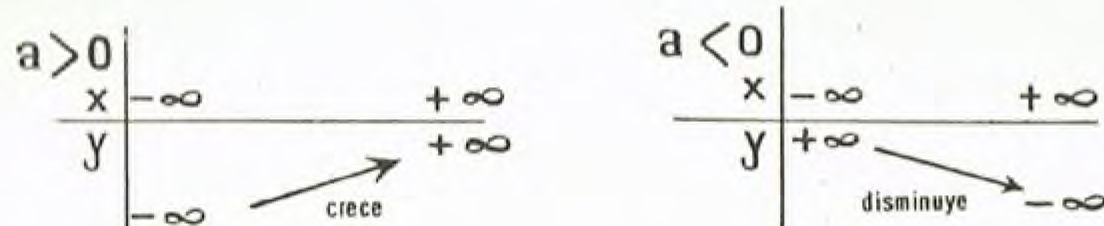
de donde se deduce:

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a.$$

Cuando a es positivo, el cociente del primer miembro es positivo, cualesquiera que sean los valores x_1 y x_0, luego la función es crecien-

te; si a es negativo, la función es decreciente. Si la función es creciente, ella tiende hacia $+\infty$ cuando x tiende hacia $+\infty$. En los cuadros que siguen vemos la variación de una función lineal según sea a positivo o negativo.



TEOREMA. *La representación gráfica de toda función* $y = ax + b$ *es una recta.* Comencemos por hacer la demostración para la función $y = ax$. El origen de coordenadas es un primer punto de la curva representativa (*fig.* 27).

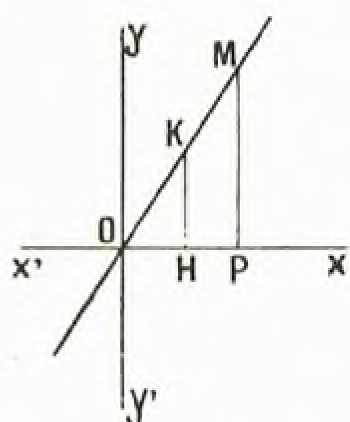


Fig. 27

Un segundo punto de la curva es el punto K (1, a). Sea M un punto cualquiera de la recta OK. Por el teorema de Tales se tiene $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{OH}}$, es decir, siendo ($x$, y) las coordenadas del punto M, tendremos:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{1}, \text{ o sea } y = ax.$$

Luego las dos coordenadas de un punto cualquiera de la recta OK están relacionadas entre sí por la ecuación $y = ax$; y todo par de números que satisfacen esta ecuación son las coordenadas de un punto de la recta OK. Pasemos ahora a una función lineal en su forma general $y = ax + b$. Para situar el punto correspondiente al valor x de la variable, trazamos una paralela al eje $y'y$ a una distancia x de él y llevamos sucesivamente los valores $\overrightarrow{PQ} = ax$ y $\overrightarrow{QM} = b$ (*fig.* 28). El punto obtenido, M, es el buscado.

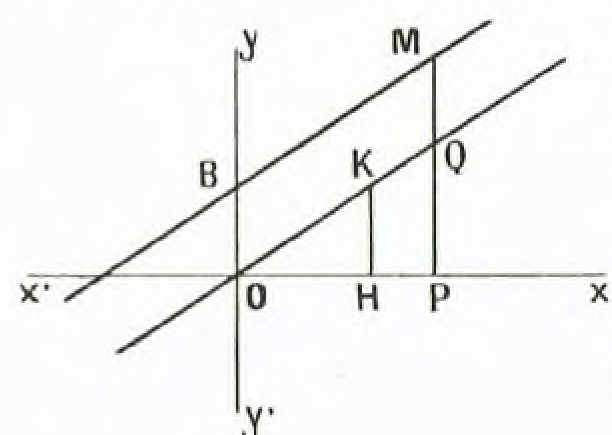


Fig. 28

Según lo dicho en el caso anterior, el punto Q está siempre sobre la recta OK. Señalemos sobre el eje $y'y$ el punto B, de ordenada b. Es evidente que con las construcciones hechas, el cuadrilátero OQMB resulta ser un paralelogramo. Cuando x varía, el punto M estará siempre sobre la paralela a la recta OK que corta el eje $y'y$ en el punto B, de ordenada b. Esta recta BM es la representación gráfica de la función $y = ax + b$.

Significado de las constantes a y b. — Hemos visto que b es la ordenada del punto de intersección de la recta $y = ax + b$ con el eje $y'y$. A este valor se le llama *ordenada en el origen.*

La tangente trigonométrica del ángulo $\widehat{QOP}$ tiene por valor $\frac{HK}{OH} = a$, y al coeficiente a se le llama *coeficiente angular* o *pendiente* de la recta $y = ax + b$. Dos rectas que tienen el mismo coeficiente angular son paralelas.

Recíproco. — Toda recta que no sea paralela a uno de los ejes coordenados puede ser considerada como la representación gráfica de una cierta función lineal, $y = ax + b$. En efecto, b es la ordenada del punto donde la recta corta el eje $y'y$, y a es la ordenada del punto donde la paralela a la recta trazada por el origen corta la paralela al eje $y'y$ de abscisa la unidad.

PROBLEMA. *Encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos* M_1 (x_1, y_1) M_2 (x_2, y_2) (*fig.* 29).

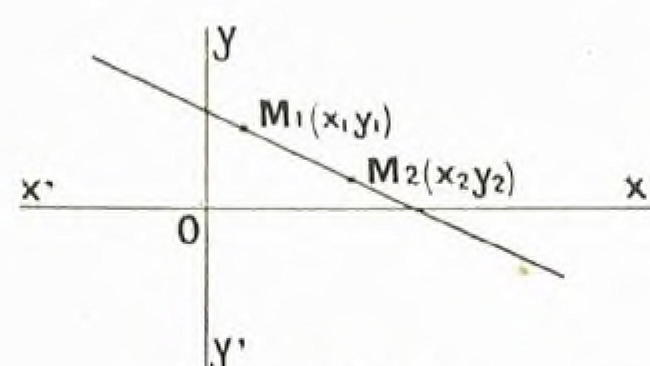


Fig. 29

Tenemos por incógnitas los valores a y b. Puesto que las coordenadas dadas han de satisfacer la ecuación que buscamos, basta con resolver el sistema de ecuaciones,

$$y_1 = ax_1 + b,$$
$$y_2 = ax_2 + b.$$

Resuelto este sistema, tenemos:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad b = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$$

El coeficiente angular de la recta determinada por dos puntos es el cociente que resulta al dividir la diferencia de sus ordenadas por la diferencia de sus abscisas.

Generalización importante. — El lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de primer grado, $ax + by + c = 0$, es siempre una recta. Despejando la y, resulta:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Esta ecuación es de la forma que hemos estudiado antes. Como se ve, el coeficiente angular de la recta es $-\frac{a}{b}$ y la ordenada en el origen, $-\frac{c}{b}$.

CASOS PARTICULARES. 1° $a = 0$: La ecuación es $y = -\frac{c}{b}$ (*fig.* 30). Su representación gráfica es la recta paralela al eje $x'x$, y a distancia de él, $-\frac{c}{b}$. Su coeficiente angular es cero.

2° $b = 0$: La ecuación es $x = -\frac{c}{a}$. Su representación gráfica es la recta paralela al eje $y'y$ a una distancia de él igual a $-\frac{c}{a}$ (*fig.* 31). Su coeficiente angular es infinito.

CONSTRUCCIÓN. Una recta queda definida por dos puntos. Por tanto, para construir la recta de ecuación $ax + by + c = 0$, basta con situar dos de sus puntos y unirlos.

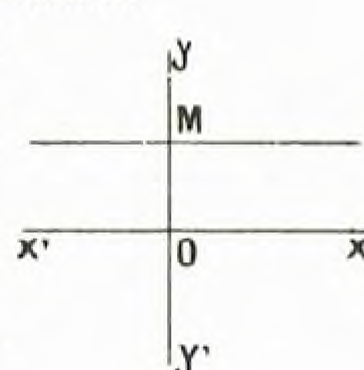


Fig. 30

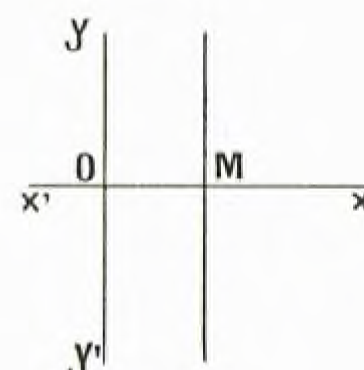


Fig. 31

APLICACIONES. La recta $y = ax + b$ crece hacia el sentido positivo del eje $x'x$ si es $a > 0$ (*fig.* 32), y decrece en ese sentido si es $a > 0$ (*fig.* 33). La representación gráfica de la recta nos proporciona inmediatamente la ley de variación del valor numérico del binomio. El valor de éste tiene el mismo signo que a para los valores de x mayores que su raíz.

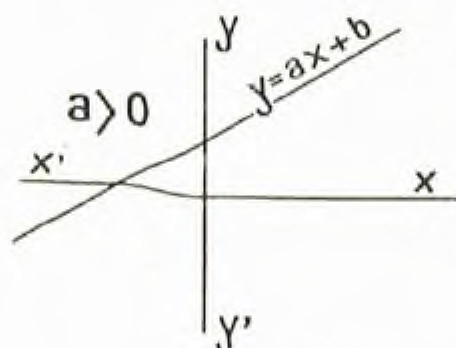


Fig. 32

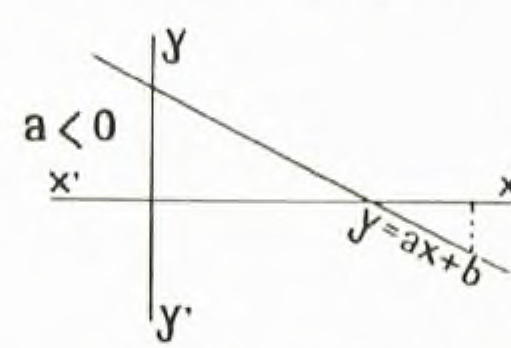


Fig. 33

RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DEL SISTEMA:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Las coordenadas del punto donde se cortan las rectas $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, satisfacen estas dos ecuaciones. Luego para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales, se construyen las dos rectas y se miden las coordenadas del punto de intersección (*fig.* 34).

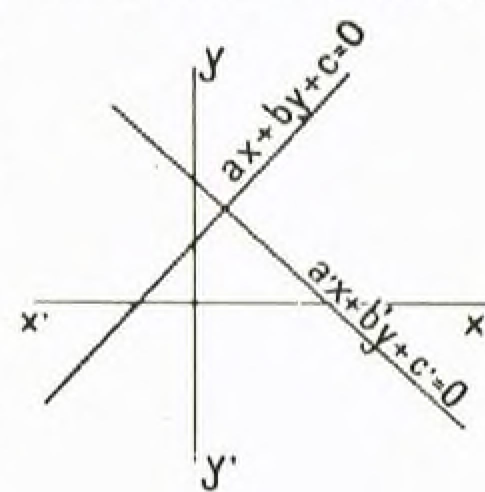


Fig. 34

Hay una solución única cuando las rectas se cortan, es decir, cuando sus coeficientes angulares son diferentes:

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'} \qquad ab' - a'b \neq 0.$$

Si $ab' - a'b = 0$, las rectas son paralelas, cuando sean distintas sus ordenadas en el origen:

$$-\frac{c}{b} \neq -\frac{c'}{b'} \qquad bc' - cb' \neq 0.$$

No hay ninguna solución.

Si $ab' - a'b = 0$, $bc' - cb' = 0$, las dos rectas están confundidas. Hay infinitas soluciones y el sistema es indeterminado.

Variación del trinomio de segundo grado

DEFINICIÓN. *Se llama* **trinomio de segundo grado** *una función de la forma* $y = ax^2 + bx + c$, *siendo* a *distinto de cero.*

Un trinomio de segundo grado es una función definida y continua para todos los valores de la variable.

Primer caso particular: $y = x^2$.

1° Si $x > 0$, al crecer x crece también y. Luego la función $y = x^2$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$;

2° Si $x < 0$, al crecer x desde $-\infty$ hasta 0, decrece y. Luego la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

La función $y = x^2$ pasa por un mínimo para $x = 0$, cuyo valor es $y = 0$.

En el esquema que sigue está indicada la variación de esta función.

Curva representativa. Dibujando varios puntos de la curva y uniéndolos, tendremos aproximadamente el gráfico de la función.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y=x^2$	$+\infty$	disminuye ↘	0	↗ crece	$+\infty$

El origen de coordenadas es el punto más bajo (*fig.* 35).

Dando a x dos valores opuestos, encontramos el mismo valor para y, luego el eje $y'y$ es eje de simetría de la curva.

Segundo caso particular: $y = (x - a)^2$. — Razonando como antes, tenemos:

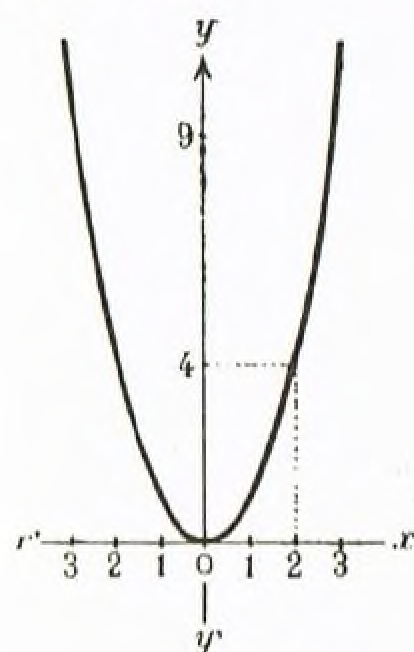
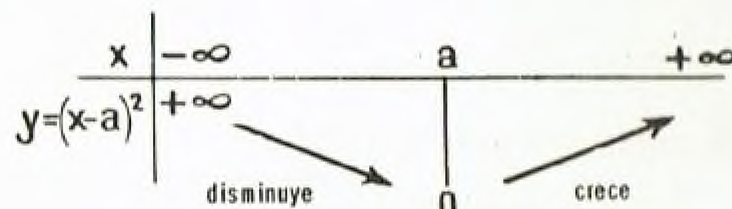


Fig. 35

1º En el intervalo $(-\infty, a)$ la función es decreciente.



x	$-\infty$		a		$+\infty$
$y=(x-a)^2$	$+\infty$	disminuye ↘	0	↗ crece	$+\infty$

2º En el intervalo $(a, +\infty)$ la función es creciente. En el esquema se ve la variación de esta función.

La curva se construye por puntos, aproximadamente. En la figura 36 hemos representado la función $y = (x - 2)^2$.

OBSERVACIÓN. Si tomamos como nuevos ejes coordenados el mismo $x'x$ y el y'_1y_1, de abscisa 2, estas nuevas coordenadas se relacionan con las antiguas por las fórmulas $Y = y$, $X = x - 2$. La ecuación de la curva en estos nuevos ejes es $Y = X^2$. Esto nos demuestra que la curva es igual que la anterior.

Caso general: $y = ax^2 + bx + c$. — Esta ecuación la podemos poner así:

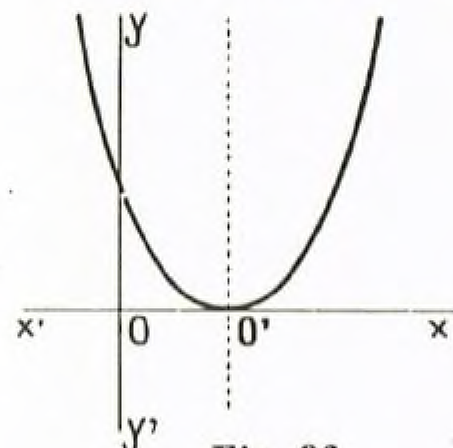


Fig. 36

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

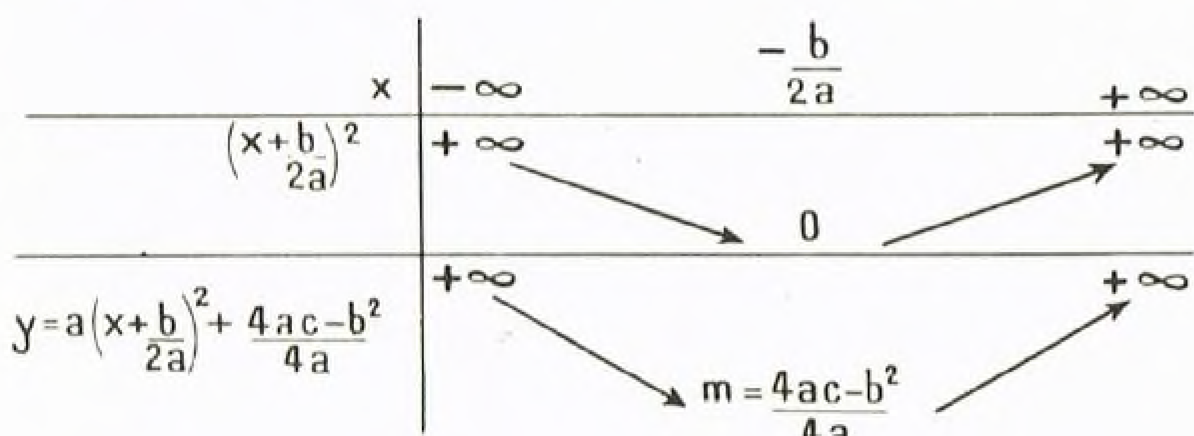
Si consideramos el paréntesis como los dos primeros términos del desarrollo de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, tenemos:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right] + c,$$

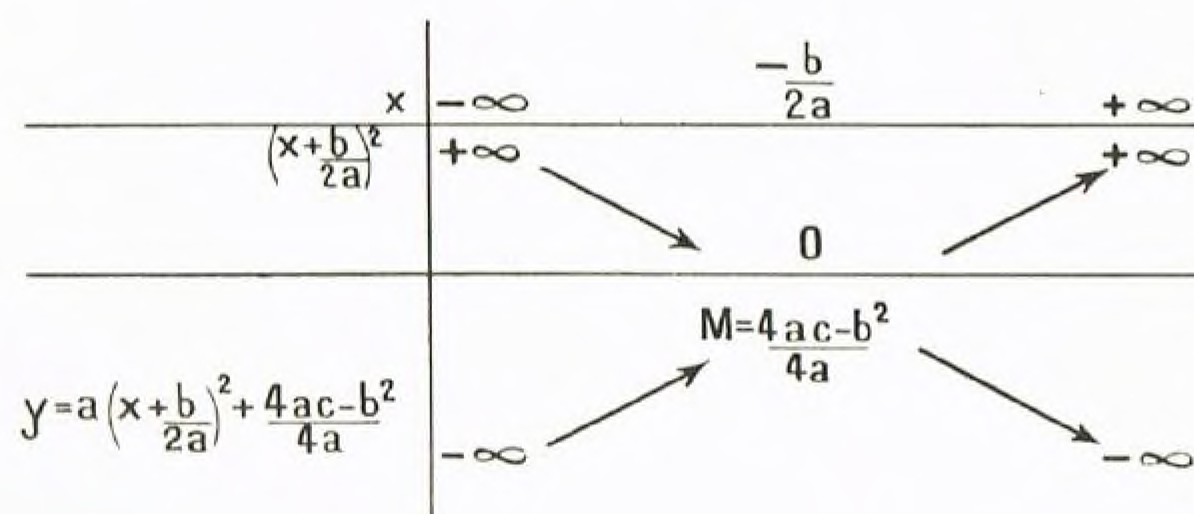
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

El cociente $\frac{4ac - b^2}{4a}$ es una constante, puesto que no entra en él la variable x; luego la función y variará según varíe la expresión $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Veamos cómo varía esta expresión según sea el signo de a:

1º Si a es positivo, y varía como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; decrece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y crece en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Para



x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$	$+\infty$	↘	$m=\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$



x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$	$-\infty$	↗	$M=\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

$x = -\frac{b}{2a}$, la función pasa por un mínimo que vale, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$;

2º Si a es negativo, y varía en sentido contrario a como lo hace $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a} + \infty\right)$.

Pasa por un máximo para $x = -\frac{b}{2a}$, y su valor es $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Curva representativa. — La recta $x = -\frac{b}{2a}$ es eje de simetría de la curva. Ésta es una parábola (*figs.* 37, 38, 39 y 40).

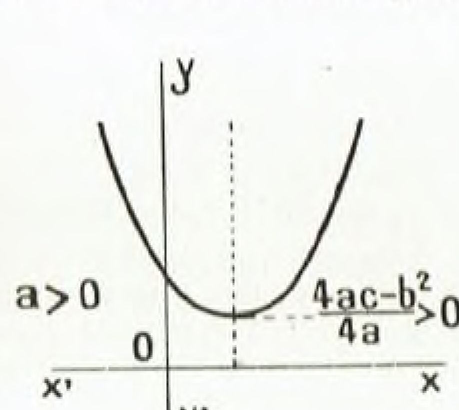


Fig. 37

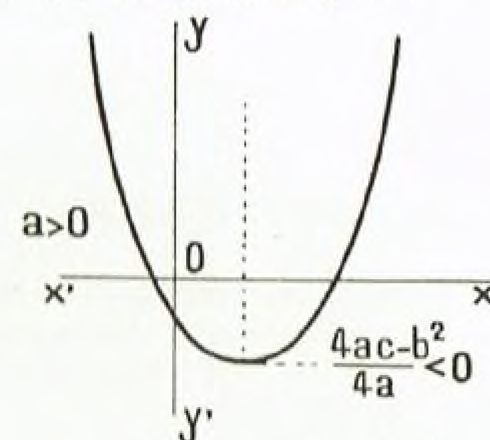


Fig. 38

EJEMPLO. Variación de la función $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - 1$.

El coeficiente de x^2 es $\frac{1}{3}$, positivo: la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, +1)$, y creciente en el intervalo $(+1, +\infty)$ pasando por un mínimo para $x = 1$.

En efecto, se tiene $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1$.

El valor del mínimo es $m = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$.

La tabla de valores de la función es la siguiente:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	disminuye ↘	$-\frac{4}{3}$	↗ crece	$+\infty$

La curva representativa es la de la *fig.* 41.

Los puntos donde la curva corta el eje $x'x$ se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - 1 = 0,$$

cuyas raíces son: $x = -1$, $x = 3$.

Haciendo $x = 0$ obtenemos para y el valor $y = -1$; éste es el punto donde la curva corta el eje $y'y$.

OBSERVACIÓN. Si observamos los diferentes gráficos representativos de la función $y = ax^2 + bx + c$, vemos que la curva corta el eje

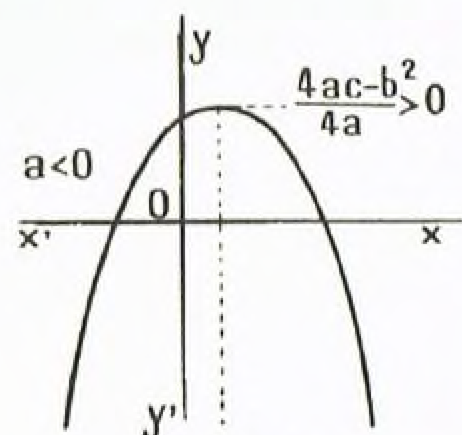


Fig. 39

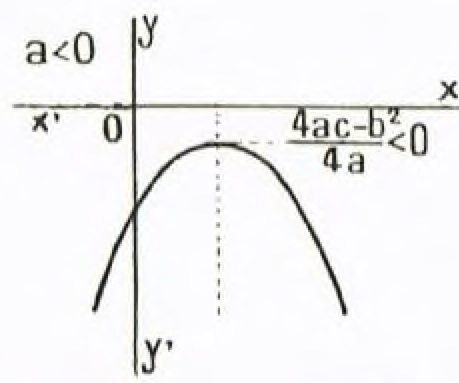


Fig. 40

$x'x$ en dos puntos, uno o ninguno, según que $4ac - b^2$ sea negativo, nulo o positivo. Estos puntos de intersección nos proporcionan las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

La curva nos da inmediatamente el signo del trinomio: si éste no tiene raíces o sólo tiene una, la curva está toda entera a un mismo lado del eje $x'x$, y el trinomio tiene el signo del coeficiente a.

Si el trinomio tiene dos raíces, su signo es el de a para valores de la variable fuera del intervalo de las raíces. Para los valores de x comprendidos en este intervalo, el signo del trinomio es el contrario al del coeficiente a.

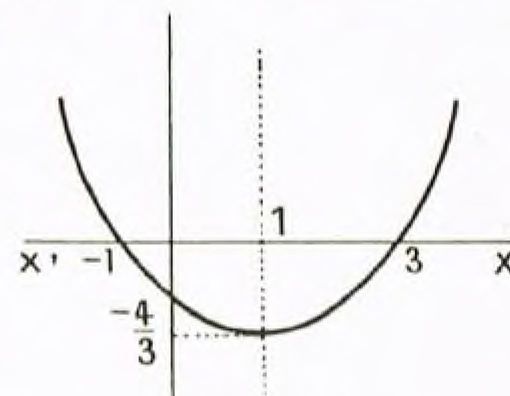


Fig. 41

Función homográfica

DEFINICIÓN. *Se llama* **función homográfica** *una función de la forma* $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$, *siendo* a, a', b, b' *constantes y* a' *diferente de cero (si* a' = 0, *la función se reduce a una función lineal).* También es preciso que $\frac{b}{a} \neq \frac{b'}{a'}$, pues si estos coeficientes fueran proporcionales, la función se reduciría a una constante.

Para el valor $x = -\dfrac{b'}{a'}$ el denominador se anula y la función tiende a $\pm\infty$, según sea el signo del numerador. Podemos, pues, considerar la función homográfica dividida en dos intervalos parciales $\left(-\infty, -\dfrac{b'}{a'}\right)$, $\left(-\dfrac{b'}{a'}, +\infty\right)$, excluyendo de ellos la frontera $-\dfrac{b'}{a'}$.

La función es continua para todos los valores para los que ella es definida. Para $x = -\dfrac{b'}{a'}$ la función no es continua.

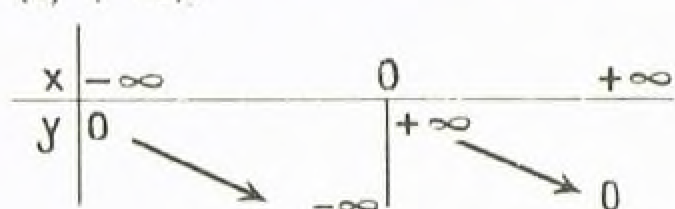
Ejemplos de funciones homográficas son los siguientes:

$$y = \frac{3}{x-3},\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{3x-2}{x+1}.$$

Primer caso particular: $y = \dfrac{1}{x}$. — En los dos intervalos donde esta función es definida, $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ ella es decreciente. En efecto, consideremos dos números α y β del intervalo $(-\infty, 0)$. Estos dos valores son negativos. Si es $\alpha < \beta$, y dividimos esta desigualdad por el producto $\alpha\beta$, que es positivo, tendremos:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha},$$

lo cual demuestra que y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Análogamente, la función es decreciente también en el intervalo $(0, +\infty)$.



Cuando x aumenta indefinidamente, y tiende hacia cero. Cuando x tiende hacia cero, y tiende hacia infinito, con el mismo signo que x.

Curva representativa. — Para obtener un dibujo aproximado de la curva (*fig.* 42), marquemos varios puntos de ella, por ejemplo, los siguientes:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Uniendo los puntos así determinados, tenemos la curva dibujada, que son dos ramas, una situada en el ángulo $\widehat{xOy}$, y la otra en el ángulo $\widehat{x'Oy'}$. Estas ramas de la curva se prolongan hasta el infinito y no pueden, naturalmente, ser dibujadas completas.

El origen de coordenadas es centro de simetría de la curva. Las bisectrices de los dos ángulos que forman los ejes son ejes de simetría.

Consideremos un punto M sobre la rama de curva situada en el ángulo $\widehat{xOy}$. Su distancia al eje Ox es MH. Si el punto M se aleja indefinidamente sobre la curva, su abscisa, OH, aumenta y su ordenada, HM, disminuye, llegando a ser este valor tan pequeño como queramos, si tomamos la abscisa OH suficientemente grande, pero sin llegar a anularse nunca. Esto se expresa diciendo que la recta $x'x$ es *asíntota* de la curva, de acuerdo con la definición que sigue.

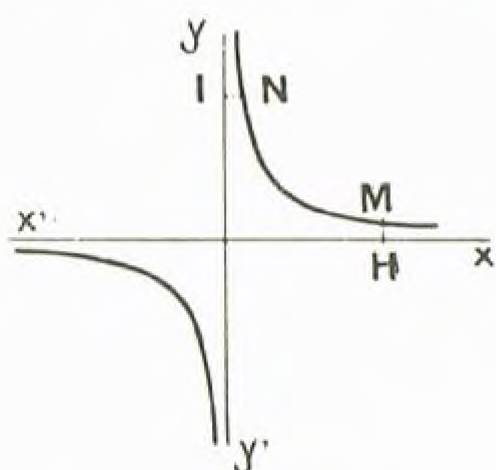


Fig. 42

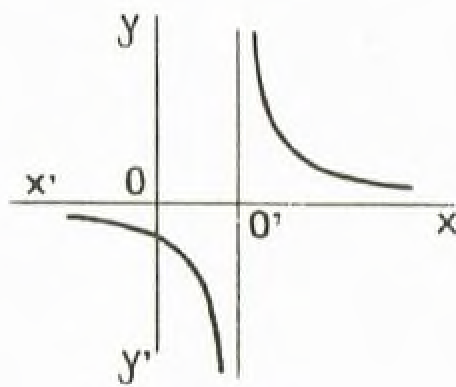


Fig. 43

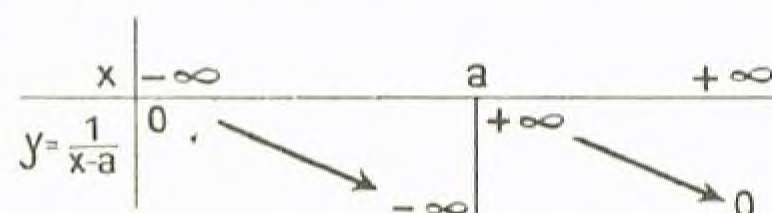
Asíntotas. — *Se dice que una recta es asíntota de una curva, si la distancia de un punto de la curva a esta recta tiende hacia cero cuando el punto se aleja indefinidamente sobre la curva.*

En la misma curva anterior, cuando x tiende hacia cero, y crece hacia infinito. La distancia de un punto N de la curva al eje $y'y$ es, en valor absoluto, su abscisa x. Cuando el punto se aleja hacia el infinito sobre la curva, su abscisa x tiende hacia cero. Luego la recta $y'y$ es asíntota de la curva.

En resumen, los ejes de coordenadas son asíntotas de la función $y = \dfrac{1}{x}$.

Caso particular: $y = \dfrac{1}{x-a}$. — Esta función tiene dos intervalos $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ en los que es definida y continua. En estos dos intervalos, la función es decreciente por ser creciente su inversa $x - a$.

Cuando x tiende hacia infinito, la función tiende hacia cero. Cuando x tiende hacia a, la función tiende hacia infinito. Tenemos el cuadro siguiente de variación.



Curva representativa. — Hagamos la representación gráfica para el caso particular $y = \dfrac{1}{x-2}$. Esta curva tiene por asíntotas el eje $x'x$ y la recta $x = 2$ (fig. 43).

OBSERVACIÓN. Si tomamos como ejes de coordenadas el mismo eje $x'x$, y como eje $y'y$ la recta $x = 2$, la relación entre las abscisas en los dos sistemas es $X = x - 2$. Las coordenadas son iguales, $Y = y$.

En los nuevos ejes, la curva tendrá por ecuación $Y = \dfrac{1}{X}$, que es la curva estudiada anteriormente.

Caso general: $y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$. Haciendo la división indicada, podemos escribir

$$ax + b = \frac{a}{a'}(a'x + b') + b - \frac{ab'}{a'},$$

$$ax + b = \frac{a}{a'}(a'x + b') + \frac{a'b - ab'}{a'}.$$

Por tanto, la función queda así:

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'} \cdot \frac{1}{a'x + b'}.$$

Multiplicando y dividiendo el denominador del segundo sumando por a', la función no varía:

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

El cociente $\dfrac{a}{a'}$ es una constante, luego y varía en el mismo sentido que

$$\frac{a'b - ab'}{a'^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Esta expresión se compone del producto de la constante $\dfrac{a'b - ab'}{a'^2}$ por la función $\dfrac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$.

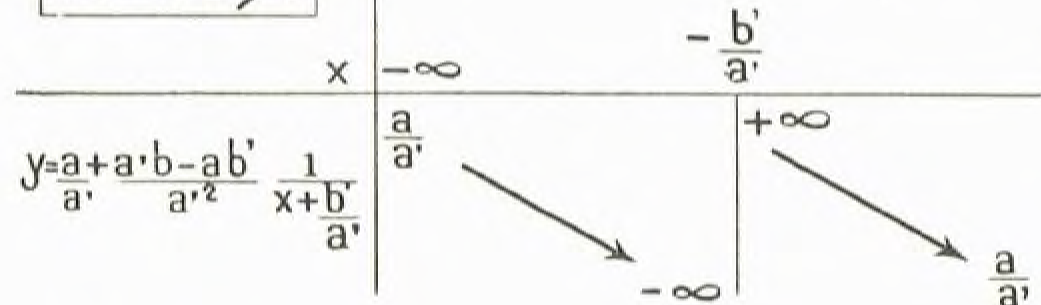
Estudiaremos el signo según sea el de la constante. Pero el denominador de la constante es positivo por ser un cuadrado, luego el signo de esa constante es el de su numerador, $a'b - ab'$.

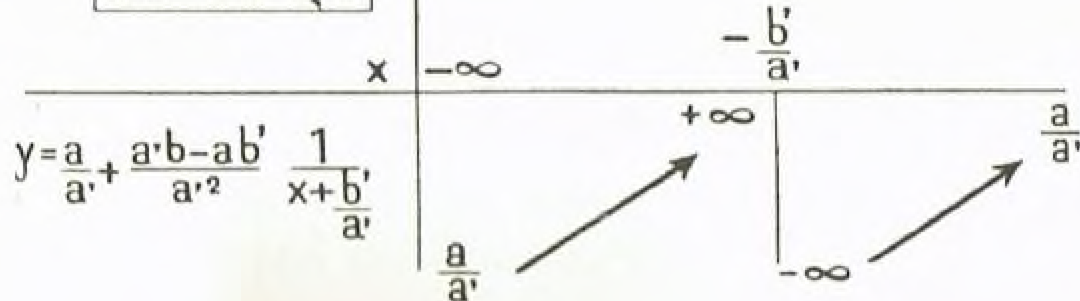
1º Si $a'b - ab' > 0$, la función y varía según $\dfrac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$; por tanto, y decrece en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{b'}{a'}\right)$ y $\left(-\dfrac{b'}{a'}, +\infty\right)$.

2º Si $a'b - ab' < 0$, la función y varía en sentido contrario a $\dfrac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$: crece en los dos intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{b'}{a'}\right)$ y $\left(-\dfrac{b'}{a'}, +\infty\right)$.

Cuando x tiende hacia infinito, la función tiende hacia $\dfrac{a}{a'}$.

Si x tiende hacia $-\dfrac{b'}{a'}$, la función tiende hacia $\pm\infty$, según que $a'b - ab'$ sea positivo o negativo. A continuación tenemos los dos cuadros de valores siguientes:





Curvas representativas. — Los dos casos considerados los tenemos gráficamente en las *figs.* 44 y 45.

En ambos casos, la curva se compone de dos ramas y tiene por asíntotas las rectas perpendiculares $y = \frac{a}{a'}$, $x = -\frac{b'}{a'}$. El punto de intersección de estas asíntotas es centro de simetría de la curva. Las bisectrices de los dos ángulos que forman las asíntotas entre sí, son ejes de simetría.

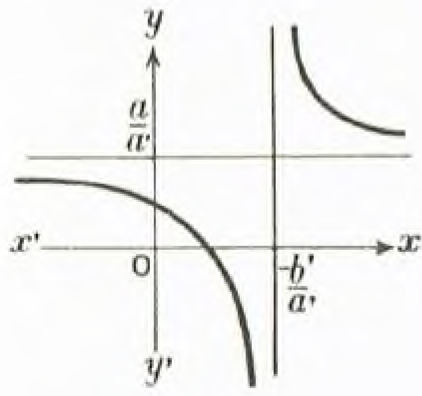


Fig. 44

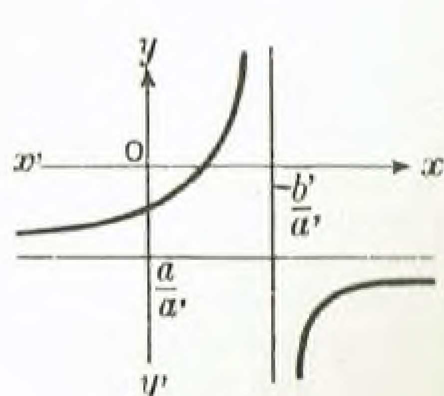


Fig. 45

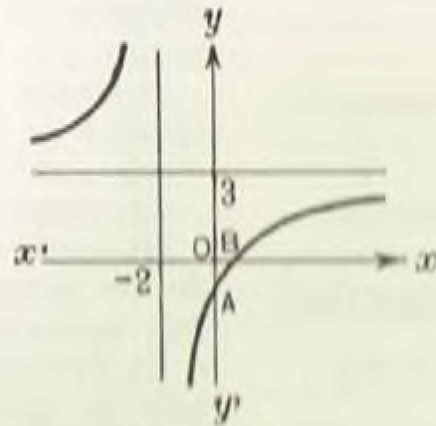


Fig. 46

Consejos para las aplicaciones. — Como una función homográfica es *siempre creciente o siempre decreciente*, podemos dar dos valores a la variable *(los dos mayores o los dos menores que la raíz del denominador)*, ver los valores que toma la función y deducir si ésta es creciente o decreciente.

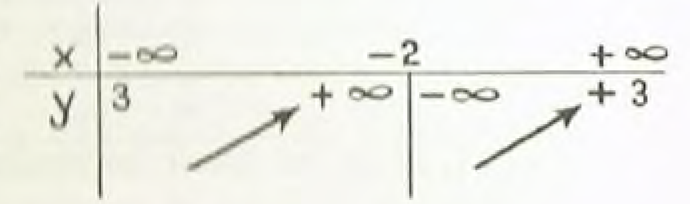
La curva tiene dos asíntotas. Una se obtiene igualando a cero el denominador, que hace y infinito. La otra se obtiene despejando la x en función de y, e igualando a cero el denominador que resulte, pues así se hace x infinito.

Ejemplo. Sea la curva $y = \frac{3x-2}{x+2}$.

Igualando el denominador a cero, se obtiene una asíntota, $x = -2$. Si despejamos la x, resulta: $x = \frac{-2-2y}{y-3}$.

Anulando el denominador, obtenemos la asíntota: $y = 3$.

Veamos si es creciente o decreciente. El único valor que no define la función dada es $x = -2$. Para $x = 0$, $y = -1$.



x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	3	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	$+3$

Para $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$. Luego la función dada es creciente. La curva está representada en la *fig.* 46.

Derivadas

Terminología y notación. Significación geométrica de la derivada. Función derivada. — **Cálculo de las derivadas:** Derivada de una suma. Derivada de un producto. Aplicaciones. Derivada de un cociente. Aplicaciones. Derivada de la raíz cuadrada de una función. Derivadas de las funciones circulares. Derivada de $y = sen\ x$. Derivada de $y = cos\ x$. Derivada de $y = tg\ x$. Función de función. Derivadas sucesivas. Derivadas parciales de las funciones de varias variables. — **Utilización de las derivadas en el estudio de las funciones:** Estudio de la variación de una función. Marcha a seguir. Función lineal $y = ax + b$. Función $y = x^2$. Función $y = ax^2 + bx + c$. Función $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$. Función $y = x^3$. Función $y = \frac{5x^2+x+23}{x^2+5}$. Función $y = \frac{x^3-2}{2x}$. Curva representativa. Teorema de Rolle. Teorema de los incrementos finitos. Fórmula de Taylor. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicaciones de estas fórmulas. Desarrollo en series enteras. Resolución numérica de las ecuaciones $f(x) = 0$. Separación de raíces. Métodos de aproximación. Infinitésimos. Parte principal. Diferencial de una función $y = f(x)$

En los capítulos precedentes hemos estudiado las variaciones de ciertas funciones. En el caso de una función homográfica o de un trinomio de segundo grado, podemos siempre hacer las operaciones precisas para poner la función en la forma ya estudiada. Para funciones más complicadas, un estudio directo, análogo a los precedentes, resulta difícil y a veces imposible.

A falta de un estudio rigurosamente exacto, podemos formarnos una idea aproximada de la variación de la función, dando a la variable algunos valores y observando los valores que toma la función. Cuantos más valores demos a la variable, mayor será la aproximación que obtengamos en el estudio de la función.

Para ver de una manera aproximada lo que ocurre en las proximidades de un valor x_0 de la variable, damos a ésta también un valor x_1, próximo al anterior, y estudiamos el cociente $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (v. p. 199).

Cuanto más cercano a x_0 sea el valor x_1, mayor aproximación tendremos. Consideremos en el límite el valor del cociente $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Definición. *La derivada de la función* $y = f(x)$, *para el valor* x_0 *de la variable, es el límite (si éste existe) del cociente* $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, *cuando* x_1 *tiende hacia* x_0.

Terminología y notación. — El valor algébrico $x_1 - x_0$ se llama *incremento de la variable*. Éste puede ser positivo o negativo. Se le designa por la notación h, o, sobre todo, por la notación Δx.

La diferencia $f(x_1) - f(x_0)$ se denomina *incremento de la función*. Se le designa por $y_1 - y_0$, o, sobre todo, por la notación Δy. La derivada de una función se indica poniendo un índice (en el mismo sitio que un exponente): y', $f'(x_0)$. También se indica la derivada por la notación $\frac{dy}{dx}$.

Fig. 47

Con esta terminología que hemos definido podemos enunciar el concepto de derivada de esta forma: la derivada de una función, para el valor x_0 de la variable, es el límite (si éste existe) del cociente del incremento de la función por el incremento de la variable, cuando este tiende a cero.

Significación geométrica de la derivada. — Sea la función $y = f(x)$, definida para $x = x_0$. Sea M_0 el punto correspondiente al valor x_0 de la variable y M_1 el punto correspondiente a un segundo valor de la variable, x_1, próximo a x_0 (*fig.* 47). La recta M_0M_1 tiene por coeficiente angular el valor $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Hagamos tender x_1 hacia x_0. La recta M_0M_1 gira alrededor de M_0, y cuando M_1 coincide con M_0, la posición límite de la secante M_0M_1 es, por definición, la tangente a la curva. Entonces el coeficiente angular $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ coincide con el valor de la derivada. Es decir, el coeficiente angular de la tangente a una curva en un punto de ella es el valor de la derivada en ese punto de la curva.

Función derivada. — Sea una función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b). Si para todos los valores de este intervalo la función admite una derivada, el conjunto de los valores de estas derivadas forma una función que se llama derivada de la función y. Se le designa por las notaciones $f'(x)$, y' o $\frac{dy}{dx}$.

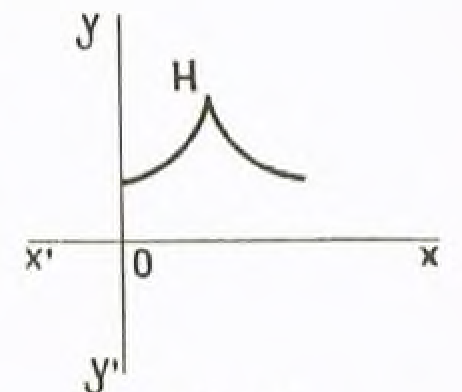


Fig. 48

Teorema. *Si una función* $f(x)$ *admite una derivada finita para el valor* x_0 *de la variable, es continua para el valor* $x = x_0$.

En efecto, designemos por K al valor del cociente $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Será entonces $f(x_1) - f(x_0) = K(x_1 - x_0)$. Si x_1 tiende hacia x_0, K tiende hacia $f'(x_0)$. Si $f'(x_0)$ es finito, el producto $K(x_1 - x_0)$ tiende hacia cero y, por tanto, a este mismo límite tenderá $f(x_1) - f(x_0)$.

Observación. El recíproco de este teorema no es cierto. Existen funciones que son continuas para un cierto valor de la variable, pero que no tienen derivada para este valor de la variable.

Puede suceder que $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ tienda hacia un cierto límite,

cuando x_1 tiende hacia x_0 por valores más pequeños que x_0, y tienda hacia otro límite distinto, cuando x_1 tiende hacia x_0 por valores mayores que x_0. El primer límite es la derivada a la izquierda, y el segundo la derivada a la derecha. La curva presenta un punto anguloso (*fig.* 48).

Cálculo de las derivadas

Casos sencillos.

1° *La derivada de una constante es nula.*

En efecto, si $y = C$, $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = 0$. Esta relación es siempre nula, luego su límite también lo es.

2° *La derivada de* $y = x$ *es* $y' = 1$.

En efecto, $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$. Este cociente es siempre igual a la unidad, luego su límite es también la unidad.

3° *La derivada de* $y = x^2$ *es* $y' = 2x$.

En efecto, $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando x_1 tiende hacia x_0, la suma $x_1 + x_0$ tiende hacia $2x_0$. Luego $y' = 2x$.

4° *La derivada de* $y = \dfrac{1}{x}$ *es* $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

En efecto, sea $x_0 \neq 0$:

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} = -\frac{x_1 - x_0}{x_1 x_0},$$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{1}{x_1 x_0}.$$

Cuando x_1 tiende hacia x_0, el límite de $-\dfrac{1}{x_1 x_0}$ es $-\dfrac{1}{x_0^2}$. Luego $y' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Derivada de una suma. — TEOREMA. *Si varias funciones* u, v, w, *de una misma variable* x, *admiten una derivada para un cierto valor de* x, *la suma de esas funciones admite también una derivada para este mismo valor de* x, *y su valor es la suma de las derivadas de esas funciones.*

Consideremos la función

$$y = u + v + w.$$

Sean u', v', w' las derivadas de las funciones u, v, w, para un cierto valor de x. Si damos a x un incremento Δx, los incrementos que corresponden a u, v y w son Δu, Δv y Δw, y a y le corresponde un incremento Δy, de tal modo que

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w.$$

De aquí se deduce,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w.$$

Dividiendo por Δx, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Cuando Δx tiende a cero, las relaciones $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta w}{\Delta x}$ tienen por límites, respectivamente, u', v', w', según la hipótesis hecha. Luego su suma es otro límite y se puede poner,

$$y' = u' + v' + w'.$$

OBSERVACIÓN. Las dos funciones $y = f(x)$, $y = A + f(x)$, siendo A una constante, tienen la misma derivada $y' = f'(x)$.

Derivada de un producto. — TEOREMA. *Si varias funciones admiten derivadas, su producto admite igualmente una derivada, cuyo valor es la suma de cada uno de los productos que se obtienen sustituyendo sucesivamente en el dado cada función por su derivada.*

1° *Caso de dos factores.* Sean u y v las dos funciones de x dadas, que admiten las derivadas u' y v'. Consideremos la función $y = uv$. Si damos a x un incremento Δx, los correspondientes incrementos de las funciones, u, v, y, serán Δu, Δv, Δy, tales que se tendrá

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v.$$

De aquí se deduce

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

Dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si Δx tiende a cero, Δu, Δv tienden a cero; $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ tienden, por hipótesis, a las derivadas u' y v'. Luego $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite, que es

$$y' = uv' + vu'.$$

2° *Caso de un número cualquiera de factores.* Tomemos, por ejemplo, tres factores u, v, w. Sea $y = uvw$.

Se puede considerar el producto uv como constituyendo un solo factor y según el caso primero podemos escribir, sucesivamente,

$$y' = (uv)w' + (uv)'w;$$
$$y' = uvw' + (uv' + vu')w;$$
$$y' = uvw' + uv'w + u'vw.$$

Análogamente a como hemos procedido ahora, obtendríamos una fórmula semejante para la derivada del producto de un número cualquiera de factores.

Aplicaciones. — La derivada de $y = 3x$ es $y' = 3$. En general, la derivada de $y = A\,f(x)$, siendo A una constante, es $y' = A\,f'(x)$, puesto que la derivada de A es nula.

Derivada de u^m. Siendo u función de x, la derivada de $y = u^m$ es igual a la suma de m términos iguales a $u^{m-1} \cdot u'$, es decir, $y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$.

En particular, la derivada de x^m es mx^{m-1}.

Derivada de un polinomio. Es la suma de las derivadas de cada uno de los monomios que lo componen. Estas derivadas parciales se obtienen aplicando la fórmula de la derivada de x^m hallada antes.

La derivada de un polinomio entero de grado m es un polinomio entero de grado $m - 1$. Sea el polinomio $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$. Su derivada es,

$$y' = 4x^3 - 6x + 2.$$

Derivada de un cociente. — TEOREMA. *Si dos funciones* u *y* v, *de una variable* x, *admiten una derivada, la función* $y = \dfrac{u}{v}$ *admite también una derivada, siempre que el denominador* v *no sea nulo para el valor de* x *considerado. El valor de esta derivada es* $y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$.

Consideremos la función $y = \dfrac{u}{v}$. Dando a x un incremento Δx, resultarán los incrementos Δu para u, Δv para v, y Δy para y, de modo que será,

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Despejando Δy tenemos,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

Si dividimos los dos términos de esta igualdad última por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Si Δx tiende a cero, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ tienden a las derivadas u' y v'; Δv tiende a cero y el denominador tiende, por tanto, a v^2. Luego puede escribirse,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Aplicaciones. — *Derivada de* $y = \dfrac{1}{x^m}$.

Aplicando el teorema anterior, será

$$y' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

Derivada de $y = \dfrac{1}{u^m}$, *siendo* u *una función de* x *que admite derivada.*

Se tiene,

$$y = \frac{mu^{m-1}u'}{u^{2m}} = -mu^{-m-1}u' = \frac{-mu'}{u^{m+1}}.$$

En suma, vemos que la regla establecida para la derivada de $y = u^m$ puede aplicarse cuando el exponente es negativo.

EJEMPLO. *Hallar la derivada de* $y = \dfrac{4x^3 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5}$

$$y' = \frac{(x^3 - 3x^2 + 5)(12x^2 - 2) - (4x^3 - 2x + 1)(3x^2 - 6x)}{(x^3 - 3x^2 + 5)^2};$$

$$y' = \frac{-12x^4 + 4x^3 + 51x^2 + 6x - 10}{(x^3 - 3x^2 + 5)^2}$$

Derivada de la raíz cuadrada de una función. — TEOREMA. *Si* u *es una función de* x, *positiva, no nula, y admite una derivada* u', *la función* $y = \sqrt{u}$ *admite también una derivada, cuyo valor es* $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Demos a x un incremento Δx, al que corresponden los incrementos Δu y Δy para u y para y, respectivamente. Podemos escribir,

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}.$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}$, se tiene

$$\Delta y = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}.$$

Dividiendo ambos miembros por Δx, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}.$$

Cuando Δx tiende a cero, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ tiende a u', Δu tiende a cero, y el denominador tiene por límite $2\sqrt{u}$. Luego $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un límite, y su valor es:

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

EJERCICIOS.

$$y = \sqrt{x}, \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y = \sqrt{5x^4 - 2x^2 + 1}, \qquad y' = \frac{10x^3 - 2x}{\sqrt{5x^4 - 2x^3 + 1}}.$$

Derivadas de las funciones circulares. — TEOREMA. *Las relaciones* $\dfrac{\text{sen x}}{\text{x}}$ *y* $\dfrac{\text{tg x}}{\text{x}}$ *tienden a la unidad, cuando* x *tiende a cero* (x *viene expresado en radianes*). Vamos a demostrar, primeramente, que *si un arco es menor que un cuadrante, su medida, tomando el radio como unidad, está comprendida entre las medidas del seno y de la tangente de ese arco.*

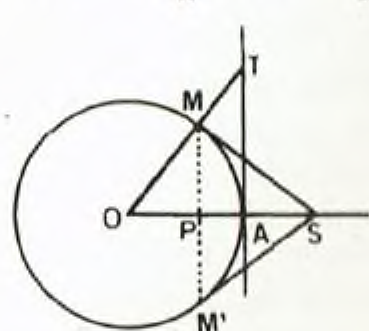


Fig. 49

Designemos por α la medida del arco $\widehat{AM}$ (*fig.* 49); queremos demostrar que siendo $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, se cumplirá, sen $\alpha < \alpha <$ tg α.

Tomemos el punto M′, simétrico del M con relación a OA, y tracemos las tangentes MS y M′S a la circunferencia. $\overline{PM}$ y $\overline{AT}$ son las medidas del seno y de la tangente del arco $\widehat{AM}$, respectivamente.

Evidentemente, se puede escribir:

$$\text{med. cuerda } \overline{MM'} < \text{med. arco } \widehat{MAM'} < \text{med. } (\overline{MS} + \overline{M'S}),$$

o bien, dividiendo los dos miembros por 2:

$$\text{med. } \overline{PM} < \text{med. arco } \widehat{MA} < \text{med. } \overline{MS}.$$

Pero $\overline{MS} = \overline{AT}$, luego la doble desigualdad anterior es entonces:

$$\text{sen } \alpha < \alpha < \text{tg } \alpha, \text{ estando } \alpha \text{ expresado en radianes.}$$

Demostraremos ahora el teorema enunciado. Veamos primero el límite de $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ cuando x tiende a cero. Si x es positivo, podemos siempre suponer que es menor que $\dfrac{\pi}{2}$, y se tiene

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Dividiendo sen x por cada uno de estos tres números, que son positivos y crecientes, obtendremos tres cocientes que son positivos y decrecientes:

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x.$$

Cuando x tiende a cero, cos x tiende a la unidad; la relación $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ se encuentra entonces comprendida entre la unidad y un número variable que tiene por límite la unidad, luego la relación $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ tiene por límite la unidad.

Si x es negativo, nosotros podemos hacer $x = -y$, siendo y positivo, y tendríamos:

$$\frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen } (-y)}{-y} = \frac{-\text{sen } y}{-y} = \frac{\text{sen } y}{y}.$$

Cuando x tiende a cero por valores negativos, y tiende también a cero, pero, por valores positivos; $\dfrac{\text{sen } y}{y}$ tiene por límite la unidad, igual que $\dfrac{\text{sen } x}{x}$, pues ambas relaciones son iguales.

Veamrs ahora el límite de $\dfrac{\text{tg } x}{x}$ cuando x tiende a cero:

$$\frac{\text{tg } x}{x} = \frac{\text{sen } x}{x \cos x} = \frac{\text{sen } x}{x} \times \frac{1}{\cos x}.$$

Cuando x tiende a cero, $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$ y $\dfrac{1}{\cos x}$ tienden ambos a la unidad. Luego el límite de $\dfrac{\text{tg } x}{x}$ es también la unidad.

Derivada de y = sen x. — TEOREMA. *La derivada de* y = *sen* x *es* y′ = *cos* x, *cuando* x *está expresada en radianes.*

Demos un incremento Δx a x, al que corresponde un incremento Δy para y. Se tiene

$$\Delta y = \text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Dividiendo ambos miembros por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen } \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Cuando Δx tiende a cero, el primer factor del segundo miembro tiende a la unidad y el segundo tiende hacia cos x. Luego $y' = \cos x$.

Derivada de y = cos x. — TEOREMA. *La derivada de* y = *cos* x *es* y′ = — *sen* x. Dando a x un incremento Δx, corresponde a y un incremento Δy. Se tiene

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x = -2 \text{ sen } \frac{\Delta x}{2} \text{ sen } \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Dividiendo ambos miembros por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\text{sen } \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \text{ sen } \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Cuando Δx tiende a cero, el primer factor del segundo miembro tiende a la unidad y el segundo tiende hacia cos x. Luego $y' = \cos x$.
Luego $y' = -$ sen x.

Derivada de y = tg x. — TEOREMA. *La derivada de* y = *tg* x *es* $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Se tiene $y = \text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$.

Aplicando la regla de la derivada del cociente será:

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \text{sen } x (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Este valor es igual que $y' = 1 + \text{tg}^2 x$.

También habría podido obtenerse el mismo resultado por el procedimiento general, sin utilizar las derivadas, ya conocidas, del seno y del coseno.

OBSERVACIÓN. Análogamente se obtendría para $y = \text{cotg } x$ la derivada

$$y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x).$$

Función de función. — Consideremos la función $y = f(u)$, en la que u es una función de x. Se dice entonces que y es una *función de función de* x.

Consideremos un valor de x para el que la función u esté determinada y admita una derivada u'. La función $y = f(u)$ estará también definida, y supongamos que admita la derivada $y' = f'(u)$, con relación a u.

Si damos a x un incremento Δx, corresponde a u un incremento Δu, y a y un incremento Δy. Se puede escribir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Si Δx tiende hacia cero, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ tiene por límite la derivada u'_x y $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ tiende a $y'u$, luego $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un límite, que es $y'x = y'u \cdot u'x$.

Esta fórmula puede generalizarse para el caso de una función que dependa de otras varias sucesivamente.

REGLA. *Si* y *es función de* u, u *función de* v, *y* v *función de* x, *y para un cierto valor de* x, v *admite una derivada, y para el valor correspondiente de* v *la función* u *admite también derivada, será:*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

EJEMPLOS.

1° $\quad y = \cos 3x, \qquad y' = -3 \text{ sen } 3x.$

2° $\quad y = \text{sen} \left(5x + \dfrac{\pi}{6} \right), \qquad y' = 5 \cos \left(5x + \dfrac{\pi}{6} \right).$

3° $\quad y = \text{sen } \sqrt{x}, \qquad y = \dfrac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

OBSERVACIÓN. Después de haber establecido la fórmula que da la derivada de $y = \text{sen } x$, podíamos haber obtenido inmediatamente la derivada de $y = \cos x$. En efecto,

$$y = \cos x = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \text{Luego la derivada es}$$

$$y' = (-1) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\text{sen } x.$$

Derivadas sucesivas. — Sea la función $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b) y que admite una derivada $y' = f'(x)$. Esta deriva-

da es una función que puede a su vez tener una derivada, que sería la *derivada segunda* de $y = f(x)$. Se la designa por la notación y'' o $f''(x)$. Si esta derivada segunda admite a su vez otra derivada, ésta sería la *derivada tercera* de $f(x)$. Se la designa por y''' o $f'''(x)$. Y así sucesivamente.

EJEMPLOS:

1°
$$y = ax^2 + bx + c,$$
$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a, \quad y''' = 0, \quad y^{(IV)} = 0.$$

2°
$$y = x^n,$$
$$y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Calculando las derivadas sucesivas se llegaría a la derivada de orden n o derivada *enésima*, cuyo valor sería:
$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots 3.\,2.\,1. = n!$$

3°
$$y = \operatorname{sen} x,$$
$$y' = \cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\operatorname{sen} x = \cos(x + \pi),\ y''' = -\cos x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Si seguimos derivando llegaríamos a la derivada enésima,
$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Derivadas parciales de las funciones de varias variables. — Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables x e y, definida para ciertos valores considerados de x y de y. Se llama derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x la derivada de la función z, considerando la x como variable y la y como constante. A esta derivada se la designa por uno de los símbolos siguientes: $f'_x(x, y)$, z'_x o $\frac{\delta f}{\delta x}$.

Análogamente, la derivada parcial de z con respecto a y se designa por $f'_y(x, y)$, z'_y o $\frac{\delta f}{\delta y}$.

Las derivadas de primer orden con respecto a x o y admiten, en general, derivadas parciales, que son las derivadas de segundo orden de $f(x, y)$. Las que se obtienen derivando f'_x con respecto a x o y se designan por f''_{x^2} (o $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$), y, f''_{xy} (o $\frac{d^2 f}{\delta x \delta y}$) respectivamente. Análogamente, las derivadas parciales de segundo orden que se obtienen derivando f'_y con respecto a x o y se designan, respectivamente, por las notaciones f''_{yx} (o $\frac{\delta^2 f}{\delta y \cdot \delta x}$), y f''_{y^2} (o $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$).

Las derivadas segundas pueden admitir derivadas parciales, que son las derivadas de tercer orden de $f(x, y)$, y así sucesivamente.

EJEMPLO:

$$f(xy) = 12x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + y^3.$$
$$\begin{cases} f'_x = 36x^2 + 18xy - 8y^2. \\ f'_y = 9x^2 - 16xy + 3y^2. \end{cases}$$
$$\begin{cases} f''_{x^2} = 72x + 18y, & f''_{yx} = 18x - 16y. \\ f''_{xy} = 18x - 16y, & f''_{y2} = -16x + 6y \end{cases}$$
$$f'''_{x^3} = 72, \quad f'''_{x^2y} = 18, \quad f'''_{yx^2} = 18, \quad f'''_{yxy} = -16.$$
$$f'''_{xyx} = 18, \quad f'''_{xy^2} = -16, f'''_{y^2x} = -16, \quad f'''_{y^3} = 6.$$

OBSERVACIÓN. En este ejemplo se observa que
$$f''_{xy} = f''_{yx},$$
$$f'''_{x^2y} = f'''_{yx^2} = f'''_{xyx}.$$

Ésta es una propiedad general de las funciones de varias variables, según el teorema de Schwarz: Si la función $z = f(x, y)$ admite las tres derivadas parciales f'_x, f'_y, f''_{xy}, y esta última derivada es continua, existe también la f''_{yx}, verificándose que $f''_{xy} = f''_{yx}$. Omitimos la demostración, por salirse de los límites de esta obra.

Utilización de las derivadas en el estudio de las funciones

Las derivadas son de una gran utilidad en el estudio de las variaciones de las funciones. Esta utilidad se basa en los teoremas siguientes.

TEOREMA. *Si una función es creciente en un intervalo* (a, b), *y admite derivada para cualquier valor de este intervalo, esta derivada nunca será negativa.*

Consideremos los valores x y x_0 comprendidos en el intervalo (a, b). Ya sabemos que si la función es creciente, la relación $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es una función de x, siempre positiva. Si hacemos tender x hacia x_0, el límite de esta relación es la derivada $f'(x_0)$, y siempre será positiva, por tanto, dicha derivada, como queríamos demostrar.

TEOREMA. *Si una función es decreciente en un intervalo* (a, b), *y admite derivada para cualquier valor de este intervalo, esta derivada nunca será positiva.*

La demostración de este teorema es análoga a la del anterior.

OBSERVACIÓN. Ya hemos demostrado que la derivada de una constante es cero. Luego si una función es constante en un intervalo, su derivada en este intervalo es nula.

RECÍPROCOS. 1° *Si una función* f(x) *tiene una derivada constantemente positiva para todos los valores de un intervalo, dicha función es creciente en este intervalo.*

En efecto, si la función fuera constante en un intervalo parcial interior al considerado, su derivada sería nula en el interior de ese intervalo parcial y esto está en contra de la hipótesis. Si la función fuera decreciente en ese intervalo parcial, su derivada en dicho intervalo parcial sería negativa, lo que está también en contra de la hipótesis. Luego la función tiene que ser forzosamente creciente en el intervalo considerado.

Análogamente podríamos demostrar los dos teoremas recíprocos que siguen.

2° *Si una función* f(x) *tiene una derivada constantemente negativa en el interior de un intervalo, dicha función es decreciente en este intervalo.*

3° *Si una función* f(x) *tiene una derivada constantemente nula en el interior de un intervalo, dicha función es constante en este intervalo.*

Estudio de la variación de una función. Marcha a seguir. — 1° Se determinan los distintos intervalos en cuyo interior está definida la función.

2° Se calcula la derivada de la función y se subdividen los intervalos anteriores en intervalos parciales, en cuyo interior la derivada tenga el mismo signo. En cada uno de estos intervalos parciales, la función varía en el sentido que nos indique el signo de la derivada. Se estudia lo que ocurre en las fronteras de estos intervalos. Finalmente, estos resultados se indican en un cuadro.

3° Se dibuja la curva. Es interesante precisar sus particularidades: simetrías, asíntotas, etc. Si un punto es especialmente interesante, para mejor determinarlo podemos dibujar la tangente a la curva en ese punto, cuyo coeficiente angular sabemos que es el valor de la derivada en ese punto.

Antes de estudiar nuevos ejemplos, tratemos las funciones que ya hemos considerado antes directamente.

Función lineal $y = ax + b$. — La derivada es $y' = a$. Si $a > 0$, la función es creciente, y si $a < 0$, la función es decreciente.

Función $y = x^2$. — Su derivada es $y' = 2x$. Encontramos (como ya habíamos visto antes) que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$. El origen de coordenadas es el punto más bajo de la curva (ver *fig.* 35). La derivada en este punto es nula, y la curva es, por tanto, tangente en el origen al eje $x'x$.

Función $y = ax^2 + bx + c$. — Su derivada es $y' = 2ax + b$. El signo de este binomio nos da el sentido de variación de la curva. Si $a > 0$, la derivada es negativa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, y positiva en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Si $a < 0$, la derivada es positiva y negativa, respectivamente, en los intervalos anteriores. Estos mismos resultados ya los habíamos obtenido antes en el estudio directo.

Función $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$. — Esta función deja de estar definida para $x = -\frac{b'}{a'}$. Para calcular la derivada apliquemos la fórmula de la derivada de un cociente y será
$$y' = \frac{a(a'x + b') - (ax + b)a'}{(a'x + b')^2},$$
$$y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}.$$

Al ser un cuadrado el denominador, el signo de y' viene determinado por el del numerador. Si $ab' - a'b > 0$, la función es creciente en los dos intervalos en que ella está definida. Si $ab' - a'b < 0$, la función es decreciente en dichos intervalos. Estos mismos resultados ya los conocíamos por el estudio directo.

Función $y = x^3$. — Esta función es definida y continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. La derivada es $y' = 3x^2$.

Esta derivada es siempre positiva, salvo para el valor $x = 0$, que es nula. Luego la función es creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. En el origen, la curva es tangente al eje $x'x$, por ser nula la derivada. Este punto es un punto de inflexión, por cortar la tangente a la curva.

Observemos que en este punto la derivada segunda, $y'' = 6x$ es nula.

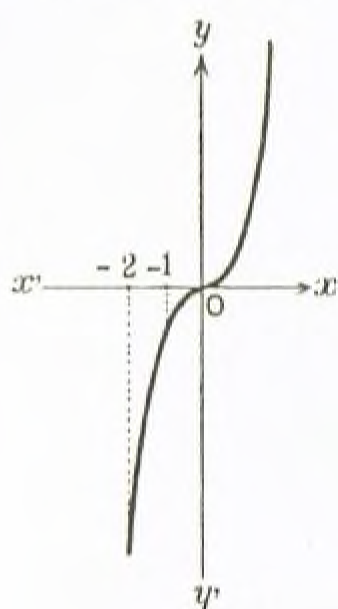


Fig. 50

La función tiende a infinito al mismo tiempo que x y con su mismo signo.

Para dibujar la curva, demos unos cuantos valores a x y tendremos los de y:

$x = 1 \quad y = 1 \qquad x = -1 \quad y = -1$

$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{8} \qquad x = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{8}$

$x = 2 \quad y = 8 \qquad x = -2 \quad y = -8$

$x = 3 \quad y = 27 \qquad x = -3 \quad y = -27$

$x = 4 \quad y = 64$

x	$-\infty$		$+\infty$
$y' = 3x^2$		+	
$y = x^3$	$-\infty$	crece	$+\infty$

Si damos a la variable dos valores opuestos, los puntos obtenidos son simétricos respecto del origen. Luego el origen es centro de simetría de la curva (*fig.* 50).

Función $y = \dfrac{5x^2 + x + 23}{x^2 + 5}$. — Esta función es un ejemplo numérico del cociente de dos trinomios de segundo grado, $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

El denominador no se anula para ningún valor de x. Luego la función está definida en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. La derivada es,

$$y' = \frac{(10x + 1)(x^2 + 5) - (5x^2 + 23)\,2x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{-x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 5)^2}.$$

El denominador es siempre positivo, luego la derivada tiene el signo del numerador. El numerador se anula para los valores $x = -1$ y $x = 5$. Luego la derivada es negativa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(5, +\infty)$, siendo positiva en el intervalo $(-1, +5)$. Observemos el cuadro de variación,

x	$-\infty$		-1		$+5$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	5	disminuye	$M = \frac{27}{6}$	crece	$\frac{153}{30}$	disminuye	5

Calculemos el límite de la función cuando x tiende a infinito. Si sustituimos x por $+\infty$ queda $y = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Esta expresión es una forma indeterminada, y es preciso calcular su verdadero valor. Para ello, dividamos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x, que es x^2:

$$y = \frac{5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{23}{x^2}}{1 + \dfrac{5}{x^2}},$$

Cuando x tiende hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$, la fracción tiende a

$$y = \frac{5 + 0 + 0}{1 + 0} = 5.$$

Luego la recta $y = 5$ es asíntota de la curva (*fig.* 51).

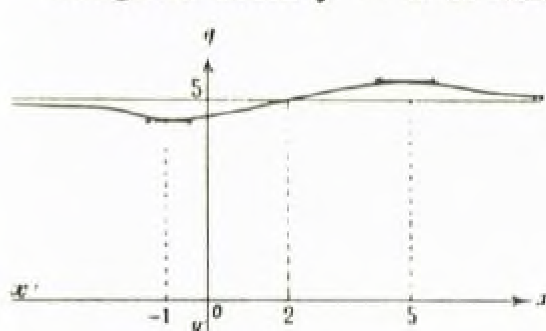


Fig. 51

Observación. En el intervalo $(-1, +5)$ la curva corta a su asíntota. Para encontrar la abscisa del punto de intersección resolvemos la ecuación

$$\frac{5x^2 + x + 23}{x^2 + 5} = 5,$$

$$5x^2 + x + 23 = 5x^2 + 25,$$
$$x = 2.$$

Función $y = \dfrac{x^3 - 2}{2x}$. — Para $x = 0$ se anula el denominador, y la curva deja de ser definida. Los intervalos en que es definida y continua son $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

La derivada es $y' = \dfrac{3x^2 \cdot 2x - 2(x^3 - 2)}{4x^2} =$

$$= \frac{x^3 + 1}{x^2} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x^2}.$$

El denominador es siempre positivo y el trinomio $x^2 - x + 1$ también lo es. Así pues, el signo de y' es el de $x + 1$. Luego la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, +\infty)$. De aquí, el cuadro de variación

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		−	0	+		+	
y	$+\infty$	disminuye	$m = \frac{3}{2}$	crece	$+\infty$ | $-\infty$	crece	$+\infty$

Para $x = -1$, el mínimo es $y = \dfrac{3}{2}$.

Cuando x tiende hacia cero, el numerador tiende hacia -2, y el denominador se anula: y tiende hacia $+\infty$ cuando x tiende hacia cero por valores negativos; y tiende hacia $-\infty$ cuando x tiende hacia cero por valores positivos.

Cuando x tiende hacia infinito, se obtiene una forma indeterminada del tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Para hallar el verdadero valor, hacemos:

$$y = \frac{x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^3}\right)}{2x} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)$$

Cuando x aumenta indefinidamente, $1 - \dfrac{2}{x^3}$ tiende hacia 1, y $\dfrac{x^2}{2}$ tiende hacia $+\infty$. Luego y tiende hacia $+\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$.

Curva representativa. — El eje $y'y$, es decir, la recta $x = 0$, es asíntota de la curva (*fig.* 52).

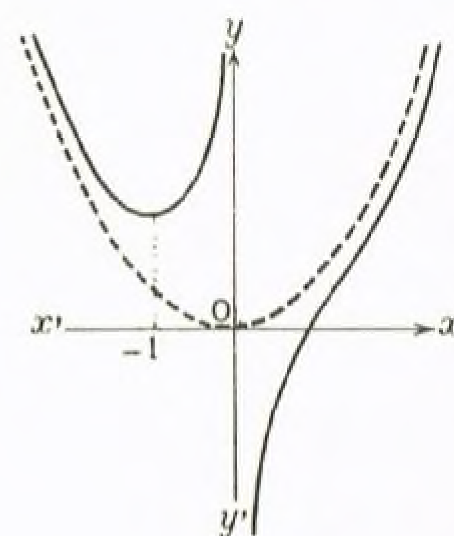


Fig. 52

Escribamos la ecuación de la curva en la forma $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$. Se ve que la diferencia $y - \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{1}{x}$ tiende hacia cero cuando x tiende hacia infinito, positivo o negativo. Es decir, la distancia entre dos puntos de igual abscisa, uno situado sobre la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$, y el otro situado sobre la curva $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$, tiende hacia cero cuando x tiende hacia $+\infty$ ó $-\infty$. Por extensión del concepto de asintótica, se dice que la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$ (en puntos en la *fig.* 52) es asíntota a la curva considerada.

Observación. Los ejemplos anteriores, así como la función homográfica, son funciones del tipo $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, siendo $f(x)$ y $g(x)$ polinomios en x. Si x tiende hacia infinito, nos encontramos con una forma indeterminada del tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Para hacer desaparecer esta indeterminación, sacamos factor común en el numerador y denominador a los términos de más alto grado. Sean estos términos Ax^m y Bx^n. La función será, entonces, el producto de $\dfrac{Ax^m}{Bx^n}$ por una fracción de la forma

$$\frac{1 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x_2} + \ldots}{1 + \dfrac{b_1}{x} + \dfrac{b_2}{x_2} + \ldots}.$$

Esta fracción tiene por límite la unidad, cuando x tiende hacia infinito. Luego y tiende entonces al mismo límite que la fracción $\dfrac{Ax^m}{Bx^n}$.

Distingamos tres casos:

1° Si $m < n$, es $\dfrac{Ax^m}{Bx^n} = \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{1}{x^{n-m}}$. Esta expresión tiende hacia cero cuando x tiende hacia infinito. Luego en este caso, la función y tiende a cero. La curva es asintótica al eje $x'x$;

2° Si $m = n$, es $\dfrac{Ax^m}{Bx^n} = \dfrac{A}{B}$. Cuando x aumenta indefinidamente, el límite de y es $\dfrac{A}{B}$. La recta $y = \dfrac{A}{B}$ es asíntota de la curva;

3° Si $m > n$, es $\dfrac{Ax^m}{Bx^n} = \dfrac{A}{B} \cdot x^{m-n}$. Si x tiende hacia infinito, y también tiende hacia infinito.

Si dividimos $f(x)$ por $g(x)$ según las potencias decrecientes de x, podemos poner y de la siguiente forma:

$$y = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

siendo $q(x)$ un polinomio de grado $m - n$ y $r(x)$ otro polinomio, de grado inferior a n.

Cuando x tiende hacia infinito, $\frac{r(x)}{g(x)}$ tiende hacia cero, según acabamos de ver. Esto nos dice que la curva $y = q(x)$ es asintótica a la curva $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

En el caso particular de ser $m - n = 1$, el cociente $q(x)$ es de primer grado en x, de la forma $ax + b$; entonces $y = q(x)$ es una recta, asíntota de la curva que estudiamos.

Teorema de Rolle. — *Sea una función* f (x), *definida y continua en un intervalo* (a, b), *que admite para todos los valores de este intervalo una derivada finita y determinada. Si es* f (a) = f (b), *la derivada* f′ (x) *se anula una vez por lo menos en el intervalo considerado.*

Si la función es constante en el intervalo (a, b) [o en un intervalo interior al (a, b)], la derivada es nula para todos los valores de este intervalo.

Si la función no es constante en el intervalo (a, b), supongamos que ella toma valores mayores que $f(a)$. Entonces, la función tendrá un máximo, por lo menos, en el intervalo en cuestión. Sea c el valor de la variable, correspondiente al máximo de la función.

Se puede encontrar siempre un número positivo ϵ tal que $f(c + h) - f(c)$ sea negativo para todos los valores de h inferiores en valor absoluto a ϵ.

El cociente $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ es negativo para todos los valores de h positivos.

Si h tiende hacia cero, por valores positivos, el límite de ese cociente, que es siempre negativo, es negativo o nulo; luego $f'(c)$ es negativa o nula.

El cociente $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ es positivo para todos los valores de h negativos. Si h tiende a cero, por valores negativos, el límite de ese cociente, que es siempre positivo, es positivo o nulo; luego $f'(c)$ es positiva o nula.

Así, pues, la derivada $f'(c)$ es forzosamente nula.

Si en el intervalo (a, b) la función no toma valores mayores que $f(a)$, sino menores, razonando del mismo modo se llega a la conclusión: $f'(c) = 0$, siendo c el valor de la variable correspondiente al mínimo de la función.

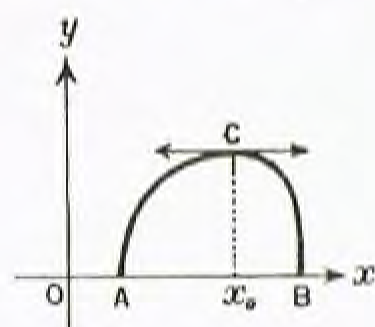


Fig. 53

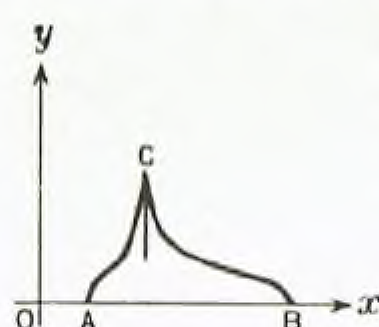


Fig. 54

Significación geométrica. El teorema de Rolle nos dice que sobre el arco de curva AB hay, al menos, un punto C cuya tangente es horizontal (*fig.* 53).

Sin embargo, de acuerdo con el enunciado, el teorema no se cumple si en el punto C la derivada es infinita (*fig.* 54), o si no está bien definida, como en el caso de no ser iguales las derivadas a la derecha y a la izquierda del punto C considerado (*fig.* 55).

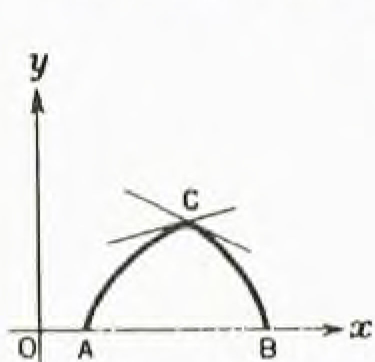


Fig. 55

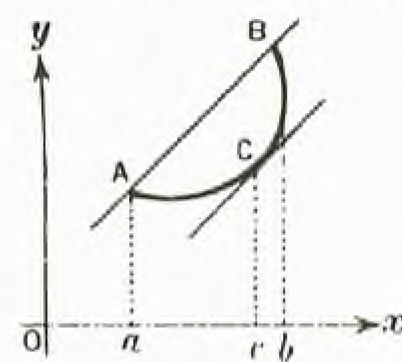


Fig. 56

Teorema de los incrementos finitos. — *Si una función* f (x) *es continua y definida en un intervalo* (a, b), *y si ella admite para todos los valores de este intervalo una derivada finita y determinada, hay al menos un valor* c, *comprendido en el intervalo* (a, b,), *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Designemos por K al cociente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, y consideremos la función auxiliar,

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x) K.$$

Esta función se anula para los valores $x = b$ y $x = a$; aplicando el teorema de Rolle al intervalo (a, b), existirá un valor c en él, tal que sea $F'(c) = 0$, es decir, $-f'(c) + K = 0$, o sea, $K = f'(c)$, y por tanto,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

como queríamos demostrar.

Significación geométrica. Este teorema expresa que en todo arco de curva $\widehat{AB}$ (*fig.* 56), tal que en cada uno de sus puntos tenga una sola tangente, no paralela al eje $0y$, existe al menos un punto C, tal que la tangente en él es paralela a la cuerda AB.

Fórmula de los incrementos finitos. *Podemos expresar el teorema de los incrementos finitos de otra forma, sustituyendo* a *por* x *y* b *por* x + h. *Será entonces* b − a = h. *Supongamos que* c = x + θ h, *siendo* 0 < θ < 1. *Con estas notaciones, se obtiene*

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h).$$

Aplicaciones. 1° Demostremos el teorema: "Si una función admite una derivada constantemente positiva en un intervalo, ella crece en este intervalo".

Sean, en efecto, x_1 y x_2 dos valores cualesquiera de este intervalo. Habrá un número x_0, comprendido entre x_1 y x_2, tal que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0).$$

Si $f'(x_0)$ es positiva, el primer miembro de la igualdad también lo será, lo que expresa que la función es creciente en el intervalo considerado.

Análogamente, si la función admite una derivada constantemente negativa en un intervalo, ella es decreciente en dicho intervalo.

2° *Forma indeterminada* $\frac{0}{0}$. *Regla de L'Hopital.* Sean las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, que se anulan para el valor $x_0 = x$. El cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta entonces la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Si ambas funciones son polinomios, un procedimiento de quitar la indeterminación es dividirlos por $x - x_0$; otro procedimiento es con auxilio de la fórmula de los incrementos finitos. Si x es un valor próximo a x_0, tal que $f(x)$ y $g(x)$ tienen derivadas finitas y determinadas, se tiene:

$$\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta_1 h)}{g'(x_0 + \theta_2 h)}.$$

Si h tiende a cero, el límite que buscamos es $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$: ésta es la regla de L'Hopital.

Ejemplo. *Hallar el verdadero valor de* $\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p}$ *para* $x = a$.

El verdadero valor será el de $\frac{mx^{m-1}}{px^{p-1}}$, o sea $\frac{m}{p} \cdot x^{m-p}$.

Observación. Si sustituimos $f(x + h)$ por $f(x)$, el error cometido es $hf'(x + \theta h)$. Si conocemos un límite superior del error para $f'(x + \theta h)$ en el intervalo $(x, x + h)$, podemos tener, al mismo tiempo que el sentido del error, un límite superior de éste.

Fórmula de Taylor. — Esta fórmula es una generalización de la fórmula de los incrementos finitos, en la que intervienen las derivadas sucesivas. Sabemos que el producto de los n primeros números consecutivos se denomina factorial de n y se le designa por la notación $n!$

Teorema. *Si una función* f (x) *es continua, así como sus* n *primeras derivadas, en el intervalo* (a, b), *y si ella admite en este intervalo la derivada de orden* (n + 1), *finita y determinada, existirá un número* c, *comprendido en ese intervalo, tal que se tenga*

$$f(b) - f(a) = \frac{b - a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a) + \frac{-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

La demostración es análoga a la del teorema anterior.

Sustituyamos a por x y b por $x + h$; el número c es de la forma $a + \theta h$, siendo $0 < \theta < 1$. La fórmula de Taylor queda así, entonces,

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (f^{n+1})(x + \theta h).$$

Fórmula de Mac-Laurin. — Si en la anterior fórmula de Taylor hacemos $x = 0$, $h = x$, obtenemos la llamada *fórmula de Mac-Laurin*,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Aplicaciones de estas fórmulas. — 1° *Desarrollos limitados.* Las expresiones anteriores se denominan desarrollos limitados. El último término de ellas,

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h) \quad \text{ó} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

se llama término complementario o resto. Los desarrollos limitados nos permiten sustituir en un cierto intervalo una función $y = f(x)$ por un polinomio de grado n. El error cometido es el término complementario, y si conocemos un límite superior de la derivada de orden $(n + 1)$ en el intervalo considerado, tendremos un límite superior del error (en valor absoluto). Se puede demostrar que, si una función admite un desarrollo limitado de orden n, en un intervalo, este desarrollo es único.

Ejemplo. Hallar un valor aproximado del seno de un arco x (x en radianes). Las derivadas sucesivas de $y = \operatorname{sen} x$ son definidas y determinadas. El desarrollo limitado de orden 5, por ejemplo, es:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \operatorname{sen} \theta x.$$

El término complementario nos da el error si tomamos como valor de sen x el conjunto de los tres primeros términos. Por ser sen $\theta x \leq 1$, el error cometido es como máximo $\frac{x^6}{6!}$.

2° *Estudio de una curva en las proximidades de uno de sus puntos.* La ecuación de la tangente en el punto M de la curva, de abscisa OP $= a$, es (*fig.* 57).

$$Y = f(a) + (x - a) f'(a).$$

Según el teorema de Chasles, se tiene $\overline{N'M'} = y - Y$.

$$\overline{N'M'} = \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Esta expresión tiende hacia cero simultáneamente con $(x - a)$. Para valores de $(x - a)$ suficientemente pequeños, el signo de $\overline{N'M'}$ es el de su primer término.

Si $f''(a) \neq 0$, el signo de $\overline{N'M'}$ es el de $\frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$, o sea el de $f''(a)$. La curva queda por encima de la tangente (o por debajo) si $f''(a) > 0$ [o $f''(a) < 0$].

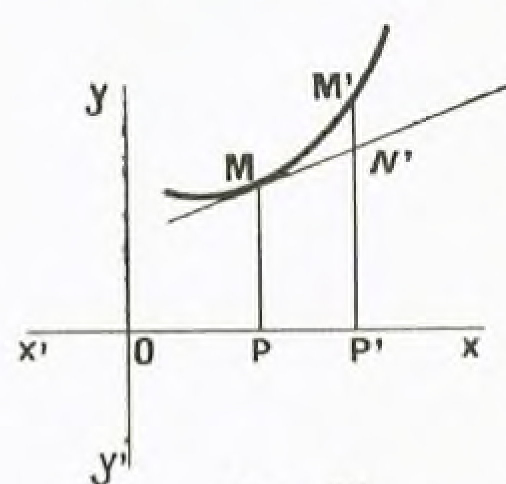


Fig. 57

Si $f''(a) = 0$, para determinar las proximidades del punto M será preciso entonces recurrir a la derivada tercera. Si $f'''(a) \neq 0$, el signo de N'M' es el de $\frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a)$; cambia de signo cuando x pasa por a: la curva corta la tangente y el punto M se llama punto de inflexión.

Si es $f''(a) = f'''(a) = 0$, recurrimos a la derivada cuarta. Si $f^{(IV)}(a) \neq 0$, la curva no corta la tangente y así sucesivamente.

3° *Extensión de la regla de L'Hopital. Verdadero valor de la relación* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *cuando* x *tiende hacia* x_0 *y si* $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Ya sabemos por la regla de L'Hopital que el verdadero valor de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $f(x_0) = g(x_0) = 0$, es $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ cuando $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$ no son cero simultáneamente. Si es $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, el verdadero valor es entonces $\frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$. Si acaso estas derivadas segundas fueran también nulas, el verdadero valor que buscamos sería $\frac{f'''(x_0)}{g'''(x_0)}$, y así sucesivamente.

Desarrollo en series enteras. — Si una función es definida y continua en un intervalo (a, b) y conocemos todas sus derivadas sucesivas, siendo todas estas derivadas definidas y continuas en el intervalo considerado, podemos prolongar indefinidamente el desarrollo según la fórmula de Taylor o de Mac-Laurin para todos los valores de ese intervalo. Se obtiene así un desarrollo en *serie entera* (se denomina "serie" a una suma algébrica de infinitos términos que se obtienen sucesivamente según una ley dada).

Ejemplos importantes. Desarrollo en serie entera de sen x y de cos x.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + \frac{-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Resolución numérica de las ecuaciones f (x) = 0. — Ya hemos expuesto un procedimiento gráfico de resolución de estas ecuaciones, pero este procedimiento sólo nos proporciona una aproximación muy grosera. En los procedimientos que siguen, obtenemos resultados más aproximados e incluso un límite superior del error cometido.

Separación de raíces. — Si observamos la variación de la función $y = f(x)$, vemos que gracias a la derivada podemos dividir el intervalo $(-\infty, +\infty)$ en intervalos parciales, en cuyo interior la función es siempre definida y varía en el mismo sentido. En cada uno de estos intervalos parciales, la función no puede anularse más de una vez, y se comprueba si efectivamente se anula, pues en este caso toma signos opuestos en los extremos del intervalo. De aquí el siguiente método para saber el número de raíces de una ecuación.

Se forma una relación ordenada en orden creciente de los siguientes valores: $-\infty$, $+\infty$, raíces de la derivada y valores para los que la función deja de ser definida (si los hay). Por debajo de estos valores se ponen los signos de los valores correspondientes de $f(x)$. Entre dos números consecutivos de aquella relación habrá una raíz o no, según que los signos que tienen debajo sean distintos o iguales.

Ejemplos. 1° *Hallar el número de raíces de la ecuación* $x^5 - 5x - 2 = 0$.

La derivada es $5x^4 - 5$, cuyas raíces son -1 y $+1$. Formamos el siguiente cuadro de valores y signos que toma la función:

Valores de x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
Signos de $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como hay tres cambios de signos, éste será el número de raíces de la ecuación.

2° *Sea la ecuación de tercer grado* $x^3 + px + q = 0$.

La derivada es $3x^2 + p$.

Si $p > 0$, la derivada es siempre positiva y la función es creciente de $-\infty$ a $+\infty$. Luego no existe nada más que una raíz.

Si $p < 0$, la derivada tiene dos raíces: $\pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Consideremos para x los valores $-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty$.

Los valores de $f(x)$ correspondientes a éstos de x son:

$$-\infty, -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q, \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}, + q, +\infty.$$

Como la función decrece en el intervalo

$$\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\sqrt{-\frac{p}{3}}\right),$$

la condición necesaria y suficiente para que la ecuación tenga tres raíces es

$$\left(-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right)\left(\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q\right) < 0,$$

es decir,

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Métodos de aproximación. — Una vez hecha la separación de las raíces, podemos calcular en cada intervalo el valor aproximado de la raíz.

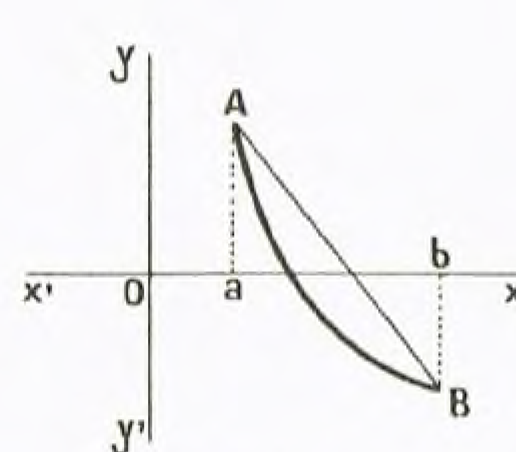


Fig. 58

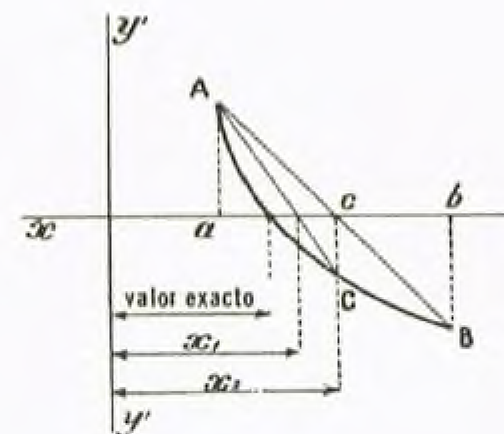


Fig. 59

1° Método de Descartes (o de las partes proporcionales). Se sustituye el arco $\widehat{AB}$ por su cuerda (*fig.* 58) y la abscisa del punto donde ella corta el aje $x'x$ nos proporciona un valor aproximado de la raíz.

La ecuación de la recta AB es

$$y = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El valor de x que hace nula y es

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Si este valor no es lo suficientemente aproximado, y el valor de $f(x_1)$ es de signo contrario a $f(a)$, sustituimos en la fórmula anterior b por x_1 y obtendremos un nuevo valor x_2 (*fig.* 59). Si este nuevo valor no nos da todavía la aproximación apetecida, podemos seguir de la misma manera hasta aproximarnos todo lo que queramos al valor exacto de la raíz.

Observación. Si en el intervalo (a, b) la derivada segunda $f''(x)$ tiene constantemente el mismo signo, la rama de curva no tiene punto de inflexión y los valores sucesivos que obtenemos para la raíz son todos aproximados por defecto o todos aproximados por exceso (*figuras* 60 a 63).

2° Método de Newton. Este método consiste en sustituir el arco $\widehat{AB}$ por la tangente en uno de sus extremos (*fig.* 64). En la figura se observa que el extremo que nos interesa tomar es el A.

La ecuación de la tangente en este punto A, de abscisa a, es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

La abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje $x'x$ es

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Si este valor obtenido no es suficientemente aproximado, sustituimos a por x_1 y obtenemos un nuevo valor x_2 y así sucesivamente nos iremos aproximando al valor exacto de la raíz.

Observación. El método de Newton debe aplicarse cuando en el intervalo considerado la derivada segunda conserva el mismo signo. Si el método de Descartes nos da los valores aproximados de la raíz en un sentido, el de Newton nos da la aproximación en el otro sentido.

De la observación de las figuras, se deduce que el método de Newton se debe aplicar al extremo del intervalo en que $f(x)$ tenga el mismo signo que $f''(x)$.

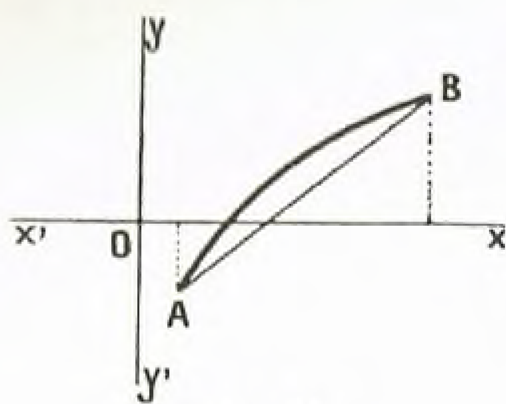


Fig. 60

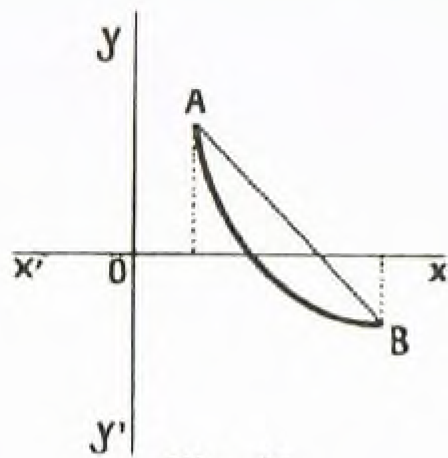


Fig. 61

Infinitésimos. — DEFINICIÓN. *Se llama* **infinitésimo** *o* **infinitamente pequeño** *toda cantidad variable que tiende a cero.*

ORDEN DE UN INFINITÉSIMO. Si un infinitésimo y es función de un infinitésimo x y si existe un número m tal que la relación $\dfrac{y}{x^n}$ tiende a un límite A, finito y no nulo, cuando x tiende a cero, se dice que el infinitésimo y es de orden m con relación a x; m es el orden infinitesimal de x.

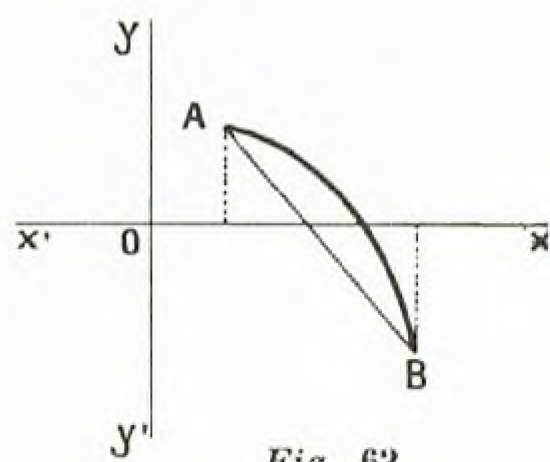


Fig. 62

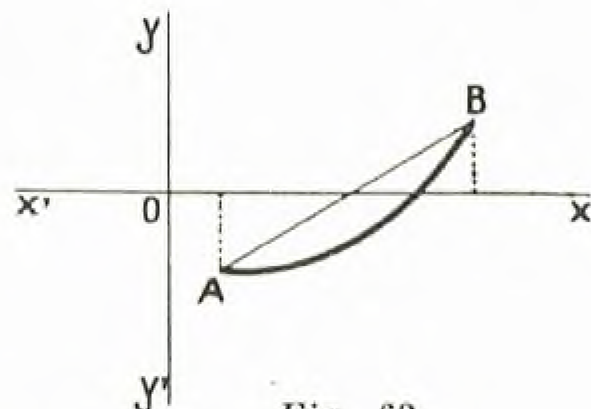


Fig. 63

EJEMPLOS. La función sen x es un infinitésimo de orden 1 (la unidad) con relación a la variable x, pues ya sabemos que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiende a 1 cuando x tiende a cero.

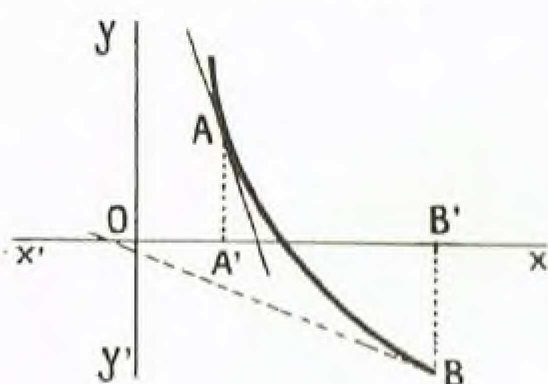


Fig. 64

Un polinomio $a_0x^m + a_1x^{m+1} + \ldots a_px^{m+p}$, sin término constante y ordenado según las potencias crecientes de x, es un infinitésimo de orden m.

Si la derivada primera es diferente de cero (definida y continua), el incremento Δy es infinitésimo de primer orden con relación a Δx.

Si se cumplen las condiciones del teorema de Taylor y las derivadas sucesivas son nulas, siendo la de orden n la primera derivada distinta de cero, la fórmula de Taylor nos muestra que el incremento Δy de la función es un infinitésimo de orden n con relación al incremento Δx.

Volviendo a las aplicaciones del teorema de Taylor, el vector $\overrightarrow{N'M'}$ soportado por una paralela al eje $y'y$, y comprendido entre la curva y su tangente en el punto de abscisa a (*fig.* 57), es un infinitésimo con relación a $(x - a)$. La fórmula de Taylor nos proporciona el orden infinitesimal de este infinitésimo, que es dos como mínimo.

Parte principal. — Si y es un infinitésimo de orden p con relación a x, y el límite de $\dfrac{y}{x^p}$, cuando x tiende a cero, es cierto número finito no nulo, se llama *parte principal* de y la cantidad Ax^p.

La relación $\dfrac{y}{Ax^p}$ tiende hacia la unidad cuando x tiende a cero. Se dice que y es un infinitésimo equivalente al Ax^p.

Se puede demostrar que, en el cálculo del límite de un cociente o de un producto de varios infinitésimos, pueden sustituirse estos infinitésimos por su parte principal. Esto es lo que se suele hacer para quitar la indeterminación en las formas indeterminadas del tipo $\dfrac{0}{0}$.

DEFINICIÓN. *Dos infinitésimos son equivalentes cuando su cociente tiene por límite la unidad.*

Diferencial de una función $y = f(x)$. — El incremento Δy de la función, correspondiente al incremento Δx de la variable, es un infinitésimo si lo es Δx. La parte principal de este infinitésimo se llama *diferencial* de y y se representa por la notación dy.

La fórmula de Taylor nos da,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Si consideramos x como función de x, se obtiene, $dx = \Delta x$. Luego sustituyendo este valor en la expresión anterior, tenemos

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

de donde se deduce: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Obtenemos así para la derivada la notación diferencial que hemos indicado al principio. Pero $\dfrac{dy}{dx}$ no es sólo una notación, sino que realmente este cociente de diferenciales es el valor de la derivada $f'(x)$. Esto sólo es cierto, en general, para las derivadas primeras. El empleo de las diferenciales facilita el cálculo de las derivadas. La relación $dy = f'(x) \cdot dx$ es válida también cuando x no es la variable independiente.

EJEMPLOS. 1° Si x e y son funciones de una variable t,

$$y = g(t), \quad x = h(t),$$

será: $dy = g'(t) \cdot dt$, $\quad dx = h'(t) \cdot dt$, luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{h'(t)}.$$

2° Sea la función $y = \operatorname{tg} x$, siendo x un número comprendido entre $-\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$. A cada valor de x (en radianes) corresponde un valor de y. Recíprocamente, a cada valor de y (comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$) corresponde un solo valor de x, tal que y sea la tangente de x radianes. De esta forma se define una función x de y, que se llama *función inversa* de $y = \operatorname{tg} x$ y se la designa por $x = \operatorname{arco} \operatorname{tg} y$.

Sabemos que la derivada de $y = \operatorname{tg} x$ es $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, luego

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Por tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Si volvemos a la notación ordinaria, la derivada de $y = \operatorname{arco} \operatorname{tg} x$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

OBSERVACIÓN. *Infinito.* Se llama infinito o infinitamente grande toda cantidad variable que tiende a infinito. Si y es un infinito al serlo x, se dice que es un infinito de orden m con relación a x, si el cociente $\dfrac{y}{x^m}$ tiende hacia un límite finito no nulo A.

Análogamente, la parte principal de y es Ax^m.

Por ejemplo, un polinomio $y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots$, ordenado según las potencias decrecientes de x, es un infinito cuya parte principal es a_0x^m.

Para quitar la indeterminación en una forma indeterminada del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, se puede sustituir cada término del cociente por su parte principal.

El inverso de un infinito es un infinitésimo.

Funciones primitivas integrales

Terminología. Notación. Reglas deducidas del cálculo de las derivadas. Aplicaciones. Definición de integral definida. Propiedades de la integral. Extensiones de la noción de integral. Aplicaciones del cálculo integral. Volumen de la pirámide. Volumen de revolución engendrado por la curva de ecuación $y = f(x)$, al girar alrededor del eje $x'\,x$. Aplicación al volumen de la esfera. Tiempo necesario para vaciar un depósito. Cálculo de la integral con cambio de variable. Integración por partes. Aplicaciones de las integrales al cálculo de las áreas de sectores. Otra aplicación de las integrales. Rectificación de un arco

DEFINICIÓN. *Se llama* **función primitiva,** *o más simplemente,* **primitiva** *de una función* f (x), *otra función* F (x) *tal que su derivada es precisamente la función dada.*

Así, por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2}{2}$ es una primitiva de $y = x$.

Terminología. Notación. — También puede decirse que $F(x)$ es una *integral indefinida* de $f(x)$, y se designa por la notación,

$$F(x) = \int f(x)\, dx,$$

que se lee "$F(x)$ igual a integral de $f(x)\,dx$"; el signo $\int$ es el *signo integral* y la diferencial dx indica que x es la *variable de integración.*

TEOREMA. *Si una función* f (x) *admite una primitiva* F (x), *admitirá infinitas primitivas que difieren en una constante.*

Si F (x) es una primitiva de f (x), también lo es F (x) + C, pues las derivadas de estas dos funciones son iguales. A la constante C se le llama *constante de integración*.

Recíprocamente, sea G (x) otra primitiva de f (x). La derivada de la diferencia G (x) — F (x) es

$$G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Luego la diferencia G (x) — F (x) es una constante C.

Reglas deducidas del cálculo de derivadas. — La primitiva de una suma es la suma de las primitivas de cada uno de los términos.

La primitiva del producto de una función por una constante es igual al producto de la constante por la primitiva de la función. Es decir,

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Si podemos poner una función en la forma $u'v + uv'$, su primitiva es uv + C.

Análogamente, la primitiva de $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ es $\frac{u}{v}$ + C. La primitiva de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ es $\sqrt{u}$ + C.

CUADRO DE PRIMITIVAS SIMPLES.

Funciones	Primitivas
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$(ax + b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\,a} + C$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + C$

OBSERVACIÓN. En las aplicaciones, se trata frecuentemente de buscar la primitiva que, para cierto valor de la variable, toma determinado valor. Esta condición nos permite determinar el valor de la constante C.

Sea, por ejemplo, hallar la primitiva de $y = 3x^2 - 10x + 7$, que se anula para $x = 5$.

$$\int (3x^2 - 10x + 7)\,dx = x^3 - 5x^2 + 7x + C.$$

Para $x = 5$ es nula la primitiva: $125 - 125 + 35 + C = 0$, de donde $C = -35$. Luego la primitiva buscada es $x^3 - 5x^2 + 7x - 35$.

TEOREMA. *Si una función* f (x) *es positiva en el intervalo* (a, b), *el área limitada por la curva* y = f (x), *el eje* x'x, *la recta fija* x = a *y la recta paralela al eje* y'y *de abscisa variable* x, *es una función primitiva de la función* f (x).

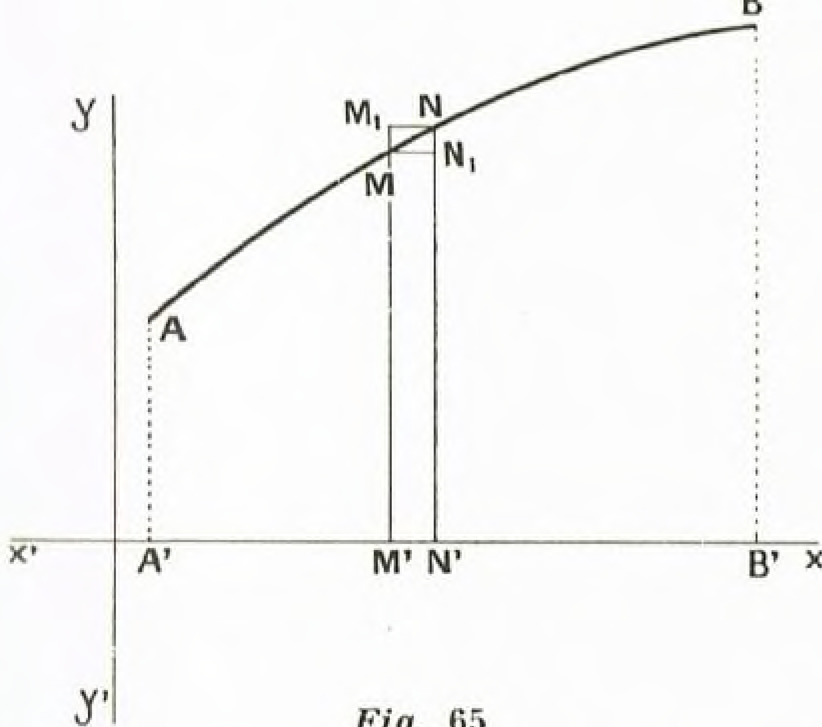


Fig. 65

El área limitada por el arco $\widehat{AM}$ y los segmentos AA', A'M' y M'M (*fig.* 65) es, evidentemente, una función de x: sea F (x). Calculemos su derivada.

Demos a x un valor x_1 ligeramente mayor que x, y supongamos que en el intervalo xx_1 la función es creciente. El incremento de la función F (x) es el trapecio mixtilíneo M'N'NM. Este trapecio está comprendido entre los rectángulos M'N'N₁M y M'N'NM₁. Luego, viendo las áreas de ellos, podemos escribir

$$(x_1 - x)\,f(x) < F(x_1) - F(x) < (x_1 - x)\,f(x_1),$$

y, por ser $x_1 - x$ positivo,

$$f(x) < \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} < f(x_1).$$

Si hacemos tender x_1 hacia x, $f(x_1)$ tiende hacia $f(x)$; $\frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x}$, comprendido entre $f(x)$ y $f(x_1)$, tiende también hacia $f(x)$, luego la derivada de F (x) es $f(x)$.

El mismo resultado obtenemos si consideramos $x_1 < x$, y en el caso de ser la función decreciente.

Aplicaciones. — Hemos demostrado que el área AA'M'M es una primitiva F (x) de $f(x)$. Cuando el punto M coincide con el A, ese área se anula. Luego F (x) es la primitiva de $f(x)$ que se anula para $x = a$, es decir, F (a) = 0.

Sea G (x) otra primitiva de $f(x)$. Existe siempre una constante C, tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Como F (a) = 0, se tiene C = — G (a);

luego

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

En particular, para $x = b$, es F (b) = G (b) — G (a).

De aquí, la siguiente regla:

REGLA. *Si* G (x) *es una función primitiva de* f (x), *definida y positiva en el intervalo* (a, b), *el área limitada por la curva* y = f (x), *el eje* x'x *y las paralelas al eje* y'y *de abcisas* a *y* b, *tiene por medida* G (b) — G (a).

NOTACIÓN. La diferencia G (b) — G (a) se designa por las notaciones $[G(x)]_a^b$ o $\int_a^b f(x)\,dx$; esta última expresión es una integral definida.

EJEMPLOS. 1° *Hallar el área comprendida entre el eje* x'x, *la función* y = x² *y la paralela* A'A *al eje* y'y *de abscisa* a (fig. 66).

Una primitiva de $y = x^2$ es $y = \frac{x^3}{3}$. El área pedida es

$$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Vemos que este valor del área es $\frac{1}{3}$ del área del rectángulo OA'AB.

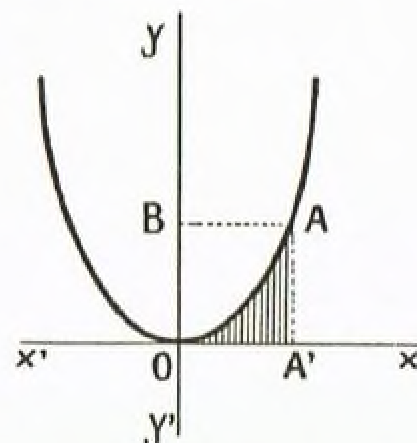


Fig. 66

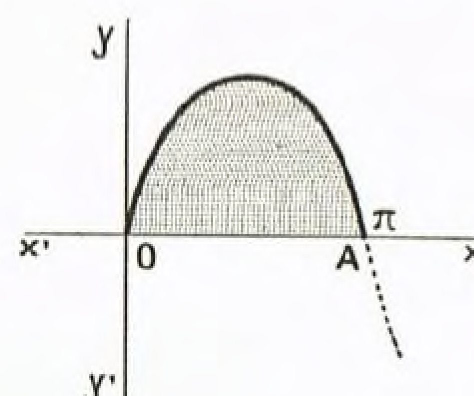


Fig. 67

2° *Hallar el área de una arcada de sinusoide* (fig. 67).

Una primitiva de $y = \operatorname{sen} x$ es $y = -\cos x$. El área buscada es

$$S = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Definición de integral definida. — Calculemos de nuevo el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje $x'x$, y las paralelas al eje $y'y$ de abscisas a y b. Partimos del supuesto de ser $y = f(x)$ una función

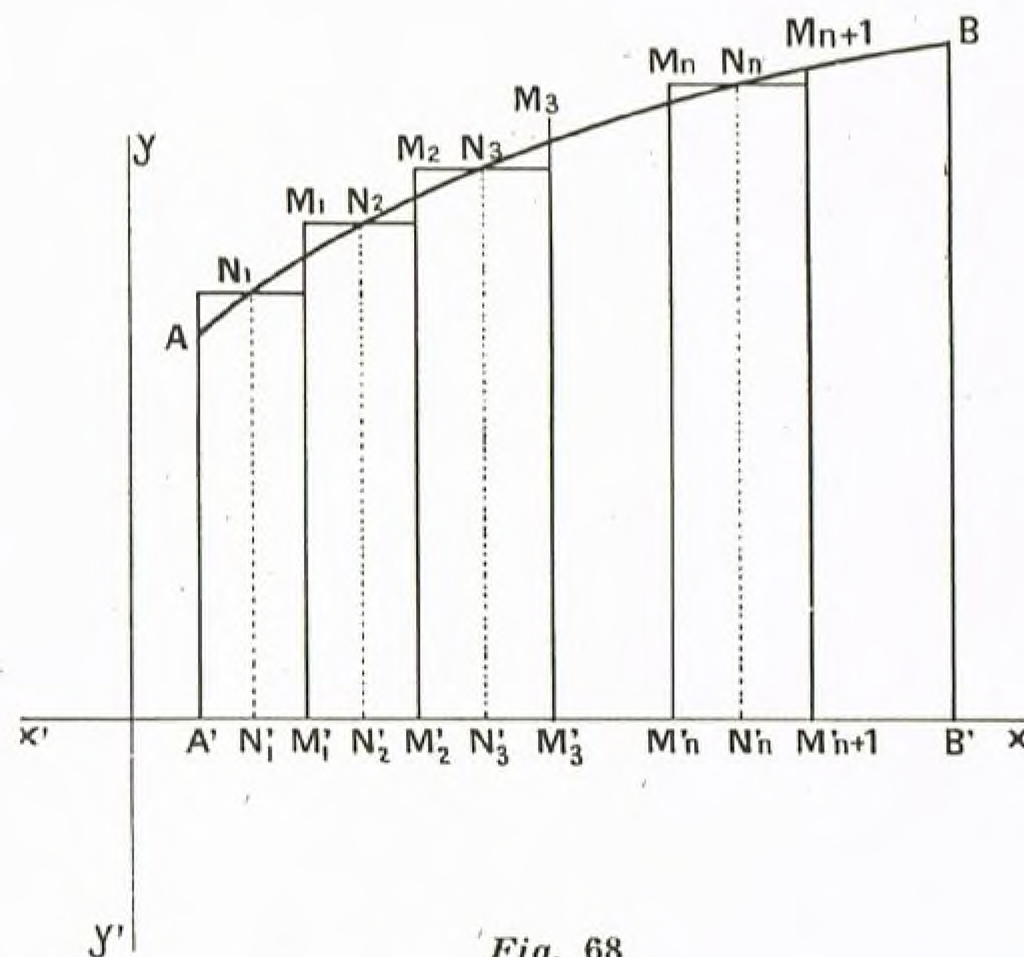


Fig. 68

definida, continua y positiva en el intervalo (a, b). Dividamos el segmento A'B' (*fig.* 68) por los puntos M'₁, M'₂, ... M'n, M'n+1, ... de abscisas x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ... y marquemos en cada uno de los

intervalos consecutivos los puntos N'_1, N'_2, ... N'_n, ... de abscisas ξ_1, ξ_2, ... ξ_n.

La suma

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \dots$$
$$\dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) + \dots$$

es la suma de las áreas de los rectángulos de la figura, y es un valor aproximado del área A'ABB'.

Se puede demostrar de un modo riguroso que la suma considerada tiene un límite perfectamente determinado cuando el número de intervalos en que se divide el segmento A'B' aumenta indefinidamente. Este límite es independiente del valor tomado para las abscisas ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., consideradas en cada intervalo.

El valor de este límite se llama *integral definida de* $f(x)$ en el intervalo (a, b) y se designa por la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, que se lee: suma de a a b de $f(x)\,dx$. Los números a y b se llaman *extremos* o *límites* de la integral.

Observación. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es también el límite de las sumas

$$f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \dots$$

y

$$f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n) + \dots$$ en las mismas condiciones.

Propiedades de la integral. — De lo visto hasta ahora, resultan estas propiedades:

1ª El valor de $\int_a^x f(x)\,dx$ es una función de x que tiene por derivada $f(x)$;

2ª Si se conoce una primitiva $G(x)$ de $f(x)$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Extensiones de la noción de integral. — 1º Si la función $y = f(x)$ es negativa, $\int_a^b f(x)\,dx$ es también el límite de las sumas consideradas anteriormente.

Si $a < b$, este límite es negativo. Se obtiene así el valor algebraico del área A'B'BA (*fig.* 69), que en este caso es negativa.

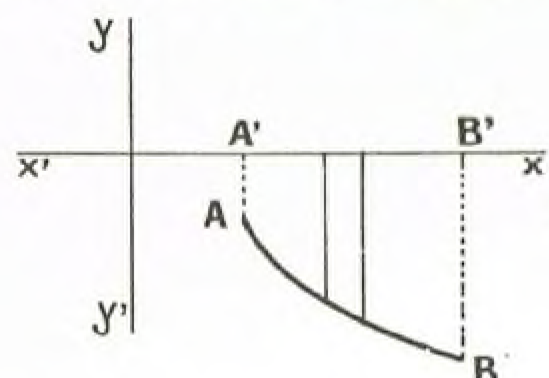


Fig. 69

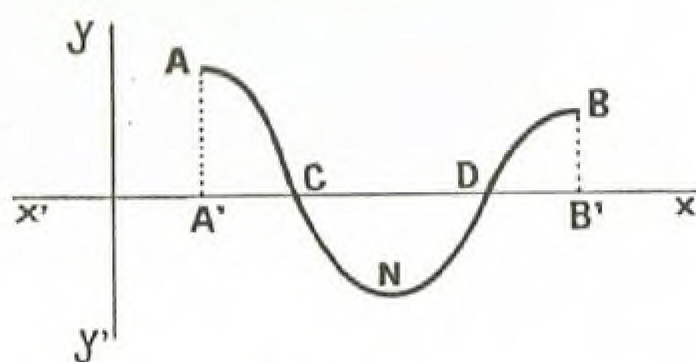


Fig. 70

Si consideramos una función $y = f(x)$ definida y continua en el intervalo (a, b), pero cambiando de signo dentro de él, $\int_a^b f(x)\,dx$ expresa la suma algebraica de las áreas comprendidas entre la curva, el eje $x'x$ y las ordenadas extremas a y b.

En el caso de la figura 70, es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área A'AC} - \text{área CND} + \text{área DB'B};$$

2º Si $b > a$, $\int_b^a f(x)\,dx$ es también el límite de las sumas consideradas, dividiendo el intervalo (b, a) en un número de partes que aumenta indefinidamente. Entonces, cada una de las diferencias $(x_{n+1} - x_n)$ es negativa, y se tiene,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las integrales indefinidas, deducimos las igualdades siguientes:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ si A es una constante.}$$

Si (a, b) y (b, c) son dos intervalos consecutivos, se tiene,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

3º Si la función $y = f(x)$ no está definida para $x = b$, se considera la integral $\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$. Si esta integral tiende hacia un límite cuando ϵ tiende a cero, dicho límite se expresa por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Si $y = f(x)$ es una función definida y continua para todos los valores de x, y existe un límite para $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando b aumenta indefinidamente, este límite se expresa por $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Aplicaciones del cálculo integral. — El cálculo integral es de gran utilidad, y su empleo en física es muy frecuente. Un ejemplo de esto es el cálculo de áreas, ya tratado.

El cálculo integral se presenta, por ejemplo, en el caso de buscar una magnitud, por medio de una función $f(x)$, definida en un intervalo (a, b), y si

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) + \dots$$

es un valor aproximado de dicha magnitud, en las mismas condiciones que en el ejemplo del área. Puede demostrarse, con todo rigor, que esta suma tiene un límite cuando el número de intervalos aumenta indefinidamente, tendiendo cada uno de ellos a cero. De esta forma, tenemos el límite de una suma de un numero infinito de términos que son infinitésimos.

Si las diferencias $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... $x_n - x_{n-1}$ ... las designamos por Δx_1, Δx_2, ... Δx_n, ..., la suma considerada puede escribirse

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n + f(\xi_{n+1})\Delta x_{n+1} + \dots$$

Si $F(x_n)$ es el límite de la suma $f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$ en el intervalo (a, x_n), es decir, si $F(x_n)$ es la integral $\int_a^{x_n} f(x)\,dx$, el infinitésimo $f(\xi_{n+1})\Delta x_{n+1}$ es equivalente al incremento de la función $F(x_n)$. Se demuestra que puede sustituirse este infinitésimo por su parte principal, $f(x_n)\,dx$: la integral se presenta, entonces, como el límite de una suma de infinitas diferenciales.

Volumen de la pirámide. — Vamos a calcular el volumen de una pirámide de base B y altura h (*fig.* 71). Sea x la distancia del vértice S a un plano variable A'B'C', paralelo a la base. El volumen de la pirámide SA'B'C' es una función de x. La base de esta pirámide tiene por superficie $B \cdot \frac{x^2}{h^2}$.

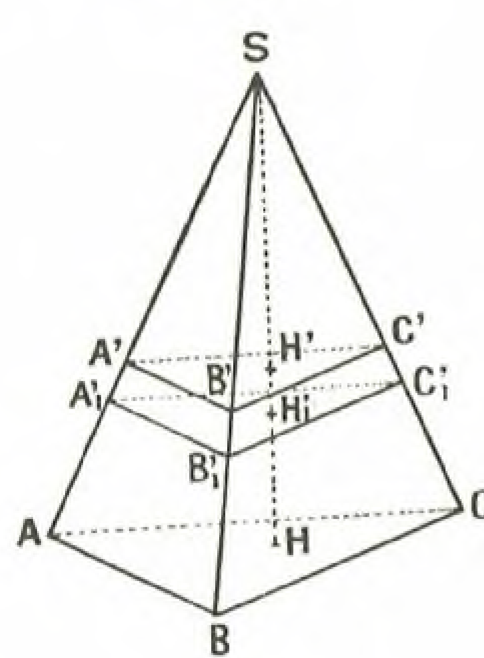


Fig. 71

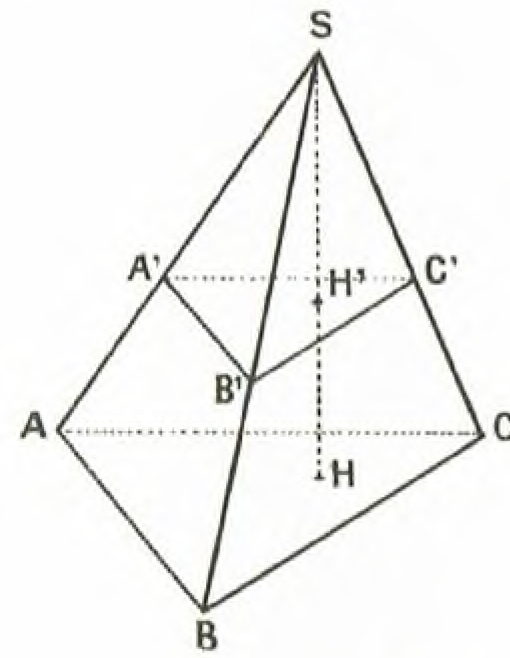


Fig. 72

Si damos a x un incremento Δx, el incremento que experimenta el volumen de la pirámide viene medido por el del tronco de pirámide A'B'C' A'₁B'₁C'₁, que está comprendido entre los volúmenes de los prismas de bases A'B'C' y A'₁B'₁C'₁ y altura común Δx.

Como estos volúmenes son los infinitésimos $\frac{Bx^2}{h^2} \cdot \Delta x$ y $\frac{B(x + \Delta x)^2}{h^2} \cdot \Delta x$, la parte principal de este incremento de volumen es decir, la diferencial del volumen de la pirámide, es $\frac{Bx^2}{h^2} \cdot dx$.

El volumen de la pirámide viene expresado por la integral,

$$V = \int_0^h \frac{Bx^2}{h^2}\,dx = \left[\frac{B}{h^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{B \cdot h}{3}.$$

Hallemos ahora el volumen del tronco de pirámide ABC A'B'C' (*figura* 72). Sean z' y z las distancias del vértice S a las bases menor y mayor A'B'C' y ABC, respectivamente. La altura del tronco de pirámide es $h = z - z'$.

El volumen que buscamos es

$$V = \int_{z'}^{z} \frac{Bx^2}{z^2}\,dx = \frac{B}{3z^2}(z^3 - z'^3).$$

Pero teniendo en cuenta que,

$$z^3 - z'^3 = (z - z')(z^2 + zz' + z'^2) = h(z^2 + zz' + z'^2),$$

tenemos, por fin,

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \frac{Bz'}{z} + \frac{Bz'^2}{z^2}\right].$$

B es la base mayor, $\frac{B \cdot z'^2}{z^2}$ es la base menor y $\frac{B \cdot z'}{z}$ es la media geométrica de las dos bases. Hemos encontrado las mismas fórmulas que ya conocíamos por la geometría.

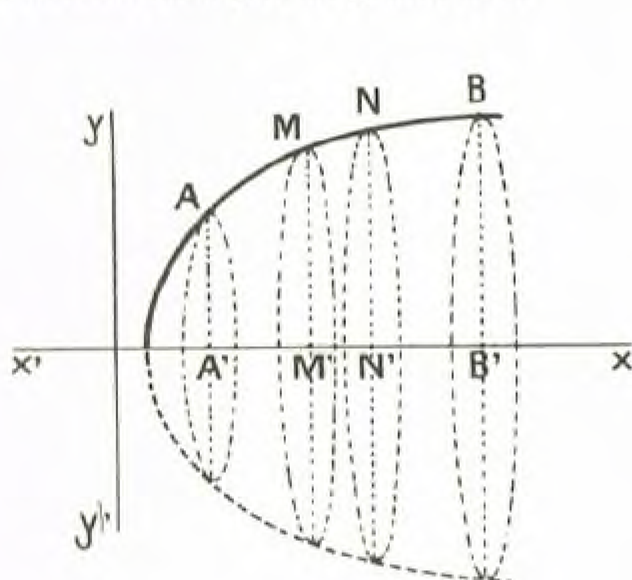


Fig. 73

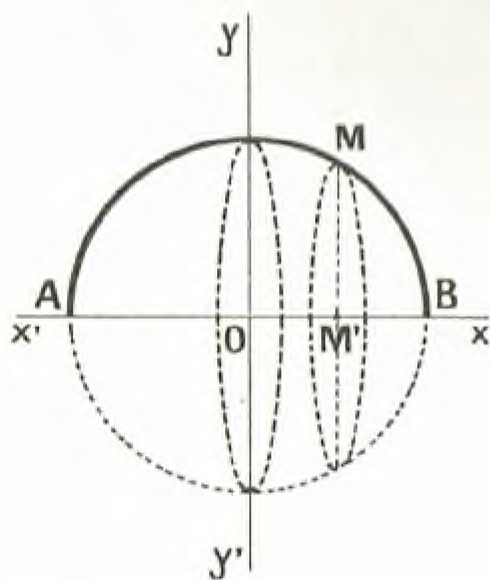


Fig. 74

Volumen de revolución engendrado por la curva de ecuación y = f (x), al girar alrededor del eje x'x (*fig.* 73). — El incremento de volumen comprendido entre los planos perpendiculares al eje $x'x$, trazados por los puntos de abscisas x y $x + dx$, es un infinitésimo equivalente al cilindro cuya base es el círculo de radio M'M y cuya altura es dx. La diferencia del volumen es $\pi f^2(x)\,dx$, y el volumen es, por tanto,

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

Aplicación al volumen de la esfera (*fig.* 74). — La esfera se engendra al girar un semicírculo alrededor de su diámetro AB.

$$M'M^2 = R^2 - x^2.$$

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

El resultado obtenido ya lo conocíamos por la geometría.

Tiempo necesario para vaciar un depósito. — *¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse un depósito de agua* (fig. 75), *de radio* R = 2 *y altura* h = 3, *si la velocidad de salida del agua es proporcional, en cada instante, a la raíz cuadrada de la altura del líquido por encima del orificio? Se sabe que cuando esta altura es la unidad, dicha velocidad de salida es de 2 litros por segundo.*

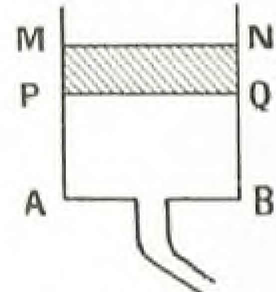


Fig. 75

La velocidad de salida del agua, con los datos dados, es $v = 2\sqrt{x}$, siendo x la altura de la lámina de agua sobre el orificio.

Sea dx la distancia entre dos posiciones M N y P Q de la lámina de agua, infinitamente próximas entre sí. El volumen de agua entre estas dos posiciones es $4\,\pi dx$. La diferencial del tiempo empleado en pasar el agua de la posición M N a la P Q es $dt\ \frac{4\,\pi dx}{2\sqrt{x}} = 2\pi\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

El tiempo total que tarda en vaciarse el depósito es

$$t = \int_0^3 \frac{2\,\pi dx}{\sqrt{x}} = 2\,\pi\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,\pi\left[2\sqrt{x}\right]_0^3;$$

es decir, $t = 4\,\pi\sqrt{3} = 21{,}7$ segundos, aproximadamente.

Cálculo de la integral con cambio de variable. — En la integral $\int f(x)\,dx$, la diferencial de la función es $f(x)\,dx$. Una gran ventaja de las diferenciales es que x no ha de ser forzosamente la variable independiente y, sin embargo, la diferencial es, en cualquier caso, $f(x)\,dx$.

Si x es función de otra variable t, de la forma $x = \varphi(t)$, se puede reemplazar x por $\varphi(t)$, y, dx por $\varphi'(t)\,dt$. Hallamos así una nueva integral, cuyo elemento diferencial es $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt$. Hay que cambiar los límites entre los que vamos a calcular la integral, acomodándolos a la nueva variable t.

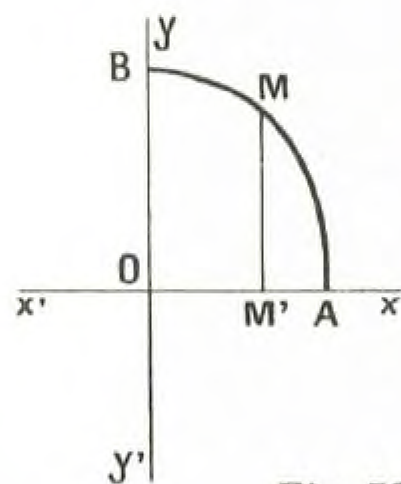


Fig. 76

APLICACIÓN. — *Hallar el área del círculo de centro* O *y situado en el ángulo* $x\widehat{O}y$ (*figura* 76).

$$S = \int_0^R y\,dx = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Hagamos el cambio de variable $x = R\cos\varphi$, $dx = -R\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi$.

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -R^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi d\varphi = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2\,\varphi d\varphi.$$

$$S = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1 - \cos 2\varphi]\,d\varphi = \frac{R^2}{2}\left[\varphi - \frac{\mathrm{sen}\,2\,\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}$$

El área del círculo completo sería πR^2, valor ya conocido por la geometría.

Integración por partes. — Otro método muy importante para la reducción de una integral dada a un tipo conocido es el llamado de integración por partes, cuya fórmula se obtiene partiendo de la relativa a la diferencial de un producto:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Despejado $u\,dv$, obtenemos:

$$u\,dv = (uv) - v\,du.$$

Integrando los dos miembros de esta ecuación, obtenemos la fórmula buscada,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Si la integral $\int v\,du$ es fácil de hallar, el problema está resuelto.

EJEMPLO. *Calcular* $\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$.

Haciendo $u = x$, $dv = \mathrm{sen}\,x dx$ se deduce $v = -\cos x$ y $du = dx$. Si aplicamos la fórmula de la integración por partes, obtenemos,

$$\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + c.$$

Aplicaciones de las integrales al cálculo de las áreas de sectores. — Se llama sector la superficie limitada por un arco de curva y los radios OA y OB que unen un punto O con los extremos del arco.

El sector más sencillo es el sector circular, que es la superficie de círculo limitada por un arco y los radios correspondientes a sus extremos.

El área del sector circular es $r^2\alpha$, siendo r su radio y α su ángulo, expresado en radianes.

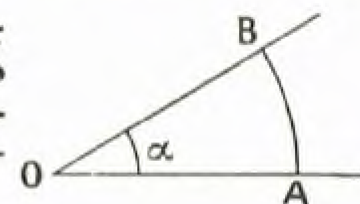


Fig. 77

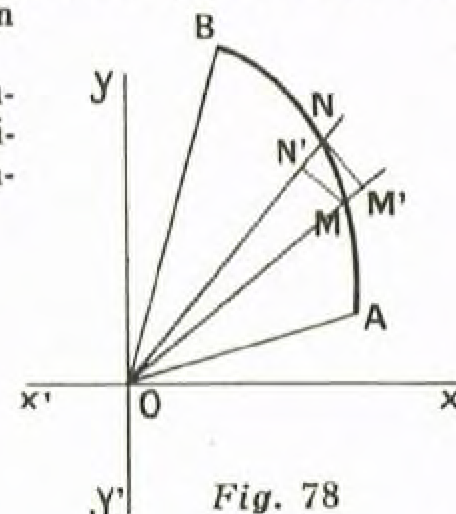


Fig. 78

Consideremos un arco de curva AB, cuya ecuación, en coordenadas polares, es $\rho = \varphi(\theta)$. Si α y β son los ángulos polares de A y B, al variar θ entre estos límites el punto M describirá el arco AB. Consideremos una posición de M (*fig.* 78). Demos a θ un incremento $d\theta$. El incremento del área es el área del sector OMN, que está comprendido (si ρ es creciente) entre las áreas de los sectores circulares OMN' y OM'N. Se tiene, entonces,

$$\varphi^2(\theta)\,d\theta \leqq \text{área OMN} \leqq [\varphi(\theta + d\theta)]^2\,d\theta.$$

El desarrollo limitado de $\varphi(\theta + d\theta)$ nos prueba que la diferencial del área es $\varphi^2(\theta)\,d\theta$, y el área buscada (estando θ expresado en radianes) es,

$$\text{área AOB} = \int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta.$$

En el sistema de coordenadas cartesianas, podemos obtener también una fórmula que nos dé el área de un sector.

Se tiene,

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

de donde

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad tg\,\theta = \frac{y}{x}, \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}.$$

Aplicando la fórmula que da la derivada de arco tg x, y teniendo en cuenta la derivación de una función de función, tenemos

$$d\theta = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Integrando y simplificando, tenemos, finalmente,

$$\text{área AOB} = \int_{\text{arco AB}} (x\,dy - y\,dx).$$

Si x e y son funciones de una variable t, y M recorre el arco AB de A hacia B, cuando t varía de t_1 a t_2, se calcula la integral definida de t_1 a t_2, sustituyendo x, y, dx por sus expresiones en función de t. Esta fórmula es válida, también, en el caso en que M, de coordenadas $x = f(t)$, $y = g(t)$, describe una curva cerrada simple, cuando t varía de t_1 a t_2. La integral nos da entonces (con su signo) la medida del área interior a la curva.

Otra aplicación de las integrales. Rectificación de un arco. — Se trata de calcular la longitud de un arco AB. Sea la ecuación de la curva $y = f(x)$ una función definida y continua en el intervalo (a, b). Supongamos que un punto móvil M recorre el arco de A hacia B (*fig.* 79).

Fig. 79

La longitud del arco AM es una función de la abscisa x de M. Busquemos la diferencial de esta función. Si damos a x un incremento dx, M toma la posición N, y podemos tomar como incremento del arco la cuerda MN. Sabemos que

$$MN^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \, [1 + (f'(x)^2].$$

Luego la diferencial del arco es $ds = dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

Integrando, obtenemos la longitud buscada:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Observación. Si no es x la variable independiente, la diferencial del arco viene dada por la fórmula general,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Esta fórmula se hace extensiva a las curvas en el espacio

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

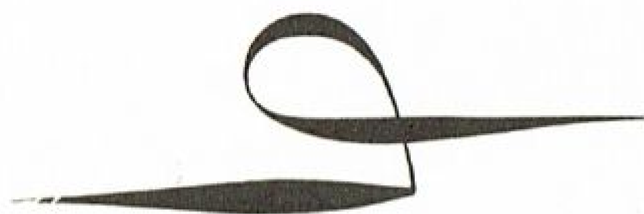
Si el arco de curva plana AB viene dado por su ecuación en coordenadas polares $s = \rho(\theta)$, la diferencial de la longitud del arco la da la fórmula

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2.$$

Si α y β son los ángulos polares de A y B (*fig.* 78), la longitud del arco es

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2}.$$

BIBLIOGRAFÍA. — Miguel Vegas: *Elementos de Geometría Analítica.* — Cámara: *Analítica.* — Rey Pastor: *Teoría de Funciones.* — Puig Adam: *Curso de Cálculo Integral.*



Mecánica racional

Las grúas proporcionan un ejemplo excelente de combinaciones de las máquinas simples que sirven para transmitir la acción de las fuerzas *(Fot. Services phot. du port du Havre)*

RESEÑA HISTÓRICA

Los primeros ensayos de teoría de la mecánica datan de **Aristóteles** (384-322 a. de J. C.), pero éste no llega a establecer diferencia entre las propiedades estáticas, cinemáticas y dinámicas. En cambio, **Arquímedes** 287-212 a. de J. C.) es el creador de la mecánica teórica. Durante la botadura de un gran navío que Hierón había ordenado construir y que los siracusanos no podían lanzar fuera del astillero, Arquímedes demostró la eficacia de la palanca y formuló las leyes de la mecánica racional, limitándose únicamente a las leyes del equilibrio. Definió el *centro de gravedad*, determinó el de la parábola, estableció los fundamentos de la *hidrostática* (principio de *Arquímedes*) e inventó, además del *tornillo* que lleva su nombre (tornillo de Arquímedes), el *tornillo sin fin* y los *polipastos*.

Pappo o **Pappus de Alejandría**, matemático de últimos del siglo III, quiso continuar la obra de Arquímedes, y a él se deben los dos teoremas que más tarde fueron enunciados por *Guldin*, así como una teoría acerca de las máquinas simples.

Es necesario esperar hasta el siglo XVI para poder registrar nuevos progresos en esta ciencia: **Nicolo Fontana,** llamado *Tartaglia* (¿1505?-1557) se ocupa del estudio de la mecánica en general y del *movimiento de los proyectiles* (1537), y **Jerónimo Cardan** o **Cardano** (1501-1576), autor de un tratado de mecánica, estudia el movimiento de los proyectiles (1570) e inventa la *junta* universal que lleva su nombre. **Simón Stevin,** llamado *Simón de Brujas* (1548-1620), establece la estática sobre bases lógicas y, después de publicar en 1586 su famosa obra sobre estática e hidrostática con el principio relativo a la *presión de los líquidos sobre el fondo de los recipientes*, estudia el plano inclinado y llega a la composición de fuerzas. El suizo **Pablo Guldin** (1577-1643) formula de nuevo los teoremas de Pappus.

En 1632, el jesuita español **Rodrigo de Arriaga** (1562-1622) publicó una obra en la que dice haber hallado por la experiencia que todos los cuerpos caen en el mismo tiempo cualquiera que sea su tamaño y su forma. Es interesante observar que la edición de ese libro es anterior al de Galileo que dio a conocer la teoría de la caída de los cuerpos. **Galileo Galilei** (1564-1642), verdadero iniciador de la mecánica moderna y a quien se debe el concepto de *fuerza* —que sirve de base a la misma—, descubrió la *ley de la caída de los cuerpos* y aclaró el concepto de *inercia*. También descubrió el *paralelogramo de fuerzas* desde el punto de vista dinámico, enunciado ya por Stevin desde el punto de vista estático, y se sirvió de él para resolver el problema del movimiento de los proyectiles. Su discípulo **Evangelista Torricelli** (1608-1647) determinó la condición de equilibrio de un cuerpo pesado sometido sólo a la acción de la gravedad y descubrió la *pesantez del aire*. El físico **Christian Huygens** (1629-1695) estudió los *relojes* y el *péndulo*, abordó la *dinámica de los sólidos* y estableció la diferencia existente, en la acción de las fuerzas aplicadas a un móvil, entre los efectos producidos por la componente normal y la tangencial; asimismo demostró el teorema de las *fuerzas vivas* en el péndulo. En fin, **Newton** (1642-1727) generalizó los descubrimientos de Galileo, estableció el *principio de la acción y la reacción* y *la ley de la gravitación universal*.

El desarrollo de las consecuencias derivadas de estos principios, según las reglas del cálculo y de la lógica matemática, ha servido de fundamento a la mecánica racional. Al establecer las leyes de atracción universal, Newton hizo posible que la astronomía se sirviera de la mecánica. A partir de este momento todos los progresos del álgebra, la geometría analítica, el análisis matemático y otras ramas de las matemáticas han sido utilizados por la mecánica (o los problemas que la mecánica ha planteado a los matemáticos han sido causa de los progresos alcanzados en dicho campo) llegando a convertirse en una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas.

Los **Bernoulli (Giacomo** [1654-1705] y **Giovanni** [1667-1748] introdujeron múltiples aplicaciones de las teorías mecánicas a problemas de dinámica. **Pierre Varignon** (1654-1722), estudiando las máquinas simples, estableció la teoría de los *momentos*, enunció el principio de las velocidades virtuales y resolvió el problema del equilibrio de un polígono funicular.

En el siglo XVIII, **Leonhard Euler** (1707-1783) somete el problema del movimiento de un sólido libre a investigaciones puramente analíticas; **Daniel Bernoulli** (1700-1782) analiza los movimientos de los líquidos y gases; **Jean le Rond d'Alembert** (1717-1783) determina los puntos de relación de la dinámica con la estática y formula el teorema general del equilibrio; **Jorge Juan** (1713-1773) publica un tratado de mecánica aplicada a las construcciones, conocimiento y manejo de los navíos y demás embarcaciones, en el cual dedica la primera parte a la mecánica de los sólidos y la segunda a la mecánica de los fluidos; **Louis de Lagrange** (1736-1813) demuestra el *teorema de las velocidades virtuales* en un *tratado de mecánica analítica*, y **Louis Poinsot** (1777-1859) simplifica la estática al considerar la teoría de los pares.

En el siglo XIX se distingue el matemático irlandés **William R. Hamilton** (1805-1865), a quien se debe el teorema de su nombre y el cálculo de cuaternios. Merece también mención el ingeniero hispanocubano *Bernardo Portuondo* (1840-1920) y los españoles *Benot* y *Vicuña*, que descuellan por sus numerosos trabajos matemáticos y físicos. De principios del siglo XX cabe citar a los franceses *Paul Appell* (1855-1930) y *Gabriel Koenigs* (1858-1931). Más recientemente, **Albert Einstein** (1879-1955) ha hecho, con sus trabajos, que las investigaciones de la mecánica entren en el campo de la física matemática y ha enunciado los modernos principios de la relatividad y de la equivalencia creando la teoría que lleva su nombre. Su obra ha sido completada por **Langevin** (1872-1946) y por **Louis de Broglie** (n. en 1892).

GENERALIDADES

Objeto de la mecánica. — La mecánica racional es la rama de las matemáticas que trata de la acción de las fuerzas.

Corrientemente se divide en tres partes: la **estática,** que se ocupa de las condiciones de equilibrio; la **dinámica,** que estudia las relaciones entre los movimientos y las fuerzas o causas que los producen, y la **cinemática,** que, para poder realizar este estudio, trata también de los movimientos independientemente de las fuerzas, pero teniendo en cuenta el tiempo.

Es interesante precisar las relaciones de la mecánica con los problemas reales. *Las condiciones de equilibrio y los movimientos de los cuerpos dependen, en realidad, de gran número de factores, entre ellos las deformaciones de estos cuerpos, la resistencia del medio y los efectos de otros cuerpos.* Cualesquiera que sean los progresos de las ciencias experimentales, es imposible tener en cuenta estos factores y calcular sus efectos. Por consiguiente, es necesario substituir los cuerpos reales, así como las diferentes acciones sobre ellos, por acciones y cuerpos ficticios más sencillos que permitan el cálculo.

La mecánica racional proporciona en cierto modo una primera aproximación de los resultados. No obstante, el desarrollo puramente lógico de los principios de la mecánica racional ha encontrado en astronomía y en física matemática brillantes confirmaciones de la legitimidad de estos principios: el descubrimiento del planeta Neptuno efectuado por Leverrier, en 1846, después de un largo y laborioso análisis matemático de las irregularidades del planeta Urano, es un ejemplo sorprendente.

Las condiciones que se estudian en mecánica racional son las ideales, a las que se procura aproximarse en la práctica; podemos citar, por ejemplo, la balística. Los movimientos reales de los proyectiles son muy diferentes a los calculados en mecánica racional, a causa de la resistencia del aire. Una trayectoria que atraviese las capas elevadas de la atmósfera, donde la resistencia del aire es menor, se aproxima considerablemente a la calculada en el problema teórico.

Estática

Estática del punto: Fuerzas. Peso. Elementos de las fuerzas. Instrumentos de medida de las intensidades de las fuerzas. Vectores: introducción. Concepto de vector. Primeras definiciones. Proyecciones. Suma geométrica o resultante de varios vectores consecutivos. Suma geométrica de vectores que tienen el mismo origen. Proyección sobre un eje. Casos particulares importantes. Punto material. Principios de la estática. Equilibrio de un punto material. Diferentes procedimientos para resolver los problemas de equilibrio. Caso particular importante. Punto material sometido a tres fuerzas. Estática del punto ligado. Reacción del apoyo. Resistencia al deslizamiento: rozamiento. Leyes de Coulomb. Valores de algunos coeficientes de rozamiento. Algunas observaciones sobre el rozamiento. Equilibrio de un punto ligado sin rozamiento. Equilibrio de un punto móvil sobre una superficie con rozamiento. Equilibrio de un punto móvil sobre una línea con rozamiento. — **Estática del sólido:** Fuerzas interiores. Fuerzas exteriores. Operaciones elementales. Empleo de las operaciones elementales para el estudio de los problemas de equilibrio. Reducción de un sistema de fuerzas a tres fuerzas. Reducción de un sistema de fuerzas a dos fuerzas. Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y a un par. Composición de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido. Composición de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario. Coordenadas del centro de fuerzas paralelas. Centro de *n* fuerzas paralelas. Aplicación al estudio del equilibrio. Aplicación de las operaciones elementales a los pares de fuerza. Composición de pares.— *Momentos. Condiciones analíticas del equilibrio.* Sentido de rotación alrededor de un eje. Disposición relativa de dos vectores. Teorema de Varignon. Expresión analítica de las proyecciones sobre tres ejes de coordenadas (rectangulares) del momento de un vector con relación al origen de coordenadas. Cambio de origen para el momento de un vector. Sistema de vectores. Resultante general. Momento resultante. Expresiones analíticas de la resultante general y del momento resultante con relación al origen O de coordenadas. Cambio de origen. Aplicación a los pares. Vuelta a las operaciones elementales. Condiciones analíticas de equilibrio. Caso particular. Centro de varias fuerzas paralelas. — *Centros de gravedad:* Peso y masa. Centro de gravedad de un sólido. Coordenadas del centro de gravedad. Densidad media. Densidad de un punto. Centro de gravedad de una línea. Sólido homogéneo. Utilización de las simetrías. Centro de gravedad de una figura plana triangular. Centro de gravedad de un prisma triangular. Centro de gravedad de un tetraedro. Centro de gravedad del cilindro. Teoremas de Guldin. — *Estática del sólido ligado:* Principio de estática del sólido ligado. Sólido con un punto fijo. Rotación de un sólido alrededor de un eje fijo. Sólido en reposo sin rozamiento sobre un plano. Equilibrio de un sistema de sólidos

Estática del punto

Fuerzas. — *Se llama* **fuerza** *toda causa capaz de modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo.*

El caballo que arrastra un carro ejerce una fuerza. Cuando se tira de un clavo fijado en una pared, se ejerce una fuerza (*fig.* 1). En varias partes de la física se estudian sistemas de fuerzas: así, por ejemplo, la *ley de Coulomb* establece las fuerzas que intervienen en los fenómenos eléctricos y magnéticos. La *ley de Newton* establece las fuerzas que rigen la atracción universal de los cuerpos dos a dos.



Fig. 1

Peso. — El peso de un cuerpo es la fuerza debida a la atracción que la tierra ejerce sobre ese punto. El punto sometido a dicha atracción se llama *punto pesante.*

Elementos de las fuerzas. — Una fuerza se caracteriza: 1°, por su punto de aplicación; 2°, por su dirección y su sentido; 3°, por su intensidad.

El *punto de aplicación* de una fuerza es el punto material sobre el que actúa, es decir, en el que modifica o tiende a modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo.

La *dirección de una fuerza* es la recta según la cual dicha fuerza tiende a desplazar el punto material sobre el que actúa. El concepto de dirección debe ser completado por el de sentido de la fuerza.

La *intensidad* de una fuerza es la medida de esta fuerza respecto a otra que se toma por unidad.

Instrumentos de medida de las intensidades de las fuerzas. — A los instrumentos de medida de las intensidades de las fuerzas se les llama *dinamómetros.* Los dinamómetros más sencillos están constituidos por resortes (*fig.* 2).

Dos fuerzas son iguales cuando causan el mismo efecto. Una fuerza A es doble que otra fuerza B cuando realiza el mismo efecto que otras dos fuerzas iguales a B actuando simultáneamente en la misma dirección.

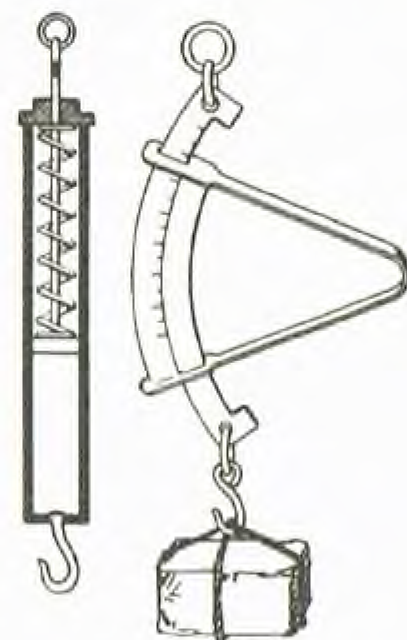


Fig. 2

Vectores: introducción. — Las características comunes a todas las fuerzas permiten representar toda fuerza por un *vector.* Gracias a esta correspondencia entre vectores y fuerzas, se han podido substituir los problemas de equilibrio y movimiento por problemas de geometría y de álgebra sobre vectores. Vamos, pues, a estudiar las propiedades de los vectores en vista de su aplicación a la mecánica.

Concepto de vector. Primeras definiciones. — V. GEOMETRÍA ANALÍTICA, p. 195 y siguientes.

El vector de origen A y de extremo B está representado por la notación $\overrightarrow{AB}$ (*fig.* 3). Si la recta que contiene al vector (o *soporte* del vector) está orientada, el vector tiene un valor algebraico $\overline{AB}$.

Se dice que los vectores son *equipolentes* cuando tienen la misma dirección, la misma longitud y el mismo sentido (*figura* 4). Si además tienen el mismo soporte son *directamente equipolentes.*



Fig. 3

Se dice que los vectores son *opuestos* cuando tienen la misma dirección, la misma longitud y sentidos opuestos (*fig.* 5). Si además tienen el mismo soporte, son *directamente opuestos.*

Proyecciones. — La proyección de un vector sobre un eje es el vector que tiene por origen la proyección del origen y por extremo la proyección del extremo (*fig.* 6).

Dos vectores equipolentes tienen sobre el mismo eje dos proyecciones equipolentes.

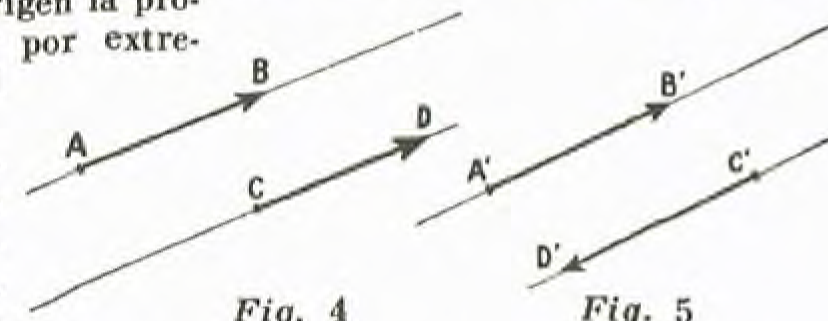


Fig. 4 *Fig.* 5

Cuando se conocen las coordenadas del origen y del extremo de un vector, se pueden calcular sus proyecciones aplicando la relación de Chasles, estudiada en álgebra.

Suma geométrica o resultante de varios vectores consecutivos. — Vectores consecutivos son aquellos en los que el extremo de cada uno es el origen del siguiente.

La suma geométrica (o *resultante*) *de varios vectores consecutivos es el vector que tiene por origen el origen del primero, y por extremo, el extremo del último* (fig. 7).

Se representa esta suma geométrica (*fig.* 8) por la notación simbólica

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}.$$

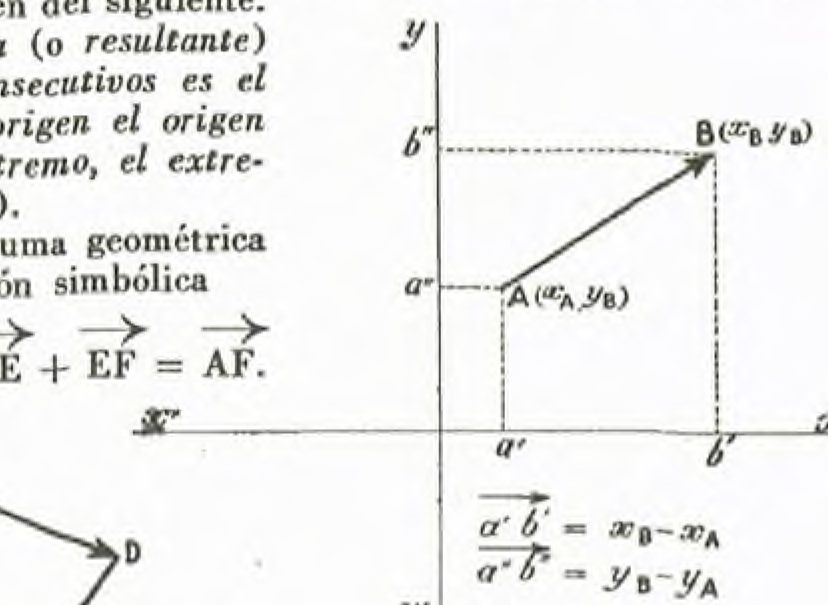


Fig. 6

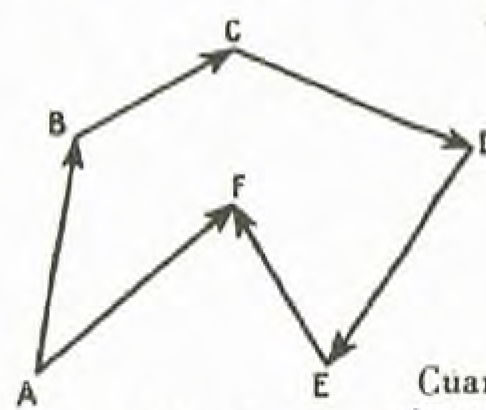


Fig. 7

Cuando los vectores tienen por soporte una misma línea recta, se puede orientar dicha recta. *En este caso solamente,* se puede aplicar el ya citado teorema de Chasles: el valor algebraico de la suma geométrica de varios vectores es precisamente igual a la suma algebraica de los valores algebraicos de los vectores componentes de la suma.

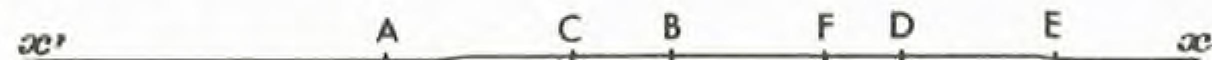


Fig. 8

(Sólo en el caso de que los vectores estén sobre un mismo eje se pueden, en la fórmula precedente, substituir los vectores por sus valores algebraicos y hacer los cálculos.)

Suma geométrica de vectores que tienen el mismo origen. — Sean los vectores concurrentes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ (*fig.* 9). Se lleva en A, el vector $\overrightarrow{AB'}$ equipolente a $\overrightarrow{OB}$, después $\overrightarrow{B'C'}$ equipolente a $\overrightarrow{OC}$ y por último el $\overrightarrow{C'D'}$ equipolente a $\overrightarrow{OD}$. El vector $\overrightarrow{OD'}$ es la suma geométrica de los vectores dados.

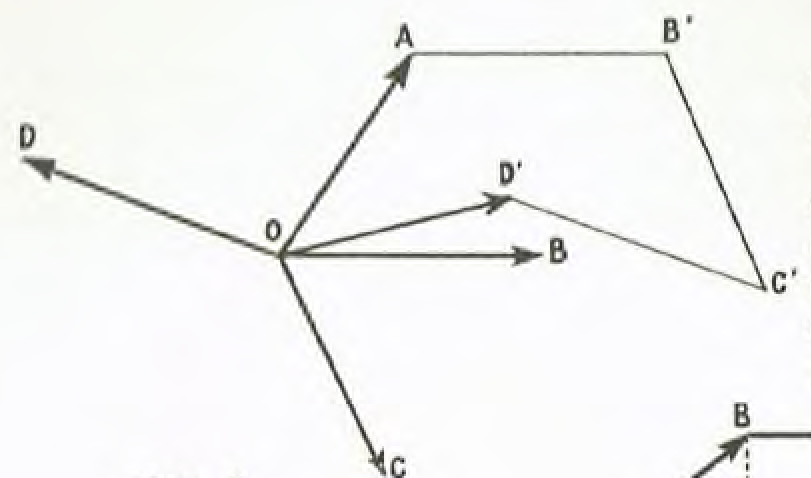


Fig. 9

Esta definición es extensiva para vectores no concurrentes.

La suma geométrica de varios vectores es independiente del orden de los mismos. Se puede también substituir varios vectores por su suma geométrica y, recíprocamente, substituir un vector por varios vectores cuya suma sea aquel vector.

Fig. 10

Proyección sobre un eje. — Si se proyectan sobre un eje varios vectores y su suma geométrica, la proyección del vector suma geométrica es la suma geométrica de las proyecciones de los vectores "componentes" (*fig.* 10).

Al estar todos los vectores "proyecciones" sobre un mismo eje, se les puede aplicar el teorema de Chasles y efectuar los cálculos algebraicos; mediante proyecciones convenientes se puede, por tanto, emplear el cálculo algebraico en las cuestiones de mecánica.

Casos particulares importantes. — La suma geométrica de dos vectores, es la diagonal del paralelogramo construido sobre dichos vectores. La suma geométrica de tres vectores es la diagonal del paralelepípedo construido sobre esos tres vectores (*figura* 11).

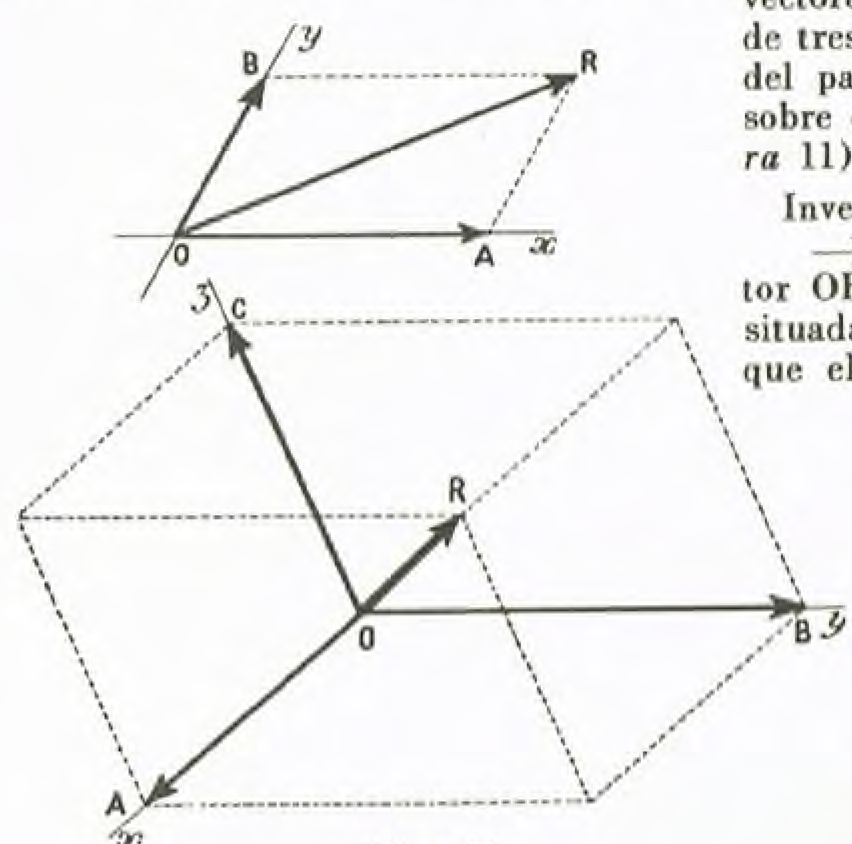


Fig. 11

Inversamente, dado un vector $\overrightarrow{OR}$ y dos líneas soportes situadas en el mismo plano que el vector, se pueden encontrar, construyendo un paralelogramo, dos vectores tales que su suma geométrica sea el vector dado.

Asimismo, dado un vector $\overrightarrow{OR}$ y tres rectas OX, OY, OZ, no situadas en un mismo plano, se obtienen, construyendo el paralelepípedo cuya diagonal sea $\overrightarrow{OR}$ y cuyas aristas estén sobre las rectas dadas, tres vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ cuya suma geométrica es $\overrightarrow{OR}$.

Punto material. — *Se llama* **punto material** *todo cuerpo de dimensiones lo bastante pequeñas que puedan considerarse despreciables.* He ahí un ejemplo de la substitución de un cuerpo ficticio por cuerpos reales.

Principios de la estática. — La estática del punto material se basa en los siguientes principios de origen experimental:

1º **Principio de la inercia (Kepler).** *Un punto material que se encuentra en estado de reposo, permanecerá en dicho estado si no existe ninguna acción exterior que actúe sobre él.*

2º **Principio de la igualdad de la acción y de la reacción (Newton).** *Si un punto material A actúa sobre otro punto material B, y si el efecto de esta acción constituye una fuerza aplicada en B cuya línea soporte es AB, la acción de B sobre A, que se llama reacción, es una fuerza igual y opuesta directamente a la acción de A sobre B (fig. 12).*

Fig. 12

Estas fuerzas pueden ser de atracción o repulsión. El principio de la igualdad de la acción y de la reacción, enunciado para las acciones recíprocas de dos puntos distantes, tiene también aplicación a las acciones de dos puntos en contacto.

Si un punto material está en reposo sobre un apoyo, ejerce una fuerza sobre él; recíprocamente, el apoyo ejerce sobre el punto material una fuerza directamente opuesta a la anterior.

3º **Principio de la composición de fuerzas (Galileo).** *Si varias fuerzas actúan simultáneamente sobre un punto material, su efecto sobre dicho punto es el mismo que el de una fuerza única llamada resultante: el vector que la representa es la suma geométrica de los vectores representativos de las fuerzas primitivas.*

Recíprocamente, se puede reemplazar una fuerza por varias aplicadas al mismo punto y que tengan por resultante la fuerza dada.

Equilibrio de un punto material. — *Para que un punto sometido a varias fuerzas esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la resultante de las fuerzas a él aplicadas sea nula.*

Diferentes procedimientos para resolver los problemas de equilibrio. — Se pueden plantear los problemas por procedimientos geométricos o por los métodos de la geometría analítica. En el primer caso es preciso construir la resultante y comprobar que es nula. En el segundo caso hay que asociar el sistema de fuerzas a un sistema de tres ejes coordenados. Para que la resultante sea nula, es preciso y suficiente que sus proyecciones sobre los tres ejes sean nulas. Ahora bien, hemos visto que el valor algebraico de la proyección de la resultante sobre un eje es la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas (o vectores) dadas. Por lo tanto, si n fuerzas, F_1, F_2, ..., F_n, actúan sobre un punto y si X_i, Y_i, Z_i son los valores algebraicos de las proyecciones de la fuerza F_i sobre los tres ejes, las condiciones necesarias y suficientes para que exista equilibrio se expresan analíticamente

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0, \\ Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0. \end{cases}$$

En el caso particular de que todas las fuerzas estén en el mismo plano, estas ecuaciones se reducen a dos, que se obtienen expresando analíticamente que la suma de los valores algebraicos de las proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes coordenados situados en su plano es nula. De forma más general, las proyecciones de todas las fuerzas aplicadas sobre un punto, sobre una recta o sobre un plano, deben tener una resultante nula

Caso particular importante. Punto material sometido a tres fuerzas. — Desde luego, estas tres fuerzas deben estar en un mismo plano, puesto que si no lo estuvieran, su resultante sería la diagonal del paralelepípedo construido sobre los tres vectores y por lo tanto no sería nula.

Si las tres fuerzas están situadas en un mismo plano y si el punto está en equilibrio, la resultante es nula. Si se llevan los vectores equipolentes a las tres fuerzas dadas, uno a continuación de otro, el extremo del tercer vector coincide con el origen del primero y las tres fuerzas forman un triángulo (*fig.* 13).

El vector $\overrightarrow{B'M}$ es equipolente al vector $\overrightarrow{MC}$, en tanto que el vector $\overrightarrow{MB'}$ es precisamente el resultante de los dos vectores $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$: por consiguiente, si tres fuerzas están en equilibrio, cada una de ellas es directamente opuesta a la resultante de las otras dos.

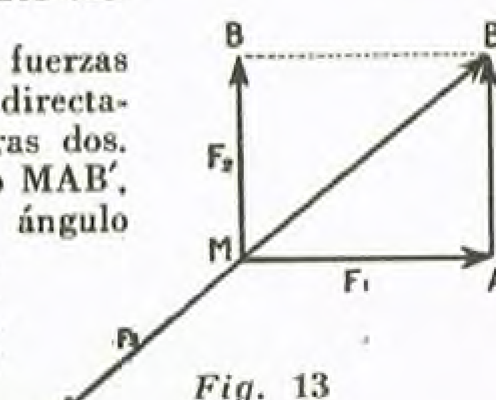


Fig. 13

Observemos también que, en el triángulo MAB', cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto. Ahora bien, el seno del ángulo $\widehat{AMB'}$ es igual al seno del ángulo $\widehat{CMA}$, puesto que son ángulos suplementarios, y el ángulo $\widehat{CMA}$ es precisamente el formado por los vectores F_3 y F_1. De aquí se deduce la siguiente conclusión: si tres fuerzas están en equilibrio, cada una de ellas es proporcional al seno del ángulo formado por las otras dos:

$$\frac{F_1}{\operatorname{sen}(\widehat{F_2,F_3})} = \frac{F_2}{\operatorname{sen}(\widehat{F_3,F_1})} = \frac{F_3}{\operatorname{sen}(\widehat{F_1,F_2})}.$$

Ejemplo. Un punto pesante M (*fig.* 14) se halla colgado de un hilo de caucho, que, en reposo, tiene una longitud l. Cuando el hilo sufre un alargamiento, la fuerza que él ejerce es proporcional a dicho alargamiento: esta fuerza se denomina tensión T.

Puesto que el punto es pesante, estará sometido a dos fuerzas: su peso, dirigido según la vertical, y la tensión T del hilo de caucho. Como estas fuerzas se encuentran equilibradas, el hilo debe quedar vertical. Si L es su longitud y k es un coeficiente, tal que su producto por el alargamiento es igual a la tensión, se tiene $k\ (L - l) = p$.

$$L = \frac{p}{k} + l.$$

Fig. 14

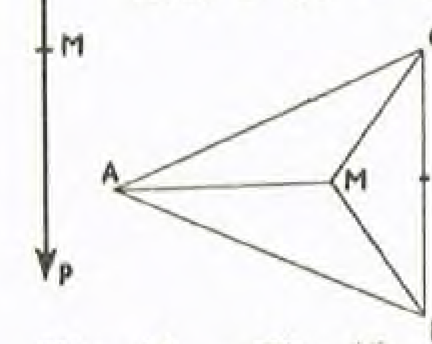


Fig. 15

Problema. *Un punto* M *(no pesante) es atraído por tres puntos fijos* A, B *y* C, *no alineados, y las fuerzas están representadas por los tres vectores* $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ *y* $\overrightarrow{MC}$ *(fig. 15). Hallar la posición de equilibrio.*

Si el vector $\overrightarrow{MA}$ equilibra a los vectores $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MC}$, hemos visto anteriormente que $\overrightarrow{MA}$ es directamente opuesto a la suma geométrica de los vectores $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MC}$. En razón de las propiedades de los paralelogramos, la suma geométrica de $\overrightarrow{MB}$ y $\overrightarrow{MC}$ es el doble del vector $\overrightarrow{MI}$, siendo I el punto medio de $\overrightarrow{BC}$. Por lo tanto, $\overrightarrow{MA}$ estará en equilibrio con 2MI, la posición de equilibrio estará en la alineación AI, es decir, sobre la mediana AI del triángulo, y, como MA es el doble de MI, la posición de equilibrio será el punto de concurrencia de las medianas del triángulo, que se designa por la letra G.

Se puede obtener el mismo resultado por medio del cálculo. Si x, y, z son las coordenadas del punto de equilibrio (*fig.* 16), x_a, y_a, z_a las coordenadas de A, x_b, y_b, z_b las de B, x_c, y_c, z_c, las de C, las

proyecciones del vector $\overrightarrow{MA}$ sobre los tres ejes son por lo tanto $x_a - x$, $y_a - y$, $z_a - z$. Por consiguiente se tiene

$$\begin{cases} x_a - x + x_b - x + x_c - x = 0, \\ y_a - y + y_b - y + y_c - y = 0. \\ z_a - z + z_b - z + z_c - z = 0. \end{cases}$$

$$\text{De donde} \begin{cases} x = \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}, \\ y = \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}, \\ z = \dfrac{z_a + z_b + z_c}{3}. \end{cases}$$

Se obtiene así, por el cálculo, el punto de concurrencia de las medianas.

Fig. 16.

VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL. — Sobre un tablero de dibujo (*figura* 17), se sujeta un anillo a tres puntos fijos por medio de tres dinamómetros. Se obtienen así tres fuerzas en equilibrio. Las direcciones de los hilos nos señalan las direcciones de las fuerzas, y sus intensidades vienen medidas por los dinamómetros. Aunque imperfectamente, pero de forma sencilla, se verifican con este experimento las leyes de equilibrio de tres fuerzas.

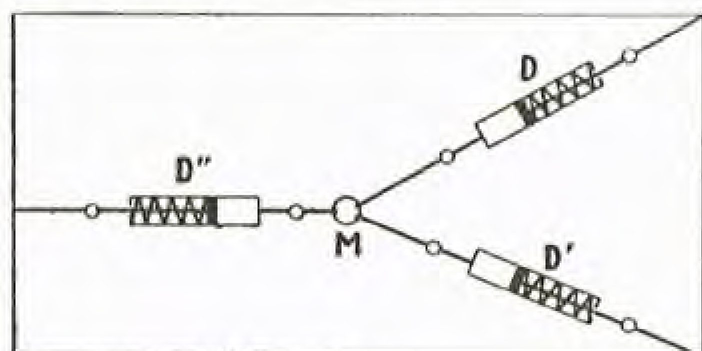


Fig. 17

Estática del punto ligado. — En el estudio que precede, el punto estudiado podía moverse, cuando no existía equilibrio, en cualquier dirección. Vamos a considerar ahora los puntos ligados, es decir, puntos obligados a permanecer sobre una línea o sobre una superficie: se dice entonces que se impone al punto un enlace o ligadura. Ejemplos: el punto obligado a permanecer sobre un plano, el punto situado en el extremo de un hilo de longitud constante (péndulo), y el anillo pequeño móvil sobre un hilo de hierro que lo atraviesa. Se distinguen los enlaces o ligaduras unilaterales y bilaterales: un punto pesante que está obligado a permanecer sobre una mesa puede, no obstante, abandonar la mesa hacia arriba. El enlace o ligadura es en este caso unilateral. Igual ocurre para el punto móvil colocado en el extremo de un hilo. Por el contrario, si el punto es obligado a permanecer en el interior de un tubo (como una bola en ciertos rodamientos a bolas), el enlace o ligadura es bilateral.

Reacción del apoyo. — Entre las distintas fuerzas que actúan sobre un punto, cuando está en contacto con el apoyo, hay una que es la reacción del apoyo.

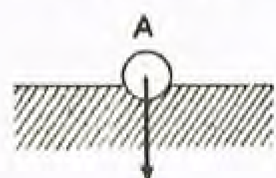


Fig. 18

Si el punto pesante A apoya sobre una mesa horizontal, deforma ligeramente la materia de que está constituido el tablero (*fig.* 18): hay, pues, una acción del punto sobre la materia de la mesa. Pero si existe una acción del punto sobre la mesa, hay, sobre el punto pesante, una reacción de la materia que constituye la mesa, reacción directamente opuesta a las fuerzas que provocan las deformaciones.

Resistencia al deslizamiento: rozamiento. Leyes de Coulomb. — Un punto ligado está en equilibrio cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él, incluida la reacción del apoyo, es nula. La dificultad del problema estriba en que ni la intensidad ni la dirección de la reacción del apoyo son conocidas: las experiencias de Coulomb, continuadas por Morin, han permitido hacer un estudio experimental de esta cuestión.

Una caja abierta en su parte superior y en forma de trineo está en reposo sobre una mesa horizontal (*fig.* 19). Una cuerda delgada y flexible está atada en D a la caja y pasa sobre una polea de forma que quede horizontal. La parte de la cuerda que pende del otro lado de la polea lleva en su extremo inferior un platillo para poner pesos. La fuerza que ejerce la parte horizontal de la cuerda tiene una intensidad igual que la de los pesos colocados en el platillo.

Fig. 19

Designemos por P el peso total del trineo. La experiencia demuestra que para un valor pequeño de p, el trineo permanece en equilibrio. Si se aumenta el valor de p, al principio el equilibrio subsiste. El trineo empieza a deslizarse a partir del momento en que la fuerza p alcanza el valor q.

Si hacemos variar P, cambiando la carga del trineo, q varía al mismo tiempo, pero el hecho fundamental es que la relación $\dfrac{q}{P}$ es constante. Después de numerosas experiencias, en las que se han variado tanto las dimensiones del trineo como las materias de que están constituidas la mesa y la base del trineo, se han podido establecer los siguientes resultados:

La relación $\dfrac{q}{P}$ no depende de la extensión de las superficies en contacto.

La relación $\dfrac{q}{P}$ depende esencialmente de la materia de las mismas; y se le llama coeficiente de rozamiento por deslizamiento al comenzar el movimiento, designándosele por la letra f.

Valores de algunos coeficientes de rozamiento:

Hierro sobre encina, en seco	0'62
Encina sobre encina, en seco	0'62
Cuero sobre metales, en seco	0'56
Cuero sobre encina, en seco	0'43
Encina sobre encina, superficies enjabonadas	0'44
Hierro sobre fundición, superficies secas	0'19
Fundición sobre fundición, superficies engrasadas ...	0'16
Hierro sobre encina, superficies embreadas	0'15
Acero sobre ágata, superficies aceitadas	0'11

Se ve que cuanto más pulimentadas están las superficies de contacto, el valor del rozamiento es menor. El caso límite es aquel en que el rozamiento es nulo; esto jamás sucede en la práctica. En mecánica racional se tratan los problemas en este caso límite y hay dos clases de problemas de equilibrio: aquellos donde los enlaces o ligaduras tienen lugar sin rozamiento y los que están acompañados de él.

Algunas observaciones sobre el rozamiento. — En las máquinas, el rozamiento es perjudicial: por él, las piezas se calientan y se desgastan. Además, el rendimiento de la máquina disminuye por el rozamiento. Para contrarrestar estos efectos perniciosos, se lubrican las superficies en contacto. Pero el rozamiento no sólo produce malos efectos. Únicamente en ciertos casos el rozamiento es perjudicial: lo más corriente es que constituya un fenómeno beneficioso. Sin rozamiento, la vida sería imposible: los coches no podrían rodar, los muebles no permanecerían en su sitio, los montones de arena y las montañas se derrumbarían. Los desastres originados por los glaciares nos hacen entrever lo que sería un mundo sin rozamiento.

El rozamiento es debido a las rugosidades de las superficies en contacto y a las deformaciones.

Equilibrio de un punto ligado sin rozamiento. — Sea $\overrightarrow{MF}$ la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el punto, excluida la reacción (*fig.* 20). Se puede descomponer esta fuerza en otras dos: una, la $\overrightarrow{MN}$, normal (o perpendicular) a la superficie de apoyo, y la otra, $\overrightarrow{MT}$, tangente a la citada superficie. La fuerza $\overrightarrow{MN}$, perpendicular, da lugar a una reacción que la equilibra. Puesto que no existe rozamiento, la fuerza $\overrightarrow{MT}$ provoca el movimiento del punto N. Para que exista equilibrio es necesario y suficiente que esta fuerza $\overrightarrow{MT}$ sea nula. Por consiguiente:

Fig. 20

La condición necesaria y suficiente para que un punto móvil, sin rozamiento sobre un apoyo, esté en equilibrio, es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre dicho punto (no teniendo en cuenta la reacción del apoyo) sea nula o normal al apoyo.

(En el caso en que el enlace o ligadura sea unilateral, es preciso comprobar, además, que dicha resultante obliga al punto a permanecer sobre su apoyo.)

Los problemas se resuelven, ya por geometría, ya por cálculo, escribiendo las condiciones de forma que la resultante sea perpendicular al apoyo.

PROBLEMA. *Equilibrio de un punto (no pesante)* M, *móvil sobre una recta y atraído por dos puntos* A *y* B *según las fuerzas representadas por* $\overrightarrow{MA}$ *y* $\overrightarrow{MB}$ (fig. 21).

La resultante de las dos fuerzas $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$ es $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MO}$, siendo O el punto medio del segmento AB. Como la resultante debe ser normal al apoyo, la posición de equilibrio es el pie I de la perpendicular trazada desde O a la recta.

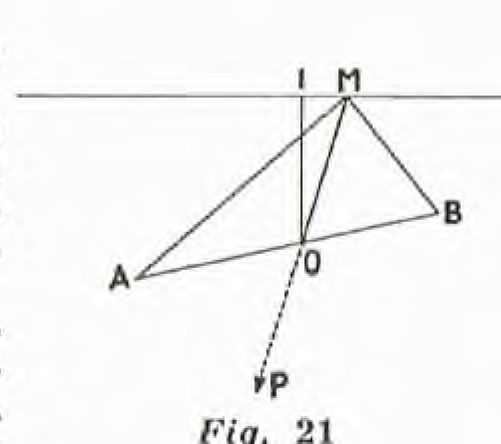


Fig. 21

PROBLEMAS. 1º *Equilibrio de un pequeño anillo no pesante, móvil, sobre una circunferencia y atraído por un punto fijo* A.

Los puntos de equilibrio serán aquellos en los que la recta MA (*fig.* 22) es normal al círculo. Puesto que la tangente está en el plano del círculo, la proyección de la recta MA sobre dicho plano pasará por el centro del círculo. De aquí se deduce la construcción a seguir. Se proyecta el punto A en a sobre el plano del círculo. Se traza el diámetro que pasa por a: corta el círculo en dos puntos M_1 y M_2.

(Para hacer un estudio completo, se necesitaría además ver si los puntos M_1 y M_2 son puntos de equilibrio estable o inestable. Se dice que el equilibrio es estable cuando al separar el móvil levemente de su posición de equilibrio retorna a ella nue-

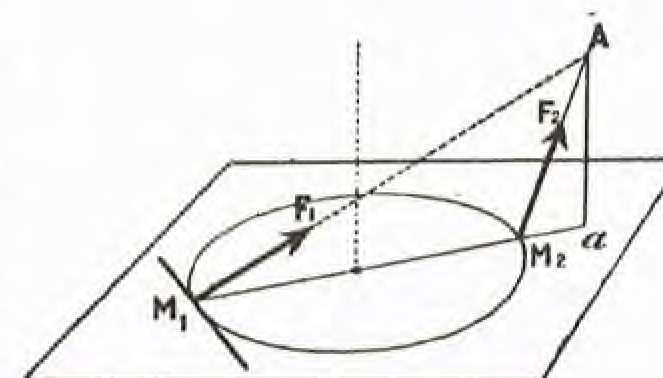


Fig. 22

vamente. Si por el contrario, al separar el cuerpo ligeramente de su posición de equilibrio, no sólo no retorna a ella, sino que se separa aún más, el equilibrio es inestable.)

2º *Se considera un plano inclinado que forma un ángulo con el plano horizontal* (fig. 23). *Un punto pesante de peso* P *(materializado por un pequeño carretón) está enganchado a un hilo que pasa por una polea, sosteniendo una pequeña masa de su otro extremo. El hilo ejerce de esta forma sobre el punto móvil una fuerza* T, *según la dirección del plano inclinado. Calcular esta fuerza* T *y la reacción del plano inclinado.*

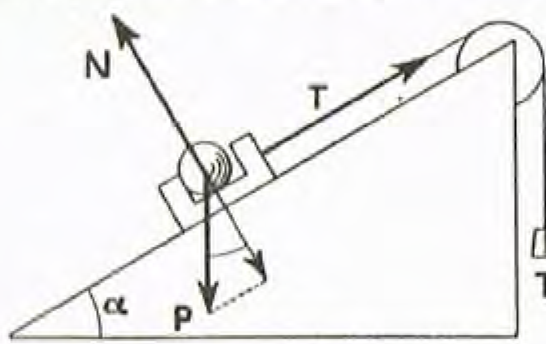


Fig. 23

Si proyectamos sobre el plano inclinado, la proyección de la reacción es nula. La proyección del peso P está situada sobre la línea de máxima pendiente y tiene como valor P sen α. La fuerza T, ejercida por el hilo, está contenida en una línea de máxima pendiente y todo esto ocurre en el plano vertical que contiene la citada línea. Como la fuerza T equilibra la proyección de P sobre el plano, se verifica que

$$T = P \text{ sen } \alpha.$$

Proyectando sobre la normal al plano, tenemos

$$P \cdot \cos \alpha = N.$$

Observación. Este problema recuerda una experiencia de Galileo, la cual revelaba que se podía equilibrar un punto pesante situado sobre un plano inclinado con una fuerza más pequeña que su peso. Asimismo recuerda otra experiencia de Stevin (*fig.* 24): una cadena, constituida homogéneamente, se colocaba sobre un plano inclinado; la cadena quedaba en equilibrio, puesto que su parte vertical equilibraba la parte situada sobre el plano inclinado.

Equilibrio de un punto móvil sobre una superficie con rozamiento. — Sea F la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el punto (a excepción de la reacción del apoyo). Esta fuerza F puede descomponerse en dos: una, la F_n, normal a la superficie, y otra, la F_t, situada en el plano tangente (*fig.* 25).

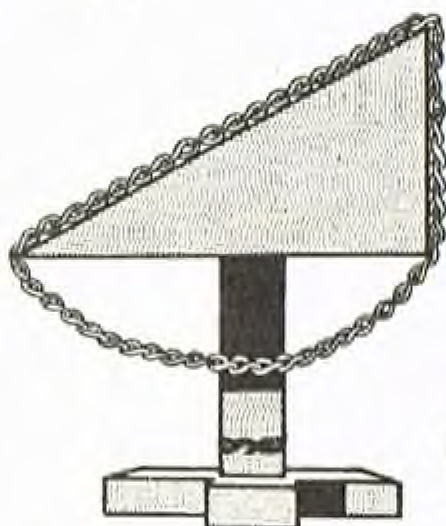
De acuerdo con las leyes de Coulomb habrá equilibrio si se verifica que

$$F_t \leqq f \, F_n$$

(siendo f el coeficiente de rozamiento y F_t y F_n las intensidades de las fuerzas.)

Otra forma de este resultado. De la desigualdad anterior, se deduce que $\frac{F_t}{F_n} \leqq f$. Ahora bien, $\frac{F_t}{F_n}$ es la tangente del ángulo agudo α formado por la fuerza F con la normal. Pongamos $f = \text{tg } \varphi$, siendo φ un ángulo agudo llamado *ángulo de rozamiento*. Se tiene, pues,

$$\text{tg } \alpha \leqq \text{tg } \varphi,$$
$$\alpha \leqq \varphi.$$


Fig. 24

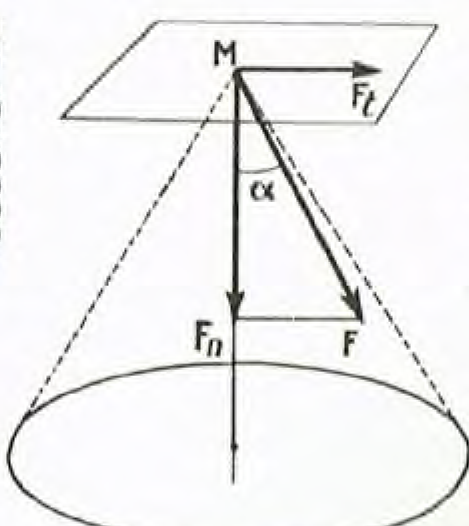


Fig. 25

Para que el punto M esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la resultante F de las fuerzas (excluida la reacción) sea interior al cono de revolución de vértice M, que tiene por eje la normal al plano en el punto M y cuyo semiángulo en el vértice es el ángulo de rozamiento φ.

Además, si el enlace o ligadura es unilateral, la fuerza F debe mantener al punto sobre su apoyo.

Equilibrio de un punto móvil sobre una línea con rozamiento. — Siendo F la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el punto (excluida la fuerza de reacción), nuevamente la descomponemos en otras dos fuerzas (*fig.* 26), una, F_t, según la dirección de la tangente a la curva, y otra, la F_n, según la dirección de la perpendicular a la tangente y situada en el plano determinado por la fuerza y la tangente. De acuerdo con las leyes de Coulomb, habrá equilibrio si

$$F_t \leqq F_n$$

siendo f el coeficiente de rozamiento.

Pongamos de nuevo $f = \text{tg } \varphi$ como en el caso anterior. Resulta otra vez que, si hay equilibrio, el ángulo formado por F_n y F será menor o igual que φ. Pero puesto que hay una tangente e infinidad de normales en M a la curva, es preferible ver que el ángulo formado por F con la tangente es mayor que el complementario de φ.

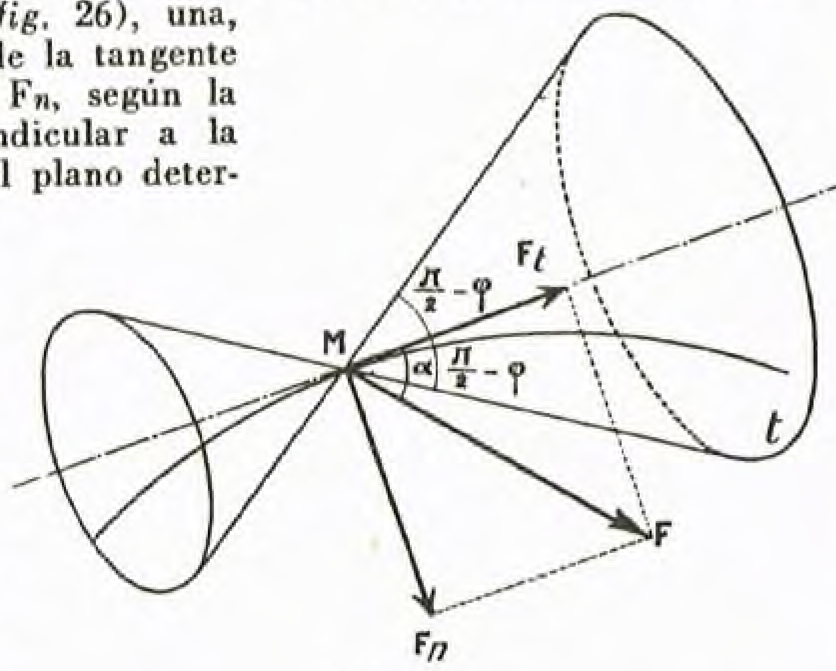


Fig. 26

Para que el punto M esté en equilibrio, es preciso y suficiente que la resultante de las fuerzas (excluida la reacción) sea exterior al cono de revolución de vértice M que tiene por eje la tangente y por ángulo, en el vértice, el complementario del ángulo de rozamiento φ.

Problemas. 1º *Equilibrio de un punto material pesante* M *en reposo con rozamiento sobre un plano inclinado al que se le hace aumentar el ángulo que forma con el plano horizontal* (fig. 27).

El peso P forma, con la perpendicular al plano inclinado en el punto M, un ángulo α igual al que forma el plano inclinado con el horizontal. El equilibrio subsistirá en tanto que

$$\alpha \leqq \varphi.$$

El punto comenzará a deslizarse desde el momento en que la inclinación del plano exceda de φ.

Fig. 27

Por este procedimiento tenemos un medio sencillo, pero poco exacto, para conocer el valor del ángulo de rozamiento.

2º *Equilibrio de un punto situado sobre una recta y atraído por un punto* A.

El ángulo formado por la fuerza y la perpendicular a la recta es el HAM (*fig.* 28). Habrá equilibrio en tanto que ese ángulo sea menor o igual que φ.

Fig. 28

Si se trazan dos rectas a uno y otro lado de la perpendicular AH, que formen con ella el ángulo φ, determinarán sobre la recta dada el segmento IJ. El punto quedará en equilibrio cuando esté situado en el interior de este segmento IJ (o en sus extremos).

Si substituimos la recta por un plano, el punto quedará en equilibrio cuando esté situado en el interior del círculo de centro H (*fig.* 29) y de radio HI = AH tg φ (o sobre su circunferencia).

Observación. En los problemas de equilibrio sin rozamiento, las soluciones son, en general, puntos aislados. Sucede lo contrario cuando hay rozamiento; entonces las posiciones de equilibrio son superficies pequeñas o porciones de curvas (llamadas regiones o *zonas de equilibrio*).

3º *Equilibrio de un punto pesante situado sobre una circunferencia en un plano vertical.*

Siendo la normal a la circunferencia en el punto M el radio OM (*fig.* 30), el ángulo que forman el peso y la normal será igual al formado por el radio OM y el diámetro vertical AB. Habrá equilibrio en tanto que este ángulo sea menor o igual al ángulo de rozamiento φ.

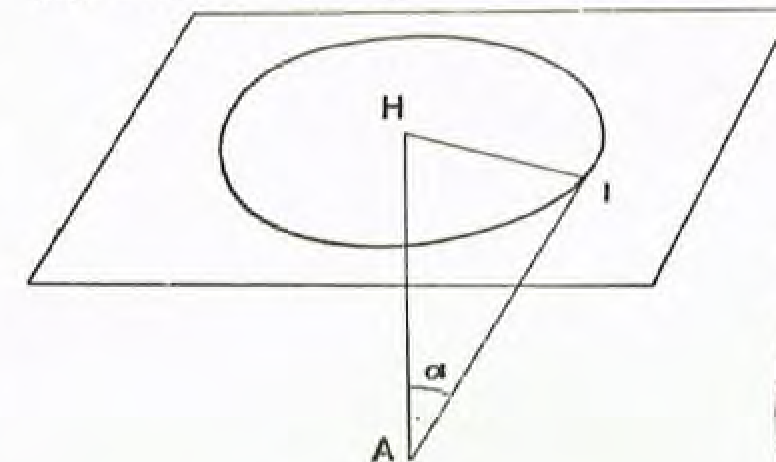


Fig. 29

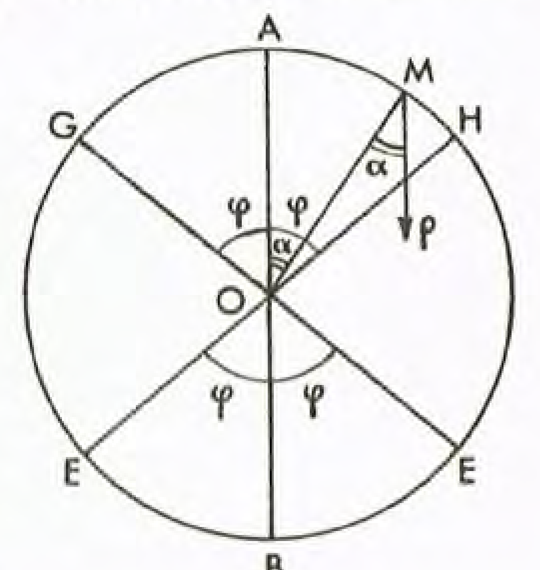


Fig. 30

Las regiones de equilibrio están determinadas por los dos diámetros que forman con el diámetro vertical un ángulo φ.

Las dos regiones serán soluciones del problema si la ligadura es bilateral. Si el enlace o ligadura es unilateral, la región superior será solución si el punto es exterior a la circunferencia. La región inferior lo será únicamente cuando el punto esté situado en el interior de la circunferencia.

Estática del sólido

Definiciones. *Cuerpo sólido es un conjunto de puntos materiales cuyas distancias entre sí permanecen invariables.* El cuerpo sólido así definido es indeformable: nos encontramos, pues, con una nueva abstracción, ya que los cuerpos reales son todos más o menos deformables.

Se dice que un sólido está en **equilibrio** *bajo la acción de un sistema de fuerzas, cuando, hallándose en reposo, permanece en dicho estado al aplicarle ese sistema de fuerzas.* Si, estando el sólido en reposo, no se le aplica ninguna fuerza, el sólido permanecerá en dicho estado.

Fuerzas interiores. Fuerzas exteriores. — Si un sólido se encuentra en equilibrio, todos sus puntos están igualmente en equilibrio. Ahora bien, las fuerzas que actúan sobre los distintos puntos son, por una parte, las fuerzas exteriores que actúan sobre sus puntos de aplicación, y, por otra parte, las acciones mutuas entre los puntos: estas fuerzas, dependientes de las exteriores, son las interiores. Por el principio de la acción y de la reacción, la acción del punto A sobre el B es directamente opuesta a la acción del punto B sobre el A. Las fuerzas interiores, oponiéndose dos a dos, se encuentran en equilibrio. El estado del sólido no depende más que de las fuerzas exteriores.

Entre las fuerzas exteriores, se pueden distinguir las fuerzas directamente aplicadas y, si el sólido está ligado, las fuerzas debidas a los enlaces o ligaduras.

Ejemplo. Si un sólido pesante está en reposo sobre un plano horizontal (*fig.* 31), las fuerzas exteriores son los *pesos* de los diferentes elementos del sólido y las reacciones del plano: éstas son fuerzas de ligadura directamente aplicadas. En un torno en equilibrio (*fig.* 32), las fuerzas exteriores son los pesos a levantar y la fuerza que se ejerce sobre la manivela; las fuerzas de ligadura son las reacciones del eje.

Fig. 31

Experiencia. Consideremos una barra graduada en equilibrio (*fig.* 33). La experiencia demuestra que, *sin desequilibrar* la barra, se puede substituir el peso de 4 kg que cuelga de la división 3 por un peso de 3 kg colgado en la división 4, o por un peso de 2 kg colgado de la división 6, al mismo lado del gancho. Es posible, por lo tanto, sin modificar el equilibrio de un sólido, substituir una fuerza por otra siempre que satisfaga las condiciones que se van a señalar.

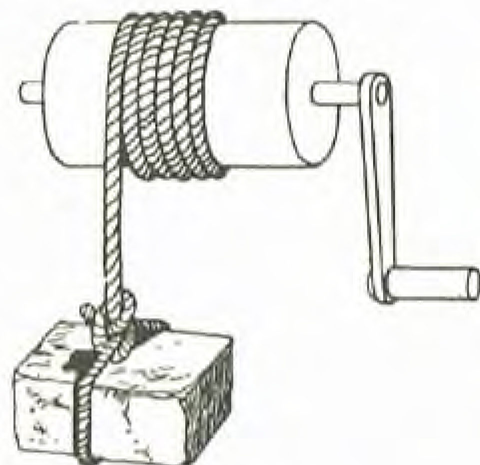


Fig. 32

Operaciones elementales. — *Se llaman* **operaciones elementales,** *las que pueden ser efectuadas sobre un sistema de fuerzas aplicadas a un sólido en equilibrio sin que se altere dicho equilibrio.*

Primera operación elemental. — En un sólido en reposo (*fig.* 34) el equilibrio no se alterará si se añaden o suprimen dos fuerzas directamente opuestas, es decir, dos fuerzas que tengan la misma dirección, igual intensidad y sentidos contrarios.

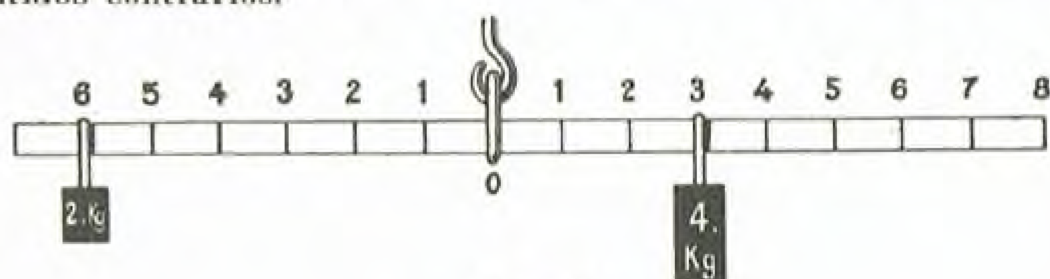


Fig. 33

En virtud de este principio, se ha podido prescindir de las fuerzas interiores, que son opuestas dos a dos. Las restantes operaciones elementales son consecuencias de la primera.

Segunda operación elemental. — Cuando está un sólido en reposo, se puede transportar el punto de aplicación de una fuerza a cualquier punto de su línea de acción o soporte, teniendo en cuenta que el nuevo punto de aplicación debe pertenecer al sólido o estar invariablemente ligado a él.

(Se dice más brevemente que se puede hacer deslizar la fuerza sobre su línea de acción o soporte).

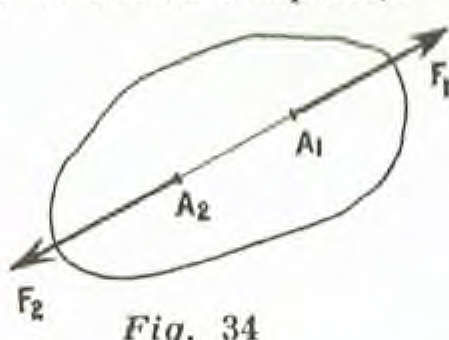


Fig. 34

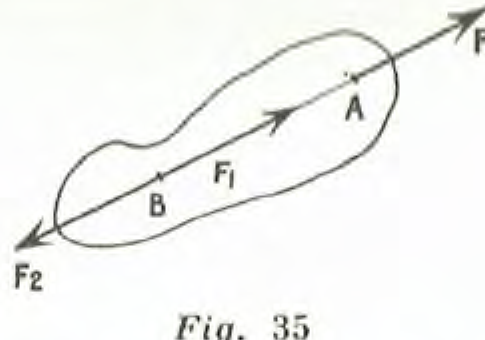


Fig. 35

Sea $\overrightarrow{AF}$ una fuerza aplicada en A (*fig.* 35). Basándose en la primera operación elemental, en un punto B de la línea de acción o soporte, se pueden aplicar dos fuerzas directamente opuestas, $\overrightarrow{BF_1}$ y $\overrightarrow{BF_2}$, que tengan la misma intensidad que $\overrightarrow{AF}$. Por una nueva aplicación de la primera operación elemental, se pueden suprimir las fuerzas $\overrightarrow{BF_2}$ y $\overrightarrow{AF}$. Queda, únicamente, la fuerza $\overrightarrow{BF_1}$. Por lo tanto, se puede llevar $\overrightarrow{AF}$ a $\overrightarrow{BF_1}$ sin que el equilibrio se altere.

Tercera operación elemental. — Si un sólido está en equilibrio, éste no se romperá si se substituyen varias fuerzas concurrentes aplicadas al sólido por su resultante (*fig.* 36). Recíprocamente, se puede substituir una fuerza aplicada a un sólido por varias fuerzas concurrentes cuya resultante sea la fuerza dada.



Fig. 36

Sean, por ejemplo, $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$, tres fuerzas aplicadas al sólido y cuyas líneas de acción o soportes concurren en un punto O. Basándose en la segunda operación elemental, se pueden aplicar las tres fuerzas al punto O. Si se aplica la estática del punto, podemos substituir las tres fuerzas concurrentes por su resultante. Por último, se puede hacer deslizar esta resultante sobre su soporte.

Empleo de las operaciones elementales para el estudio de los problemas de equilibrio. — Dado un sólido sometido a un sistema de fuerzas exteriores: por la aplicación repetida de las operaciones elementales, se va substituyendo el sistema dado por sistemas cada vez más simples. De esta forma se puede llegar a un sistema de dos fuerzas, y si éstas son directamente opuestas, el sólido estará en equilibrio.

La operación de substituir un sistema de fuerzas por otro más simple, se llama *reducir* el sistema dado. Vamos a estudiar los ejemplos de reducción más importantes.

Cuando se puede pasar de un sistema de fuerzas a otro por operaciones elementales, se dice que los sistemas son *equivalentes.*

Ejemplo. *Equilibrio de una figura plana, de peso despreciable, que está sometida a tres fuerzas no paralelas situadas en su plano.*

Se pueden substituir dos de estas fuerzas concurrentes por su resultante, y ésta debe ser directamente opuesta a la tercera fuerza para que exista equilibrio. Por lo tanto, las tres fuerzas deben ser concurrentes y se presenta de nuevo el caso del equilibrio de un punto sometido a la acción de tres fuerzas (v. p. 217).

Reducción de un sistema de fuerzas a tres fuerzas. — Se puede reducir todo sistema de fuerzas aplicadas a un sólido a tres fuerzas aplicadas en tres puntos dados del sólido, no situados en línea recta.

Sean A, B y C tres puntos no situados en línea recta (*fig.* 37), ligados invariablemente al sólido.

Si $\overrightarrow{MF}$ es una fuerza aplicada al sólido, y si M no está en el plano ABC, se puede descomponer $\overrightarrow{MF}$ en tres fuerzas que tengan por líneas de acción o soportes las rectas MA, MB y MC: sean $\overrightarrow{Mf_1}$, $\overrightarrow{Mf_2}$ y $\overrightarrow{Mf_3}$ esas tres fuerzas (tercera operación elemental). A continuación podemos hacer deslizar estas tres fuerzas sobre sus soportes trasladándolas a $\overrightarrow{Af'_1}$, $\overrightarrow{Bf'_2}$ y $\overrightarrow{Cf'_3}$ (segunda operación elemental).

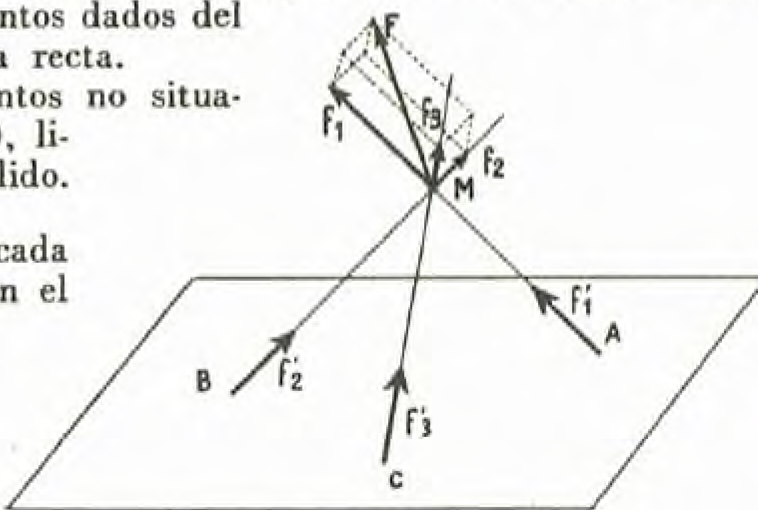


Fig. 37

Si M estuviera en el plano ABC, pero $\overrightarrow{MF}$ no estuviera en él, se comenzaría por hacer deslizar $\overrightarrow{MF}$ sobre su soporte hasta que tuviera su punto de aplicación fuera del plano, y estaríamos de nuevo en el caso anterior. Si $\overrightarrow{MF}$ se encontrara en el plano ABC (utilizando las rectas MA y MB, por ejemplo). se podría substituir $\overrightarrow{MF}$ por dos fuerzas que tuvieran por puntos de aplicación dos de los puntos A, B, C.

De esta forma se puede substituir cada fuerza del sistema por tres fuerzas que tengan por puntos de aplicación respectivamente los tres puntos A, B y C (una de ellas, o incluso dos, pueden ser nulas). Para terminar, se substituyen las fuerzas aplicadas en A por su resultante; igualmente se hace con las fuerzas aplicadas en B y en C. Así se hallan las tres fuerzas mencionadas en el enunciado.

Reducción de un sistema de fuerzas a dos fuerzas. — Se puede reducir todo sistema de fuerzas aplicadas a un sólido a dos fuerzas, de las cuales una esté aplicada en un punto dado del sólido.

Sea A el punto dado (*fig.* 38); se toman otros dos puntos cualesquiera B y C no alineados con A (y ligados al sólido). Aplicando el caso anterior, se pueden reducir las fuerzas aplicadas al sólido a tres fuerzas $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CQ}$, aplicadas, respectivamente, en A, B y C. El punto A y la línea de acción de $\overrightarrow{BP}$ determinan un plano. Asimismo, el punto A y la línea de acción de $\overrightarrow{CQ}$ determinan un segundo plano. La intersección de estos dos planos es una recta común a ambos y que pasa por A: sea xy esta recta. Tomemos un punto cualquiera D sobre la misma. Se descompone la fuerza $\overrightarrow{BP}$ en dos fuerzas, $\overrightarrow{Bf_1}$ y $\overrightarrow{Bg_1}$, según las direcciones AB y DB. Igualmente, la fuerza $\overrightarrow{CQ}$ se descompone en otras dos, $\overrightarrow{Cf_2}$ y $\overrightarrow{Cg_2}$, según las direcciones AC y CD. Por último, se hacen deslizar $\overrightarrow{Bf_1}$ y $\overrightarrow{Cf_2}$ llevándolas a $\overrightarrow{Af'_1}$ y $\overrightarrow{Af'_2}$, aplicadas en A, y $\overrightarrow{Bg_1}$ y $\overrightarrow{Cg_2}$ sobre sus líneas de acción llevándolas a $\overrightarrow{Og'_1}$ y $\overrightarrow{Og'_2}$, aplicadas en D. La resultante de las tres fuerzas $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{Af'_1}$ y $\overrightarrow{Af'_2}$ y la de las dos fuerzas $\overrightarrow{Dg'_1}$ y $\overrightarrow{Dg'_2}$ son las dos fuerzas a las que se reduce el sistema de fuerzas dado.

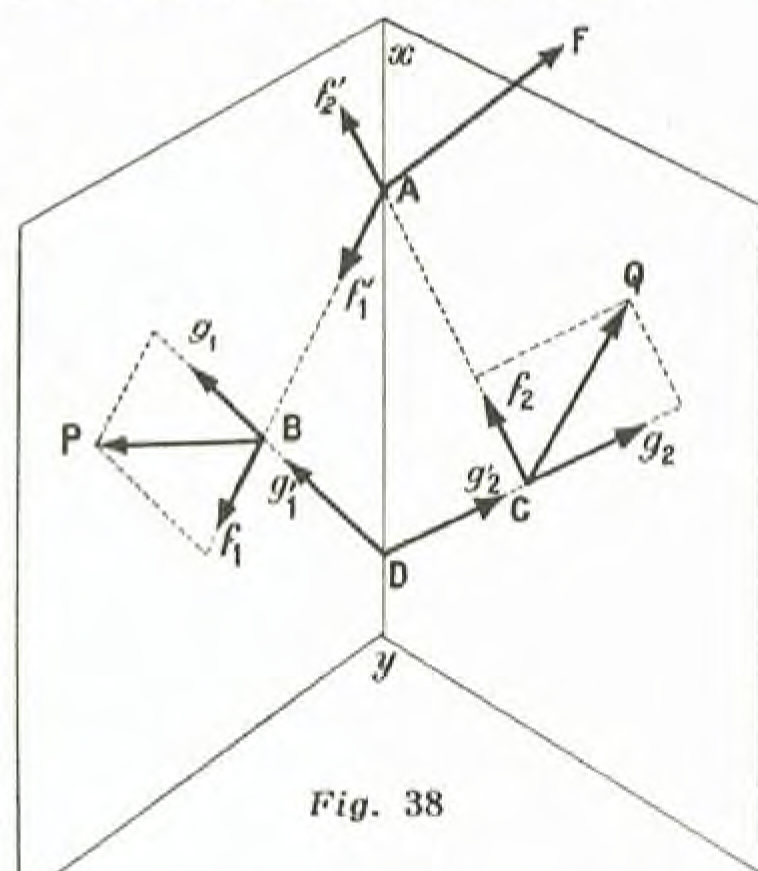


Fig. 38

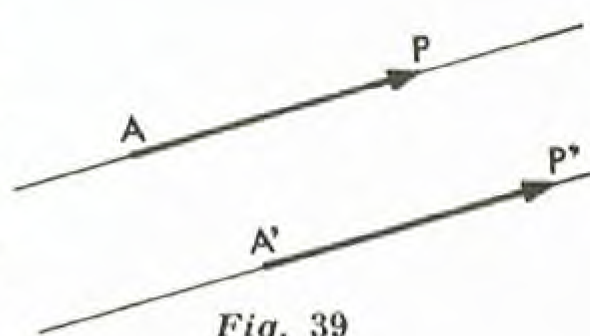


Fig. 39

Observación. Si esas dos fuerzas son directamente opuestas, el sólido estará en equilibrio.

DEFINICIÓN. *Se llama* **par de fuerzas** *el conjunto de dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y sentido contrario, siendo sus líneas de acción o soportes dos rectas distintas paralelas* (fig. 39).

Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y a un par. — Todo sistema de fuerzas aplicadas a un sólido se puede reducir a una fuerza aplicada en un punto dado del sólido, y a un par de fuerzas.

Sea A el punto dado (*fig.* 40); la reducción anterior nos permite substituir el sistema de fuerzas aplicadas al sólido por las dos fuerzas $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BQ}$. La primera operación elemental nos permite añadir al sistema dos fuerzas directamente opuestas $\overrightarrow{AQ_1}$ y $\overrightarrow{AQ_2}$, siendo AQ_1 equipolente a $\overrightarrow{BQ}$. Si se substituye $\overrightarrow{AQ_1}$ y $\overrightarrow{AF}$ por su resultante $\overrightarrow{AG}$, el sistema de fuerzas dado queda reducido a la fuerza $\overrightarrow{AG}$ y al par de fuerzas formado por $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{AQ_2}$.

Fig. 40

Composición de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido. — *Dadas dos fuerzas* $\overrightarrow{AF}$ *y* $\overrightarrow{BG}$, *paralelas y del mismo sentido, se les puede substituir por una fuerza única, paralela y del mismo sentido. La intensidad de esta fuerza es la suma de las intensidades de* $\overrightarrow{AF}$ *y* $\overrightarrow{BG}$. *Por último, esta fuerza tiene como punto de aplicación el punto* C *del segmento* AB *situado entre* A *y* B, *de forma que* CA · AF = = CB · BG: *esta fuerza única es la resultante de las fuerzas dadas y el punto* C *es el centro de las mismas.*

En efecto, se comienza por añadir al sistema dado dos fuerzas directamente opuestas $\overrightarrow{Af}$ y $\overrightarrow{Bf'}$ (primera operación elemental). Se substituyen $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{Af}$ por su resultante $\overrightarrow{AR}$. Igualmente se substituyen $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{Bf'}$ por su resultante $\overrightarrow{BT}$. Las líneas de acción de $\overrightarrow{AR}$ y $\overrightarrow{BT}$ se cortan en un punto O y sobre ellas se hacen deslizar $\overrightarrow{AR}$ y $\overrightarrow{BT}$, trasladándolas a $\overrightarrow{OR_1}$ y $\overrightarrow{OT_1}$. Se descompone $\overrightarrow{OR_1}$ en dos fuerzas $\overrightarrow{OF_1}$ y $\overrightarrow{Of_1}$, equipolentes respectivamente a $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{Af}$. Igualmente se descompone $\overrightarrow{OT_1}$ en dos fuerzas $\overrightarrow{OG_1}$ y $\overrightarrow{Of'_1}$, equipolentes a $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{Bf'}$, respectivamente. Las fuerzas $\overrightarrow{Of_1}$ y $\overrightarrow{Of'_1}$ opuestas directamente, se anulan. Las otras dos fuerzas $\overrightarrow{OG_1}$ y $\overrightarrow{OF_1}$, que tienen la misma línea de acción y son de igual sentido, se pueden substituir por su suma, que es una fuerza paralela a las fuerzas dadas, de igual sentido y de intensidad igual a la suma de las intensidades de las mismas. Por último, se hace deslizar la resultante hasta que su punto de aplicación quede en C, que es el punto en el que se cortan la línea de acción de la fuerza y el segmento AB. Así se obtiene la fuerza $\overrightarrow{CV}$, que es la *resultante* de las fuerzas dadas.

Vamos a precisar la posición del punto C (*fig.* 41): el punto C está situado entre A y B. Dado que los triángulos OCA y AFR son semejantes, resulta

$$\frac{CA}{Af} = \frac{OC}{AF}.$$

De donde CA × AF = OC × Af. Igualmente, los triángulos OCB y BGT son semejantes, por lo tanto,

Fig. 41

$$\frac{CB}{Bf'} = \frac{OC}{BG}.$$

De donde CB × BG = OC × Bf'

Como Af = Bf', se tiene, por último, que CA × AF = CB × BG.

Se puede expresar por la proporción $\dfrac{AF}{CB} = \dfrac{BG}{CA}$.

Ahora bien, si dos razones son iguales, lo son también a una tercera que tenga por numerador la suma de los numeradores, y por denominador la suma de los denominadores.

Por consiguiente,

$$\frac{AF}{CB} = \frac{BG}{CA} = \frac{CV}{AB}.$$

Si se substituyen las fuerzas F y G por fuerzas proporcionales, se obtiene el mismo punto C. También se obtiene este mismo punto C, si se hacen girar las fuerzas F y G un mismo ángulo. El punto C depende únicamente de la relación de las fuerzas F y G. El punto C divide al segmento AB en partes inversamente proporcionales a los valores absolutos de las fuerzas aplicadas en los extremos de dicho segmento.

OBSERVACIÓN. Si las dos fuerzas son iguales, la resultante es una fuerza doble aplicada en el punto medio del segmento. En el caso de dos caballos de fuerzas iguales que se enganchan, uno al costado del otro, de la barra de tiro de un carruaje, el esfuerzo de tracción, estando el gancho del atalaje a igual distancia de los ganchos correspondientes al primer caso de tracción, es el mismo que si estuvieran enganchados uno detrás de otro.

PROBLEMA. *Descomponer una fuerza en otras dos paralelas y del mismo sentido y cuyos puntos de aplicación estén situados a uno y otro lado del punto de aplicación de la fuerza dada.*

Sea una fuerza de intensidad 15 aplicada a un punto C (*fig.* 42) que se va a descomponer en dos fuerzas paralelas y del mismo sentido aplicadas en A y B, situados a un lado y otro del punto C sobre una misma recta y distantes de este punto 2 y 3 cm., respectivamente. Si se designan por F y F' las dos componentes, podemos escribir, aplicando el estudio hecho anteriormente, las siguientes relaciones:

Fig. 42

$$\frac{AF}{3} = \frac{BF'}{2} = \frac{15}{5} = 3.$$

De donde AF = 9 y BF' = 6.

Composición de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario. — Sean AF y BG dos fuerzas paralelas (*fig.* 43) y de sentido contrario que actúan sobre un sólido. Supongamos que la intensidad de $\overrightarrow{AF}$ es mayor que la de $\overrightarrow{BG}$. Se podría obtener la resultante por un procedimiento análogo al anterior, es decir, al seguido en el caso de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido. Se llega más rápidamente a la solución basándose en los resultados del estudio anterior.

Sea $\overrightarrow{BG'}$ una fuerza directamente opuesta a $\overrightarrow{BG}$. Busquemos una fuerza $\overrightarrow{CR}$ paralela a $\overrightarrow{AF}$, tal que la resultante de ésta y de la fuerza $\overrightarrow{BG'}$ sea, precisamente, la fuerza $\overrightarrow{AF}$. Su punto de aplicación C estará situado al otro lado de A con relación a B, y por aplicación de los resultados anteriores se puede escribir

Fig. 43

$$\frac{AF}{CB} = \frac{BG'}{CA}$$

Luego CA × AF = CB × BG'.

La intensidad de esta fuerza es $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BG}$.

Por lo tanto, el sistema formado por las fuerzas $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$ puede ser substituido por el que forman la tres fuerzas $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{BG'}$ y $\overrightarrow{BG}$. Como $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BG'}$ se anulan, resulta que se puede substituir las dos fuerzas $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$ por la única fuerza $\overrightarrow{CR}$.

$\overrightarrow{CR}$ es la resultante de $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$: C es el centro de las fuerzas paralelas, y, en razón inversa a los valores absolutos de las fuerzas aplicadas, divide, en un punto exterior el segmento AB.

OBSERVACIÓN. Si las dos fuerzas paralelas y de sentido contrario constituyen un par, no se pueden substituir por una resultante.

Coordenadas del centro de fuerzas paralelas. — Si se elige un sentido positivo para las fuerzas paralelas, el centro C de las mismas viene dado por la relación

$$\overrightarrow{CA} \cdot P + \overrightarrow{CB} \cdot Q = 0.$$

Si se proyectan los tres puntos A, B y C en *a*, *b* y *c*, sobre un eje orientado cualquiera, como las proyecciones conservan las relaciones en magnitud y signo, se tiene

$$\overrightarrow{ca} \cdot P + \overrightarrow{cb} \cdot Q = 0.$$

Si X es la abscisa de *c*, x_a y x_b las abscisas de A y B, se tiene

$$P(x_a - X) + Q(x_b - X) = 0, \qquad X = \frac{Px_a + Qx_b}{P + Q}$$

Se tendrá, igualmente, para las otras coordenadas Y y Z del punto C (en un sistema de coordenadas cartesianas):

$$Y = \frac{Py_a + Qy_b}{P + Q}, \qquad Z = \frac{Pz_a + Qz_b}{P + Q}.$$

Centro de *n* fuerzas paralelas. — Sean *n* fuerzas paralelas, aplicadas a los puntos A_1, A_2, ..., A_n (ligados al sólido), y, habiéndose elegido un sentido positivo sobre su dirección, sean P_1, P_2, ..., P_n los valores algebraicos de esas fuerzas.

Se substituyen las dos fuerzas P_1 y P_2 por su resultante: ésta existirá si $P_1 + P_2$ es diferente de cero. Será una fuerza paralela a las dadas y de valor algebraico $P_1 + P_2$: estará aplicada en el centro O_1 de las dos fuerzas P_1 y P_2. Ahora, substituyamos la resultante de P_1 y P_2 y P_3 por su resultante: existirá si $P_1 + P_2 + P_3$ es diferente de cero. Será una fuerza paralela a las dadas y de valor algebraico $P_1 + P_2 + P_3$: su punto de aplicación será el centro O_2 de las fuerzas paralelas $P_1 + P_2$ y P_3. Así se continúa hasta que se haya operado con todas las fuerzas dadas. Si $P_1 + P_2, \ldots, + P_n \neq 0$, se obtendrá una fuerza única de valor algebraico $P_1 + P_2, \ldots, P_n$, aplicada en el punto C. El punto C es el *centro de las fuerzas paralelas dadas.*

Busquemos las coordenadas de los puntos sucesivos $O_1, O_2, O_3, \ldots$, C. Si las coordenadas de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots, x_n, y_n, z_n$, las coordenadas de O_1 serán

$$X_1 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}, \quad Y_1 = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}, \quad Z_1 = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}.$$

Las de O_2, obtenidas por el mismo procedimiento, son

$$X_2 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad Y_2 = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3},$$

$$Z_2 = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Continuando así, se obtienen para las coordenadas de C:

$$X = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n},$$

$$Y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n},$$

$$Z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots + P_n z_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}.$$

Estas coordenadas nos demuestran: 1°, que el punto C no depende de la dirección de las fuerzas; 2°, que se pueden substituir las fuerzas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, por fuerzas paralelas; 3°, que la posición del punto C es independiente del orden en que se vayan componiendo las fuerzas.

EJEMPLO. La resultante de tres fuerzas iguales, paralelas y del mismo sentido aplicadas en tres puntos no alineados A, B y C, es una fuerza paralela y del mismo sentido y de intensidad tres veces mayor que la de las fuerzas dadas, teniendo su punto de aplicación en el de concurrencia de las medianas del triángulo formado por A, B y C.

Aplicación al estudio del equilibrio. — Si un cuerpo está sometido a un conjunto de fuerzas, todas ellas paralelas, la condición necesaria y suficiente para que esté en equilibrio, es que la resultante de las fuerzas dirigidas en un cierto sentido y la de las que estén dirigidas en sentido contrario, sean directamente opuestas, es decir, que tengan la misma línea de acción o soporte e igual intensidad.

En los problemas más complicados, para estudiar el equilibrio, se substituyen las fuerzas paralelas que intervengan por su resultante.

Aplicación de las operaciones elementales a los pares de fuerza. — Se llama *brazo* del par la distancia entre las direcciones de las dos fuerzas. Hay que hacer notar, en primer lugar, que se puede hacer deslizar las fuerzas del par sobre sus líneas de acción: para todos los pares equivalentes así obtenidos, el producto de la intensidad de la fuerza por el brazo del par es constante.

Veremos cómo, por las operaciones elementales, se puede pasar de un par a otro par equivalente.

1° Se puede someter un par a una traslación (*fig.* 44). Sea el par $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$. Vamos a demostrar que es equivalente al par $\overrightarrow{A'P'}$, $\overrightarrow{B'Q'}$, deducido del dado por una traslación AA'. La primera operación elemental (p. 220) nos permite aplicar en A' dos fuerzas directamente opuestas $\overrightarrow{A'P'}$ y $\overrightarrow{A'P_1}$ (siendo $\overrightarrow{A'P'}$ equipolente a $\overrightarrow{AP}$) y en B' dos fuerzas también directamente opuestas $\overrightarrow{B'Q'}$ y $\overrightarrow{B'Q_1}$ (siendo $\overrightarrow{B'Q'}$ equipolente a $\overrightarrow{BQ}$). Los puntos A, B, A' y B' son los vértices de un paralelogramo. Se pueden substituir las dos fuerzas $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{B'Q_1}$ por su resultante $2\overrightarrow{AP}$, aplicada en O, punto medio de AB', y las dos fuerzas $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{A'P_1}$ por su resultante $2\overrightarrow{BQ}$ aplicada en el mismo punto O. Siendo estas dos fuerzas resultantes directamente opuestas, se anulan. Por lo tanto, mediante operaciones elementales, se puede pasar del par $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ al par equivalente $\overrightarrow{A'P'}$, $\overrightarrow{B'Q'}$ (*fig.* 45).

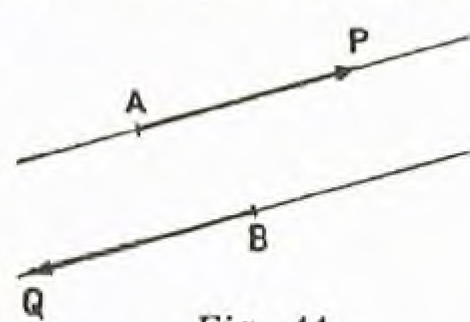


Fig. 44

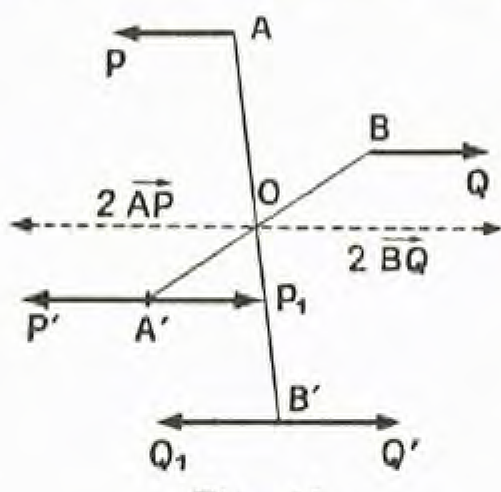


Fig. 45

Observemos que para estos dos pares, el producto de la intensidad de la fuerza por el brazo del par es idéntico.

2° Se puede someter un par a una rotación en su plano alrededor del punto medio del brazo. Se comienza por hacer deslizar las fuerzas sobre sus líneas de acción, de forma que AB sea perpendicular a ellas. Tracemos el diámetro AB y sean A' y B' dos puntos diametralmente opuestos. En cada uno de los puntos A' y B' (*fig.* 46) apliquemos las fuerzas $\overrightarrow{A'P_1}$, $\overrightarrow{A'P'}$, $\overrightarrow{B'Q_1}$ y $\overrightarrow{B'Q'}$, de igual intensidad que las fuerzas del par y tangentes al círculo. Ahora bien, las fuerzas $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{A'P_1}$ tienen una resultante directamente opuesta a la resultante de las fuerzas $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{B'Q_1}$, por lo tanto se anulan y nos queda el par $\overrightarrow{A'P'}$, $\overrightarrow{B'Q'}$. Se pasa, pues, de uno a otro por una rotación. Observemos aquí también que, para los dos pares, el producto de la intensidad de la fuerza por el brazo del par es constante.

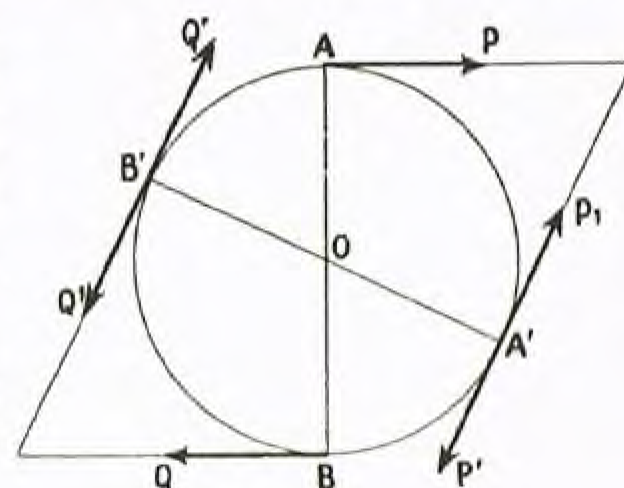


Fig. 46

3° En el plano del par, se puede hacer variar a la vez la intensidad de las fuerzas y el brazo del par siempre y cuando su producto quede invariable.

Supongamos también que la recta AB, que une los puntos de aplicación de las fuerzas, fuese perpendicular a ellas (*fig.* 47). Sea, por ejemplo, B' un punto de AB, más allá de B. Apliquemos en A dos fuerzas directamente opuestas, $\overrightarrow{AS_1}$ y $\overrightarrow{AS'}$, sobre la recta AP, resultando sus intensidades de la relación $\overrightarrow{AS_1} \cdot B'A = \overrightarrow{BQ} \cdot B'B$. En B' aplicamos dos fuerzas directamente opuestas, $\overrightarrow{B'_1Q_1}$ y $\overrightarrow{B'Q'}$ (paralelas a las fuerzas del par) y cuyas intensidades sean la diferencia de las intensidades de $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AS_1}$. Por construcción, $\overrightarrow{B'Q'}$ es precisamente la resultante de las dos fuerzas paralelas $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{AS'}$; se pueden suprimir, por lo tanto, las tres fuerzas $\overrightarrow{AS'}$, $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{B'Q_1}$, ya que esta última es directamente opuesta a la resultante de las dos primeras. Quedan ahora, la fuerza $\overrightarrow{B'Q'}$, aplicada en B', y en A las dos fuerzas $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AS_1}$, cuya resultante forma precisamente un par con B'Q'. Este par es equivalente al par dado.

Volvamos a la expresión $AS_1 \cdot B'A = BQ \cdot B'B$. La podemos poner de la siguiente forma: $(AP - B'Q')\ B'A = AP \cdot B'B$.

De donde $AP\ (B'A - B'B) = AB \cdot AP = B'Q' \cdot AB'$. Que nos demuestra que el producto de la intensidad por el brazo del par es igual para los dos pares.

4° Si a las dos fuerzas de un par, se les añade dos fuerzas directamente opuestas, se obtiene un par equivalente: el producto de la intensidad de la fuerza por el brazo es, en efecto, constante.

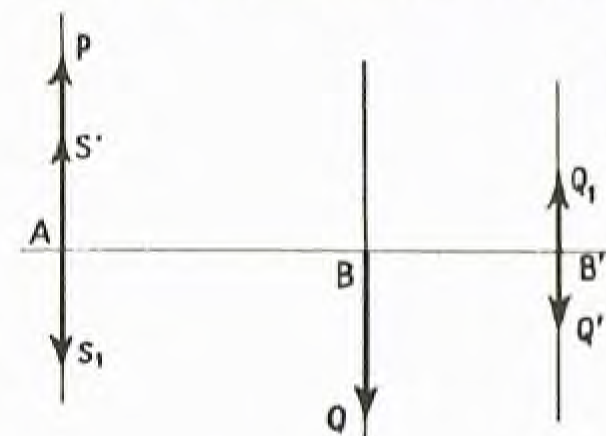


Fig. 47

Por medio de las operaciones elementales, se pueden hacer deslizar las fuerzas del par y las fuerzas opuestas hasta lograr que tengan dos a dos el mismo origen. Sea el par formado por $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$ (*fig.* 48). Se añaden a este par las dos fuerzas $\overrightarrow{AU}$ y $\overrightarrow{BV}$ directamente opuestas. Las resultantes $\overrightarrow{AP_1}$, de $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AU}$, y $\overrightarrow{BQ_1}$, de $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{BV}$, forman un par equivalente al primero. Los dos paralelogramos APBQ y AP_1BQ_1 tienen igual superficie; por consiguiente, el producto de la intensidad por el brazo, que es igual al área del paralelogramo, es constante.

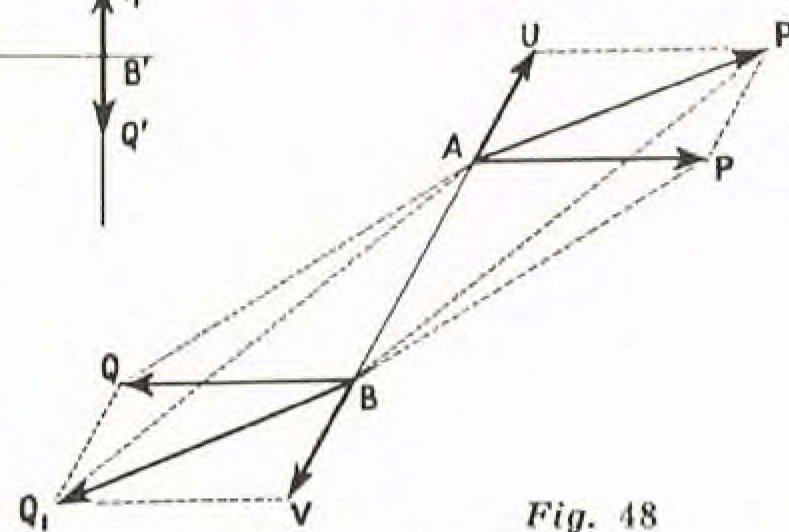


Fig. 48

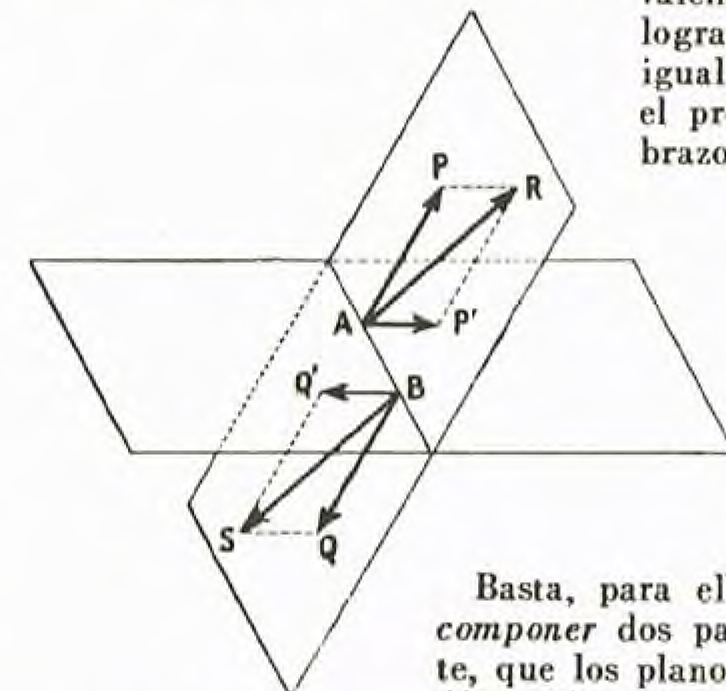


Fig. 49

Composición de pares. — Un sistema de varios pares es equivalente a un solo par: es decir, si se dan varios pares, por medio de las operaciones elementales, se pueden reducir a uno solo.

Basta, para ello, demostrar cómo se pueden *componer* dos pares. Supongamos, primeramente, que los planos de los pares no son paralelos (*fig.* 49); por lo tanto se cortan, y sean A y B dos puntos cualesquiera tomados sobre su inter-

sección. Mediante operaciones elementales, se puede transormar cada par dentro de su plano, de forma que tengan por brazo AB. Sean $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$ las fuerzas del primer par, y $\overrightarrow{AP'}$ y $\overrightarrow{BQ'}$ las del segundo. $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AP'}$ tienen una resultante $\overrightarrow{AR}$, y $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{BQ'}$ tienen otra resultante $\overrightarrow{BS}$; $\overrightarrow{AR}$ y $\overrightarrow{BS}$ forman un par.

Si los planos de los pares son paralelos, hay que empezar por trasladar los pares a un mismo plano. Mediante las operaciones elementales, se pueden trasladar los dos pares de forma que tengan por brazo un segmento cualquiera, y los dos pares tendrán por resultante un par.

Momentos. Condiciones analíticas del equilibrio

Las operaciones elementales nos proporcionan un primer medio para estudiar el equilibrio de los sólidos; pero este procedimiento geométrico, teóricamente fácil, no lo es, en general, en las aplicaciones y además impide el empleo del cálculo. La utilización de los *momentos* nos permite tratar los problemas de equilibrio de los sólidos por medio del cálculo, igual que los de la geometría analítica.

En el estudio de las fuerzas paralelas nos hemos encontrado, en las de los pares, con el producto de una intensidad por una distancia. (Históricamente, en la Antigüedad griega, apareció este producto en el estudio de la palanca.) Si en el plano π, se consideran los dos pares, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$ por un lado, y por otro $\overrightarrow{AP'}$, $\overrightarrow{BQ'}$, formados por dos fuerzas opuestas respectivamente, el producto de la intensidad de la fuerza por el brazo es el mismo para los dos pares. Como es preciso establecer una diferencia entre ellos, ha sido necesario afectar de un signo este producto y representarlo por un vector, que se llama *momento* (*fig.* 50). Vamos a precisar las definiciones y propiedades de los momentos.

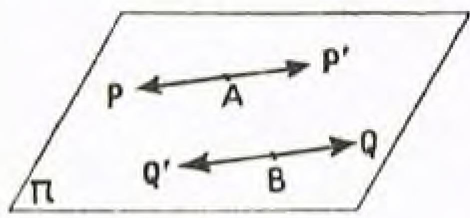


Fig. 50

Sentido de rotación alrededor de un eje. — Dado un eje, se sitúa un observador sobre él de forma que el sentido de pies a cabeza sea el sentido positivo. Se llama sentido positivo o directo, para las rotaciones alrededor de este eje, el de las rotaciones dirigidas de derecha a izquierda para el observador que mira el movimiento. El sentido contrario es el negativo o inverso.

Disposición relativa de dos vectores. — Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ dos vectores (*fig.* 51) no situados en el mismo plano. Se dice que están en disposición directa cuando un observador colocado sobre uno de ellos, en el sentido del vector, vería un móvil, que recorriese el otro vector desde su origen al extremo, desplazarse en el sentido directo. Hay reciprocidad entre ambos vectores.

DEFINICIÓN. *Se llama* **momento de un vector** $\overrightarrow{AB}$ **con relación a un punto** O, *el vector* $\overrightarrow{OG}$ (fig. 52) *que tiene por origen* O, *por módulo el producto del módulo del vector* $\overrightarrow{AB}$ *por la distancia del punto* O

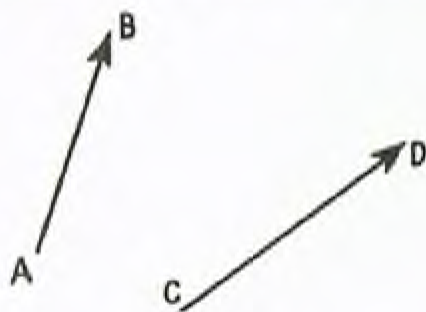


Fig. 51

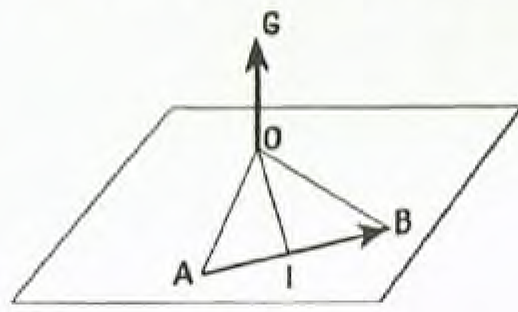


Fig. 52

a la dirección del vector, por línea de acción o soporte la perpendicular al plano OAB, *estando en disposición directa con relación al vector* $\overrightarrow{AB}$.

OBSERVACIÓN. El módulo o medida del vector-momento $\overrightarrow{OG}$ es el doble del área del triángulo OAB.

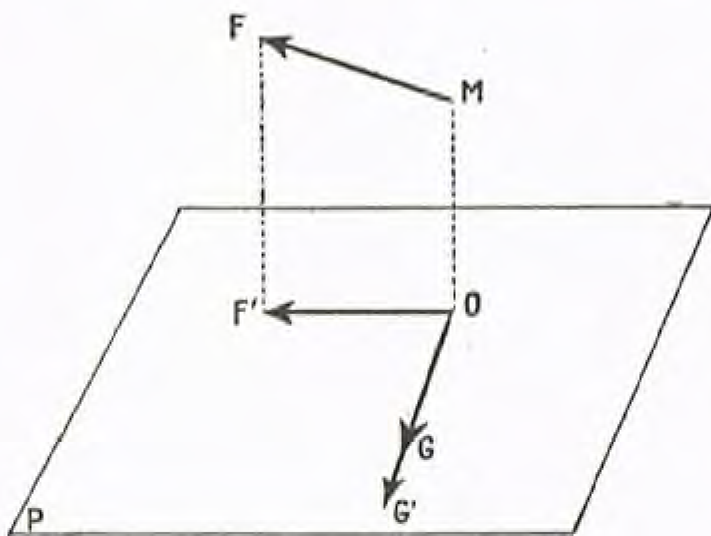


Fig. 53

CONSECUENCIAS. 1° Dos vectores equivalentes (es decir, iguales, del mismo sentido y dirección) tienen igual momento con relación a un punto cualquiera. Si se hace deslizar un vector sobre su soporte, su momento no cambia. Si, asimismo, el origen del momento se desplaza sobre una paralela a la dirección del vector, se obtienen momentos equipolentes todos ellos entre sí.

2° Dos vectores directamente opuestos tienen momentos directamente opuestos con relación a un punto cualquiera.

3° El momento de un vector con relación a un punto es nulo cuando el vector es nulo o cuando la línea de acción o soporte pasa por dicho punto.

Teorema de Varignon. — *El momento con relación a un punto* O *de la resultante de varios vectores (o fuerzas) aplicados a un mismo punto, es la resultante de los momentos con relación al punto* O, *de esos diferentes vectores (o fuerzas).*

Para demostrar este teorema fácilmente, vamos a señalar un procedimiento para poder construir el momento de un vector. Sea el vector $\overrightarrow{MF}$: unamos O y M (*fig.* 53). Siendo el momento perpendicular al plano OMF, lo será también a OM contenido en el plano, y por lo tanto estará situado en el plano P que pasa por O y es perpendicular a OM. Se proyecta el vector $\overrightarrow{MF}$ sobre el plano P; sea $\overrightarrow{OF'}$ su proyección. Se hace girar el vector $\overrightarrow{OF'}$ un ángulo recto alrededor de OM y en el sentido positivo, siendo éste en OM la dirección de O a M. Sea $\overrightarrow{OG'}$ el vector así obtenido. Para finalizar, se construye sobre el vector $\overrightarrow{OG'}$ el $\overrightarrow{OG}$, cuyo módulo es el producto del módulo $\overrightarrow{OG}$ por la distancia de O a M.

Hagamos ahora la demostración para el caso de dos vectores. Sean $\overrightarrow{MF_1}$ y $\overrightarrow{MF_2}$ estos dos vectores (*fig.* 54) aplicados en un mismo punto A y que tienen por resultante $\overrightarrow{MR}$. Sigamos la construcción anterior. La proyección $\overrightarrow{OR'}$ de $\overrightarrow{MR}$ es la resultante de las proyecciones $\overrightarrow{OF'_1}$ y $\overrightarrow{OF'_2}$ de los dos vectores $\overrightarrow{MF_1}$ y $\overrightarrow{MF_2}$, puesto que $OF'_2R'F'_1$ es un paralelogramo. Haciendo girar a este paralelogramo un ángulo recto alrededor del eje OM, obtenemos el paralelogramo $OG'_1\Gamma'G'_2$; la homotecia de centro O y razón OM nos da por último el paralelogramo $OG_1\Gamma G_2$; $\overrightarrow{O\Gamma}$, diagonal del paralelogramo, es la resultante de $\overrightarrow{OG_1}$ y $\overrightarrow{OG_2}$. Ahora bien, resulta por construcción que $\overrightarrow{OG_1}$ es el momento de $\overrightarrow{MF_1}$, que $\overrightarrow{OG_2}$ es el momento de $\overrightarrow{MF_2}$ y que $\overrightarrow{O\Gamma}$ es el momento de la resultante $\overrightarrow{MR}$. Por lo tanto, el momento $\overrightarrow{O\Gamma}$ de la resultante $\overrightarrow{MR}$ es la resultante de los momentos $\overrightarrow{OG_1}$ y $\overrightarrow{OG_2}$ de los vectores $\overrightarrow{MF_1}$ y $\overrightarrow{MF_2}$.

Fig. 54

En el caso de varios vectores, la demostración es similar: la proyección de la resultante de varios vectores es, en efecto, la resultante de las proyecciones de los mismos. A través del procedimiento seguido en la construcción de los momentos, la resultante de los vectores obtenidos es al mismo tiempo el vector que se deduce de la resultante de los vectores dados siguiendo la misma construcción.

DEFINICIÓN. *El momento de un vector* $\overrightarrow{AB}$ *con relación a un eje es la proyección* $\overrightarrow{Og}$ *sobre este eje del momento* $\overrightarrow{OG}$ *del vector* $\overrightarrow{AB}$ *con relación a un punto cualquiera del eje.*

TEOREMA. *El momento* $\overrightarrow{Og}$ *de un vector* $\overrightarrow{AB}$ *con relación a un eje* xx' *es el momento con relación al punto* O *de la proyección* $\overrightarrow{ab}$ *del vector* $\overrightarrow{AB}$ *sobre el plano que pasa por* O *y es perpendicular a* xx'.

Fig. 55

Sea α el ángulo que forman el plano OAB y el plano P que pasa por O y es perpendicular a xx' (*fig.* 55). Como $\overrightarrow{OG}$ y $\overrightarrow{Og}$ son respectivamente perpendiculares a los planos OAB y O*ab*, el ángulo agudo que forman $\overrightarrow{OG}$ y la recta xx' es α. Por lo tanto, por una parte se tiene:

$$\text{área } Oab = (\text{área } OAB)\cos\alpha, \text{ y por otra, } \overrightarrow{Og} = \overrightarrow{OG}\cdot\cos\alpha.$$

Se ve así que $\overrightarrow{Og}$ tiene el mismo valor absoluto que el momento de $\overrightarrow{ab}$. Como se verifica que $\overrightarrow{Og}$ está en disposición directa con relación a $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{Og}$ es el momento de $\overrightarrow{ab}$ con relación a O.

CONSECUENCIAS. 1° El valor algebraico del momento $\overrightarrow{Og'}$ de un vector $\overrightarrow{AB}$ con relación a un eje es constante, cualquiera que sea el punto O elegido del eje.

En efecto, si O se desplaza, el plano P también lo hace y la figura formada por $\overrightarrow{Og}$ y $\overrightarrow{ab}$ sufre una traslación.

2° Para que el momento de un vector con relación a un eje sea nulo, es preciso y suficiente que el vector sea nulo o que esté en un mismo plano que el eje, es decir, que su línea de acción o soporte corte el eje o le sea paralelo.

3° *Consecuencia del teorema de Varignon.* Si varios vectores son concurrentes, el valor algebraico del momento de la resultante con relación a un eje es la *suma algebraica* de los valores algebraicos de los momentos de los vectores dados con relación a este eje.

Expresión analítica de las proyecciones sobre tres ejes de coordenadas (rectangulares) del momento de un vector con relación al origen de coordenadas. — Sea un sistema de tres ejes de coordenadas rectangulares (*fig.* 56). Un vector $\overrightarrow{MF}$ queda definido en este sistema de coordenadas por las coordenadas x, y, z, de su origen M y por los valores algebraicos X, Y, Z de sus proyecciones sobre los ejes. Este vector $\overrightarrow{MF}$ tiene un momento $\overrightarrow{OG}$ con relación al origen O de coordenadas: nos proponemos calcular las proyecciones de este vector $\overrightarrow{OG}$ sobre los ejes, que son los momentos del vector $\overrightarrow{MF}$ con relación a los tres ejes.

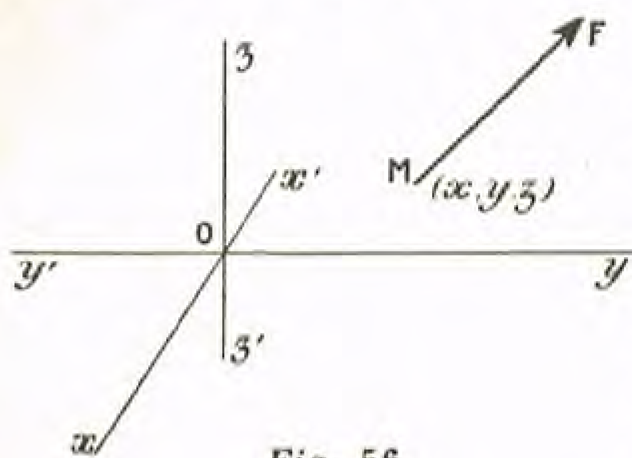


Fig. 56

Supongamos, en un principio, que el vector $\overrightarrow{MF}$ sea paralelo al eje Oz (*fig.* 57) y sea H la proyección de M sobre el plano xOy, y A y B las proyecciones de H sobre los ejes Ox y Oy. El momento del vector $\overrightarrow{MF}$ con relación a la recta Ox es el momento de esta misma fuerza con relación al punto A de esta recta. Su valor absoluto es el doble del área del triángulo AMF, que tiene por base $MF = |Z|$ y por altura $AH = |y|$. El valor absoluto del momento de $\overrightarrow{MF}$ con relación a A es por lo tanto $|yZ|$. Examinando todos los casos posibles diferentes y llamando L al valor algebraico del momento de $\overrightarrow{MF}$ con relación al eje xx', se obtiene $L = yZ$.

Fig. 57

El momento del vector $\overrightarrow{MF}$ con relación al eje $y'y$ es el mismo que el momento de este vector con relación al punto B del eje: su valor absoluto, que es el doble del área del triángulo BMF, es $|xZ|$. Examinando todos los casos posibles, se obtiene que el valor algebraico del momento del vector $\overrightarrow{MF}$ con relación al eje $y'y$ es $M = -xZ$.

En resumen, los momentos del vector $\overrightarrow{MF}$, paralelo a $z'z$, con relación a los tres ejes, son:

$$L = yZ, \qquad M = -xZ, \qquad N = 0.$$

Considerando así mismo un vector paralelo al eje de las x y de valor algebraico X, los valores algebraicos de sus momentos, con relación a los tres ejes, son

$$L = 0, \qquad M = zX, \qquad N = -yX.$$

Por último, los valores algebraicos de los momentos, con relación a los tres ejes, de un vector paralelo al eje de las y, de valor algebraico Y, son

$$L = -zY, \qquad M = 0, \qquad N = xY.$$

Consideremos, en fin, un vector cualquiera $\overrightarrow{MF}$, cuyas proyecciones sobre los ejes tengan por valores algebraicos X, Y, Z (siendo las coordenadas del origen x, y, z). El vector $\overrightarrow{MF}$ puede ser considerado como la resultante de tres vectores paralelos a los ejes y de magnitudes algebraicas X, Y, Z. Como consecuencia del teorema de Varignon, el valor algebraico de las proyecciones del momento del vector $\overrightarrow{MF}$, con relación al punto O, es la suma algebraica de los valores algebraicos de los momentos de las componentes X, Y, Z, con relación a los tres ejes. Se obtiene así

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

Cambio de origen para el momento de un vector. — Dado un vector $\overrightarrow{MF}$, nos proponemos establecer la relación que existe entre los momentos de este vector con relación a dos puntos O y O_1.

TEOREMA. *El momento de un vector* $\overrightarrow{MF}$, *con relación al punto* O_1, *es la resultante de un vector equipolente al momento de* $\overrightarrow{MF}$ *con relación a* O, *y del momento, con relación a* O_1, *del vector* $\overrightarrow{OF'}$ *equipolente a* $\overrightarrow{MF'}$ *que tenga por origen* O.

Vamos a utilizar fórmulas. Consideremos O y O_1 como los orígenes de dos sistemas de ejes coordenados rectangulares, paralelos y con los mismos valores. Los valores algebraicos de las proyecciones del vector $\overrightarrow{MF}$ sobre los ejes paralelos son idénticos: sean X, Y, Z esos valores algebraicos. Sean x, y, z, las coordenadas de M en el sistema de origen O; x_1, y_1, z_1 las coordenadas de M en el sistema de origen O_1; x_0, y_0, z_0 las coordenadas del punto O en el sistema de origen O_1. Se tiene $x_1 = x_0 + x$, $y_1 = y_0 + y$, $z_1 = z_0 + z$.

Si L_1, M_1, N_1 son las proyecciones del momento del vector $\overrightarrow{MF}$ sobre los tres ejes, se tiene

$$L_1 = y_1Z - z_1Y, \qquad M_1 = z_1X - x_1Z, \qquad N_1 = x_1Y - y_1X.$$

Substituyendo x_1, y_1, z_1 por sus valores, se llega a:

$$L_1 = (yZ - zY) + (y_0Z - z_0Y), \quad M_1 = (zX - xZ) + (z_0X - x_0Z),$$
$$N_1 = (xY - yX) + (x_0Y - y_0X).$$

Estas fórmulas nos demuestran que el momento $\overrightarrow{O_1G_1}$ es la resultante de un vector equipolente a $\overrightarrow{OG}$ (aquel cuyas proyecciones son $yZ - zY$, $zX - xZ$ y $xY - yX$) y del momento con relación a O_1 de un vector equipolente a $\overrightarrow{MF}$ y de origen O (aquel cuyas proyecciones son $y_0Z - z_0Y$, $z_0X - x_0Z$ y $x_0Y - y_0X$).

Sistema de vectores. Resultante general. Momento resultante. — Sean n vectores $\overrightarrow{M_1F_1}$, $\overrightarrow{M_2F_2}$, ..., $\overrightarrow{M_nF_n}$. Sea O un punto cualquiera. Se considera que los vectores $\overrightarrow{O_1F'_1}$, $\overrightarrow{O_2F'_2}$, ..., $\overrightarrow{O_nF'_n}$ de origen O son respectivamente equipolentes a los n vectores del sistema. Estos vectores tienen una resultante $\overrightarrow{OR}$, que es la *resultante general* (o de traslación) del sistema relativo a O.

Sean $\overrightarrow{OG_1}$, $\overrightarrow{OG_2}$, ..., $\overrightarrow{OG_n}$ los momentos de las n fuerzas consideradas. La resultante $\overrightarrow{OG}$ de estos vectores $\overrightarrow{OG_1}$, $\overrightarrow{OG_2}$, ..., $\overrightarrow{OG_n}$ es el *momento resultante* del sistema con relación a O.

Expresiones analíticas de la resultante general y del momento resultante con relación al origen O de coordenadas. — Si x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_n, y_n, z_n son las coordenadas de los orígenes de los vectores $\overrightarrow{M_1F_1}$, $\overrightarrow{M_2F_2}$, ..., y si X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; ...; $X_n, Y_n\ Z_n$ son las proyecciones de esos vectores, las proyecciones de la resultante general y del momento resultante con relación al origen sobre los tres ejes son:

$$\text{Resultante general}\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \Sigma X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \Sigma Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \Sigma Z_n; \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{Momento}\\ \text{resultante}\end{matrix}\begin{cases} L = (y_1Z_1 - z_1Y_1) + (y_2Z_2 - z_2Y_2) \\ \quad + \ldots + (y_nZ_n - z_nY_n) = \Sigma\ (y_nZ_n - z_nY_n), \\ M = (z_1X_1 - x_1Z_1) + (z_2X_2 - x_2Z_2) \\ \quad + \ldots + (z_nX_n - x_nZ_n) = \Sigma\ (z_nX_n - x_nZ_n), \\ N = (x_1Y_1 - y_1X_1) + (x_2Y_2 - y_2X_2) \\ \quad + \ldots + (x_nY_n - y_nX_n) = \Sigma\ (x_nY_n - y_nX_n). \end{cases}$$

Nota: La letra griega mayúscula Σ indica, bajo una forma abreviada, una suma que comprende todos los valores del índice.)

Cambio de origen. — La resultante general no depende del punto elegido como origen: cualquiera que fuere el origen, se obtiene siempre un vector cuyas proyecciones son constantes, es decir, un vector equipolente al obtenido para un punto determinado O.

Por lo tanto, aplicando el cambio de origen y el teorema de Varignon para los momentos, se deduce que *el momento resultante de un sistema de vectores con relación a un punto O' es la resultante de dos vectores, uno de ellos equipolente al momento resultante del sistema con relación al punto O y el otro el momento con relación al punto O' de la resultante general relativa al punto O del sistema considerado.*

Aplicación a los pares. — La resultante general de un par es nula. De ello se deduce que el momento resultante de un par es independiente del origen del momento: por eso se puede hablar del momento de un par. Si se toma el origen del momento sobre uno de los vectores, se obtiene que el valor absoluto del momento es igual al producto del vector por el brazo del par.

OBSERVACIÓN. 1° Si el sistema se limita a un vector, la resultante general (que es equipolente a ese vector) y el momento resultante son perpendiculares.

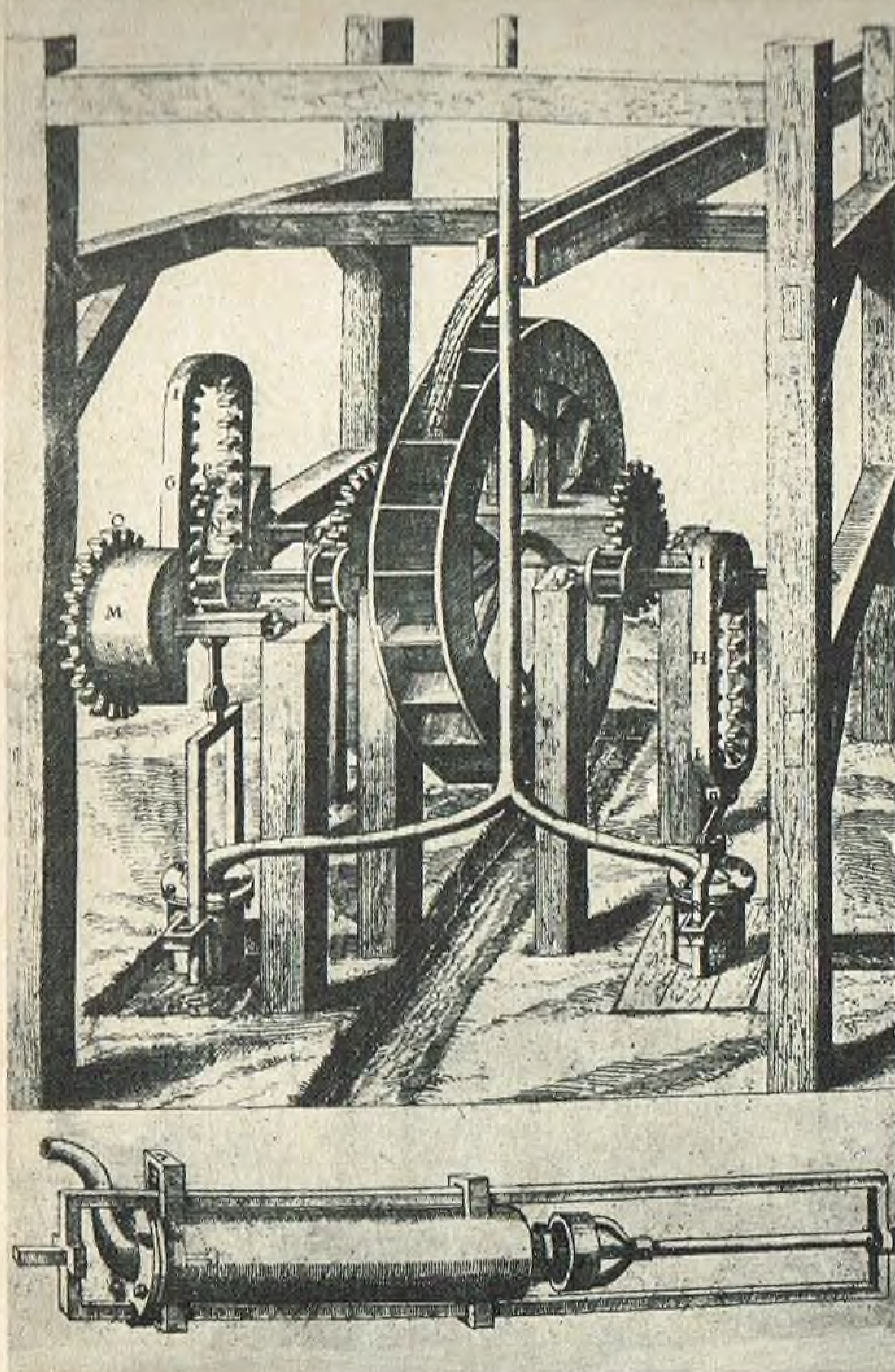
2° Si la resultante general y el momento resultante son nulos con relación a un punto, serán nulos con relación a cualquier otro punto del espacio. Esto ocurre cuando el sistema de vectores se compone de dos vectores directamente opuestos. Recíprocamente, consideremos un sistema de dos vectores cuya resultante general es nula (los dos vectores tienen la misma intensidad y están dirigidos en sentido opuesto). Si su momento resultante es nulo, se deduce que ambos vectores tienen la misma línea de acción o soporte. Luego si un sistema de vectores tiene su resultante general y su momento resultante nulos, este sistema estará formado por dos vectores directamente opuestos.

Vuelta a las operaciones elementales. — TEOREMA MUY IMPORTANTE. *Dos sistemas de vectores (o de fuerzas) equivalentes tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante. Recíprocamente, dos sistemas de vectores que tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante son equivalentes.*

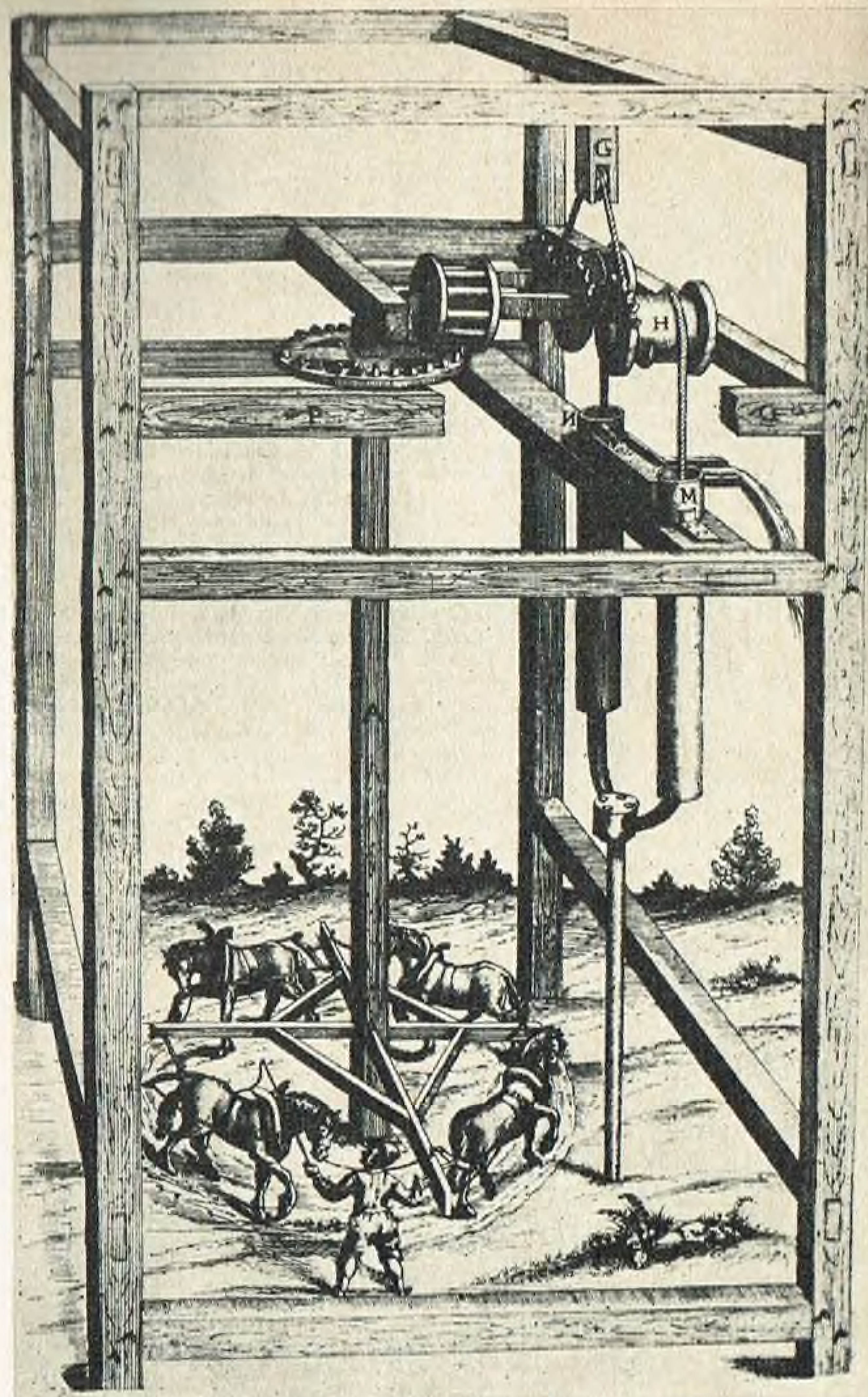
Recordemos que dos sistemas de vectores (o de fuerzas) son equivalentes cuando se puede pasar de uno a otro mediante operaciones elementales. Las operaciones elementales no alteran la resultante general (pues en la construcción de una resultante se pueden substituir varios vectores por la suya). Por otra parte, se deduce del teorema de Varignon que el momento resultante no cambia cuando se aplica la segunda operación elemental.

Demostremos ahora que dos sistemas S y S' que tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante son equivalentes. Par-

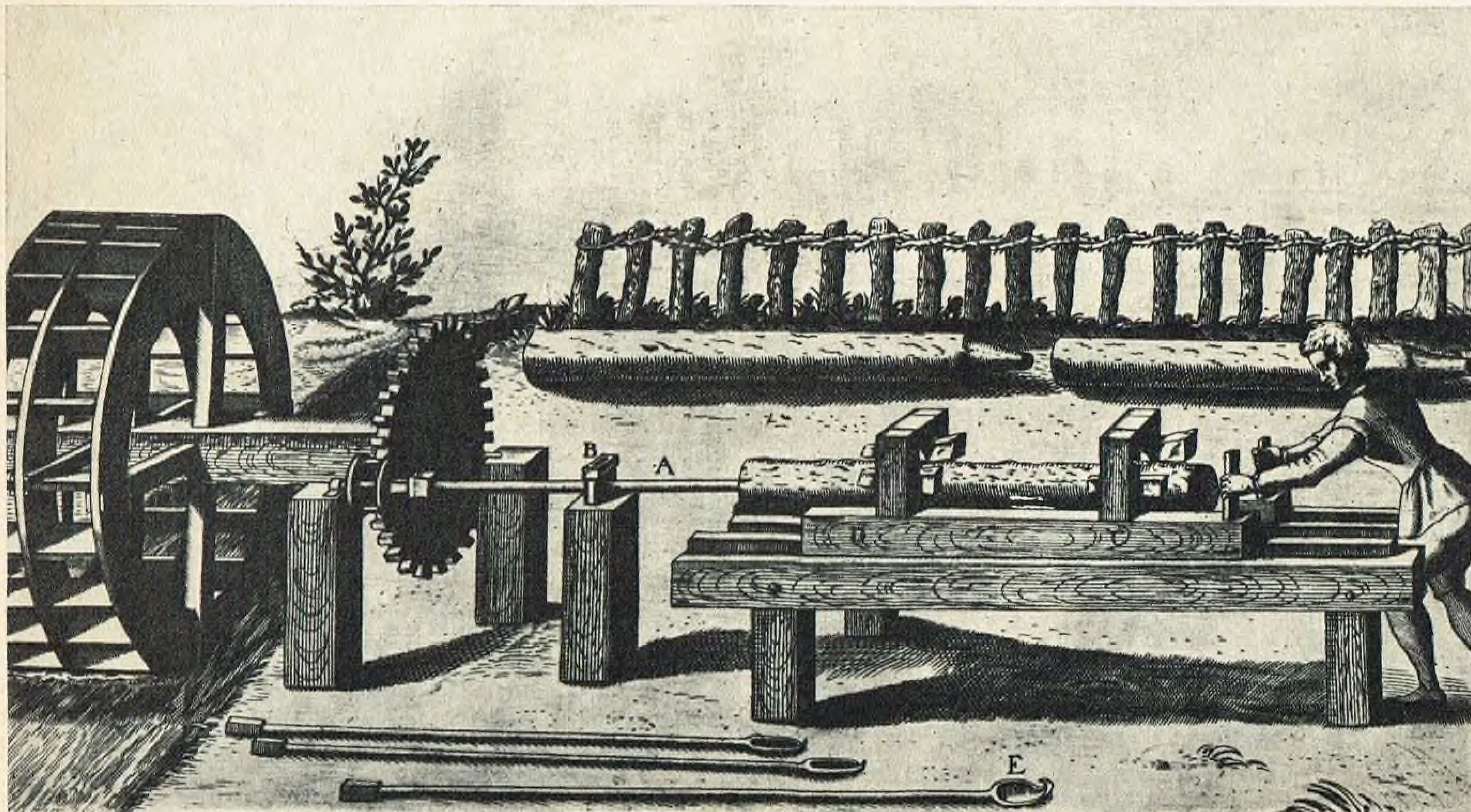

GF 23



Máquina para elevar el agua mediante bombas movidas por una rueda hidráulica



Máquina para elevar el agua de un manantial o río accionada por la fuerza de caballos



Máquina perforadora de tubos de madera. Grabados procedentes de « La raison des forces mouvantes », de Caus, 1651 (Fot. Larousse)

◀ Lám. color. pág. precedente : *Las grúas del puerto de El Havre y los mástiles de carga de los navíos son ejemplos de combinaciones más o menos complejas de los principios de las máquinas simples que se estudian en mecánica* (Fot. Larousse)

tamos del sistema S: añadámosle el formado por los vectores que constituyen el S′ y por los vectores directamente opuestos a ellos, que constituyen el sistema — S′: esto es una aplicación de la primera operación elemental. La resultante general y el momento resultante del sistema — S′ son directamente opuestos a los del sistema S. Consideremos ahora el conjunto de los dos sistemas S y — S′: la resultante general y el momento resultante de este conjunto S y — S′ son nulos. Ahora bien, por las operaciones elementales, se pueden substituir estos vectores por dos directamente opuestos. Una última operación elemental permite suprimirlos. Queda el sistema S′. Mediante operaciones elementales hemos pasado del sistema S al S′. Por lo tanto, estos sistemas, que tienen la misma resultante general y momento resultante, son equivalentes.

CONSECUENCIAS. 1º Para que un sistema sea equivalente a un vector único, es preciso y suficiente que la resultante general y el momento resultante con relación a un punto sean perpendiculares;

2º La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea equivalente a un par es que la resultante general sea nula.

Si se considera el sistema formado por varios pares, la resultante general es nula. Por lo tanto, el sistema formado por varios pares es equivalente a un par único; ya se ha demostrado directamente. Además, el momento de este par único es la suma geométrica de los momentos que forman el sistema dado.

Condiciones analíticas de equilibrio. — Hemos visto, aplicando las operaciones elementales, que la condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que el sistema de fuerzas aplicadas a él quede reducido a dos fuerzas directamente opuestas y, por consiguiente, que sea igual a cero. Ahora bien, si un sistema de fuerzas se reduce a cero, su resultante de traslación y su momento resultante son nulos. Hemos demostrado, a través del teorema anterior, que si recíprocamente la resultante general y el momento resultante son nulos, el sistema de fuerzas puede reducirse a dos fuerzas directamente opuestas y, por consiguiente, es igual a cero.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio consiste en que la resultante general y el momento resultante (con relación a un punto cualquiera) sean nulos.

Analíticamente, esta condición queda establecida con las seis ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} X = \Sigma X_n = 0, \\ Y = \Sigma Y_n = 0, \\ Z = \Sigma Z_n = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L = \Sigma\,(y_n Z_n - z_n Y_n) = 0, \\ M = \Sigma\,(z_n X_n - x_n Z_n) = 0, \\ N = \Sigma\,(x_n Y_n - y_n X_n) = 0. \end{cases}$$

Las tres primeras ecuaciones expresan que la resultante general es nula. Las tres últimas, que el momento resultante con relación al origen de coordenadas es nulo.

Caso particular. — Todas las fuerzas que actúan sobre un sólido están situadas en un mismo plano (fuerzas coplanarias). La resultante general está contenida en ese plano (*fig.* 58). Los momentos de todas las fuerzas con relación a un punto cualquiera del plano son perpendiculares al mismo. Puesto que la resultante general es perpendicular al momento resultante, el sistema de fuerzas es equivalente a una fuerza única.

Fig. 58

La condición necesaria y suficiente del equilibrio es que esta fuerza única sea nula, lo cual se expresa analíticamente por las tres ecuaciones siguientes:

$$X = \Sigma X_n = 0, \; Y = \Sigma Y_n = 0, \; N = \Sigma (x_n Y_n - y_n X_n) = 0.$$

EJEMPLO. *Sólido sometido a tres fuerzas.* Sean las tres fuerzas $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CH}$ (*fig.* 59). Cuando haya equilibrio, el momento resultante con relación a un punto cualquiera es nulo; tomemos un punto O sobre la línea de acción o soporte de la fuerza $\overrightarrow{CH}$. El momento de esta fuerza es nulo; para que el momento resultante sea nulo, es preciso que los momentos de $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$, con relación al punto O, sean opuestos. Los dos planos determinados, de una parte por O y el soporte de $\overrightarrow{AF}$, y por O y el soporte de $\overrightarrow{BG}$ por otra, deben confundirse. Como O es un punto cualquiera del soporte de $\overrightarrow{CH}$, se llega a la conclusión de que las tres fuerzas deben estar en un mismo plano.

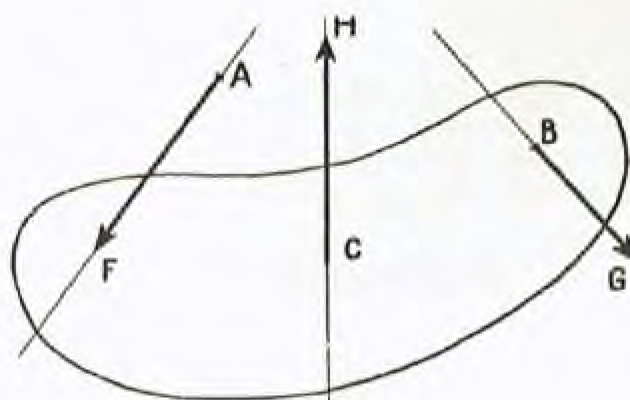


Fig. 59

Si en ese plano, dos de las fuerzas son concurrentes, el soporte de la tercera debe pasar por ese punto, y se llega de nuevo a las condiciones ya encontradas en el estudio de la estática de un punto sometido a tres fuerzas (v. p. 217).

Si dos de las fuerzas son paralelas, tienen una resultante que debe ser directamente opuesta a la tercera fuerza. Podemos de nuevo obtener, con ayuda de la resultante general y del momento resultante, los resultados establecidos únicamente mediante las operaciones elementales. Sean dos fuerzas paralelas $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$, que en un principio suponemos son del mismo sentido (*fig.* 60): el valor de la intensidad de la resultante será la suma de las intensidades de las dos fuerzas dadas. Hallemos el punto C en que la resultante corta la recta AB: el momento resultante con relación a este punto es nulo. Por lo tanto, el momento de $\overrightarrow{AF}$ debe ser directamente opuesto al de $\overrightarrow{BG}$; el punto C debe estar entre A y B. Como el valor del momento resultante debe ser nulo, los valores de los momentos de $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BG}$ deben ser iguales. Ahora bien, el valor del momento de $\overrightarrow{AF}$ con relación a C es el doble del área del triángulo CAF. Llegamos así a la igualdad

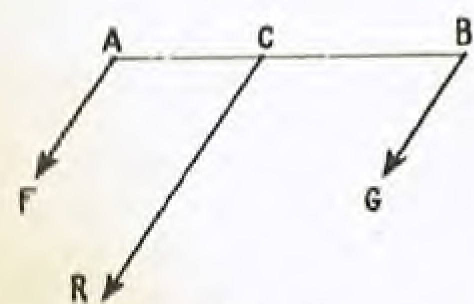


Fig. 60

(1) $\quad CA \cdot AF \text{ sen } CAF = CB \cdot BG \text{ sen } CBG.$

Como los ángulos $\widehat{CAF}$ y $\widehat{CBG}$ son suplementarios, tienen el mismo seno, y se tiene

(2) $\quad CA \cdot AF = CB \cdot BG.$

Al estar C entre A y B, se llega de nuevo a la igualdad algebraica

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BG} = 0.$$

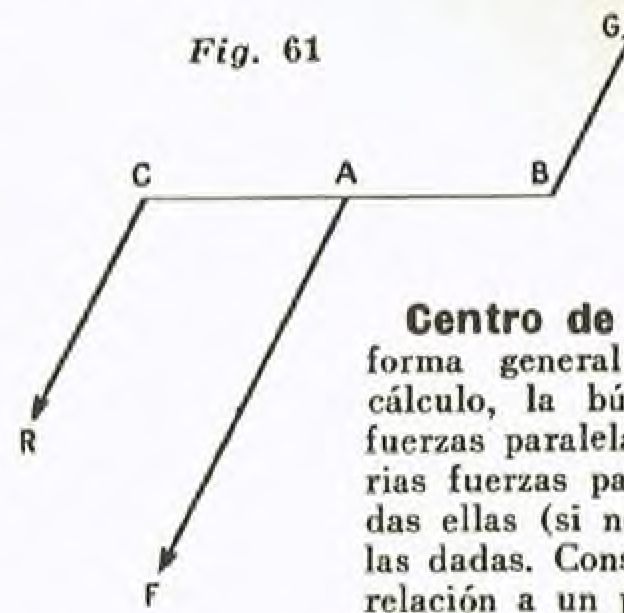


Fig. 61

Asimismo, se llega otra vez a los resultados ya establecidos con la ayuda de las operaciones elementales, o sea cuando se estudió el caso de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido (*fig.* 61).

Centro de varias fuerzas paralelas. — De forma general vamos a continuar, mediante el cálculo, la búsqueda de la resultante de varias fuerzas paralelas. En primer lugar, si se tienen varias fuerzas paralelas, la resultante general de todas ellas (si no es nula) es una fuerza paralela a las dadas. Consideremos el momento resultante con relación a un punto cualquiera O: el momento de cada una de las fuerzas es un vector de origen O y situado en el plano que, pasando por O, es perpendicular a la dirección de las fuerzas (*fig.* 62). Estando todos los momentos situados en ese plano, el momento resultante (si no es nulo) estará situado también en él. Como el momento resultante es perpendicular a la resultante general, el sistema de fuerzas paralelas será equivalente a una fuerza única.

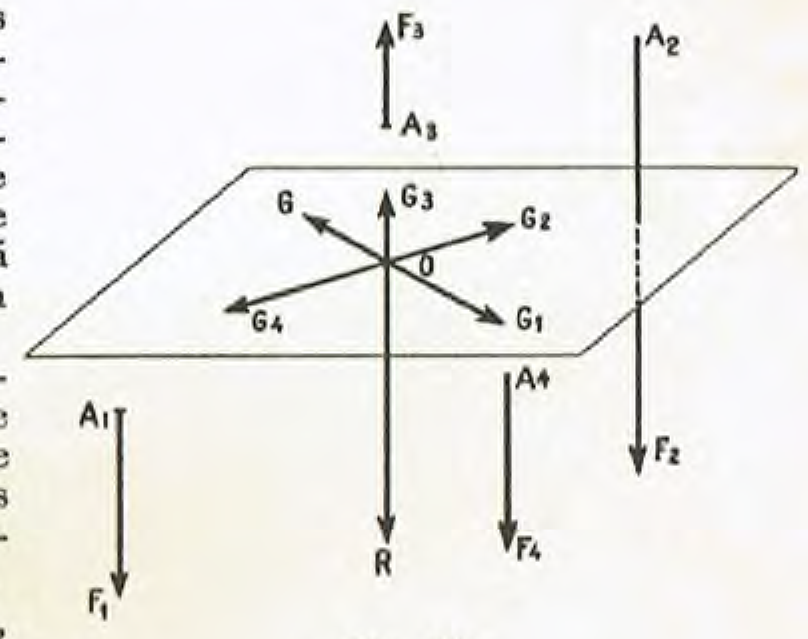


Fig. 62

Calculemos ahora las coordenadas de su punto de aplicación. Tomemos sobre la dirección paralela a las fuerzas un sentido positivo. Estas fuerzas $\overrightarrow{A_1F_1}$, $\overrightarrow{A_2F_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nF_n}$, tendrán entonces los valores algebraicos f_1, f_2, ..., f_n. Consideremos un vector de valor + 1 contenido en la misma dirección paralela (*fig.* 63); si α, β, γ son las proyecciones de ese vector, las proyecciones del vector paralelo a él y de valor algebraico f_1 serán αf_1, βf_1, γf_1, las del vector f_2 serán αf_2 βf_2, γf_2, ...

Sean, por último, x_1, y_1, z_1, las coordenadas del origen del vector $\overrightarrow{A_1F_1}$, x_2, y_2, z_2, las del origen A_2 del vector $\overrightarrow{A_2F_2}$, ... Para terminar, designemos por x, y, z las coordenadas del origen de la resultante. Escribamos ahora que el sistema de fuerzas dadas y su resultante tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante con relación al origen de coordenadas.

Fig. 63

$$X = \alpha f_1 + \alpha f_2 + \ldots + \alpha f_n = \alpha\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n).$$
$$Y = \beta f_1 + \beta f_2 + \ldots + \beta f_n = \beta\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n).$$
$$Z = \gamma f_1 + \gamma f_2 + \ldots + \gamma f_n = \gamma\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n).$$
$$L = yZ - zY = (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)\,(y\gamma - z\beta)$$
$$= (y_1 f_1 \gamma - z_1 f_1 \beta) + (y_2 f_2 \gamma - z_2 f_2 \beta) + \ldots + (y_n f_n \gamma - z_n f_n \beta)$$
$$= \gamma \Sigma y_1 f_1 - \beta \Sigma z_1 f_1.$$

De donde se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \gamma y\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - \beta z\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = \gamma \Sigma y_1 f_1 - \beta \Sigma z_1 f_1, \\ \alpha z\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - \gamma x\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = \alpha \Sigma z_1 f_1 - \gamma \Sigma x_1 f_1, \\ \beta x\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - \alpha y\,(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = \beta \Sigma x_1 f_1 - \alpha \Sigma y_1 f_1. \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones no son independientes, pues la suma de ellas miembro a miembro es nula; en particular las tres soluciones siguientes las satisfacen:

$$x = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}, \quad y = \frac{f_1y_1 + f_2y_2 + ... + f_ny_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n},$$

$$z = \frac{f_1z_1 + f_2z_2 + ... + f_nz_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}.$$

La resultante del sistema de fuerzas paralelas dadas puede ser considerada como aplicada en ese punto. Observamos que las coordenadas de dicho punto no dependen de los coeficientes α, β, γ; esto demuestra que, sin cambiar los puntos de aplicación de las fuerzas, si se las cambia de dirección, la resultante estará siempre aplicada en el mismo punto. Éste seguirá siendo igual si se substituyen las fuerzas dadas por otras que les sean proporcionales. Este punto tan importante es el centro de las fuerzas paralelas.

Centros de gravedad

Peso y masa. — Todo elemento material está sometido a una fuerza, que, en su mayor parte, es debida a la atracción ejercida por la Tierra. Esta fuerza se llama *peso* del punto; el fenómeno es la gravedad. El peso está dirigido, según la *vertical*, hacia el interior de la Tierra (o, más comúnmente, hacia abajo). La vertical está muy próxima a la dirección del centro de la Tierra. Lo que ordinariamente se llama peso, es la intensidad de esta fuerza.

Numerosas medidas y experiencias han permitido estudiar el peso. Éste disminuye con la altitud. Varía en intensidad y dirección con ella, y es un poco mayor en los polos que en el ecuador.

Es preciso distinguir bien lo que es peso de lo que es masa: la masa de un cuerpo o elemento material es un número constante, y la física demuestra que es consubstancial con él (una vez fijadas las unidades). Su peso, en cualquier lugar, es el producto de su masa por una constante (más exactamente, por un vector constante) que no depende sino del lugar. Esta constante, que se estudiará con más detalle en la cinemática, es la aceleración o intensidad de la gravedad, y se designa por la letra g.

Observación. Los dinamómetros de resorte miden los pesos. Las balanzas, por el contrario, miden la masa. En las transacciones comerciales no se tiene en cuenta el peso de las mercancías, sino su masa. Por esta razón, el empleo comercial de los dinamómetros está prohibido.

Centro de gravedad de un sólido. — Hemos definido un sólido como un conjunto de puntos. Si el sólido es de dimensiones pequeñas con relación a la Tierra, el peso de sus diferentes puntos serán fuerzas paralelas y proporcionales a su masa (puesto que g tiene el mismo valor para todos los puntos del cuerpo). La resultante de todas estas fuerzas paralelas, es el *peso* del cuerpo, y el centro de ellas se llama *centro de gravedad* del cuerpo.

Si se cambia la orientación del sólido con relación a la Tierra, para un observador que estuviera unido a él (o mejor, para un sistema de ejes coordenados ligado al sólido), sería como si se modificara la dirección común de todas las fuerzas: la posición del centro de gravedad no variará con relación al cuerpo, ya que hemos establecido que es el centro de fuerzas paralelas. Asimismo, cuando se desplaza el sólido, los pesos variarán, pero siempre se mantendrán proporcionales a las masas: la posición del centro de gravedad no varía.

En resumen, el centro de gravedad de un sólido es un punto invariablemente ligado al mismo.

Coordenadas del centro de gravedad. — Si el sólido está constituido por los puntos materiales de masas m_1, m_2, ..., m_n, si las coordenadas de estos puntos son respectivamente x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, ..., x_n, y_n, z_n, y si la aceleración de la gravedad es g, las coordenadas del centro de gravedad serán

$$x = \frac{m_1gx_1 + m_2gx_2 + ... + m_ngx_n}{m_1g + m_2g + ... + m_ng} = \frac{\Sigma m_1x_1}{M},$$

designando por M la masa total del sólido.

Asimismo,

$$y = \frac{\Sigma m_iy_i}{M} \quad = \frac{\Sigma m_iz_i}{M}.$$

Observación. Si se pudiera dividir el sólido en varias porciones y se conocieran los centros de gravedad de cada una de ellas y sus masas, las fórmulas anteriores nos demuestran que el centro de gravedad de un sólido se hallaría encontrando el centro de gravedad del sistema material formado por los centros de gravedad de las diferentes porciones, como si la masa de cada una de ellas estuviera concentrada en su centro de gravedad respectivo.

Ejemplo. *Centro de gravedad de tres masas iguales situadas en los vértices de un triángulo* ABC (*fig.* 64). Si x_1, y_1, z_1 son las coordenadas de A, x_2, y_2, z_2 las de B, y x_3, y_3, z_3 las de C, las coordenadas del centro de gravedad serán

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad Z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Teniendo en cuenta la observación anterior, se pueden substituir las masas situadas en B y en C por una masa doble situada en M, punto medio de BC. El centro de gravedad de las tres masas será el punto G, situado sobre AM y, según el cálculo efectuado para hallar el centro de fuerzas paralelas, a una distancia de M igual a un tercio del segmento MA. Este punto es el de concurrencia de las medianas del triángulo ABC.

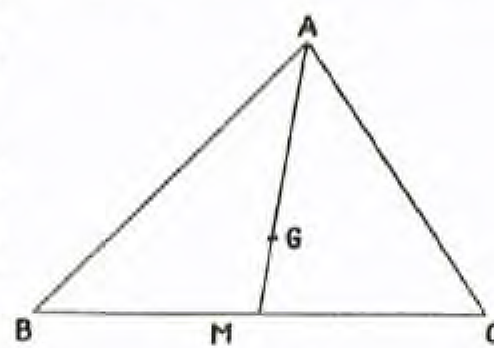


Fig. 64

En lo que hemos visto anteriormente, se han considerado sistemas sólidos constituidos por puntos materiales distantes. La mayoría de los sólidos materiales no están así formados: por el contrario, dichos puntos materiales están en íntimo contacto (no nos vamos a ocupar aquí de las teorías físicas sobre la constitución de la materia), Para tener, a falta de la posición exacta, una posición aproximada del centro de gravedad, se divide el sólido en n porciones pequeñas de masas m_1, m_2, ..., m_3 y se toma en el interior de cada una de ellas un punto como centro de gravedad del mismo. La posición aproximada del centro de gravedad es el centro de gravedad del sistema formado por estos últimos puntos, como si la masa de cada uno de ellos estuviera allí concentrada. Para hallar la posición exacta, sería preciso hallar la posición límite de la aproximada, haciendo tender a cero el tamaño de las porciones. El cálculo de este límite es una de las aplicaciones del cálculo de integrales.

Densidad media. Densidad de un punto. — Consideremos nuevamente la división efectuada en el sólido anteriormente. Si m es la masa de una de esas porciones de volumen v, se llama densidad media con relación al volumen v considerada la relación $d = \frac{m}{v}$. Si v tiende a cero, convirtiéndose en un punto, se llama densidad de este punto el límite de la relación $\frac{m}{v}$. Este límite es función de las coordenadas del punto.

Si el sólido es una superficie, se llaga de la misma forma al concepto de densidad superficial. Si el sólido es una línea, se llega igualmente al concepto de densidad lineal.

Centro de gravedad de una línea. — Sea un arco AB (*fig.* 65). Las coordenadas de un punto de esta línea están dadas por las expresiones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, y el arco AB es recorrido cuando t varía de a a b. La densidad en cualquier punto es también una función del parámetro $\rho(t)$. Sea M_n el punto de la curva que corresponde al valor t del parámetro y M_{n+1} el que corresponde al valor $t + dt$ del parámetro. Si dm es la diferencial de la masa, ds la del arco y ρ la densidad:

Fig. 65

$$dm = \rho ds \text{ y } M = \int_a^b \rho \cdot ds,$$

y pasando al límite, mediante las expresiones que nos dan los valores aproximados de las coordenadas del centro de gravedad, se obtienen las coordenadas por las integrales

$$x = \frac{\int_a^b f(t)\rho ds}{M}, \quad y = \frac{\int_a^b g(t)\rho ds}{M}, \quad z = \frac{\int_a^b h(t)\rho ds}{M},$$

siendo $ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$ (v. Geometría analítica, p. 213).

Para hallar el centro de gravedad de superficies y de sólidos, se llega, mediante cálculo, a fórmulas análogas, pero más complicadas, empleando integrales múltiples.

Sólido homogéneo. — Un cuerpo es homogéneo cuando su masa es proporcional al volumen (o a la superficie o a la longitud): en este caso, la densidad es constante. No interviene para hallar el centro de gravedad: la posición del centro de gravedad de un sólido homogéneo es independiente de su densidad. Depende únicamente de su forma geométrica.

El problema de hallar el centro de gravedad es facilitado por las siguientes observaciones, que permiten el empleo de métodos geométricos.

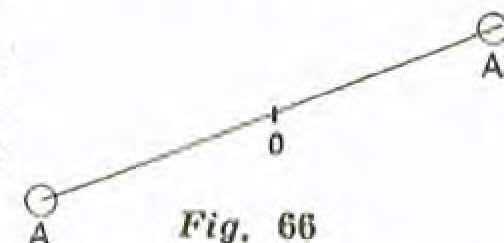


Fig. 66

Utilización de las simetrías. —

Teorema. *Si un sólido homogéneo tiene un centro de simetría, su centro de gravedad coincide precisamente con el de simetría.*

En efecto, a todo elemento A del sólido hacemos corresponder un elemento simétrico A' (*fig.* 66). La resultante de los pesos de A y A' tendrá como punto de aplicación el centro de simetría O. Repitiendo el mismo razonamiento para todos los elementos del sólido, se llega a la conclusión de que todas las fuerzas paralelas están aplicadas en el centro de simetría O; el centro de simetría O es, efectivamente, el centro de gravedad.

Ejemplo. El centro de gravedad de un segmento homogéneo es su punto medio. El centro de gravedad de una esfera es el centro de la esfera: el de una figura plana que tenga forma de paralelogramo es el punto de intersección de las diagonales. Asimismo, el centro de gravedad de un paralelepípedo es el punto de concurrencia de sus diagonales.

Teorema. *Si un sólido tiene un eje de simetría, su centro de gravedad está sobre dicho eje.*

La demostración es análoga a la anterior.

Teorema. *Si un sólido tiene un plano de simetría, su centro de gravedad está situado en dicho plano.*

Por lo que respecta a figuras planas y volúmenes, se tienen, además, los dos teoremas siguientes.

Teorema. *Si una figura plana admite un diámetro para las paralelas a una cierta dirección, el centro de gravedad de la figura está sobre dicho diámetro.*

Una figura plana admite un diámetro relativo a cierta dirección △ (*fig.* 67), si los puntos medios de los segmentos interceptados por los bordes de la figura sobre las paralelas a dicha dirección tienen por lugar geométrico una recta D; esta recta D es un diámetro de la figura. Dos paralelas, AA′ y BB′, a la dirección △, muy próximas entre sí, limitan una pequeña zona cuyo contorno difiere poco del paralelogramo, dos de cuyos lados son AA′ y BB′, y los otros dos son las paralelas trazadas por A y A′ a la recta D. El centro de gravedad de este paralelogramo está sobre D. El centro de gravedad de la zona pequeña AA′B′B puede considerarse como confundido con él. Los pesos de todas estas zonas pequeñas tendrán, pues, sus puntos de aplicación sobre D. Su resultante también tendrá su punto de aplicación sobre dicho diámetro: por lo tanto, este punto de aplicación será precisamente el centro de gravedad de la figura.

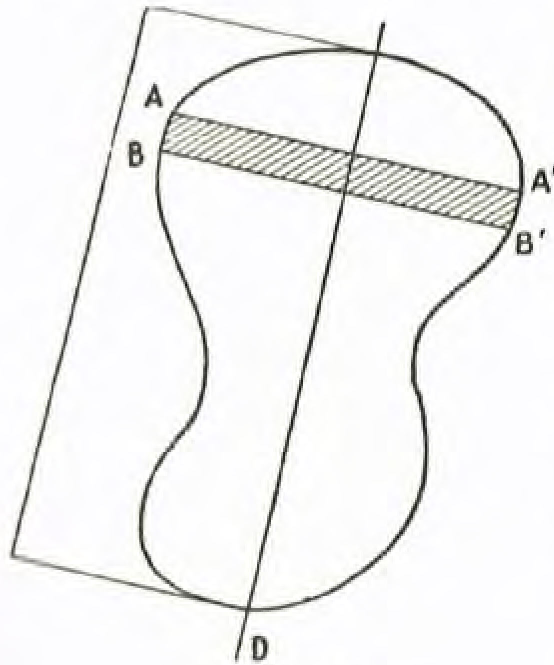


Fig. 67

Teorema. *Si un volumen está limitado por una superficie que admite un plano diametral para las paralelas a una cierta dirección, el centro de gravedad del volumen está situado en dicho plano.*

La demostración es similar a la del teorema anterior.

Observación. Los dos teoremas anteriores no se aplican nada más que a las figuras planas y a los volúmenes. No se deben utilizar para hallar el centro de gravedad de una línea o de una superficie no plana.

Centro de gravedad de una figura plana triangular. — Toda mediana de un triángulo es un diámetro para las secantes paralelas al lado del triángulo sobre el que termina (*fig.* 68). Por consiguiente, el centro de gravedad de una figura plana triangular es el *punto de concurrencia de las medianas.*

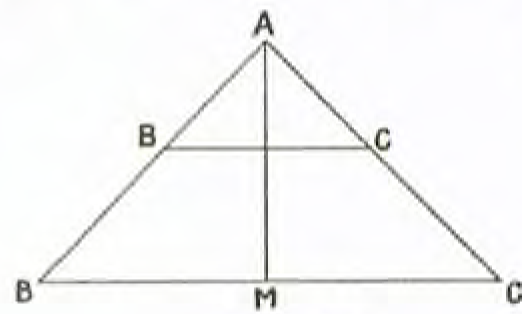


Fig. 68

Para determinar el centro de gravedad de una figura poligonal, se divide en triángulos y se halla el *centro de las fuerzas paralelas*, proporcionales a la masa de cada triángulo, aplicadas en los centros de gravedad de cada uno de ellos.

Centro de gravedad de un prisma triangular. — Es el centro de gravedad de su sección media.

Sea ABCA′B′C′ un prisma triangular (*fig.* 69). Si *a*, *b*, *c*, son los puntos medios de sus aristas laterales, el triángulo *abc* es la sección media del prisma. El plano *abc* es un plano diametral para las secantes paralelas a AA′: contiene, pues, el centro de gravedad del prisma. Consideremos los puntos medios D y D′ de BC y B′C′, respectivamente. El plano AA′DD′ es un plano diametral para las secantes paralelas a BC. Contiene también, por lo tanto, el centro de gravedad. Este plano corta al *abc* según la mediana *ad* de la sección media. El centro de gravedad estará, por consiguiente, sobre esa mediana. También estará sobre las otras dos. En consecuencia, el centro de gravedad del prisma coincide con el de la sección media.

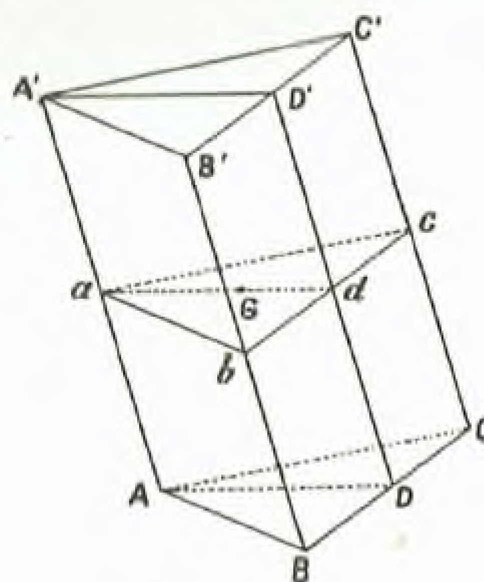


Fig. 69

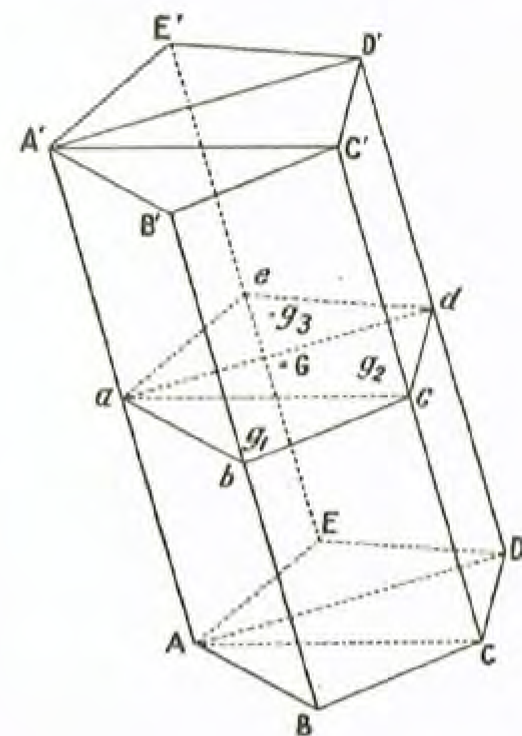


Fig. 70

Si se tratase de hallar el centro de gravedad de un prisma cualquiera, se dividiría en prismas triangulares por planos diagonales que pasen por una arista vertical (*fig.* 70).

Los centros de gravedad de estos prismas triangulares coinciden con los centros de gravedad de los triángulos obtenidos en sus secciones medias. Como los volúmenes de los prismas triangulares son proporcionales a las áreas de los triángulos de sus secciones medias, el centro de gravedad del prisma coincidirá con el centro de su sección media.

Centro de gravedad de un tetraedro. — El centro de gravedad de un tetraedro es el punto donde se cortan los cuatro segmentos que unen cada vértice con el centro de gravedad de la cara opuesta.

Sea ABCD un tetraedro (*fig.* 71). Si E es el punto medio de CD, el plano ABE es un plano diametral para las cuerdas paralelas a CD; por lo tanto, el centro de gravedad estará en dicho plano. Así sucede igualmente en los seis planos determinados por una arista y el punto medio de la arista opuesta. Asociando estos planos dos a dos, o tres a tres, se hallan los segmentos a que hace referencia el enunciado. El centro de gravedad está a un cuarto (a partir de la cara) de cada segmento que une el centro de gravedad de una cara con el vértice opuesto.

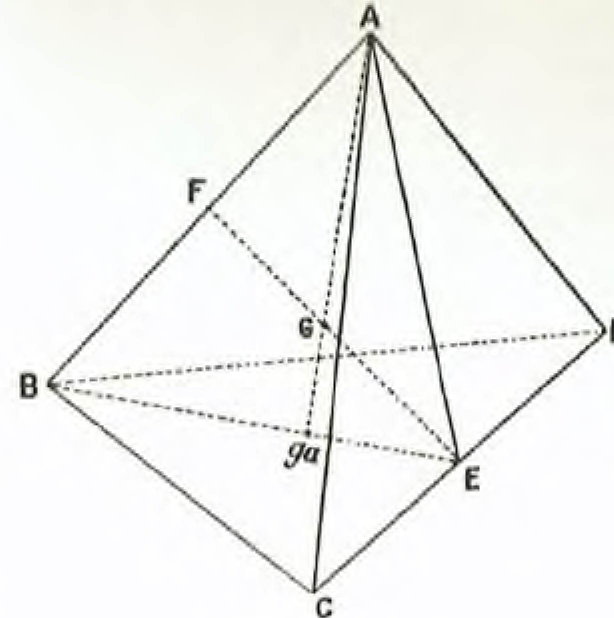


Fig. 71

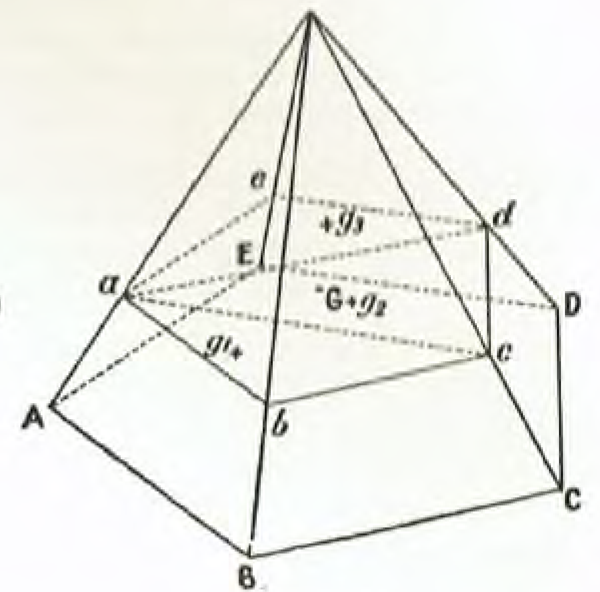


Fig. 72

Para hallar el centro de gravedad de una pirámide cualquiera, se descompone en pirámides triangulares: obteniéndose que el centro de gravedad de la pirámide coincide con el de la sección piramidal formada por el plano cuya distancia a la base es un cuarto de la altura (*fig.* 72).

Centro de gravedad del cilindro. — El centro de gravedad de un cilindro de bases circulares es el punto medio del segmento que une los centros de las dos bases. El centro de gravedad de un cono de base circular está sobre el segmento que une el centro de la base con el vértice, y situado a un cuarto de la longitud de dicho segmento a partir de la base.

Teoremas de Guldin. — *El área de la superficie engendrada por una línea plana que gira alrededor de un eje situado en su plano, sin cortarlo, es el producto de la medida de la longitud de esta línea por la circunferencia descrita por su centro de gravedad.*

Sea AM_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ una línea quebrada inscrita en el arco AB (*fig.* 73). Cuando el arco AB gira alrededor del eje $x'x$ situado en su plano, cada segmento engendra un tronco de cono. El área lateral de cada uno de estos troncos de cono es el producto de la longitud de la generatriz por la de la circunferencia descrita por el punto medio de dicha generatriz: designando por H_k el punto medio de $M_k M_{k+1}$, y por H'_k la proyección de H_k sobre el eje, se tiene que el área engendrada es

Fig. 73

$$S = 2\pi\,[H'H \cdot AM_1 + H'H_1 \cdot M_1M_2 + \ldots + H'_kH_k\, M_kM_{k+1} + \ldots + H'_{n-1}\, H_{n-1} \cdot M_{n-1}B].$$

Si $H'H$, H'_1H_1, ..., H'_kH_k son las ordenadas de los puntos H, H_1, ..., H_k, ..., H_{n-1}, y AM_1, M_1M_2 ..., los pesos de los segmentos, aplicados en esos puntos, la expresión anterior es el numerador de la ordenada del centro de las fuerzas paralelas. Si g es el centro de gravedad de la línea quebrada, g' su proyección sobre el eje, y l su longitud, substituyendo la expresión entre corchetes por su valor se obtiene: $S = 2\pi l \cdot gg'$.

Supongamos ahora que los lados de la línea quebrada inscrita tienden a cero, l tenderá hacia la longitud L del arco AB; el punto g hacia el centro de gravedad G del arco AB y s tendrá por límite la superficie engendrada por el arco. En el límite se tiene que

$$S = 2\pi G'G \cdot L.$$

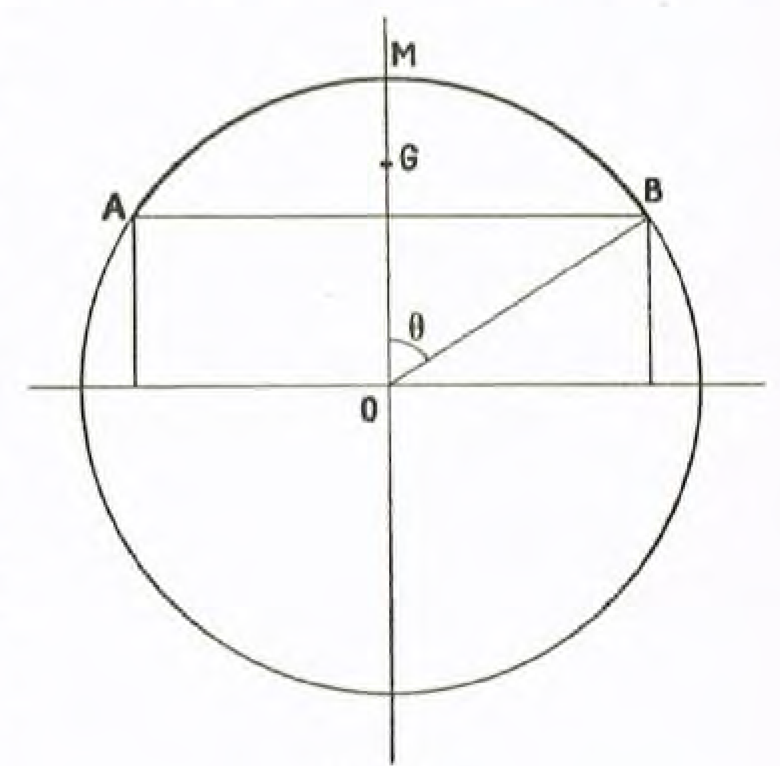


Fig. 74

Aplicación. *Centro de gravedad de un arco de circunferencia.* Sea el arco de circunferencia AB, cuya longitud en radianes es 2θ (*fig.* 74). El centro de gravedad está sobre el eje de simetría del arco, es decir, sobre el diámetro que une el centro con el punto medio del arco.

Hagamos girar el arco sobre el diámetro paralelo a AB. El arco AB engendra una zona cuya altura vale 2 R sen θ. Aplicando el teorema de Guldin, se tiene:

$$2\pi R \cdot 2R \operatorname{sen} \theta = 2R\theta \cdot 2\pi OG, \quad OG = \frac{R \operatorname{sen} \theta}{\theta}.$$

Teorema. *El volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en su plano sin cortarlo, es el producto del área de la superficie plana por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad.*

Sea una superficie plana limitada por un contorno cualquiera (*fig.* 75) y $x'x$ el eje. Imaginemos que se le ha dividido en cuadrículas cuyos lados son, unos, perpendiculares, y otros, paralelos al eje $x'x$. Sea ABCD una de estas cuadrículas interior a C. El volumen engendrado por el cuadrado ABCD es la diferencia de los volúmenes de los cilindros engendrados por los rectángulos EFCD y EFBA. Su valor es

Fig. 75

$$\pi EF\,(ED^2 - EA^2) = \pi EF\,(ED - EA) \cdot (ED + EA).$$

Si O es el centro del cuadrado ABCD y O′ el punto medio de EF, ED + EA = 2 OO′ y el volumen engendrado por el cuadrado ABCD es

$$2\pi OO' \cdot AB \cdot BC.$$

Ahora bien, AB · BC es la superficie de ABCD. La suma de todos los volúmenes engendrados por los cuadrados interiores al contorno es $2\pi\Sigma OO'$ · superf. ABCD. La expresión

$$\Sigma OO' \text{ superf. ABCD}$$

es el numerador de la ordenada del centro de fuerzas paralelas. Si g es el centro de gravedad de la superficie s formada por los cuadrados, se tiene

$$v = 2\pi \cdot gg' \cdot s.$$

Si el lado de los cuadrados tiende a cero, s tenderá hacia la superficie S interior al contorno, g al centro de gravedad G de esta superficie y v hacia el volumen engendrado. Se obtiene $V = 2\pi GG' \cdot S$.

Estática del sólido ligado

Hasta ahora hemos estudiado sólidos libres, es decir, capaces de desplazarse en todas direcciones.

Lo más corriente es que los desplazamientos del sólido sean limitados por apoyos o por la presencia de otros cuerpos. El sólido es, en este caso, un sólido ligado; un cuerpo que está en reposo sobre una mesa, un cuerpo que gira alrededor de un eje, son sólidos ligados. La acción de estos obstáculos puede ser substituida y representada por fuerzas que reciben el nombre de reacciones o fuerzas de ligadura. Entonces, el sólido está sometido a dos clases de fuerzas: las aplicadas directamente, de una parte, y de otra, las fuerzas de ligadura. La dificultad estriba en que generalmente los elementos de las fuerzas de ligadura son desconocidos, en parte o en su totalidad; el estudio de estas fuerzas es una de las finalidades de la estática del sólido ligado.

Principio de estática del sólido ligado. — Este principio es de origen experimental: *Si se pueden encontrar fuerzas de ligadura admisibles en las condiciones del problema, y si estas fuerzas constituyen junto con las fuerzas directamente aplicadas un sistema equivalente a cero, se admite que el sólido está en equilibrio.*

Las acciones del sólido sobre los cuerpos, con los que está en contacto, son directamente opuestas a las fuerzas de enlace o ligadura.

Hay que distinguir, además, si los contactos se hacen con o sin rozamiento. En el caso "ideal" en que los cuerpos estén perfectamente pulimentados, no hay rozamiento y las fuerzas de ligadura son normales, es decir, perpendiculares a los planos tangentes. Cuando hay rozamiento, lo que sucede realmente, las fuerzas de ligadura deben formar con las normales ángulos menores que los de rozamiento (v. p. 218).

Problema. *Una barra cilíndrica homogénea y pesante, de peso* p, *está en reposo apoyada sobre dos cuchillas situadas en el mismo plano horizontal* (*fig.* 76). *Estudiar las condiciones de equilibrio.*

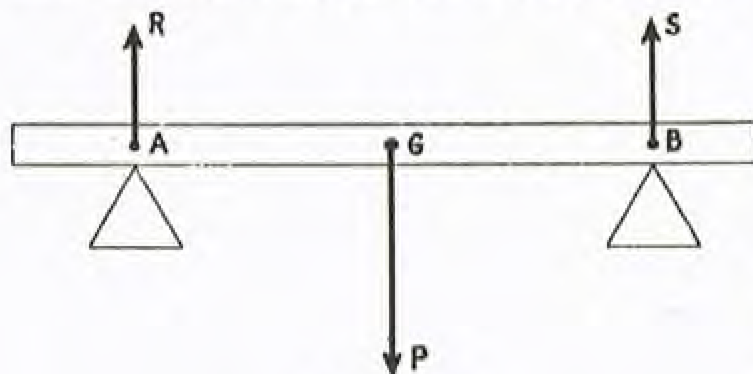


Fig. 76

La única fuerza directamente aplicada es su peso, que actúa en el centro de gravedad. Las reacciones de los apoyos son dos fuerzas verticales dirigidas hacia arriba. Si el centro de gravedad está a igual distancia de los dos apoyos, tomando como reacciones fuerzas iguales a la mitad del peso, el sistema formado por el peso y las dos reacciones es equivalente a cero. Llegamos a la conclusión de que hay equilibrio y que las acciones de la barra sobre los dos apoyos son iguales a la mitad del peso.

Si el centro de gravedad no estuviera a igual distancia de los apoyos, aunque sí situado entre los mismos, se podrían encontrar dos fuerzas dirigidas hacia arriba que equilibrasen el peso (v. p. 221). Si el centro de gravedad no estuviera situado entre los dos apoyos, es imposible encontrar dos fuerzas verticales que equilibren al peso: el equilibrio es imposible.

Problema. *Una varilla cilíndrica, homogénea y pesante, de longitud* 3R, *se apoya sin rozamiento sobre el borde de una copa semiesférica de radio* R *y de eje vertical. Por uno de sus extremos se apoya sin rozamiento sobre la superficie interna. Encontrar su posición de equilibrio* (fig. 77).

Sea O el centro de la copa L el extremo de la varilla que se apoya sobre la superficie interna de la copa y B el punto en el que se apoya sobre el borde de la misma. La varilla está sometida a tres fuerzas: 1° su peso, que es una fuerza vertical de intensidad p, aplicada en el centro de gravedad G; 2° la reacción T de la copa en el punto L de contacto, siendo normal a la superficie de la copa y, por lo tanto, dirigida según el radio LO; 3° la reacción T′ de la copa sobre la varilla en el punto B. Siendo, como hemos dicho al principio, la varilla cilíndrica, si suponemos que el borde de la copa es semicilíndrico, la reacción en B será normal a AB. Puesto que está sometida a tres fuerzas, nos encontramos con un caso ya estudiado teóricamente. En primer lugar, esas tres fuerzas deben estar situadas en un mismo plano; como la fuerza P es vertical y la fuerza T pasa por el punto O, la posición de equilibrio de la varilla estará en un plano vertical que pase por el centro O. Consideremos que ese plano sea el de la figura.

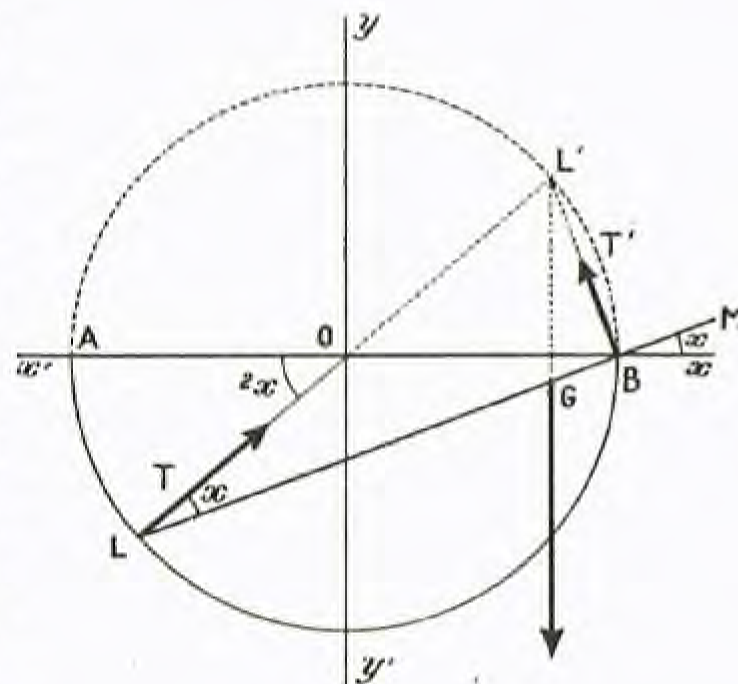


Fig. 77

El problema tiene tres incógnitas: las reacciones $\overrightarrow{LT}$ y $\overrightarrow{BT'}$ y el ángulo x que forma la varilla con AB. Se puede resolver el problema algebraicamente escribiendo que las sumas algebraicas de las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes $x'Ox$ y $y'Oy$ son nulas, así como el momento resultante con relación al punto. Consideraciones geométricas nos ofrecen una solución más rápida. Observemos que las dos reacciones $\overrightarrow{LT}$ y $\overrightarrow{BT'}$ se cortan en el punto L′, diametralmente opuesto a L. Como las fuerzas deben ser concurrentes, la vertical del punto G debe pasar por L′. Es suficiente, pues, poner que la abscisa de L′ es igual a la de G. Para hallar esta última, se proyecta el contorno OLG sobre el eje $x'x$ y se obtiene:

$$(1) \qquad R \cos 2x = - R \cos 2x + \frac{3R}{2} \cos x,$$

$$(2) \qquad 4 \cos 2x = 3 \cos x,$$

$$(3) \qquad 8 \cos^2 x - 3 \cos x - 4 = 0.$$

Esta ecuación tiene una solución que la satisface:

$$\cos x = 0'918, \text{ con una aproximación de } \frac{1}{1\,000}.$$

Por consiguiente, empleando una tabla de líneas trigonométricas naturales: $x = 26$ grados.

T y T′ nos vienen dadas por el sistema de ecuaciones

$$T \cos 2x = T' \operatorname{sen} x, \qquad P = T \operatorname{sen} 2x + T' \cos x.$$

Problema de la escalera. *Se va a estudiar el problema del equilibrio de una escalera que representaremos por una varilla pesante que se apoya sobre un plano vertical y sobre el horizontal* (fig. 78).

Las fuerzas son el peso de la escalera y las reacciones del suelo y del muro; están situadas en un plano vertical que pasa por la escalera y que consideramos sea el plano de la figura.

Vamos a estudiar el caso en que exista rozamiento y a resolver el problema gráficamente (*fig.* 78). Sean φ el ángulo de rozamiento en el suelo y φ' el de rozamiento en el muro. A un lado y otro de la perpendicular en A al suelo, tracemos dos semirrectas que formen con ella el ángulo φ. La reacción del suelo debe caer dentro de este ángulo. Asimismo, la reacción del muro debe estar dentro del ángulo formado por las semirrectas que forman con la perpendicular al muro, el ángulo φ'. Estas cuatro rectas constituyen el cuadrilátero EFIH. La condición necesaria para que haya equilibrio, es decir, para que las reacciones estén dentro de los ángulos de rozamiento, es que la vertical del punto G corte el cuadrilátero IEFH. Esta condición necesaria es al mismo tiempo suficiente, y nos dice que la abscisa del punto G debe ser mayor que la del punto I.

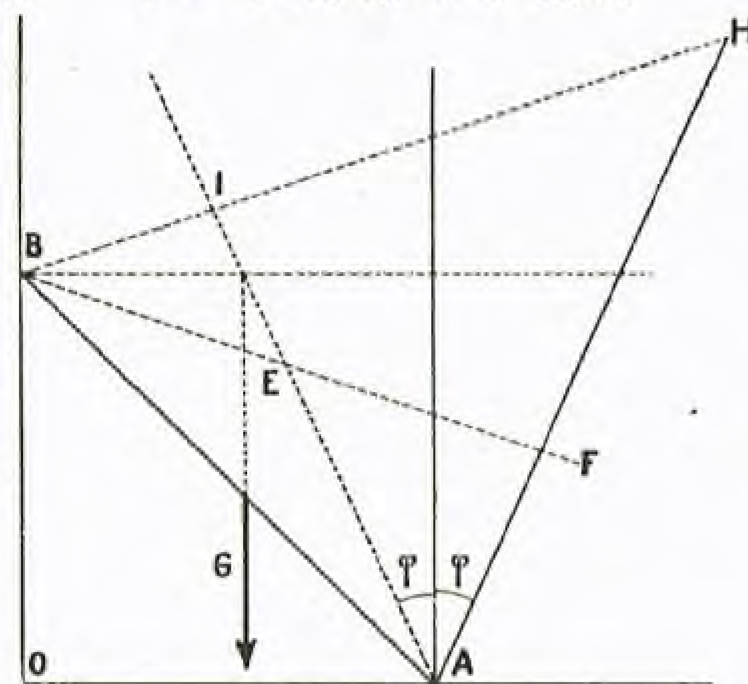


Fig. 78

Designemos por a y b la abscisa de A y la ordenada de B, f el coeficiente de rozamiento en A y f' el de B.

La ecuación de la recta AI es $y = -\dfrac{x-a}{f}$.

La de la recta BI es $y - b = f'x$.

La abscisa de I nos viene entonces dada por

$$b + f'x = \frac{a-x}{f}, \qquad x = \frac{a-bf}{1+ff'}.$$

La condición necesaria y suficiente es entonces

$$\frac{a}{2} > \frac{a-bf}{1+ff'}, \qquad a\,(ff'-1) + 2bf > 0.$$

Si θ representa la inclinación de la escalera y l su longitud

$$l \cos\theta\ (ff'-1) + 2fl \operatorname{sen}\theta > 0.$$

De donde

$$\operatorname{tg}\theta > \frac{1-ff'}{2f}.$$

Si el rozamiento fuera bastante pequeño $ff' < 1$, no habría equilibrio nada más que cuando θ fuera bastante grande. Si por el contrario, $ff' > 1$, lo que quiere decir que los rozamientos son considerables, la escalera estará siempre en equilibrio.

Sólido con un punto fijo. — Este enlace o ligadura es el realizado por una pequeña rótula. No hay más que una fuerza de ligadura aplicada en el punto fijo. Si el cuerpo está en equilibrio, las fuerzas directamente aplicadas y la reacción R del punto fijo constituyen un sistema equivalente a cero.

Las fuerzas directamente aplicadas deben pues tener una resultante única que pase por el punto fijo (fig. 79).

Para que esto ocurra, es preciso que el momento resultante $\vec{OG}$ de las fuerzas directamente aplicadas, con relación a O sea nulo. Si se toma el punto fijo como origen de coordenadas, las condiciones analíticas de equilibrio se expresan por las tres ecuaciones siguientes:

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Esta condición necesaria es también suficiente: si las fuerzas directamente aplicadas tienen una resultante única que pasa por el punto fijo, la resistencia de éste da lugar a una fuerza directamente opuesta. Esta fuerza equilibra al sistema formado por las fuerzas exteriores.

Fig. 79

Ejemplo. *Sólido pesante que gira alrededor de un punto fijo.* La única fuerza directamente aplicada es su peso, fuerza vertical que actúa en el centro de gravedad. Es preciso que el peso pase por el punto fijo, por lo tanto el centro de gravedad debe estar en la vertical del punto fijo. Si el centro de gravedad está por encima del punto fijo, el equilibrio es inestable. Si está por debajo de él, el equilibrio es estable. Si coinciden el centro de gravedad y el punto fijo, el cuerpo está siempre en equilibrio.

Rotación de un sólido alrededor de un eje fijo. — Esta ligadura, muy frecuente, se realiza en la práctica de diferentes formas: charnelas, muñones y anillos de bisagra, ejes y cubos de rueda, rodamientos de bolas. Lo más corriente es que la ligadura impida el deslizamiento a lo largo de un eje.

Las fuerzas de ligadura pasan todas por el eje. Siendo así, el sistema formado por las fuerzas de ligadura y las fuerzas directamente aplicadas es equivalente a cero. Como las fuerzas de ligadura cortan el eje, la suma algebraica de sus momentos con relación a este eje es nula. Como también es nula la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas aplicadas al sólido con relación al citado eje, se llega a la consecuencia de que la condición necesaria para que haya equilibrio consiste en que *la suma algebraica de los momentos de las fuerzas directamente aplicadas con relación al eje de rotación sea nula.*

Si se toma este eje como eje $z'z$ la condición necesaria de equilibrio se expresa analíticamente por la ecuación $\Sigma N = 0$.

Esta condición es suficiente. Sean $\vec{OR}$ y $\vec{OG}$ la resultante general y el momento resultante con relación al punto O (*fig.* 80). Por hipótesis, el momento $\vec{OG}$ es perpendicular al eje de rotación. Busquemos un sistema de fuerzas que sea equivalente al sistema de las fuerzas directamente aplicadas: su acción sobre el sólido es idéntica. Siendo así, un sistema equivalente estaría formado por el vector $\vec{OR}$ y por un par de eje OG. Para hallar este par, se toma un punto O′ del eje como origen de un vector $\vec{O'f'}$ cuyo momento con relación a O sea precisamente $\vec{OG}$. Puesto que el momento $\vec{OG}$ es perpendicular al eje, la fuerza $\vec{O'f'}$ estará situada en un plano que, pasando por el eje, sea perpendicular a dicho eje. El par de eje OG se compone de la fuerza $\vec{Of'}$ y de la fuerza $\vec{Of}$ cuyo punto de aplicación es O siendo opuesta a $\vec{O'f'}$.

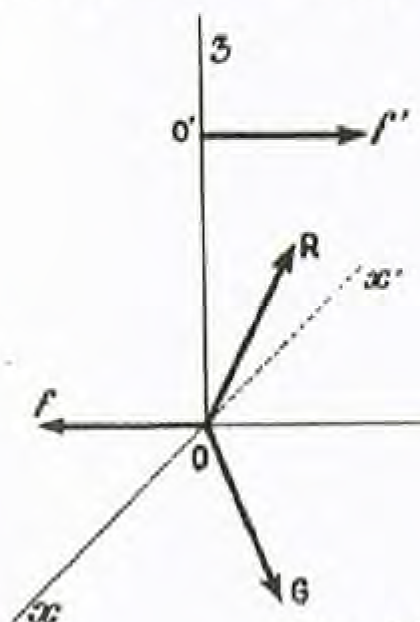


Fig. 80

Las fuerzas directamente aplicadas pueden, por tanto, ser substituidas por la fuerza $\vec{O'f'}$ y por la resultante de las fuerzas $\vec{Of}$ y $\vec{OR}$. Estas dos fuerzas están aplicadas en el eje: la resistencia del eje da lugar a las fuerzas de ligadura directamente opuestas, que equilibran al sistema de fuerzas directamente aplicadas.

Observación. La condición de que el momento de las fuerzas aplicadas con relación al eje sea nulo permite, en general, encontrar la posición de equilibrio. Pero el cálculo de las fuerzas de ligadura es frecuentemente imposible: si el eje es cilíndrico, hay una infinidad de fuerzas de ligadura. En los demás casos, es necesario hacer hipótesis sobre cómo está realizada la ligadura. El razonamiento anterior nos da a conocer las fuerzas de ligadura cuando el eje es un pequeño anillo sin que haya rozamiento en O′, y un anillo y un estribo en O.

Observación. Si el cuerpo pudiera deslizarse sin rozamiento a lo largo del eje de rotación, para que haya equilibrio, sería necesario, además de la condición anterior, que la resultante general fuera perpendicular al eje. La condición analíticamente se expresaría por $Z = 0$.

Sólido en reposo sin rozamiento sobre un plano. — Las fuerzas de ligadura en ese plano son fuerzas normales (es decir, perpendiculares) a él, y todas ellas dirigidas en el mismo sentido. Tienen, pues, una resultante única perpendicular al plano. Para que el sólido esté en equilibrio, es por lo tanto necesario que las fuerzas directamente aplicadas al sólido tengan una resultante única perpendicular y dirigida en tal sentido que tienda a sujetar el cuerpo contra el plano.

Vamos a precisar los diferentes casos:

1º El sólido no está en contacto con el plano más que por un solo punto. Es necesario que las fuerzas exteriores tengan una resultante única que pase por ese punto. Recíprocamente, si es así, la resistencia del plano da lugar a una fuerza de ligadura que equilibra el sistema de las fuerzas directamente aplicadas;

2º El sólido tiene dos puntos M y N en contacto con el plano. La resultante de las fuerzas directamente aplicadas, debe ser perpendicular al plano y cortar la recta MN en un punto situado entre M y N. Si es así, se pueden, recíprocamente, calcular las fuerzas de ligadura aplicadas en los puntos M y N (v. p. 221);

3º El sólido está en contacto con el plano por tres puntos no alineados (ejemplo: un taburete). Siendo la resultante de tres fuerzas paralelas y del mismo sentido, una fuerza paralela a ellas y de igual sentido aplicada en un punto interior del triángulo, la condición necesaria de equilibrio consiste en que las fuerzas directamente aplicadas tengan una resultante única que corte el plano en un punto interior del triángulo formado por los tres puntos de apoyo;

4º El sólido tiene en contacto con el plano cierto número de puntos de apoyo. Admitiremos que todos los puntos de apoyo están en el interior o sobre el perímetro de un polígono convexo único (*figura* 81). Este polígono es el de sustentación. La condición necesaria y suficiente de equilibrio radica en que las fuerzas directamente aplicadas tengan una resultante única, perpendicular al plano, dirigida de tal forma que tienda a apoyar el sólido sobre el plano cortando éste en un punto interior del polígono de sustentación (o situado todo lo más sobre el perímetro del mismo).

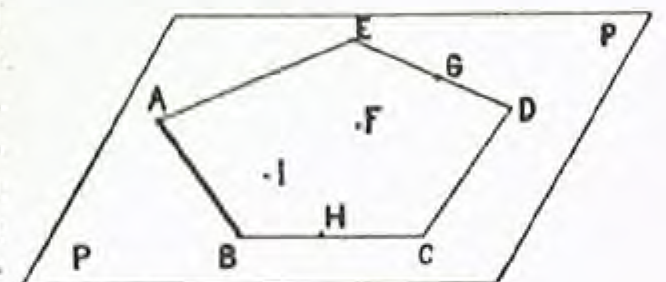


Fig. 81

Por último, si hay superficies y puntos de apoyo, habrá una superficie de sustentación convexa, limitada por las superficies de apoyo y las tangentes comunes, de forma que cualquiera de ellas quede en el interior del área de sustentación (*fig.* 82). La condición necesaria y suficiente de equilibrio es que las fuerzas directamente aplicadas tengan una resultante perpendicular al plano, cortándolo en un punto interior o sobre el contorno de la superficie de sustentación.

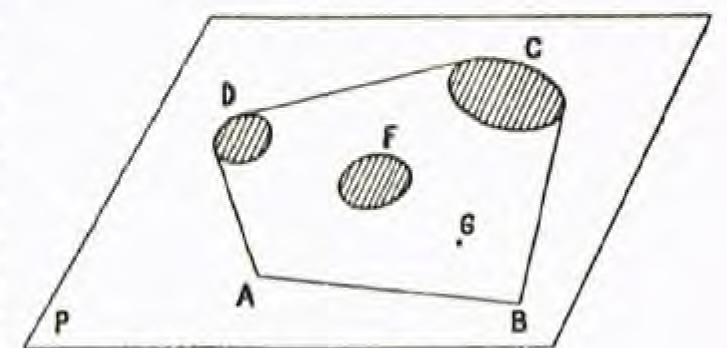


Fig. 82

En estos dos últimos casos, si no existen otras hipótesis, el cálculo de las fuerzas de ligadura es indeterminado.

Equilibrio de un sistema de sólidos. — Para hallar las condiciones de equilibrio de un sistema de sólidos, hay que considerar aisladamente cada uno de ellos: se le agregan las fuerzas de ligadura de los sólidos vecinos y se hallan entonces las condiciones de equilibrio. Repitiendo la operación con todos los sólidos del sistema, se encontrarán las condiciones *necesarias y suficientes* para que el conjunto esté en equilibrio.

Expresando que el conjunto del sistema, o una parte de él solamente está en equilibrio, como si fuera un sólido, se obtienen las condiciones *necesarias* de equilibrio.

Nociones de estática gráfica

La estática gráfica tiene por finalidad substituir el cálculo algebraico por construcciones gráficas en la resolución de los problemas de equilibrio. Sólo veremos algunos problemas, en los que todas las fuerzas están en un mismo plano. En la práctica, los dibujos o diagramas deben ser hechos con cuidado y es necesario emplear una escala para las fuerzas y otra para las longitudes. La teoría se basa esencialmente en la suma geométrica.

Polígono de fuerzas. Polígono funicular. — Consideremos, por ejemplo, el caso de cuatro fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 (*fig.* 83), cuyas líneas

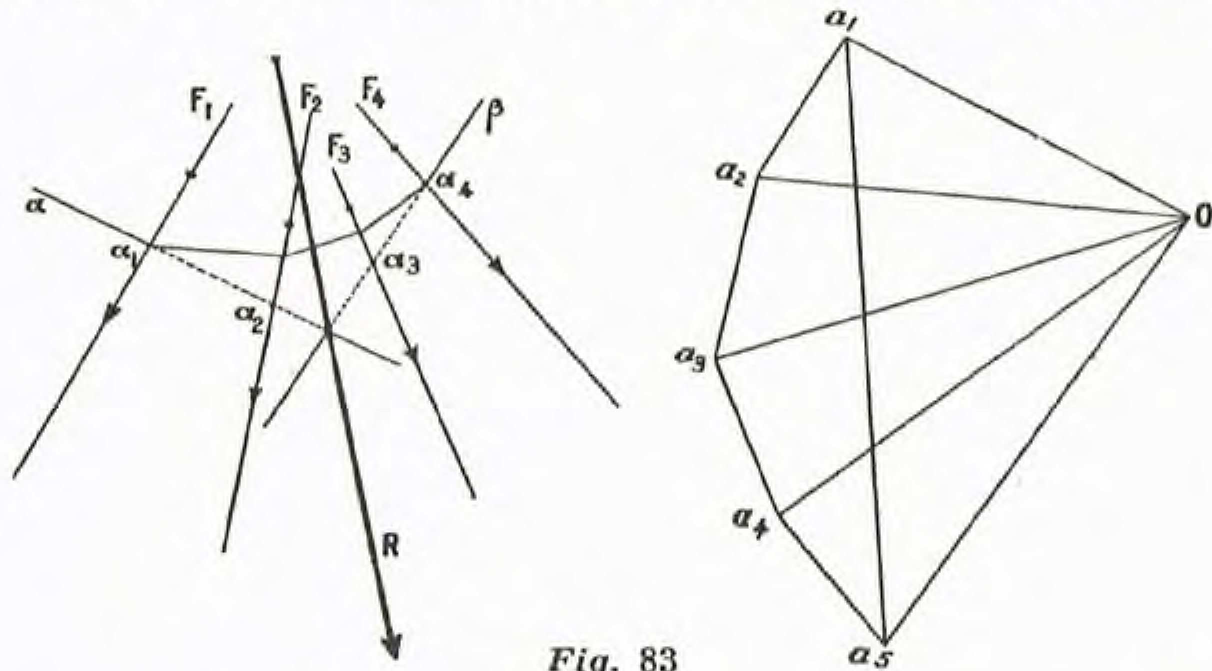


Fig. 83

de acción o soportes están trazados. Tomemos un punto cualquiera a_1, en el plano de la figura y, a partir de a_1, construyamos el polígono de fuerzas (o polígono de *Varignon*): a partir de a_1 llevemos el vector $\overrightarrow{a_1a_2}$ equipolente a la fuerza F_1, a continuación $\overrightarrow{a_2a_3}$ equipolente a F_2, a continuación $\overrightarrow{a_3a_4}$ equipolente a F_3 y por último $\overrightarrow{a_4a_5}$ equipolente a F_4: $\overrightarrow{a_1a_5}$ es la resultante general del sistema de fuerzas dado. Tomemos, siempre en el plano de la figura, un punto O y unámoslo con los vértices del polígono de fuerzas mediante los radios Oa_1, Oa_2, ..., Oa_5.

Por un punto cualquiera α del plano tracemos $\alpha\alpha_1$ paralela al rayo Oa_1, estando α_1 sobre el soporte de F_1; a continuación $\alpha_1\alpha_2$ paralela al rayo Oa_2, estando α_2 sobre el soporte de F_2; a continuación $\alpha_2\alpha_3$ paralela al rayo Oa_3, estando α_3 sobre el soporte de F_3; a continuación $\alpha_3\alpha_4$ paralela a Oa_4, estando α_4 sobre el soporte de F_4; por último, tracemos $\alpha_4\beta$ paralela a Oa_5; la línea poligonal $\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta$, se llama *polígono funicular* de las fuerzas dadas. El punto O se llama polo.

Observación. Si las fuerzas son paralelas, los lados del polígono de fuerzas están situados sobre una misma recta paralela a la dirección de las fuerzas.

Teorema. El empleo del polígono funicular queda justificado por el siguiente teorema: *un sistema de fuerzas cualesquiera situadas en un plano es equivalente a dos fuerzas que tengan por línea de acción los lados extremos del polígono de fuerzas dado, y tengan por intensidades y sentido los de los rayos que unen el polo con los vértices extremos del polígono de fuerzas, estando estos rayos recorridos en el sentido que va del primer vértice al polo y del polo al último vértice.*

Continuemos razonando sobre el ejemplo anterior. Apliquemos las fuerzas en los vértices del polígono funicular, haciéndolas deslizarse sobre sus soportes. Descompongamos F_1 en dos fuerzas que tengan por líneas de acción $\alpha\alpha_1$ y $\alpha_1\alpha_2$. El polígono de fuerzas nos hace ver que las fuerzas $\overrightarrow{a_1O}$ y $\overrightarrow{Oa_2}$ tienen por resultante F_1. Las componentes buscadas son, pues, dos fuerzas, equipolente una de ellas a $\overrightarrow{a_1O}$ y de soporte $\alpha_1\alpha$ y otra a $\overrightarrow{Oa_2}$ y de soporte $\alpha_1\alpha_2$. Asimismo se descompone F_2 en una fuerza equipolente $\overrightarrow{a_2O}$ y de soporte $\alpha_2\alpha_1$ y otra equipolente a $\overrightarrow{Oa_3}$ y de soporte $\alpha_2\alpha_3$. F_3 se descompone en una fuerza equipolente a $\overrightarrow{a_3O}$ y de soporte $\alpha_3\alpha_2$ y otra equipolente a $\overrightarrow{Oa_4}$ y de soporte $\alpha_3\alpha_4$. Por último, F_4 se descompone en una fuerza equipolente a $\overrightarrow{a_4O}$ y de soporte $\alpha_3\alpha_4$ y otra equipolente a $\overrightarrow{Oa_5}$ y de soporte $\alpha_4\beta$.

Las componentes cuyos soportes son los lados del polígono funicular, son directamente opuestas dos a dos. Por lo tanto, se anulan, quedando el sistema de fuerzas reducido a una fuerza equipolente a $\overrightarrow{a_1O}$ y de soporte $\alpha_1\alpha$ y a otra equipolente a $\overrightarrow{Oa_5}$ y de soporte $\alpha_4\beta$.

Casos posibles diferentes. — Un sistema de fuerzas situadas en un plano es equipolente a una fuerza única, a un par o a cero. Se puede averiguar el caso que se presenta mediante construcciones gráficas análogas a las que hemos descrito.

1° El polígono de fuerzas no es cerrado. El sistema de fuerzas es en este caso equivalente a una fuerza única, equipolente a la resultante general del sistema. Los rayos polares extremos (Oa_1 y Oa_5) no coinciden: los lados extremos ($\alpha\alpha_1$ y $\alpha_4\beta$) del polígono funicular se cortan en un punto I. El sistema de fuerzas dado es equivalente a una fuerza única equipolente a la resultante general del sistema y cuya línea de acción pasa por I.

2° El polígono de fuerzas queda cerrado (a_5 coincide con a_1). Los vectores $\overrightarrow{a_1O}$ y $\overrightarrow{Oa_5}$ tienen el mismo soporte, son iguales y de sentido contrario. Los lados extremos ($\alpha\alpha_1$ y $\alpha_4\beta$) del polígono funicular son paralelos. Las dos fuerzas a las que el sistema queda reducido, son iguales, paralelas y de sentido contrario. Este caso comprende otros dos:

a) Los lados extremos del polígono funicular, no coinciden, es decir, el polígono funicular no se cierra; las dos fuerzas forman un par;

b) Los lados extremos del polígono funicular coinciden, es decir, el polígono se cierra. Las dos fuerzas son directamente opuestas. El sistema de fuerzas es equivalente a cero. Hay equilibrio.

Observación. La condición necesaria y suficiente de equilibrio consiste en que tanto el polígono de fuerzas como el polígono funicular se cierren.

Aplicaciones. 1° *Determinación gráfica del centro de gravedad de una superficie en forma de doble* T (fig. 84).

Sea una superficie homogénea en forma de doble T. Está compuesta de tres rectángulos ABMN, CDKL y EFHI, de pesos p_1, p_2 y p_3 y cuyos centros de gravedad son g_1, g_2 y g_3, situados en los centros de gravedad de los rectángulos. El centro de gravedad de la superficie total, estará sobre el eje de simetría de la figura. Vamos, mediante los procedimientos de la estática gráfica, a determinar la línea de acción de la resultante de las tres fuerzas p_1, p_2 y p_3. Tomemos por polo un punto O. El polígono de fuerzas se reduce a un segmento de recta. Se construye el polígono funicular como se explicó en el párrafo anterior. Los lados extremos se cortan en el punto *e*. Se traza por *e* una paralela a las fuerzas. Ésta corta el eje de simetría en el punto G, que será el centro de gravedad buscado.

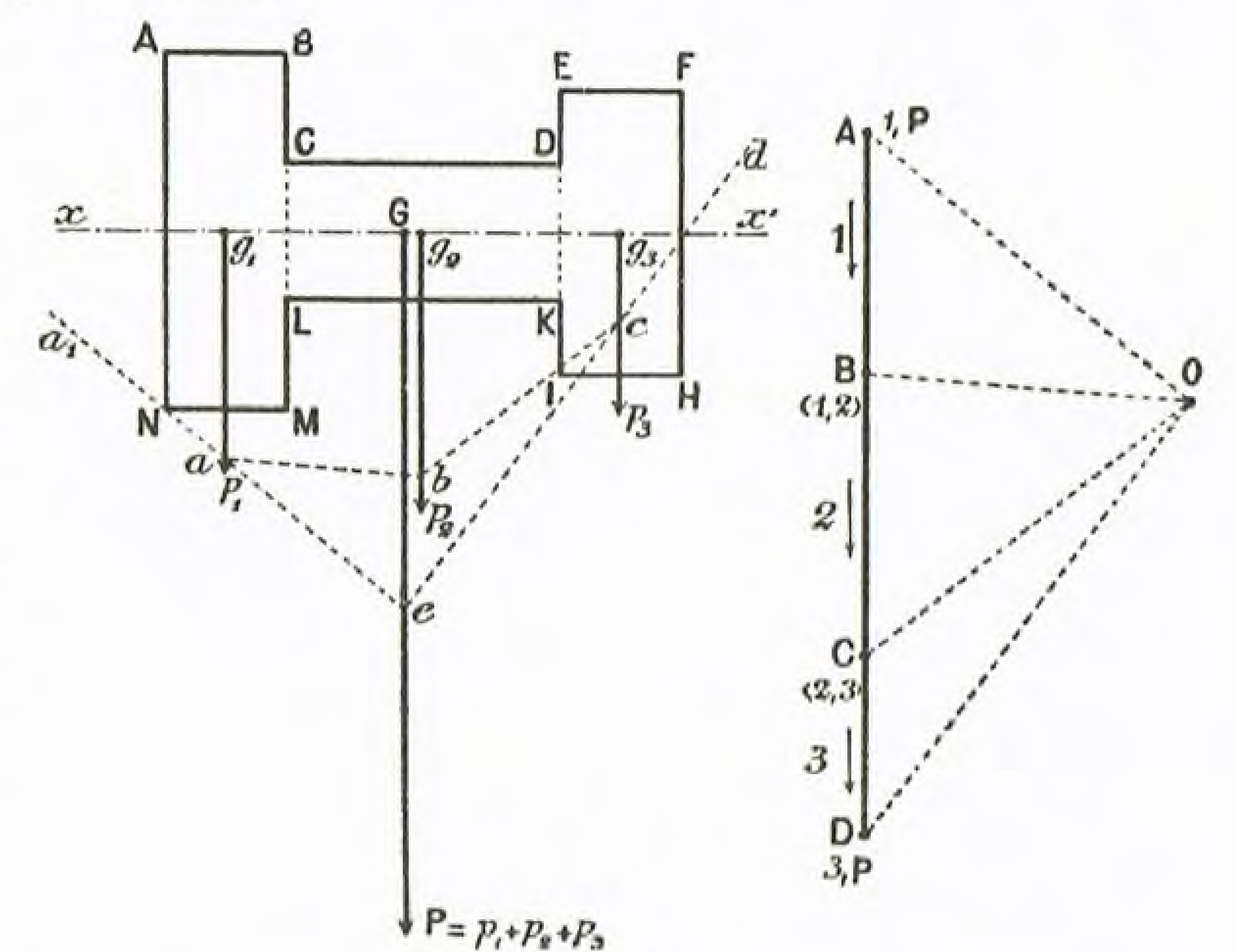


Fig. 84

2° *Determinación gráfica del centro de gravedad de una superficie rectangular que tiene un orificio circular, cuyo centro está sobre el eje de simetría de la figura.*

En este caso (*fig.* 85), se puede considerar la superficie bajo la acción de dos fuerzas paralelas y de sentido contrario: 1°, el peso p_1 del rectángulo, suponiéndole sin orificio, aplicado en su centro de gravedad g_1 que coincide con el centro de gravedad de la figura; 2°, una fuerza vertical p_2, igual y de sentido contrario al peso de la parte que corresponde al orificio, aplicada en el centro del mismo.

Fig. 85

Para hacer la construcción gráfica, tracemos a partir de un punto arbitrario A un vector $\overrightarrow{AB}$ igual y paralelo a p_1, y después, a partir de B, un vector $\overrightarrow{BC}$ igual y paralelo a p_2; unamos los puntos A, B y C con otro punto arbitrario O.

Tracemos a continuación por un punto a_1, situado en el plano de la superficie, una recta a_1a_2 paralela a OA, una recta *ab* paralela a OB y una recta *bd* paralela a OC, cuya intersección con a_1a dará un punto *d* en la vertical que pasa por el centro de gravedad de la superficie. La intersección de la vertical que pasa por *d* con el eje de simetría

xx' es el centro de gravedad buscado G. El peso resultante estará representado por el vector vertical $\overrightarrow{GP}$, de intensidad igual a $p_1 - p_2$.

OBSERVACIÓN. En los dos ejemplos anteriores, la determinación del centro de gravedad ha sido facilitada por el hecho de que había un eje de simetría. Cuando éste no existe, el polígono funicular nos da la línea de acción o soporte de la resultante, es decir, una primera recta sobre la que se encuentra el centro de gravedad. Para hallar una segunda recta, se hacen girar todas las fuerzas un mismo ángulo (por ejemplo, un ángulo recto): construyendo de nuevo el polígono funicular, se obtiene esta segunda recta, cuya intersección con la primera nos da el centro de gravedad.

3º *Una viga horizontal de peso* P (*fig.* 86), *aplicado en* G, *está sometida, además, a dos fuerzas verticales* F_1 *y* F_2 *que actúan respectivamente en* A *y en* B: *la viga está apoyada en dos puntos* M *y* N. *Determinar gráficamente las reacciones* R_1 *y* R_2 *de los apoyos* M *y* N.

No conocemos en un principio el origen R_1 del polígono de fuerzas; no obstante, construiremos los vectores $\overrightarrow{\alpha_2\alpha_3}$, $\overrightarrow{\alpha_3\alpha_4}$, $\overrightarrow{\alpha_4\alpha_5}$ equipolentes a las fuerzas conocidas F_1, P, F_2. Tomemos un punto cualquiera O del plano como polo. Tracemos el polígono funicular a partir de su segundo lado, que es paralelo a α_2O, empezando a partir de M. A continuación de $M\alpha_3$ trazamos sucesivamente $\alpha_3\alpha_4$ paralela a α_3O, $\alpha_4\alpha_5$ paralela a α_4O, $\alpha_5\alpha_6$ paralela a α_5O. *Como la viga está en equilibrio, el polígono funicular será cerrado.* Por consiguiente, el primer lado y el último del polígono funicular estarán sobre el soporte $M\alpha_6$. Trazando por el polo O la paralela $O\alpha_1$ a $M\alpha_6$, determinaremos el primer punto α_1 del polígono de fuerzas. La reacción $\overrightarrow{R_1}$ será equipolente a $\overrightarrow{\alpha_1\alpha_2}$ y la reacción $\overrightarrow{R_2}$ equipolente a $\overrightarrow{\alpha_5\alpha_1}$.

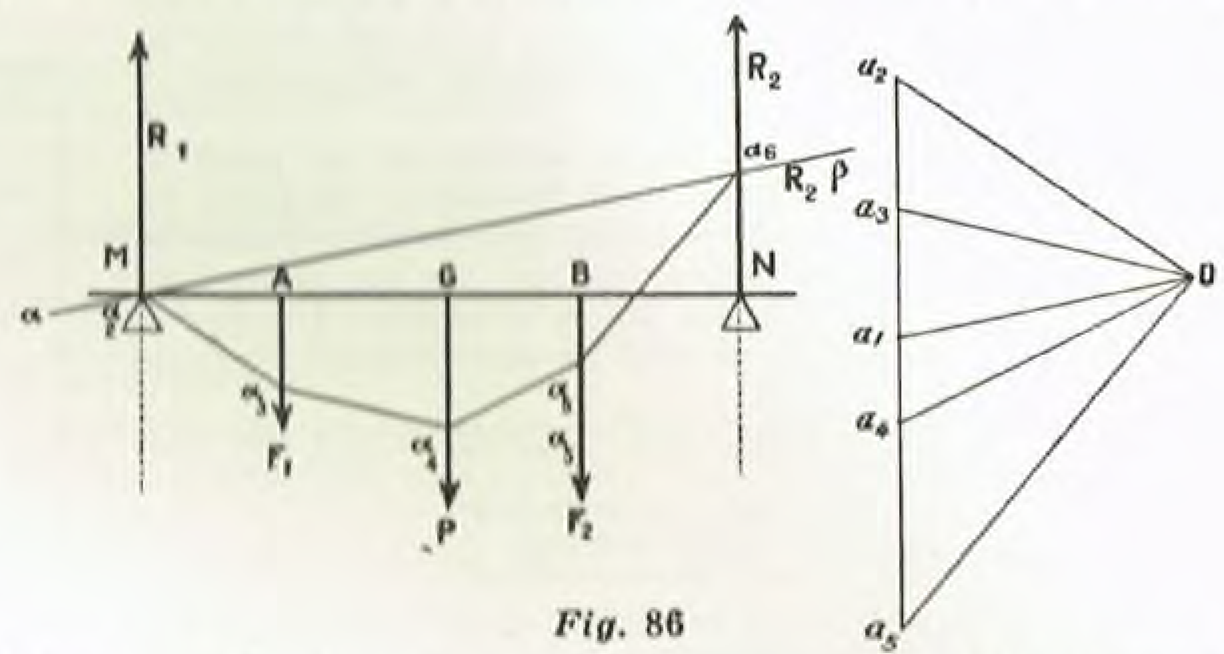


Fig. 86

Cinemática

Objeto de la cinemática. Medida algebraica del tiempo. — **Movimiento rectilíneo:** Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento rectilíneo en general. Velocidad media. Velocidad en el instante t_0. Aceleración de un movimiento rectilíneo. Diagramas de espacios, velocidades y aceleraciones. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Movimiento oscilatorio (o vibratorio simple). Estudio del movimiento. — **Movimiento curvilíneo:** Velocidad media. Velocidad instantánea. Hodógrafa. Aceleración. Expresiones de las proyecciones de la velocidad y de la aceleración sobre un sistema de ejes coordenados. Proyecciones de la aceleración. Propiedad de los momentos. Movimiento circular. Ejemplo: movimiento curvilíneo de proyectiles en el vacío. Componentes del vector velocidad en coordenadas polares. Componente tangencial del vector aceleración. — **Movimientos simples de un cuerpo sólido:** Movimiento de traslación. Movimiento de rotación de un sólido. — **Cambio del sistema de referencia. Composición de los movimientos:** Teorema fundamental de la composición de las velocidades. Movimiento helicoidal. Movimiento de una rueda sobre el suelo. Composición de las aceleraciones. Caso particular importante. Acción centrífuga

Objeto de la cinemática. — La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos en función del tiempo, e independientemente de las causas que lo producen.

El movimiento es un fenómeno esencialmente relativo: siempre se estudia respecto a un sistema de referencia. Un marinero que anda sobre su barca, tiene, si se toma como sistema de referencia, cierto movimiento con relación a ella: este movimiento lo notará un observador que esté también sobre la barca, pero otro observador situado en la orilla percibirá un movimiento distinto: es el movimiento con relación a la tierra tomada como referencia.

OBSERVACIONES. 1º La mayoría de los movimientos reales se estudian tomando la tierra como sistema de referencia. En astronomía se toma para ciertas cuestiones un sistema de referencia ligado al sistema solar, planteándose así —éste es uno de los problemas más delicados de la ciencia actual— la existencia de un sistema de referencia absoluto.

2º Cuando en estática hemos estudiado el equilibrio, es decir, la ausencia de movimiento en los cuerpos, se ha hecho implícitamente respecto a un sistema de referencia.

Para tratar mediante el cálculo las cuestiones establecidas por la cinemática, se toman sistemas de referencia ligados a los sistemas de coordenadas. Un punto está en movimiento cuando sus coordenadas son funciones variables del tiempo. Se llama trayectoria el lugar geométrico de los puntos que, ligados al sistema de referencia, indican las posiciones sucesivas que ocupa el punto en movimiento.

Medida algebraica del tiempo. — Se elige un instante por origen y una unidad (por ejemplo, el segundo). Cada instante queda determinado por un número algebraico. Si un hecho tiene lugar después del instante tomado como origen, se determina por un número positivo que tiene como valor absoluto el intervalo de tiempo que separa el instante origen de aquel en que sucede el hecho. Si tiene lugar antes del instante origen, queda determinado por un número negativo. Los números algebraicos determinan de esta forma las *fechas* de los sucesos.

La duración de un fenómeno es la diferencia entre la fecha de su terminación y la de su comienzo.

EJEMPLO. Si se toma por origen de tiempos el 21 de marzo, a mediodía legal en Madrid, y por unidad la hora ordinaria, un suceso que ocurriera el mismo día a las 4 de la tarde, tendría lugar en el tiempo + 4: otro suceso que hubiera ocurrido a las 10 de la mañana, el mismo día, habría tenido lugar en el tiempo — 2.

Movimiento rectilíneo

DEFINICIÓN. *Los movimientos rectilíneos son aquellos que tienen por trayectoria una recta. Si se orienta esta recta, y se elige sobre la misma un punto de referencia como origen, un móvil sobre dicha recta tendrá una abscisa que será función del tiempo.*

Movimiento rectilíneo uniforme. — Es el movimiento rectilíneo en el que los espacios recorridos por el móvil, que va siempre en el mismo sentido, son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos. La relación constante entre el espacio y el tiempo, es la *velocidad* del movimiento. Si el movimiento va dirigido en sentido positivo, la velocidad es positiva, y si va en sentido negativo, la velocidad es negativa.

OBSERVACIÓN. Lo que llamamos velocidad, en la acepción vulgar de la palabra, es el valor absoluto de la velocidad matemática.

TEOREMA. *Todo movimiento rectilíneo uniforme tiene una ecuación de primer grado con relación al tiempo.*

Sea v la velocidad del movimiento rectilíneo uniforme considerado. Si en el instante t_0 el móvil está en el punto M_0 de abscisa x_0 (*fig.* 87) y en el instante t está en el punto M de abscisa x, puesto que el espacio recorrido es proporcional al tiempo:

$$(1)\qquad \frac{x - x_0}{t - t_0} = v.$$

$$(2)\qquad x = vt + x_0 - vt_0.$$

Esta ecuación, que define la posición del punto M con relación al tiempo, se denomina ecuación (o ley) del movimiento: es lineal, es decir, de primer grado con respecto a t.



Fig. 87

TEOREMA. *Recíprocamente, si la abscisa* x *de un móvil, animado de un movimiento rectilíneo, es una ecuación de primer grado respecto al tiempo, el movimiento es uniforme.*

Sea $x = at + b$ la ley del movimiento. En el instante t_1, el móvil está en M_1 de abscisa x_1, $x_1 = at_1 + b$. En el instante t_2, el móvil está en M_2 de abscisa x_2, $x_2 = at_2 + b$. De estas dos igualdades se deduce que

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = a \quad \text{o} \quad \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = a.$$

Lo que nos demuestra que el espacio recorrido es proporcional al tiempo: el movimiento es uniforme y su velocidad es a.

OBSERVACIÓN. b es la abscisa del móvil en el instante de tiempo $t = 0$.

Representación de la velocidad. — Siendo la velocidad una magnitud algebraica, se puede representar por un vector cuya línea de acción o soporte sea la trayectoria, indicando al mismo tiempo la magnitud y sentido de la velocidad.

Diagrama de los espacios. — Es la curva representativa de la función $x = at + b$; los tiempos se toman sobre el eje de las abscisas, y los espacios recorridos, sobre las ordenadas: el diagrama es una recta cuyo coeficiente angular es la velocidad (*figura* 88).

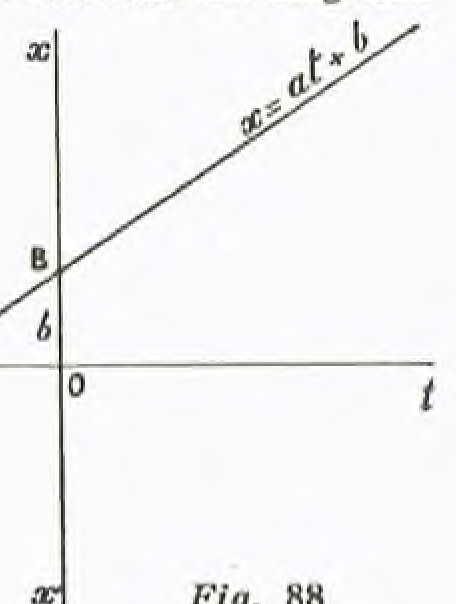


Fig. 88

Movimiento rectilíneo en general. — Lo estudiado anteriormente es sólo para el caso de que el móvil tenga un movimiento rectilíneo uni-

forme. De forma más general, todo movimiento *rectilíneo* puede representarse por la función $x = f(t)$, entre el tiempo y la abscisa del punto (o espacio recorrido). Esta función es la ecuación (o ley) del movimiento. Vamos a demostrar cómo se pueden deducir las características del movimiento del estudio de esta ecuación.

Velocidad media. — Sea M_0 la posición de un móvil en el instante t_0 y M_1 su posición en el instante t_1. Se llama velocidad media (entre los dos instantes t_0 y t_1) la velocidad de un móvil ficticio que recorre el eje xx' con un movimiento uniforme, pasando por el punto M_0 en el instante t_0 y por el punto M_1 en el instante t_1. El valor de esta velocidad media es

$$v_m = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0},$$

$$v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

OBSERVACIONES. 1° La velocidad media puede ser representada por un vector.

2° La velocidad media es la que se menciona generalmente, por ejemplo, cuando se habla de la velocidad de un tren entre dos estaciones.

Velocidad en el instante t_0. — Para darse cuenta exacta de lo que sucede en el instante t_0, interesa que t_1 esté lo más cerca posible de t_0 (bien sea por encima o por debajo de él). Se llega así al concepto de la velocidad en el instante t_0.

Por definición, la velocidad en el instante t_0 es el límite hacia el que tiende la velocidad media cuando t_1 tiende a t_0.

Ahora bien, el límite de $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$, cuando t_0 tiende a t_1, es la derivada de la función $f(t)$.

Por lo tanto, la velocidad de un punto animado de un movimiento rectilíneo es la derivada con respecto a t *de la abscisa o espacio recorrido:*

$$v = f'(t).$$

OBSERVACIÓN. En cada instante la velocidad puede estar representada por un vector.

EJEMPLO PRÁCTICO. En balística es muy importante conocer la velocidad del proyectil en el preciso instante de su salida por el tubo del cañón. Un procedimiento moderno para obtenerla consiste en hacer que el proyectil corte dos circuitos eléctricos colocados delante de la boca de fuego, muy cerca uno del otro (algunos centímetros), y anotar, gracias a un sistema de registro, el tiempo que separa esas dos rupturas. Se halla así una velocidad media muy aproximada a la velocidad de salida por la boca del tubo.

Aceleración de un movimiento rectilíneo. — Este nuevo concepto indica la forma más o menos rápida de cómo varía la velocidad. Aunque menos intuitivo que el concepto de velocidad, lo es también en cierto modo: cuando un automovilista habla de la "reprise" de su coche, se refiere a su aceleración.

Se llama aceleración media, entre dos instantes t_0 y t_1, el valor algebraico de la relación $\dfrac{f'(t_1) - f'(t_0)}{t_1 - t_0}$.

Se llama aceleración en el instante t_0 y se designa por la letra griega γ (gamma) el límite hacia el que tiende la aceleración media cuando t_1 tiende a t_0. Se ve que en cada instante la aceleración es la derivada de la velocidad.

Como la velocidad es la derivada del espacio, la aceleración en los movimientos rectilíneos es la derivada segunda del espacio.

En definitiva, si $x = f(t)$, $v = f'(t)$ o bien $v = \dfrac{d^2x}{dt}$

$$\gamma = f''(t) \quad \text{o bien} \quad \gamma = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

OBSERVACIONES. 1° La aceleración, medida por un valor algebraico, puede representarse por un vector cuya línea de acción es la trayectoria y su origen M.

2° Del estudio de todos los casos posibles diferentes, se deduce que si la velocidad y la aceleración son del mismo signo, el valor absoluto de la primera aumenta: el móvil va cada vez más rápido. El movimiento es acelerado.

Si, por el contrario, la velocidad y la aceleración son de signos contrarios, el valor absoluto de la velocidad disminuye: el móvil va cada vez más despacio. El movimiento es retardado.

Los dos principales problemas de la cinemática rectilínea son los siguientes:

1° Conocida la ley del movimiento $x = f(t)$, deducir sus características.

2° Conociendo ciertas características del movimiento, hallar su ley.

Si se conoce la aceleración, se deduce la velocidad por una integración: de la velocidad se deduce el espacio o abscisa del móvil por una nueva integración. En cada una de estas integraciones se introduce una constante: éstas dependen de las condiciones iniciales del problema.

Diagramas de espacios, velocidades y aceleraciones. — El diagrama de espacios es la curva representativa de la función $x = f(t)$; el de velocidades es la curva representativa de la función $v = f'(t)$ y el de aceleraciones es la curva representativa de $\gamma = f''(t)$.

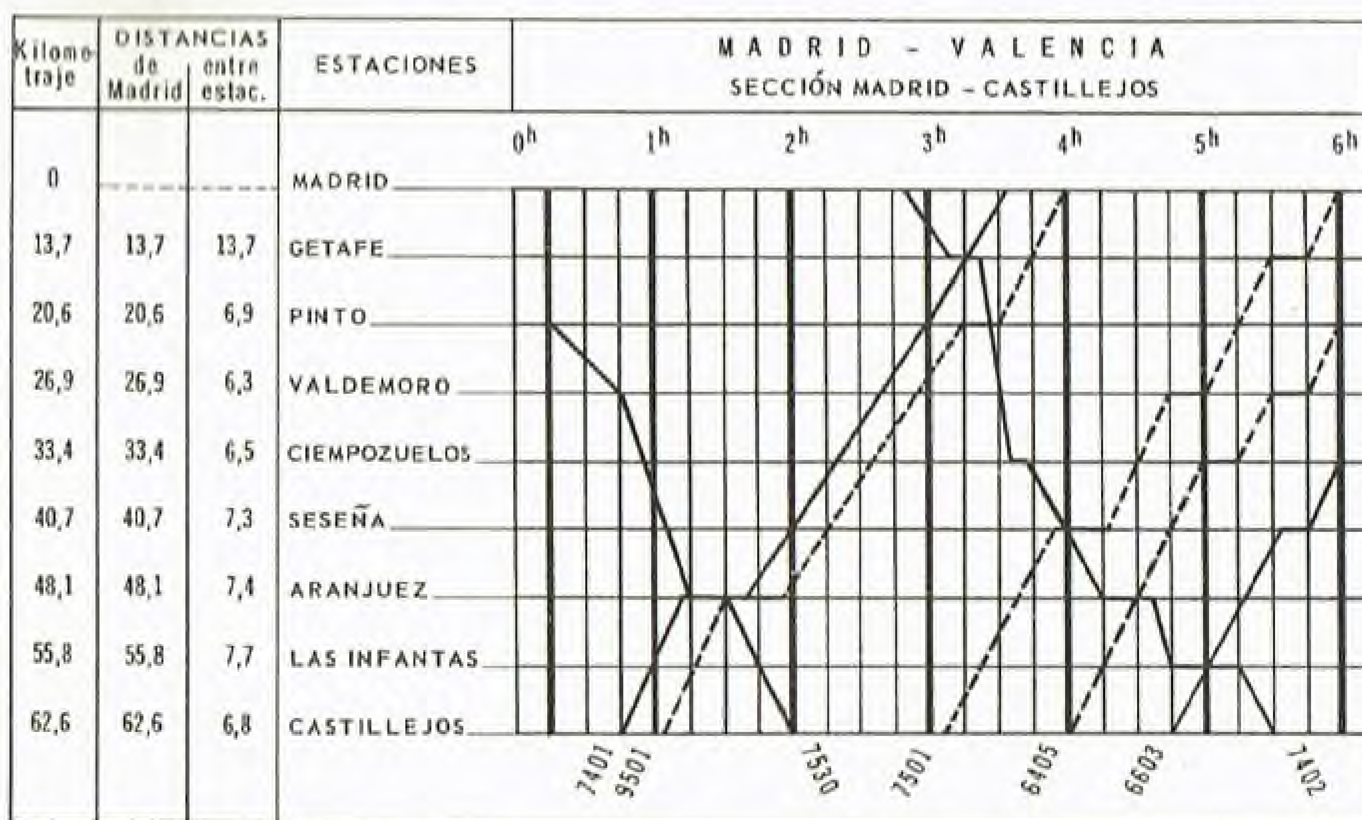


Fig. 89. — Gráfico de explotación de una vía única. Un tren como el 7401 debe esperar obligatoriamente en la estación de Aranjuez, que dispone de vías accesorias, el tren de sentido contrario 7530, antes de reemprender su marcha

Aplicaciones prácticas: gráficos de ferrocarriles. — En los servicios de explotación de ferrocarriles se utilizan gráficos (*fig.* 89) que se obtienen suponiendo que la línea de ferrocarril es una recta y que los trenes llevan una velocidad uniforme entre cada dos estaciones. Los diagramas se componen de segmentos de rectas inclinadas, que representan la marcha de los trenes, y de segmentos horizontales (o rellanos), que representan las paradas. Si es vía única, los cruces deben hacerse necesariamente en las estaciones. En el caso de vía doble, los expresos y rápidos deben adelantar a los trenes correos y de mercancías en las estaciones. Si se quiere hacer circular un tren extraordinario, su diagrama debe poderse dibujar sobre el cuadro general de diagramas.

Movimiento rectilíneo uniformemente variado. — Un movimiento es uniformemente variado cuando su aceleración es constante sin ser nula.

TEOREMA. *Para todo movimiento uniformemente variado, su ley es una función de segundo grado con respecto al tiempo.*

Sea, en efecto, γ el valor *constante* de la aceleración. La velocidad es una integral de la aceleración, por lo tanto

(1) $\quad v = \gamma t + b$, siendo b una constante.

Siendo el espacio o abscisa del móvil la integral de la velocidad, su valor será

(2) $$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + bt + c.$$

Las constantes b y c nos vienen dadas, bien sea directamente o bien por las condiciones iniciales del problema.

RECÍPROCO. *Todo movimiento rectilíneo en el que la abscisa o espacio recorrido sea una función de segundo grado con respecto al tiempo, es un movimiento uniformemente variado.*

Sea (1) $x = at^2 + bt + c$. Derivando sucesivamente se obtiene

(2) $v = 2at + b$ y (3) $\gamma = 2a$.

Por lo tanto, la aceleración es constante.

Significado de las constantes. — a es la mitad de la aceleración. Si se hace $t = 0$, se obtiene $v_0 = b$, $x_0 = c$. Por lo tanto, b es la velocidad del móvil en el instante origen, y c es la abscisa del mismo que corresponde a dicho instante. Se puede escribir, por tanto, la ecuación del movimiento de la siguiente forma:

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0.$$

Simplificación de la ecuación. — Sea la ecuación

$$x = at^2 + bt + c.$$

Se puede escribir también de la siguiente forma:

$$x = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Tomando como nuevo origen de abscisas el punto O′, de abscisa $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$, y como nuevo origen de tiempos el instante $-\dfrac{b}{2a}$, se obtiene como nueva ley para el mismo movimiento $X = a\,T^2$. La velocidad es entonces $V = 2at$.

Relación entre la velocidad y la abscisa. — Sea la ecuación

(1) $x = \dfrac{1}{2}\gamma t^2 + bt + c$ y (2) $v = \gamma t + b$.

Substituyendo en (1) el valor de t obtenido de la (2), se deduce la siguiente ecuación (3) $v^2 - b^2 = 2\gamma(x - c)$.

Esta ecuación nos dice que si durante el movimiento el móvil pasa por el mismo punto, lleva la misma velocidad en valor absoluto en cada pasada.

Descripción del movimiento. — Hagamos un cuadro (*fig.* 90) y coloquemos en él el signo de la aceleración y el signo y variación de la abscisa, y veamos qué sucede cuando varía la aceleración.

Si $\gamma > 0$, el cuadro nos da los siguientes resultados:
Para el tiempo infinito, el móvil está en el infinito en el sentido positivo: su velocidad, que es infinita, está dirigida en sentido negativo. El móvil se desplaza en sentido negativo (*fig.* 91). Siendo la velocidad y la aceleración de signo contrario, el móvil va cada vez más despacio. Llega de esta forma, en el instante $t = -\dfrac{b}{2a}$, al punto M de abscisa $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$. A partir de este momento se dirige en sentido positivo con una velocidad cada vez mayor. (Esta velocidad llegará a ser infinita en el tiempo infinito). En cada ida y vuelta, la velocidad, en la acepción corriente de la palabra, es la misma cuando el móvil pasa por el mismo punto.

Si γ es negativa, se obtiene un resultado análogo: el móvil parte del infinito negativo con una velocidad negativa.

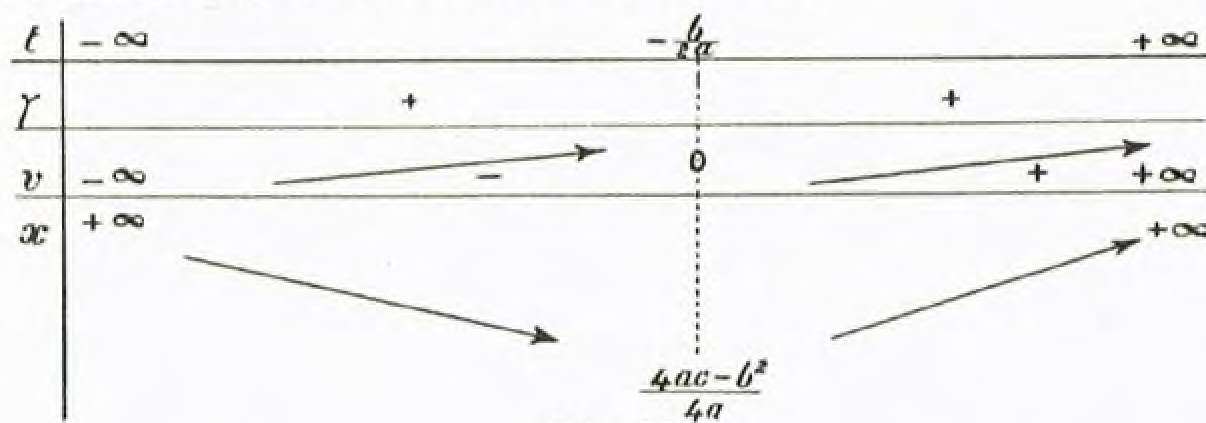


Fig. 90

La velocidad disminuye proporcionalmente al tiempo. Después, el móvil se detiene y vuelve a partir en sentido contrario con una velocidad que crece uniformemente (*fig.* 92).

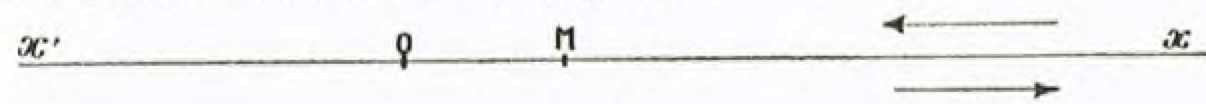


Fig. 91

Aplicación a la caída libre de los cuerpos. — Se demuestra en física (tubos de Newton, máquina de Morin) que un punto pesante que cae en el vacío sin velocidad inicial, tiene por trayectoria la vertical. Si la caída se limita a un espacio reducido (algunos kilómetros en anchura y algunas decenas de metros en altura), la aceleración es constante; el movimiento es uniformemente acelerado. Esta aceleración se denomina aceleración de la gravedad: se designa por la letra g. Está dirigida hacia abajo. En Madrid tiene por valor,

$$g = 979^{cm},984$$

por segundo.

Fig. 92

Movimiento oscilatorio (o vibratorio simple). — Un movimiento oscilatorio (o vibratorio) simple, es un movimiento rectilíneo cuya ecuación es (1)

$$x = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t.$$

En este caso la abscisa del móvil se llama *elongación*. Puesto que *el movimiento es rectilíneo*, la velocidad y la aceleración se obtienen derivando respecto al tiempo

(2) $v = -a\omega \operatorname{sen} \omega t + b\omega \cos \omega t.$
(3) $\gamma = a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t.$

La abscisa, la velocidad y la aceleración son funciones periódicas. Toman el mismo valor al cabo del tiempo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; todas las características del movimiento se vuelven a producir al cabo de ese tiempo T (T es el período).

Significación de las constantes. — Para $t = 0$: $x_0 = a$, $v_0 = b\omega$. La ecuación del movimiento se puede, en este caso, escribir así:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

Relación entre la elongación y la velocidad. — Elevando el cuadrado x y $\dfrac{x}{\omega}$, y sumando miembro a miembro, se obtiene

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = x^2_0 + \frac{v^2_0}{\omega^2}.$$

Esta igualdad nos dice que cada vez que el móvil pasa por el mismo punto, su velocidad tiene el mismo valor absoluto.

Relación entre la elongación y la aceleración. — Se ve inmediatamente que $\gamma = -\omega^2 x$. Esta ecuación es muy importante: la aceleración está siempre dirigida hacia el origen y su valor absoluto es proporcional a la elongación y de sentido contrario.

Simplificación de la ecuación del movimiento. — Escribamos $x = a\,(\cos \omega t + \dfrac{b}{a} \operatorname{sen} \omega t)$.

Sea φ un ángulo tal que $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$.

$$x = a\,(\cos \omega t + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{sen} \omega t) =$$
$$= \frac{a}{\cos \varphi}\,(\cos \varphi \cos \omega t + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega t),$$
$$x = \frac{a}{\cos \varphi} \cos\,(\omega t - \varphi).$$

Cambiemos el origen de tiempos y tomemos como nuevo origen el instante $t_0 = \dfrac{\varphi}{\omega}$. Haciendo $\dfrac{a}{\cos \varphi} = A$, la ecuación se convierte en $x = A \cos \omega t$.

Estudio del movimiento. — Estudiemos el movimiento sobre la ecuación simplificada

$$x = A \cos \omega t,$$
$$v = -A\omega \operatorname{sen} \omega t \qquad \gamma = -A\omega^2 \cos \omega t.$$

Es suficiente estudiar el movimiento en el período de 0 a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Hagamos un cuadro (*fig.* 93) y pongamos en él el signo de la aceleración y el signo y variación de la velocidad.

En el tiempo cero, el móvil está en A (*fig.* 94), su velocidad es nula y su aceleración está dirigida hacia el origen O. En el intervalo $(0, \dfrac{T}{4})$, la abscisa disminuye; el móvil se dirige hacia el origen. Siendo la velocidad y la aceleración del mismo signo, el móvil aumenta su velocidad, pero el valor absoluto de la aceleración disminuye. En el tiempo $t = \dfrac{T}{4}$, el móvil pasa por el origen O. Su aceleración es nula. El valor absoluto de la velocidad es máximo: tiene por valor A. En el intervalo $(\dfrac{T}{4}, \dfrac{T}{2})$, el móvil continúa desplazándose en sentido ne-

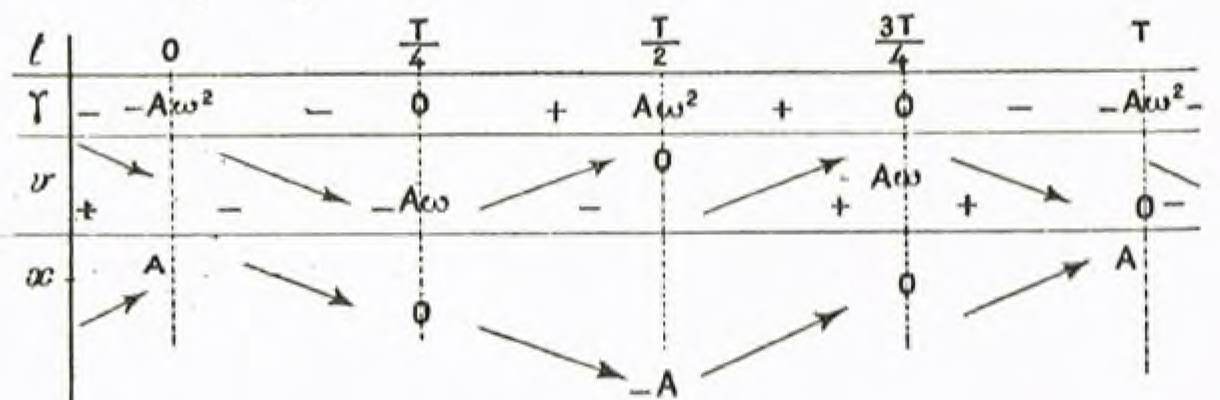


Fig. 93

gativo, pero siendo su velocidad y aceleración de signos contrarios, el móvil tiende a pararse. En el tiempo $\dfrac{T}{2}$, el móvil llega a A', simétrico de A, con una velocidad nula y una aceleración dirigida a O. De $\dfrac{T}{2}$ a $\dfrac{3T}{4}$, el móvil se desplaza en el sentido positivo, y va cada vez más rápido. En el tiempo $\dfrac{3T}{4}$, vuelve a pasar por O con una aceleración nula y una velocidad máxima. De $\dfrac{3T}{4}$ a T, el móvil continúa desplazándose en sentido positivo. Va disminuyendo de velocidad y en el tiempo T llega a A con una velocidad nula.

Fig. 94

Las mismas características vuelven a aparecer de T a 2T, de 2T a 3T, etc. El móvil oscila indefinidamente de A a A'.

El punto O es el centro de las oscilaciones. La longitud AA' se llama amplitud. La frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo: es la inversa del período.

Movimiento curvilíneo

El movimiento es curvilíneo si la trayectoria es una curva plana o no plana, es decir, una curva cualquiera. Sobre esta curva se elige un origen O y un sentido. Sea M un punto de la curva: se llama abscisa curvilínea s el número algebraico que tiene por valor absoluto la longitud del arco OM y por signo + o —, según que el móvil, para ir de O a M, tenga que desplazarse en sentido positivo o negativo. El movimiento queda definido si se conoce la ley del mismo $s = f(t)$, que da la abscisa curvilínea o espacio recorrido en función del tiempo. En particular, si $f(t)$ es una función lineal, el movimiento es uniforme:

$$s = at + b.$$

Velocidad media. — Sea M_1 la posición del móvil en el instante t_1, y M_2 su posición en el instante t_2 (*fig.* 95): se llama velocidad media entre los instantes t_1 y t_2, la velocidad de un móvil ficticio animado de un movimiento rectilíneo uniforme, de modo que en el instante t_1 pase por el punto M_1 y en el t_2 por el M_2.

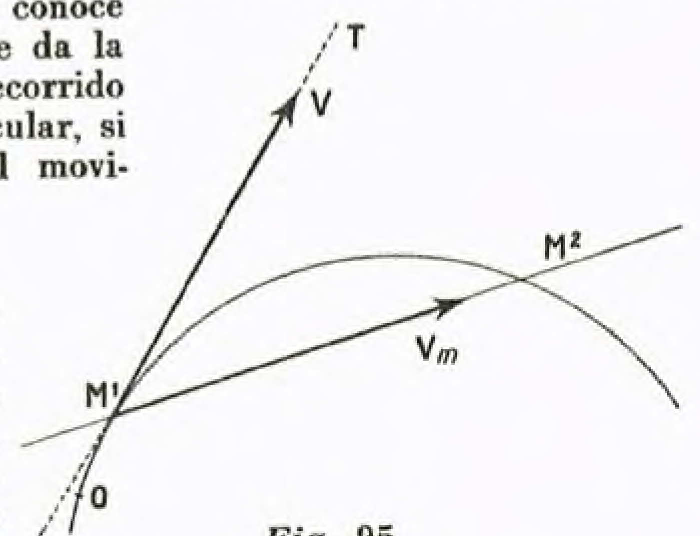


Fig. 95

Esta velocidad puede representarse por un vector $\overrightarrow{MV_m}$ de origen M_1, cuya línea de acción es la recta M_1M_2 y de valor algebraico

$$\overrightarrow{MV_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

Velocidad instantánea. — Se llama velocidad en el instante t_1, el límite hacia el que tiende, en magnitud, dirección y sentido, el vector velocidad media entre t_1 y t_2 cuando t_2 tiende hacia t_1; se obtiene como límite un vector llamado vector velocidad.

Cuando el punto M_2 tiende hacia el M_1, la recta M_1M_2 se convierte en la tangente a la trayectoria en el punto M_1. Hallemos el valor absoluto del vector velocidad.

Podemos escribir:

$$M_1V_m = \frac{\text{cuerda } M_1M_2}{t_2 - t_1} = \frac{\text{cuerda } M_1M_2}{\text{arco } M_1M_2} \cdot \frac{\text{arco } M_1M_2}{t_2 - t_1}.$$

Si $s = f(t)$ es la ley del movimiento,

$$M_1V_m = \frac{\text{cuerda } M_1M_2}{\text{arco } M_1M_2} \left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right|.$$

Ahora bien, cuando t_2 tiende hacia t_1, la relación $\dfrac{\text{cuerda } M_1M_2}{\text{arco } M_1M_2}$ tiende hacia 1, la relación $\left| \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right|$ tiene por límite el valor absoluto de la derivada de $f(t)$ para $t = t_1$; este límite es la velocidad en su acepción vulgar.

Teniendo en cuenta la orientación de la trayectoria y examinando todos los casos posibles diferentes, se llega al siguiente resultado de gran importancia:

En todo instante el vector velocidad tiene como línea de acción la tangente a la trayectoria, y, si dicha tangente está orientada en el mismo sentido que la curva, la medida algebraica del vector velocidad es la derivada de la abscisa o espacio recorrido respecto al tiempo.

$$\text{Si } s = f(t), \qquad v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

EJEMPLO. Si la función s es lineal, $s = at + b$, la intensidad del vector velocidad es constante: $v = |b|$.

Hodógrafa. Aceleración. — Definido lo que es el vector velocidad, vamos a definir un vector de importancia capital: el vector aceleración, que nos permite conocer las variaciones del vector velocidad en dirección e intensidad, y del que veremos en dinámica toda la importancia que tiene.

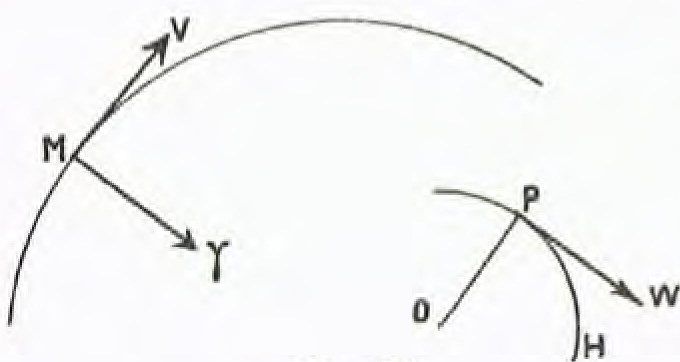


Fig. 96

Sea $\overrightarrow{MV}$ el vector velocidad en el instante t (*fig.* 96). Por un punto fijo O, trazamos el vector $\overrightarrow{OP}$ equipolente al $\overrightarrow{MV}$.

Imaginemos un segundo móvil que en cada instante coincida con el punto P. Este móvil tiene como trayectoria una curva H, llamada la *hodógrafa* del movimiento. O es el polo de la hodógrafa.

Desplazándose el punto M, en cada instante habrá en el punto P un vector velocidad $\overrightarrow{PW}$. El vector $\overrightarrow{M\gamma}$, equipolente al vector $\overrightarrow{PW}$, es la *aceleración* del móvil en el instante t.

OBSERVACIÓN. La aceleración es independiente del polo O de la hodógrafa.

EJEMPLOS. 1° Si el movimiento es rectilíneo y uniforme, la hodógrafa se reduce a un punto: la aceleración es nula.

2° Si el movimiento es rectilíneo, la hodógrafa es una recta paralela a la trayectoria. Si el movimiento es uniformemente variado, la hodógrafa es recorrida con velocidad uniforme.

3° Si la trayectoria está situada en un plano y se toma como polo de la hodógrafa un punto del mismo, la hodógrafa estará toda ella situada en el plano. Por lo tanto, el vector aceleración estará en el plano de la trayectoria.

4° Si el movimiento es uniforme, la hodógrafa es una curva situada sobre la superficie de una esfera. Si el movimiento es uniforme y la trayectoria plana, la hodógrafa es una circunferencia. Por lo tanto, resulta que, en un movimiento uniforme y de trayectoria plana, el vector velocidad y el vector aceleración son perpendiculares.

Expresiones de las proyecciones de velocidad y de la aceleración sobre un sistema de ejes coordenados. — Si referimos el movimiento de un punto a un sistema de coordenadas cartesianas, la posición del móvil en cada instante quedará perfectamente determinada por sus tres coordenadas

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Estas tres coordenadas nos permiten estudiar al mismo tiempo, la trayectoria y el movimiento del móvil sobre ella.

Recordemos que, si en el instante t_0, el móvil está en el origen de abscisas curvilíneas, el valor absoluto de la suya es

$$|s| = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt.$$

Sea M_x la proyección del punto M sobre el eje xx' (*fig.* 97): este punto M_x es la intersección del eje xx' con el plano paralelo al yOz trazado por el punto M; asimismo, el punto M está animado de un movimiento rectilíneo, definido por $x = f(t)$, que se llama proyección del movimiento dado sobre el eje de las x.

Sea M_1 la posición del móvil en el instante t_1 y M_{1x} su proyección sobre el eje de las x. La velocidad media del movimiento del punto M es el vector $\overrightarrow{MV_m}$, cuya línea de acción es la recta MM_1 y tal que $\overrightarrow{MV_m} = \dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$. Sea $\overrightarrow{M_xV_{mx}}$ la proyección de este vector sobre el eje $x'x$; aplicando el teorema de Thales podemos escribir

$$\frac{\overrightarrow{MV_m}}{\overrightarrow{MM_1}} = \frac{\overrightarrow{M_xV_{mx}}}{\overrightarrow{M_xM_{1x}}}.$$

$$\text{Por lo tanto, } \overrightarrow{M_xV_{mx}} = \frac{\overrightarrow{M_xM_{1x}}}{t_1 - t}.$$

Esto demuestra que el vector $\overrightarrow{M_xV_{mx}}$ es precisamente el vector velocidad media del punto M_x entre los instantes t y t_1. Por consiguiente, el vector velocidad media entre t y t_1 de la proyección M_x del punto M sobre el eje de las x es precisamente la proyección, sobre este eje, del vector velocidad media del punto M del espacio entre los instantes t y t_1.

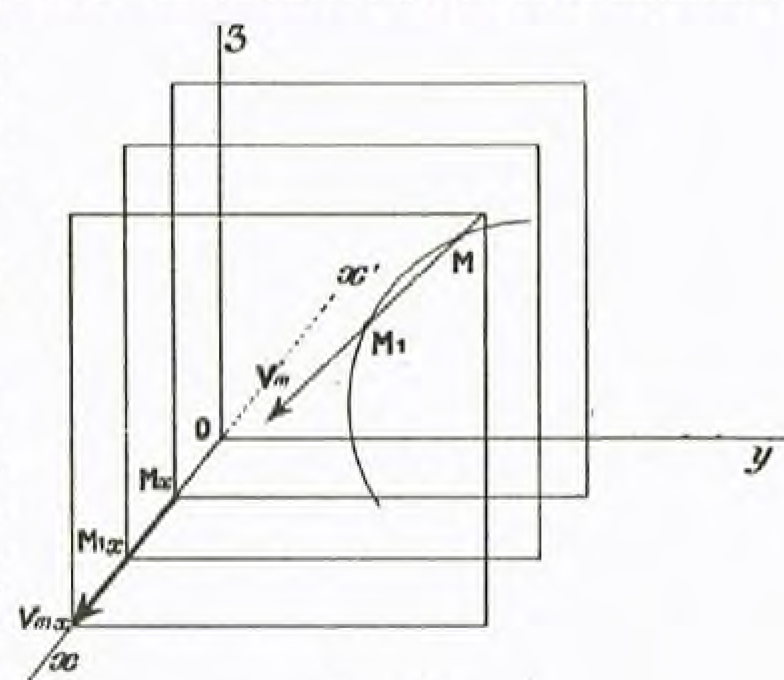


Fig. 97

Hagamos que t_1 tienda hacia t: como la igualdad anterior siempre se verifica, también subsiste en el límite, llegándose de este modo al siguiente resultado de gran importancia en cinemática:

Las proyecciones del vector velocidad sobre los ejes de un sistema de coordenadas son precisamente las velocidades de cada una de las proyecciones del punto M.

Si el movimiento está determinado por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, las proyecciones de la velocidad sobre los tres ejes de coordenadas, son:

$$v_x = f'(t), \qquad v_y = g'(t), \qquad v_z = h'(t).$$

Proyecciones de la aceleración. — La aceleración ha sido definida como la velocidad del punto que recorre la hodógrafa. Si se toma como origen de coordenadas el polo de la hodógrafa, las coordenadas del móvil que la recorre son

$$x = f'(t), \qquad y = g'(t), \qquad z = h'(t).$$

Las proyecciones de la aceleración, que es la velocidad de dicho punto, serán, por lo tanto,

$$\gamma_x = f''(t), \qquad \gamma_y = g''(t), \qquad \gamma_z = h''(t).$$

En resumen, las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas son las derivadas primeras de las coordenadas. Las proyecciones de la aceleración son las derivadas segundas de esas coordenadas.

OBSERVACIÓN. Si el movimiento se efectúa en un plano, se toma como sistema de referencia dos ejes de coordenadas situados en el mismo plano que la trayectoria.

Un razonamiento análogo al anterior demuestra que la proyección de la velocidad sobre un plano es la velocidad de la proyción (sea la proyección ortogonal o no).

EJEMPLOS. 1° *Un movimiento cuya velocidad tiene una dirección constante, es un movimiento rectilíneo.*

En efecto, tracemos el eje de las z paralelo a dicha dirección. Las proyecciones de la velocidad sobre los otros dos ejes son nulas:

$$x' = 0, \qquad y' = 0.$$

Integrando, se obtiene que x e y son constantes; la trayectoria es una paralela al eje de las z.

2° *Si el vector pasa por un punto fijo, el movimiento es rectilíneo.*

Tomemos ese punto fijo como origen. Puesto que el vector velocidad pasa por el origen, su momento con respecto a él es nulo. Aplicando las fórmulas de las proyecciones del momento, se obtiene

$$yz' - zy' = 0, \qquad zx' - xz' = 0.$$

Los primeros miembros de estas ecuaciones son respectivamente las derivadas de $\dfrac{z}{y}$ y de $\dfrac{x}{z}$. Se deduce que hay dos constantes a y b, tales que $z = ay$, $x = bz$. Estas expresiones nos dicen que el móvil permanece sobre los dos planos en su movimiento. Por lo tanto su trayectoria es la intersección de dichos planos.

Propiedad de los momentos. — El vector velocidad tiene por coordenadas de su origen x, y, z, y por proyecciones sobre los ejes x', y', z'; las proyecciones del momento del vector velocidad, con relación al origen, son, aplicando las fórmulas de los momentos (v. página 224):

$$L_v = yz' - zy', \qquad M_v = zx' - xz', \qquad N_v = xy' - yx'.$$

Asimismo, las proyecciones del momento del vector aceleración son:

$L\gamma = yz'' - zy''$, $\quad M\gamma = zx'' - xz''$, $\quad N\gamma = xy'' - yx''$.

Ahora bien, calculando la derivada de L_v, se obtiene

$$y'z' + yz'' - z'y' - zy'' = yz'' - zy'',$$

es decir, precisamente $L\gamma$. De donde se deduce el resultado siguiente:

Si se considera el momento del vector velocidad con relación a un punto, su extremo es móvil y el vector velocidad del mismo es equipolente al momento del vector aceleración con relación al mismo punto.

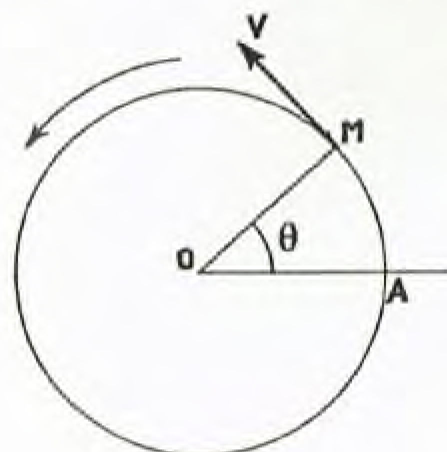


Fig. 98

Movimiento circular. — La trayectoria es una circunferencia (*fig.* 98). Sea A el origen de las abscisas curvilíneas o espacios recorridos. Se tiene que $s = R \cdot \theta$, siendo R el radio de la circunferencia y θ el ángulo que forman OA y OM, medido en *radianes*. El vector velocidad cuya línea de acción o soporte es la tangente, tiene por valor algebraico $v = \dfrac{rd\theta}{dt} = r\theta'$.

θ es función del tiempo. θ' es la *velocidad angular* del móvil M; la velocidad de un móvil animado de un movimiento circular es igual al producto de la velocidad angular por el radio.

Vamos a estudiar de modo particular el movimiento circular uniforme; la ecuación de un movimiento de esa clase es $s = s_0 + vt$, siendo v una constante y s_0 la abscisa curvilínea que corresponde al instante que se toma como origen. Al ser la velocidad v constante, lo es también la velocidad angular que se designa por la constante ω (en radianes). Si φ es el ángulo que corresponde al punto s_0, donde está el móvil en el instante origen, se obtiene

$$\theta = \omega t + \varphi,$$

y la velocidad constante tiene por valor $R\omega$.

Construyamos la hodógrafa que tenga por polo el centro de la circunferencia: siendo constante en magnitud la velocidad, la hodógrafa es una circunferencia. Sea P el punto de la hodógrafa que corresponde al M. El ángulo que forman OM y OP es recto en el sentido del movimiento. Por lo tanto, el punto P está animado de un movimiento circular uniforme y tiene la misma velocidad angular ω que el movimiento del punto M. La velocidad de P es el vector $\overrightarrow{PW}$, cuya magnitud es $R\omega^2$. Puesto que ese vector es perpendicular a OP, el vector aceleración $\overrightarrow{M\gamma}$ estará dirigido hacia el centro del círculo (*fig.* 99).

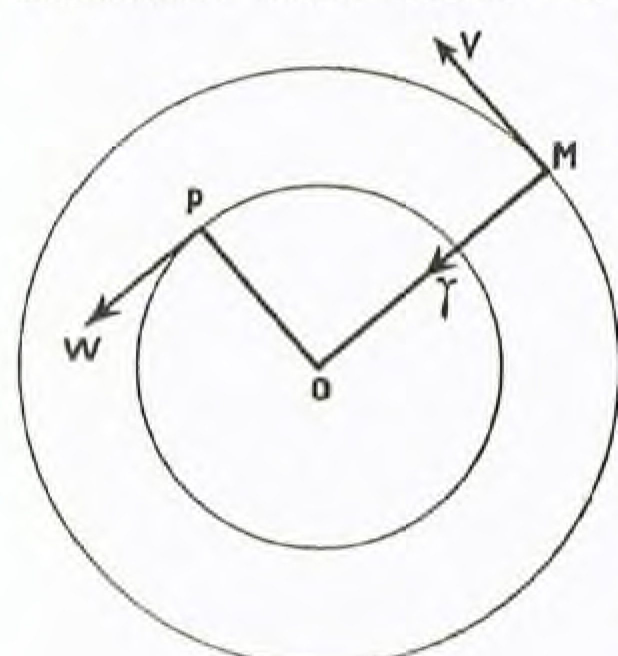


Fig. 99

En resumen, la aceleración de un movimiento circular uniforme es un vector $\overrightarrow{M\gamma}$ de magnitud constante $\omega^2 R$ y dirigido siempre hacia el centro de la circunferencia.

Observación. Si M_x es la proyección sobre el diámetro xx' del punto M, se tiene que $\overrightarrow{OM_x} = R\cos(\omega t + \varphi)$. La proyección sobre un eje de un punto animado de un movimiento circular uniforme es un punto animado de un movimiento vibratorio simple, de amplitud igual al diámetro. Recíprocamente, todo punto animado de un movimiento vibratorio simple puede ser considerado como la proyección de un punto animado de un movimiento circular uniforme.

Ejemplo: movimiento curvilíneo de proyectiles en el vacío. — Si un móvil pesante se mueve en el vacío, la experiencia demuestra que este punto tiene una aceleración constante en intensidad, dirección y sentido, tal como se explicó anteriormente: ésta es la aceleración de la gravedad g. Si se lanza el móvil con una cierta velocidad inicial, permanece en el plano vertical que contiene al vector velocidad inicial. Este problema sería el del movimiento de un proyectil, si no interviniera la resistencia del aire. Tomemos, en el plano vertical donde tiene lugar el movimiento, dos ejes de coordenadas: $x'Ox$ horizontal e $y'Oy$ vertical, considerando hacia arriba el sentido positivo. El origen de coordenadas es el punto desde donde se lanza el móvil, y el eje de las x está dirigido de modo que la proyección de la velocidad inicial sea positiva. Ésta tiene por valor absoluto V_0 y forma con el eje de las x un ángulo α, que es positivo si el móvil se lanza hacia arriba, y negativo si es lanzado hacia abajo.

Eligiremos, por último, como origen de tiempos el instante de partida. Siendo constante la aceleración de valor absoluto g, y dirigida hacia abajo, se tiene

$$\gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \gamma_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -gt.$$

Efectuando una primera integración, se obtienen las proyecciones de la velocidad

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + b.$$

a y b son dos constantes. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es decir, lo que sucede en el instante cero:

$$a = V_0 \cos\alpha, \qquad b = V_0 \operatorname{sen}\alpha,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \operatorname{sen}\alpha.$$

Integrando por segunda vez, se obtienen las coordenadas del móvil:

$$x = V_0 \cos\alpha t + d, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \operatorname{sen}\alpha t + e.$$

Las constantes d y e vienen también determinadas por las condiciones iniciales del problema; como el móvil en el instante cero está en el origen, $d = e = 0$. Se tiene, pues,

$$x = V_0 \cos\alpha t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \operatorname{sen}\alpha t.$$

La proyección del móvil sobre el eje de las x tiene un movimiento rectilíneo uniforme (*fig.* 100); la proyección sobre el eje de las y tiene un movimiento uniformemente variado.

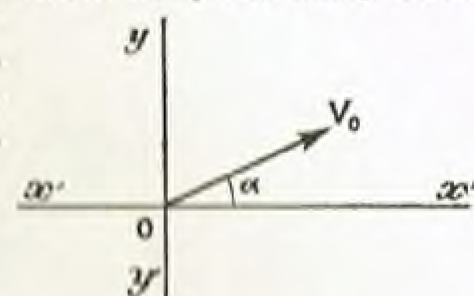


Fig. 100

Para obtener la ecuación de la trayectoria, deducimos t en la primera ecuación y lo llevamos a la segunda. Obtenemos entonces la ecuación

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos 2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\, x.$$

Esta ecuación es la de la curva representativa de un trinomio, es decir, una parábola que tiene su concavidad mirando hacia el eje de las x.

Si el móvil se lanza hacia arriba, comienza subiendo con una velocidad decreciente, alcanza el vértice de la curva con una velocidad horizontal y mínima y recorre la rama descendente con una velocidad creciente (*fig.* 101).

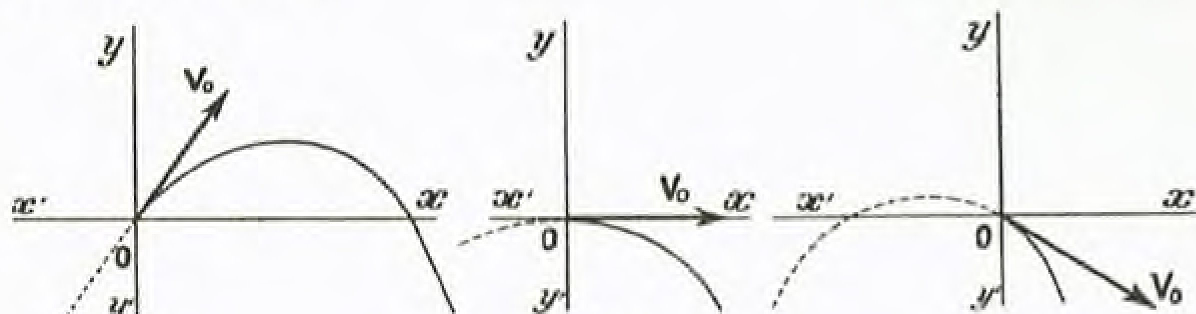


Fig. 101

Cuando el móvil se lanza con una velocidad horizontal (*fig.* 101), o dirigida hacia abajo (*fig.* 101), el móvil cada vez va más rápido.

Observación. Cuando V_0 está dirigido hacia arriba, la abscisa del punto en que la trayectoria corta de nuevo el eje de las x es

$$x = \frac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

Este valor es el *alcance* del proyectil. Si hacemos crecer V_0, el alcance aumenta. Si V_0 es constante, se consigue un alcance máximo cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = 0$, $\alpha = 45°$. Si x y V_0 son conocidos, la ecuación anterior nos da los valores de α para un alcance x. Se tiene que $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{xg}{V_0^2}$.

Si hacemos $\dfrac{xg}{V_0^2} = \operatorname{sen}\beta$, la ecuación tiene dos soluciones: $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ y $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90° - \dfrac{\beta}{2}$.

Estos resultados se aplicarían en balística, si no existiera la resistencia del aire. No obstante, nos proporcionan útiles conocimientos: por ejemplo, para aumentar el alcance, es necesario aumentar la velocidad inicial. Esto es lo que se pretende conseguir en las armas modernas. En general, para un arma y un tipo de proyectil determinado, la velocidad inicial está definida: para llegar a un punto, situado a la misma altura y a una distancia menor que la del alcance máximo, se puede conseguir utilizando dos trayectorias. De éstas, la que corresponde al valor más pequeño de α es la trayectoria tensa.

Los resultados obtenidos del estudio del movimiento en el vacío son ideales, a los que en la práctica se pretende aproximarse todo lo posible; de ahí, por ejemplo, que se dé a los proyectiles formas exteriores para que la resistencia del aire sea muy pequeña. En balística, se han hecho correcciones experimentales a los resultados obtenidos teóricamente.

Componentes del vector velocidad en coordenadas polares. — Sea un móvil M animado de un movimiento plano. Asociemos al sistema de sus ejes coordenados un sistema de coordenadas polares. Sea θ el valor algebraico del ángulo que forman Ox y una dirección positiva tomada sobre OM, y ρ el valor algebraico del vector $\overrightarrow{OM}$.

Se tiene

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Siendo ρ y θ funciones del tiempo, hay que derivar teniendo en cuenta las reglas para la derivación de productos y de funciones de función. Se obtiene

$$v_x = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad v_y = \frac{d\rho}{dt}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Se pueden escribir estas expresiones de la siguiente forma:

$$v_x = \frac{d\rho}{dt}\cos\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$v_y = \frac{d\rho}{dt}\operatorname{sen}\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas nos dicen que el vector velocidad es la resultante de dos vectores: uno tiene de valor algebraico $\dfrac{d\rho}{dt}$ y como línea de acción

el eje OM. Es la componente radial del vector velocidad. El otro tiene como línea de acción la perpendicular en M al radio vector (*fig.* 102); su valor algebraico es $\rho \dfrac{d\theta}{dt}$.

Siendo perpendiculares las componentes del vector velocidad, se tiene $v^2 = \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2$.

Componente tangencial del vector aceleración. — Apliquemos el resultado anterior a la hodógrafa. La velocidad del punto P tiene una componente cuya línea de acción es OP (*fig.* 103) y su valor algebraico $\dfrac{dv}{dt}$. Por lo tanto, la aceleración tiene una componente $M\Gamma_t$ cuya línea de acción es la tangente y su valor algebraico

$$M\Gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Fig. 102

Observaciones. 1º Existe otra componente cuya línea de acción es la normal (en el espacio, dicha línea de acción es la normal principal). El valor de esta segunda componente es $\dfrac{v^2}{\rho}$, siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria. El radio de curvatura es el radio de la circunferencia, que puede coincidir con un pequeño arco de la curva que contenga al punto M. Esta componente está dirigida hacia la concavidad de la curva. Se le llama componente normal del vector aceleración. La componente normal y la tangencial son las componentes intrínsecas del vector aceleración.

2º Si el móvil M está animado de un movimiento uniforme $M\Gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, la componente tangencial es nula. Recíprocamente, si la aceleración es normal a la trayectoria, la componente tangencial es nula: $\dfrac{dv}{dt} = 0$, $v = a$. La velocidad es constante: el móvil está animado de un movimiento uniforme.

Fig. 103

Movimientos simples de un cuerpo sólido

Movimiento de traslación. — El desplazamiento por traslación ha sido estudiado en geometría sin tener en cuenta el tiempo: vamos a estudiar ahora el movimiento de traslación.

Los ejemplos de sólidos que realizan movimientos de traslación son muy frecuentes: la cabina de un ascensor, el pistón de una máquina y las cabinas de ciertas norias de feria. Los dos primeros son ejemplos de traslaciones rectilíneas.

Definición. *Se dice que un sólido está animado de un movimiento de traslación cuando todo vector ligado al sólido permanece equipolente a sí mismo, es decir, cuando su dirección, sentido y módulo permanecen constantes.*

Si un sólido está animado de un movimiento de traslación, las trayectorias de todos sus puntos son idénticas. Todos los puntos tienen en cada momento los vectores velocidad y aceleración equipolentes.

Cuando un sólido está animado de un movimiento de traslación, puesto que todos sus puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración en un instante dado, podemos referirnos a la velocidad y aceleración del sólido. En otros casos, esto no está de acuerdo con la realidad.

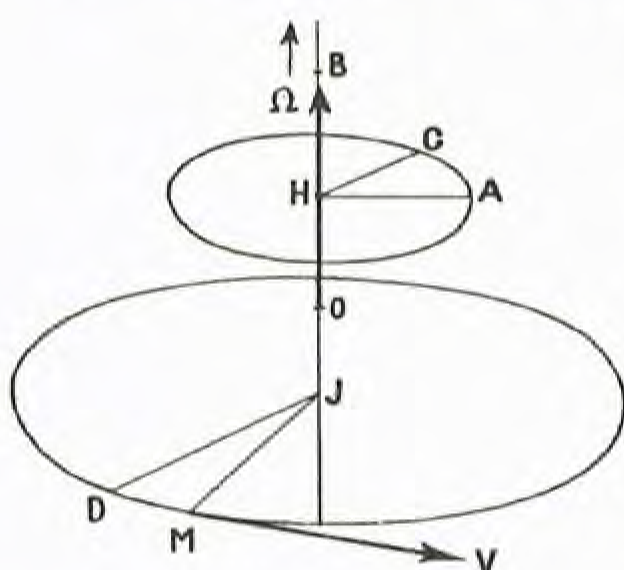


Fig. 104

Por ejemplo, cuando se habla de la velocidad de un automóvil, se trata de la velocidad de su carrocería. Ésta está animada de un movimiento de traslación, mientras que los distintos puntos de las ruedas están animados de velocidades muy diferentes. Los puntos en contacto con el suelo tienen velocidades nulas. Los restantes puntos tienen otras velocidades que más adelante precisaremos.

Movimiento de rotación de un sólido. — Un sólido está animado de un movimiento de rotación cuando dos de sus puntos A y B permanecen fijos. Por lo tanto, todo punto situado en la línea recta AB queda fijo. La recta AB es el eje de rotación.

Existen muchos ejemplos de sólidos que realizan movimientos de rotación: tiovivo, volantes, bombos de la lotería, etc. Todo punto del sólido que esté a una distancia constante del eje tiene por trayectoria una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje.

Para poder precisar el movimiento, hay que tomar un sentido positivo sobre el eje y un sentido igualmente positivo para las rotaciones, con relación a un observador situado sobre el eje. La posición del sólido está determinada por la de un punto C (*fig.* 104), ligado al cuerpo y no situado sobre el eje. Como C describe una circunferencia, su posición está determinada, asimismo, por la función $\theta = f(t)$, que da el ángulo $\widehat{AHC}$ en función del tiempo. La velocidad angular de C es $\dfrac{d\theta}{dt} = f'(t)$.

Si consideramos otro punto M del sólido, puesto que el ángulo formado por HC y JM es constante, girará el mismo ángulo que C en el mismo intervalo de tiempo:

$$\widehat{DJM} = \widehat{AHC}.$$

Resulta, pues, que la velocidad angular de M es igual a la de C. Por lo tanto, si un sólido está animado de un movimiento de rotación, todos los puntos tienen la misma velocidad angular en cada instante.

Observación. Si se toma sobre el eje un vector $\overrightarrow{O\Omega}$, cuyo valor algebraico es la velocidad angular: $\overrightarrow{O\Omega} = f'(t)$, la velocidad lineal de cualquier punto M del sólido, en cada instante, es precisamente el momento del vector $\overrightarrow{O\Omega}$ con relación a dicho punto M. En efecto, el vector momento es tangente en M a la circunferencia que pasa por él, dirigido en el sentido del movimiento y de módulo $R\theta'$.

Si el movimiento de rotación es uniforme, θ' es constante. Sea ω esa constante: el vector $\overrightarrow{O\Omega}$ será constante. La velocidad de cualquier punto M será $R\omega$.

Cambio del sistema de referencia Composición de los movimientos

Como se señala al principio de la dinámica, el movimiento tiene un carácter esencialmente relativo. Se ha estudiado respecto a cierto sistema de referencia considerado como fijo. Pero puede suceder que ese sistema de referencia tenga a su vez un movimiento respecto a otro sistema. El problema que se plantea es el siguiente: conociendo el movimiento con relación a un sistema de referencia S y el movimiento de este sistema con relación a otro S_0, estudiar el movimiento con relación a este sistema S_0.

Ejemplo. Un marinero se pasea sobre su barca. Estudiar su movimiento con relación a la Tierra. El sistema S es la barca: el sistema S_0 es la Tierra.

Vamos a razonar sobre el movimiento de un punto M. El movimiento del punto M con relación al sistema de referencia S es el movimiento relativo. La trayectoria de este punto con relación a dicho sistema es la trayectoria relativa $\mathscr{C}_r$, su velocidad y aceleración son también relativas. El sistema de referencia S tiene una trayectoria relativa. El movimiento del punto M con relación al sistema S_0 se llama movimiento absoluto: su trayectoria es absoluta $\mathscr{C}_a$. En cada instante el punto M tiene, con relación al sistema S_0, una velocidad ***absoluta*** y una aceleración también absoluta. En el instante t, el punto M coincide con un punto M′ ligado al sistema S: llamamos a ese punto punto de coincidencia. Este punto M′ tiene un movimiento con relación al sistema de referencia "absoluto" S_0: la trayectoria de ese punto M′ con relación al sistema S_0 es una trayectoria de arrastre $\mathscr{C}_e$. La velocidad del punto M′ en el instante t es la velocidad de arrastre.

Teorema fundamental de la composición de las velocidades. — *El vector velocidad absoluta de un punto M es en cada instante la suma geométrica, o resultante, de los vectores velocidad relativa y velocidad de arrastre.*

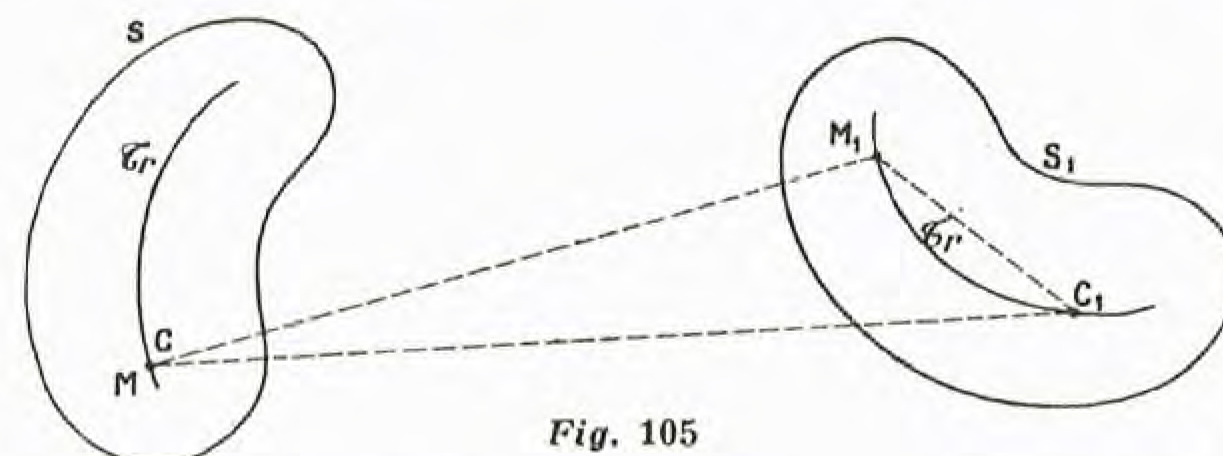


Fig. 105

Consideremos dos posiciones S y S_1 del sistema de referencia relativo en los instantes t y t_1. M y M_1 son las posiciones del móvil considerado en esos dos instantes. El sistema relativo lleva consigo, en su movimiento, la trayectoria relativa $\mathscr{C}_r$ del movimiento del punto M. Sea C el punto ligado al sistema S con el que coincide el punto M en el instante t. En el instante t_1, ese punto C tiene una nueva posición C_1, ligada a la del sistema relativo S_1, y entre los instantes t y t_1 ha descrito una trayectoria de arrastre $\mathscr{C}_e$. Puesto que los tres puntos M, C_1, M_1 forman un triángulo, el vector $\overrightarrow{MM_1}$ es la suma geométrica

(o resultante) de los vectores $\overrightarrow{MC_1}$ y $\overrightarrow{C_1M_1}$. Esto se puede expresar

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{C_1M_1}.$$

Si por otra parte se consideran los vectores

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}, \quad \frac{\overrightarrow{MC_1}}{t_1 - t}, \quad \frac{\overrightarrow{C_1M_1}}{t_1 - t},$$

obtenidos dividiendo por $t_1 - t$ los tres vectores (*fig.* 105)

$$\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MC_1}, \text{ y } \overrightarrow{C_1M_1},$$

se forma un nuevo triángulo que es semejante al anterior, y por lo tanto $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ es la suma geométrica de $\dfrac{\overrightarrow{MC_1}}{t_1 - t}$ y $\dfrac{\overrightarrow{C_1M_1}}{t_1 - t}$, pudiéndose escribir la siguiente igualdad

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MC_1}}{t_1 - t} + \frac{\overrightarrow{C_1M_1}}{t_1 - t}.$$

En ella vemos que $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad media absoluta, $\dfrac{\overrightarrow{MC_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad media de arrastre y $\dfrac{\overrightarrow{C_1M_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad media relativa de origen C_1.

Ahora hacemos tender t_1 hacia t. Verificándose la igualdad geométrica para todo valor de t_1, también se verificará en el límite. Ahora bien, el límite de $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad absoluta; el límite de $\dfrac{\overrightarrow{MC_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad de arrastre del punto de coincidencia C_1.

Y por último, el límite de $\dfrac{\overrightarrow{C_1M_1}}{t_1 - t}$ es el vector velocidad relativa del punto M aplicado en dicho punto (*fig.* 106). Queda, por lo tanto, demostrado el teorema, que simbólicamente expresamos de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{MV_a} = \overrightarrow{MV_e} + \overrightarrow{MV_r}.$$

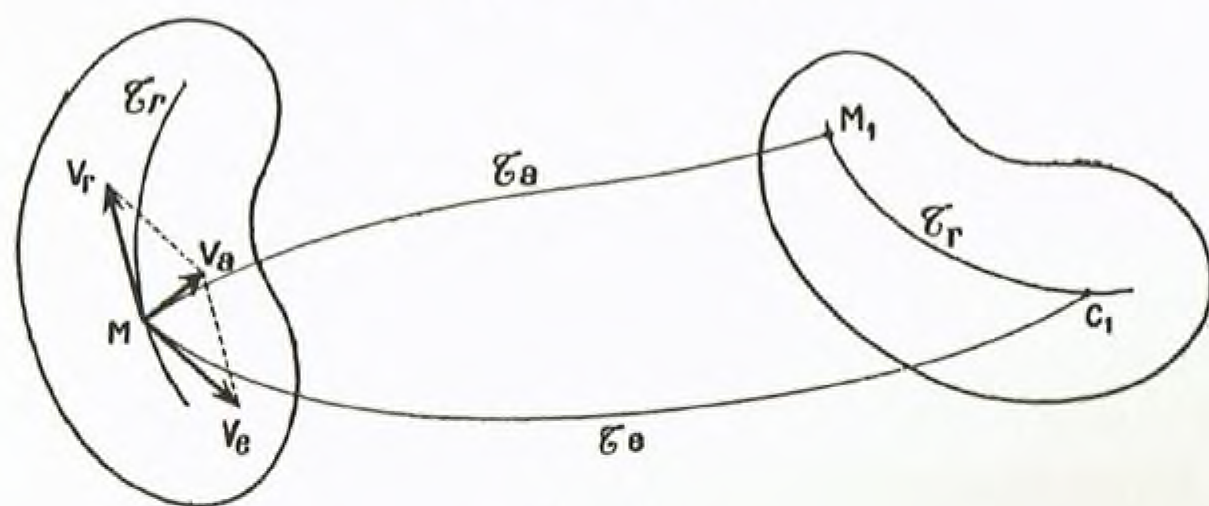


Fig. 106

Segunda demostración por los métodos de la geometría analítica. — Dado un sistema de coordenadas cartesianas y un eje orientado (*fig.* 107): si un vector de valor algebraico + 1 cuyo soporte sea ese eje tiene como proyecciones sobre los tres ejes los vectores de valor algebraico α, β, γ, el teorema de Thales nos dice que otro vector de valor algebraico V, cuyo soporte sea el citado eje o uno paralelo a él, tendrá como proyecciones sobre los tres ejes de coordenadas los vectores de valor algebraico αV, βV, γV: siendo α, β, γ los cosenos directores de la dirección considerada.

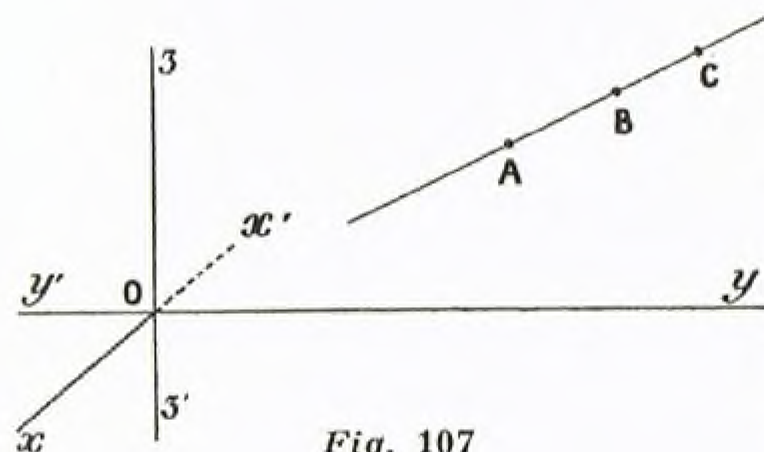


Fig. 107

Consideremos ahora un primer sistema de coordenadas de origen O_0 y ejes x'_0x_0, y'_0y_0, z'_0z_0 (*fig.* 108). Un segundo sistema de ejes coordenados queda determinado con relación al primero, si se conocen las coordenadas a, b, c de su origen O y los cosenos directores de cada uno de sus ejes: α, β, γ para el eje $x'x$; α', β', γ' para el $y'y$; α'', β'', γ'' para el $z'z$. Proyectando sobre cada uno de los ejes del primer sistema el contorno poligonal O_0OQPM, se obtienen las expresiones siguientes, que dan las coordenadas de un punto en el sistema de origen O_0 en función de sus coordenadas en el sistema de origen O:

$$\begin{cases} x_0 = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z. \\ y_0 = b + \beta x + B' y + \beta'' z. \\ z_0 = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Consideramos el sistema de coordenadas de Origen O_0 como sistema de referencia absoluto.

El sistema de referencia relativo está representado por el sistema de coordenadas de origen O. a, b, c; α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'' γ'' son funciones del tiempo. Asimismo x, y, z; x_0, y_0, z_0 son las coordenadas del movimiento absoluto; x, y, z, las del relativo. Si se dan a x, y, z valores constante, x_0, y_0, z_0 determinan el movimiento de un punto ligado al sistema del movimiento relativo, es decir, un movimiento de arrastre.

Derivando con relación al tiempo, según las reglas del cálculo de derivadas, se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = \left(\dfrac{da}{dt} + \dfrac{d\alpha}{dt}x + \dfrac{d\alpha'}{dt}y + \dfrac{d\alpha''}{dt}z\right) \\ \qquad + \left(\alpha\dfrac{dx}{dt} + \alpha'\dfrac{dy}{dt} + \alpha''\dfrac{dz}{dt}\right), \\ \dfrac{dy_0}{dt} = \left(\dfrac{db}{dt} + \dfrac{d\beta}{dt}x + \dfrac{d\beta'}{dt}y + \dfrac{d\beta''}{dt}z\right) \\ \qquad + \left(\beta\dfrac{dx}{dt} + \beta'\dfrac{dy}{dt} + \beta''\dfrac{dz}{dt}\right), \\ \dfrac{dz_0}{dt} = \left(\dfrac{dc}{dt} + \dfrac{d\gamma}{dt}x + \dfrac{d\gamma'}{dt}y + \dfrac{d\gamma''}{dt}z\right) \\ \qquad + \left(\gamma\dfrac{dx}{dt} + \gamma'\dfrac{dy}{dt} + \gamma''\dfrac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

Interpretemos estas expresiones. Los primeros paréntesis se han obtenido considerando x, y, z como constantes: de este modo, vemos que son las proyecciones de la velocidad de arrastre sobre los ejes del sistema de referencia absoluto. Los segundos paréntesis son las proyecciones, sobre los ejes del sistema de referencia absoluto, de un vector cuyas proyecciones sobre los ejes del sistema de referencia relativo son $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$: vemos que son las proyecciones del vector velocidad relativa. Por lo tanto, en cada eje de coordenadas del sistema de referencia absoluto, la proyección del vector velocidad absoluta es la suma algebraica de las proyecciones del vector velocidad de arrastre y del vector velocidad relativa. Lo que demuestra el teorema.

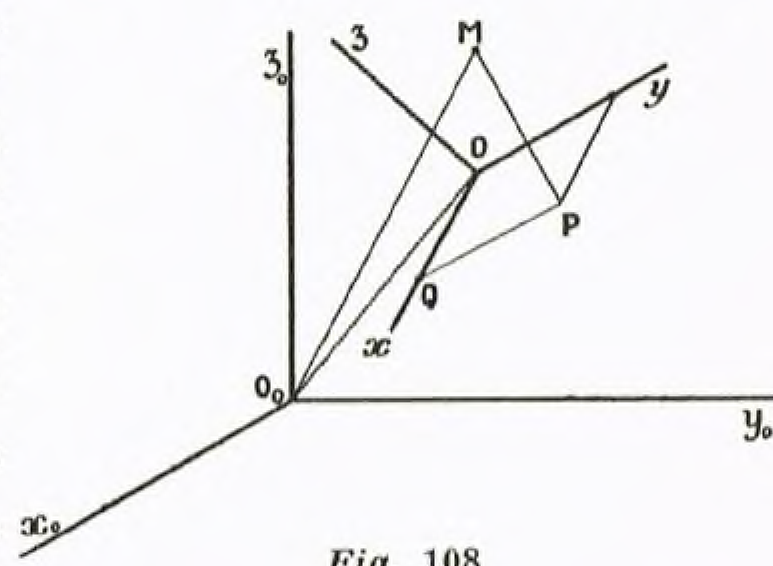


Fig. 108

Aplicaciones y ejemplos. *Si el movimiento relativo y el de arrastre son movimientos rectilíneos de velocidades paralelas, el movimiento absoluto tiene una velocidad paralela a las otras dos y cuyo valor es la suma geométrica de los valores de las velocidades componentes.*

En particular, si la velocidad relativa y la velocidad de arrastre son directamente opuestas, la velocidad absoluta es nula.

Fig. 109

Si el movimiento de arrastre y el relativo son ambos de traslación rectilínea uniforme, el movimiento absoluto es también un movimiento de traslación rectilínea uniforme.

Si un avión tiene una velocidad propia uniforme V_r y se encuentra en el interior de una corriente de aire de velocidad V_e, será desviado de su ruta y su velocidad real será V_a (*fig.* 109).

¿Cómo ve un pasajero de un tren caer la lluvia?

Supongamos que el tren lleva una velocidad rectilínea horizontal y uniforme, y que la lluvia cae verticalmente con velocidad uniforme.

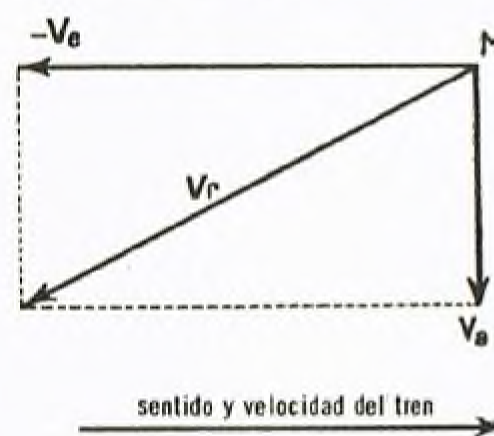


Fig. 110

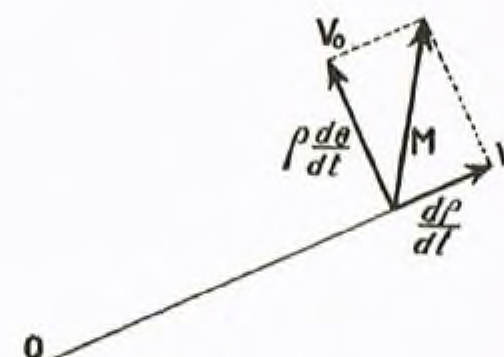


Fig. 111

Tomemos como sistema de referencia absoluto la Tierra, y como sistema relativo el tren. Conocemos la velocidad absoluta V_a de la lluvia y la velocidad de arrastre V_e del tren (*fig.* 110). Vamos a hallar la velocidad relativa V_r. Como consecuencia del teorema anterior, la velocidad relativa se obtendrá sumando la velocidad absoluta V_a con un vector $- V_e$ directamente opuesto a la velocidad de arrastre. La dirección de la misma será oblicua, tanto más cuanto mayor sea la velocidad del tren: es

de sentido contrario a la velocidad del tren. Esto es lo que el pasajero observa cuando ve las gotas de lluvia golpear contra los cristales de las ventanillas del vagón.

Componentes de la velocidad en coordenadas polares.

Se puede considerar el movimiento de todo punto M como el resultado de dos movimientos: uno de ellos, el relativo del punto M sobre el eje OM, y el otro, el de arrastre del eje OM. El movimiento relativo es un movimiento rectilíneo. El de arrastre es un movimiento de rotación alrededor de O. La velocidad relativa tiene como soporte la recta OM y por valor algebraico $\overrightarrow{MV_r} = \frac{d\rho}{dt}$ (*fig.* 111); la velocidad de arrastre tiene por línea de acción la perpendicular en M a OM y como valor algebraico $\overrightarrow{MV_e} = \rho \frac{d\theta}{dt}$. Encontramos de nuevo los resultados ya establecidos anteriormente.

Movimiento helicoidal. — Si el movimiento relativo es una rotación uniforme, y el de arrastre una traslación rectilínea uniforme cuyo vector velocidad sea paralelo al eje de rotación, el movimiento absoluto es un movimiento helicoidal. Para definir un movimiento de esta clase, se da el eje v de rotación (*fig.* 112), sobre el que se lleva un vector de valor algebraico igual a la velocidad de traslación, y un vector $\overrightarrow{O\Omega}$ de valor algebraico ω, que es el vector rotación. Consideremos un punto M: su trayectoria es una curva llamada hélice. La hélice queda trazada sobre la superficie cilíndrica que tiene por eje el eje del movimiento. Sea t el instante en que el móvil está en M; A su posición en el instante cero. Consideremos la circunferencia de la sección recta del cilindro que pasa por A. La generatriz del cilindro que pasa por M corta a dicha circunferencia en m; según la definición de movimiento, tenemos:

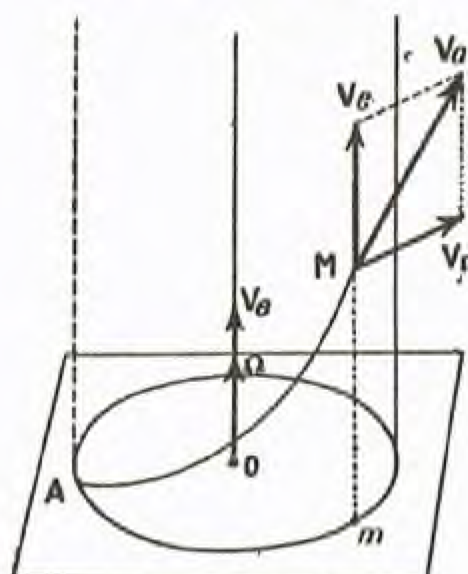


Fig. 112

$$\text{arco } \overset{\frown}{Am} = R\omega t, \qquad \overrightarrow{mM} = vt.$$

De donde

$$\frac{\overrightarrow{mM}}{\text{arco } \overset{\frown}{Am}} = k, \qquad \text{haciendo } k = \frac{R\omega}{v}.$$

Que es la misma definición de hélice; la hélice es la curva trazada sobre la superficie de un cilindro tal que $\overrightarrow{mM} = k$ arco $\overset{\frown}{Am}$. Cuando el punto m da una vuelta completa, el punto M vuelve otra vez a situarse sobre la misma generatriz. Describe una *espira.* Si el punto m continúa dando vueltas, la hélice se enrolla sobre la superficie cilíndrica componiéndose de espiras sucesivas. La distancia sobre una misma generatriz de dos posiciones sucesivas del punto que recorre la hélice, se llama paso de la hélice. Estando el eje de la hélice orientado positivamente según el sentido de traslación, si la rotación es positiva, la hélice se llama directa (o sinistrorsum); si la rotación es de sentido contrario al de la traslación, la hélice es inversa (o dextrorsum).

La velocidad absoluta del punto M, $\overrightarrow{MV_a}$, es la suma geométrica de la velocidad de arrastre $\overrightarrow{MV_e}$, paralela al eje, y de la velocidad relativa $\overrightarrow{MV_r}$, que es tangente a la circunferencia y de valor $R\omega$. El triángulo MV_rV_a es, por lo tanto, de valor constante para todos los puntos de la hélice. Como MV_a está sobre la tangente a la trayectoria, establecemos, por medio de la mecánica, la siguiente propiedad geométrica:

La tangente en un punto cualquiera de la hélice forma un ángulo constante con la generatriz.

Si consideramos otros puntos del sólido animado del movimiento helicoidal estudiado, todos ellos describen hélices del mismo paso.

Un ejemplo típico de movimiento helicoidal es el realizado por los cronógrafos registradores. En general, aplicaciones prácticas del movimiento helicoidal se obtienen todas las veces que se pase de una traslación a una rotación o, recíprocamente, efectuando una traslación a partir de una rotación.

Movimiento de una rueda sobre el suelo. — Un estudio análogo al anterior nos proporciona las velocidades de los distintos puntos de una rueda de un coche que rueda sin deslizamiento sobre el suelo. Este movimiento puede considerarse como resultante de dos movimientos. El de arrastre es el de la carrocería del vehículo: es un movimiento de traslación rectilínea. El relativo es el de rotación de la rueda alrededor de su eje.

El punto de la rueda que está en contacto con el suelo tiene una velocidad absoluta nula: su velocidad de arrastre es, por lo tanto, opuesta a la velocidad de rotación. Si las velocidades son uniformes, y si V_e es la velocidad del coche, ω la de rotación de la rueda y R el radio de la misma, se tiene, en valores absolutos, que $V_e = R \cdot \omega$. El punto más alto de la rueda tiene una velocidad igual a $2V_e$. Todo elemento de la circunferencia de la rueda, describe una curva, llamada **cicloide.**

Composición de las aceleraciones. — Una vez estudiada la composición de velocidades, cuyo resultado es bastante sencillo, vamos a estudiar la composición de las aceleraciones. Para hallar las proyecciones de las aceleraciones del movimiento absoluto sobre los ejes de coordenadas ligados al sistema de referencia absoluto, vamos a calcular las derivadas de las proyecciones de la velocidad.

$$\gamma x_0 = \frac{d^2x_0}{dt^2} = \left(\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}x + \frac{d^2\alpha'}{dt^2}y + \frac{d^2\alpha''}{dt^2}z \right)$$
$$+ \left(\alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha'\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha''\frac{d^2z}{dt^2} \right)$$
$$+ 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} \right)$$

$$\gamma y_0 = \frac{d^2y_0}{dt^2} = \left(\frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2}x + \frac{d^2\beta'}{dt^2}y + \frac{d^2\beta''}{dt^2}z \right)$$
$$+ \left(\beta\frac{d^2x}{dt^2} + \beta'\frac{d^2y}{dt^2} + \beta''\frac{d^2z}{dt^2} \right)$$
$$+ 2\left(\frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} \right)$$

$$\gamma z_0 = \frac{d^2z_0}{dt^2} = \left(\frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2\gamma}{dt^2}x + \frac{d^2\gamma}{dt^2}y \right)$$
$$+ \left(\gamma\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma''\frac{d^2z}{dt^2} \right)$$
$$+ 2\left(\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\gamma''}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} \right)$$

Estas fórmulas nos dicen que la aceleración es la resultante de tres vectores: el primero, cuyas proyecciones sobre los tres ejes son las expresiones que están dentro de los primeros paréntesis, se obtiene si x y, z son constantes; es, por lo tanto, la aceleración del punto de coincidencia, es decir, la aceleración de arrastre. El segundo vector tiene como proyecciones sobre los ejes del sistema de referencia absoluto las expresiones que están dentro de los segundos paréntesis. Ahora bien, estas proyecciones son las de un vector sobre los ejes del sistema de referencia absoluto cuyas proyecciones sobre los ejes del sistema relativo son $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. El segundo vector es, pues, la aceleración relativa.

En cuanto al tercer vector, sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas del sistema de referencia absoluto son las expresiones comprendidas en los terceros paréntesis: se llama *aceleración complementaria o aceleración de Coriolis.*

Por consiguiente, la aceleración del movimiento absoluto es la suma geométrica de la aceleración relativa, de la aceleración de arrastre y de la aceleración complementaria.

Simbólicamente se expresa

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}.$$

Caso particular importante. — *Cuando el movimiento de arrastre es un movimiento de traslación,* α, β, γ, α', β', γ', *y* α'', β'', γ'' *son constantes.*

En este caso, la aceleración de Coriolis es nula, y la aceleración absoluta es la resultante de la relativa y de la de arrastre.

Aplicaciones. Si se conoce $\overrightarrow{\gamma_a}$, la aceleración relativa viene dada por la igualdad geométrica $\overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{\gamma_a} - \overrightarrow{\gamma_e} - \overrightarrow{\gamma_c}$. Un tren está animado de movimiento de traslación rectilínea (por lo tanto $\overrightarrow{\gamma_c}$ es nula). Consideremos un punto pesante en el interior del vagón, por ejemplo una bola en reposo sobre el suelo. Tomemos la Tierra con sistema de referencia absoluto, y el vagón como sistema de referencia relativo. Conocemos la aceleración absoluta, que es la de la gravedad. La aceleración relativa será, por lo tanto, la suma geométrica de la aceleración de la gravedad y de un vector opuesto a la aceleración del tren. Cuando el tren lleva una velocidad uniforme y rectilínea, $\overrightarrow{\gamma_e}$ es nula. Siendo normal al piso la única aceleración, la bola permanece en reposo. Por el contrario, al empezar a marchar, $\overrightarrow{\gamma_e}$ no es nula. $-\overrightarrow{\gamma_e}$ es un vector no nulo dirigido en sentido contrario al movimiento del tren: la bola tiende a retroceder con relación al tren. Por el contrario, al parar, $\overrightarrow{\gamma_e}$ está dirigida en sentido contrario al movimiento; $-\overrightarrow{\gamma_e}$ estará dirigida en el sentido del movimiento. Si la aceleración es grande, es decir, si el frenazo es brusco, la bola y todo lo que esté en el interior del vagón tendrá una aceleración dirigida hacia adelante. Este fenómeno es a veces muy sensible: es el fenómeno de inercia.

Acción centrífuga. — Consideremos un punto material pesante, situado sobre un platillo que gira alrededor de un eje con un movimiento rectilíneo uniforme. La aceleración absoluta es siempre la aceleración de la gravedad. La aceleración de arrastre está dirigida hacia el centro del platillo y tiene por valor ω^2R. La aceleración complementaria es despreciable. La aceleración relativa es la suma geométrica de la gravedad y de un vector opuesto a la aceleración ω^2R. Este vector tiene una velocidad que tiende a alejar el punto del centro del movimiento: es la acción centrífuga.

Observación. En los problemas teóricos de mecánica, se consideran los sistemas de ejes de referencia como sistemas absolutos. En el estudio de los problemas que se refieran, bien a los fenómenos terrestres

bien a los astronómicos, es necesario precisar qué sistema de referencia se elige. Como, en general, el sistema elegido será móvil, no será un sistema de referencia absoluto, y entonces es preciso tener en cuenta las aceleraciones de arrastre y complementarias.

Cuando se estudia un fenómeno que sucede en una zona limitada de la superficie terrestre, se toma la Tierra misma como sistema de referencia y se eligen sistemas de ejes ligados a la Tierra. La ley de atracción de Newton nos da la aceleración absoluta dirigida hacia el centro de la Tierra. La aceleración relativa se halla componiendo con esta aceleración absoluta, la aceleración de arrastre (*fig.* 113). Siendo el movimiento de arrastre una rotación alrededor de la línea de los polos, para hallar la aceleración relativa, es preciso componer la aceleración absoluta con un vector opuesto a la aceleración de arrastre. Este vector está situado en un plano meridiano y es perpendicular a la línea de los polos, su sentido es hacia el exterior y tiene como valor — $\omega^2 r$, siendo r el radio del paralelo que pasa por el punto. La aceleración de la gravedad, resultado de medidas experimentales, es la aceleración relativa; nos da la dirección de la vertical, pero no está dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra.

Norte

Sur

Fig. 113

Para fenómenos que afectan a una gran parte de la Tierra, se puede tomar como sistema de referencia relativo un sistema de ejes coordenados que tenga por origen el centro de la Tierra y sus ejes dirigidos hacia estrellas "fijas" (*fig.* 114). Un sistema tal, que se mueve con el centro de la Tierra, sufre un desplazamiento de traslación. La aceleración relativa se compone de la aceleración absoluta y del vector opuesto a la aceleración de arrastre. Se considera la aceleración absoluta como la resultante de la aceleración newtoniana debida a la Tierra y de la aceleración newtoniana debida a los astros (Sol, Luna, etc.) Esta última se compensa sensiblemente por el vector opuesto a la aceleración de arrastre, aunque en la mayoría de los problemas en los que se toma como sistema de referencia el de ejes así considerado, la aceleración relativa coincide con la aceleración debida a la atracción newtoniana ejercida por la Tierra. (Esta aproximación no puede tenerse en cuenta en los problemas que requieran gran precisión, y sobre todo en el estudio de las mareas, que se basa, esencialmente, en la aceleración debida a los astros.)

Fig. 114

En el estudio de fenómenos astronómicos, se ha tomado frecuentemente un sistema de coordenadas cuyo centro es el del sistema solar, y sus ejes determinados por estrellas fijas. Se pensó que se podría, de esta forma, encontrar un sistema de referencia absoluto, pero los progresos recientes en astronomía han echado por tierra dicha esperanza.

Dinámica

Principios de la dinámica. Masa. 1.º Principio de la inercia (Kepler). 2.º Principio fundamental de la mecánica. 3.º Principio de la composición de las fuerzas (Galileo). 4.º Principio de la igualdad de la acción y la reacción. Gravedad. Peso. Campo de fuerzas. Función de fuerzas. Superficies de nivel. Problemas y métodos de la dinámica del punto. Movimiento de un punto pesante en el aire. Integrales primeras. Integral primera de la ley de las áreas. Trabajo. Representación gráfica del trabajo. Definición del trabajo: caso general. Caso en que la fuerza deriva de una función de las fuerzas. Definición. Teorema de las fuerzas vivas. Aplicación del teorema de las fuerzas vivas a los ejemplos ya tratados. Movimiento de los planetas. Movimiento de un punto ligado, es decir, de un punto obligado a describir una curva o una superficie. Aplicación del teorema de las fuerzas vivas. Péndulo simpre. Punto móvil sin rozamiento sobre un plano inclinado. Punto móvil con rozamiento sobre una curva o una superficie. Dinámica del sólido. Definición. — **Máquinas simples:** Plano inclinado. Palanca. Torno simple. Poleas. Conjunto de poleas. — **Las unidades de la mecánica:** Fuerza. Energía o trabajo. Potencia. Presión. Ecuación de dimensiones

DEFINICIÓN. *La dinámica estudia los movimientos en relación con las causas que los producen, las fuerzas.*

Principios de la dinámica. — Al comienzo de la dinámica, enunciaremos los principios que son aplicados en ella. Estos principios han sido deducidos de la observación y de la experiencia. Su validez proviene principalmente del acuerdo que existe entre los hechos reales y las consecuencias que se han deducido. En el estudio de la estática hemos utilizado ya algunos de ellos.

Hemos definido, en la estática, las características de las fuerzas, y hemos estudiado también los casos en los que el estado de reposo (con relación a una referencia) de un punto o un sólido no era alterado cuando las fuerzas actuaban sobre ellos. Estos casos son excepcionales: lo normal es que si una fuerza (o un sistema de fuerzas) actúa sobre un punto o un sólido, origine un movimiento.

La fuerza más conocida es el peso, debido, en su mayor parte, a la atracción de la Tierra: ésta es la causa que origina la caída de los cuerpos. Un punto material libre y pesante, sometido únicamente a la acción de su peso, cae; el estudio de la caída de los cuerpos ha sido de una gran importancia para descubrir y estudiar estos principios.

¿Cómo influyen las fuerzas sobre los movimientos? Citemos una experiencia elemental: cuando un ciclista rueda sobre una carretera recta, horizontal, bien acondicionada y sin viento sobre una bicicleta de "piñón libre", no tiene necesidad de hacer gran esfuerzo para mantener su velocidad; algunos golpes de pedal, de vez en cuando, son suficientes. Por el contrario, si quiere ir más deprisa o más despacio, tendrá que realizar un esfuerzo.

De las experiencias realizadas con precisión (las de Morin Atwood, planos inclinados) se ha deducido la siguiente conclusión de gran importancia: las fuerzas son las causas que originan las variaciones de velocidad, o, dicho de otra forma, *las fuerzas son las causas que originan las aceleraciones.*

Masa. — El concepto de masa es muy importante. Sabemos, por la experiencia diaria, que una misma fuerza aplicada a dos objetos diferentes da lugar a efectos distintos: si el ciclista del ejemplo anterior arrastrara un pequeño remolque sobre una carretera en las mismas condiciones, alcanzaría su velocidad de régimen en un tiempo mayor, tanto mayor cuanto más cargado esté el remolque. Mediante experiencias realizadas con precisión, se han medido las aceleraciones producidas en un mismo objeto por fuerzas distintas. Se ha comprobado que si un mismo objeto está sometido a fuerzas diferentes $F_1, F_2 \ldots F_n$, toma distintas aceleraciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_n$, dirigidas en el mismo sentido que las fuerzas y tales que las relaciones.

$$\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \frac{F_3}{\gamma_3} = \ldots = \frac{F_n}{\gamma_n} \text{ son iguales.}$$

El valor de esta constante es, por lo tanto, una característica peculiar del objeto considerado; se puede decir que ella caracteriza, desde el punto de vista de la mecánica, la materia del objeto. Esta constante se llama *masa del objeto.* La masa es rigurosamente constante, siempre y cuando quede probado que el objeto no sufre transformaciones que alteren su naturaleza.

El número que nos da medida de la masa de un objeto es la relación entre ésta y otra masa que se toma por unidad.

Todo cuerpo, todo elemento material tiene, en un sistema de unidades determinado, un coeficiente positivo que es su masa.

1º Principio de la inercia (Kepler). — Si un punto material no está sometido a ninguna acción exterior, su aceleración es nula.

Por lo tanto, si un cuerpo está en reposo fuera de toda acción exterior, permanecerá indefinidamente en dicho estado; si está en movimiento, éste será rectilíneo uniforme. (Hemos aplicado ya este principio en la estática).

2º Principio fundamental de la mecánica. — *Si un punto material de masa* m *tiene una aceleración* $\vec{\gamma}$, *está sometido a una fuerza* $\vec{F}$ (fig. 115) *definida en intensidad, dirección y sentido por la igualdad vectorial* $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$

Recíprocamente, si un punto material de masa m está sometido a una fuerza $\vec{F}$ tendrá una aceleración definida en intensidad, dirección y sentido por la igualdad vectorial

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}.$$

Fig. 115

3º Principio de la composición de las fuerzas (Galileo). — Si varias fuerzas $F_1, F_2, \ldots, F_n$, que actúan aisladamente sobre un mismo punto material m, producen aceleraciones $\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_n$, la acción simultánea de todas ellas sobre ese punto producirá una aceleración γ que será la resultante de las aceleraciones $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Dicho de otra forma: varias fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo punto originan el mismo efecto que su resultante.

4º Principio de la igualdad de la acción y la reacción. — Si un cuerpo material A ejerce una acción sobre otro B, éste ejerce sobre el primero otra acción igual en magnitud y dirección, pero de sentido opuesto.

OBSERVACIÓN. Hemos basado anteriormente la estática sobre estos principios. Se puede considerar la estática como un caso particular de la

dinámica: aquel en, que estando los cuerpos en reposo, las aceleraciones son nulas.

Gravedad. Peso. — Hemos señalado anteriormente (v. p. 233) lo que es la aceleración de la gravedad. También hemos establecido (v. p. 238 y 239) que esta aceleración era consecuencia de la atracción y del movimiento de rotación de la Tierra. *El peso de un objeto es el producto de su masa por la aceleración de la gravedad.*

Campo de fuerzas. — *Se llama* **campo de fuerzas** *un espacio, limitado o ilimitado, en el que cada punto, un objeto material está sometido a una fuerza que sólo depende de la posición de dicho punto.*

EJEMPLOS. La gravedad nos ofrece el ejemplo más sencillo y más importante: en todo punto próximo a la Tierra, un punto material está sometido a la acción de su peso. Observemos que lo que está determinado es la aceleración de la gravedad.

La física ofrece ejemplos de campos eléctricos y magnéticos: leyes de Coulomb y de Gauss.

La ley de atracción universal de Newton establece que todo elemento material crea un campo alrededor de él. He aquí el enunciado de esta ley: dos puntos materiales de masas m y m', situados a una distancia r uno del otro, se atraen con una fuerza igual a $f \cdot \dfrac{m \cdot m'}{r^2}$. El coeficiente f depende sólo del sistema de unidades empleado. En el sistema C . G . S se tiene $f = \dfrac{1}{3862^2}$.

Observemos que las leyes precedentes nos dan, no la fuerza, sino la aceleración. Estas aceleraciones (o fuerzas) no dependen del sistema de referencia elegido: la atracción de la Tierra es la misma, esté un punto material en un tren o sobre un apoyo fijo. Estas fuerzas son, por lo tanto, fuerzas absolutas. Cuando se las quiera aplicar al estudio de un movimiento con relación a un sistema de referencia móvil, es preciso tener en cuenta las aceleraciones $-\gamma_e$ y $-\gamma_c$ opuestas a las aceleraciones de arrastre y complementaria. Recordemos que la aceleración de la gravedad g lleva consigo esta corrección.

Para resolver por cálculo los problemas de dinámica, se define el campo por las tres funciones:

$$X = f\,(x, y, z), \qquad Y = g\,(x, y, z), \qquad Z = h\,(x, y, z),$$

que dan, en todo punto, las proyecciones de la aceleración sobre los tres ejes de coordenadas. La aceleración (o la fuerza) es la intensidad del campo en el punto considerado.

Función de fuerzas. — Se dice que un campo de fuerzas deriva de una función de fuerzas, cuando las proyecciones X, Y, Z, de la intensidad del campo en un punto M de coordenadas x, y, z, son las derivadas parciales $\dfrac{dF}{dx}$, $\dfrac{dF}{dy}$, $\dfrac{dF}{dz}$ de una misma función

$$U = F\,(x, y, z).$$

Superficies de nivel. — Cuando un campo de fuerzas deriva de una función de fuerzas, $U = F\,(x, y, z)$, se llaman *superficies de nivel* las superficies dadas por la ecuación $F\,(x, y, z) = C$, siendo C una constante.

Problemas y métodos de la dinámica del punto. — Los problemas de la dinámica del punto libre son los siguientes:

1º *Conociendo el movimiento de un punto, determinar las fuerzas que producen dicho movimiento*; 2º *Conociendo las fuerzas que actúan sobre un punto, deducir la ley de su movimiento.*

Estos problemas se basan esencialmente en la relación vectorial fundamental

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}.$$

Conociendo el movimiento, se hallan las proyecciones de la aceleración mediante dos derivaciones sucesivas, tal como vimos en la cinemática.

Si, por el contrario, se conocen todas las fuerzas que actúan sobre un punto en cualquier instante, siendo X, Y, Z las proyecciones de la resultante de esas fuerzas, la relación vectorial $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ nos da las tres ecuaciones del movimiento

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Por una primera integración, obtendremos las ecuaciones que nos dan la velocidad. Mediante una segunda integración pasamos de esas ecuaciones a las que nos dan las coordenadas.

Como en cada integración se introducen constantes, las ecuaciones que nos dan las coordenadas tendrán seis constantes. Éstas quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema; luego, sabremos de antemano que en el tiempo $t = t_0$ el móvil está en el punto de coordenadas x_0, y_0, z_0, y las proyecciones de su velocidad son x'_0 y'_0, z'_0. Admitimos que sólo corresponde un movimiento a las condiciones iniciales dadas (y a las fuerzas dadas).

Cuando estudiamos el movimiento de un proyectil en el vacío (v. p. 235) tratamos ya un problema de dinámica.

PROBLEMA. *Movimiento de un punto pesante atraído por un punto fijo O con una fuerza proporcional a su distancia.*



Fig. 116

Supongamos en un principio que el punto móvil, en el instante origen, está en A y que su velocidad inicial es nula (*fig.* 116). Tomemos como eje de las x, la recta OA, orientada positivamente de O hacia A, y sea a la abscisa del punto A. El movimiento tiene lugar sobre la recta OA. (Se puede demostrar considerando las proyecciones sobre dos ejes perpendiculares a OA). Cuando el móvil se encuentre en el punto de abscisa x, la fuerza que lo atrae hacia el origen, tiene por valor algebraico $-kx$.

La relación fundamental $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ nos da la ecuación

$$(1) \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

De donde (2) $\qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\,x.$

Haciendo $\dfrac{k}{m} = \omega^2$ y substituyendo, tenemos

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega^2 x.$$

Para hallar la velocidad, multipliquemos, primeramente, los dos miembros de la ecuación (3) por $2\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$:

$$(4) \qquad 2\,\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\left(2x\,\frac{dx}{dt}\right).$$

Integrando, resulta

$$(5) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 x + C.$$

C es una constante, determinada por las condiciones iniciales del problema. En este caso particular, $0 = \omega^2\,\alpha^2 + C$.

De donde (6) $\qquad \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2\,(a^2 - x^2).$

Para continuar integrando, hagamos un cambio de variable

$$x = a\cos\theta, \qquad \frac{dx}{dt} = -a\,\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt};$$

$$(7) \qquad a^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2\,a^2\,\operatorname{sen}^2\theta;$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2. \text{ De donde } \frac{d\theta}{dt} = \pm\,\omega, \quad \theta = \pm\,\omega t + \theta_0,$$

y $\quad$ (8) $\qquad x = a\cos\,(\pm\,\omega t + \theta_0).$

La constante θ_0 está determinada por las condiciones iniciales.

Para $t = 0$, $\quad x = \alpha$, $\quad \cos\theta_0 = 1$, $\quad \theta_0 = 0$.

Por último, se obtiene $x = a\cos\omega t$.

Por trigonometría sabemos que $\cos\omega t = \cos\,(-\,\omega t)$.

Llegamos a la conclusión de que el móvil está animado de un movimiento oscilatorio simple, de amplitud $2a$.

Consideremos ahora el caso en que la velocidad inicial no sea nula, pero siendo siempre su dirección la de la recta OA. El movimiento se producirá sobre esa recta. Si v_0 es la velocidad inicial, la constante C, que aparece en la primera integración, viene dada entonces por

$$(5') \qquad v_0^2 = -\,\omega^2 a + C,$$

$$C = v_0^2 + \omega^2 a.$$

Como v_0^2 es positivo, habrá un número b, mayor que a, tal que $C = \omega^2 b$, y la ecuación (6) se convierte en

$$(6') \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2\,(b^2 - x^2).$$

Continuamos integrando como en el caso anterior. Se obtiene $x = b\cos\,(\pm\,\omega t + \theta_0)$.

El valor de θ_0 y el signo de ω vienen determinados por las condiciones *iniciales* del problema. El movimiento sigue siendo un movimiento oscilatorio rectilíneo, cuyo período es ω y la amplitud $2b$. Si x_0 y v_0 son las condiciones iniciales, la ecuación del movimiento puede también escribirse

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t.$$

Consideremos ahora el caso general en que el móvil tenga una velocidad inicial que no esté dirigida hacia el punto O. El punto O y el vector velocidad inicial determinan un plano donde el móvil se mueve. Tomemos en este plano dos ejes de coordenadas, que tengan por origen el punto O. La fuerza que actúa sobre el punto M está dirigida hacia O y tiene como valor $k \cdot \vec{MO}$; si x, y, son las coordenadas de M, las proyecciones de la fuerza sobre los dos ejes de coordenadas (*fig.* 117) son $-kx$ y $-ky$. La proyección sobre los dos ejes, de la relación fundamental $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ nos da las dos ecuaciones siguientes:

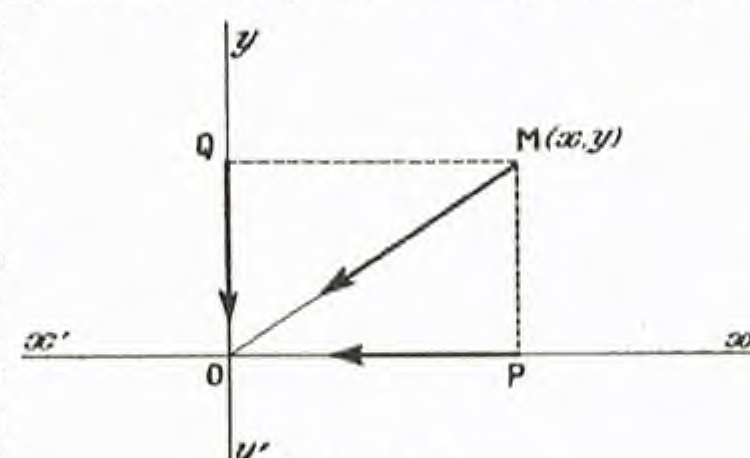


Fig. 117

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,kx, \qquad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\,ky.$$

Después de poner que $\frac{k}{m} = \omega^2$, integrando como en el caso anterior, se obtiene

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 \cdot x}{\omega} \operatorname{sen} \omega t, \quad y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0 \cdot y}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

Siendo x_0, y_0 las coordenadas del punto en el instante cero, y $v_0 \cdot x$, $v_0 \cdot y$ las proyecciones de la velocidad inicial.

Si se toma por eje de las x la recta que pasa por la posición inicial, y por eje de las y la paralela al vector velocidad inicial, se obtiene, en este sistema de coordenadas oblicuas

$$x = x_0 \cos \omega t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

Eliminando t entre estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2\omega^2}{v_0^2} = 1$; que es la ecuación de una *elipse.*

Movimiento de un punto pesante en el aire. — Hemos estudiado anteriormente (v. p. 240) el movimeinto de un punto pesante en el vacío. Si se considera un cuerpo libre, móvil en el aire (por ejemplo, un proyectil), está sometido, efectivamente, a la acción de su peso; pero es preciso, por otra parte, tener en cuenta la resistencia del aire. Ésta ejerce una fuerza según la dirección del vector velocidad, pero de sentido contrario (*fig.* 118), y su intensidad es igual a $mks\,\varphi(v)$, siendo s el área de la sección recta del cilindro circunscrito al cuerpo móvil y cuyas generatrices son paralelas al vector velocidad, $\varphi(v)$ una función de la velocidad únicamente y k una constante que depende de la forma que tenga el cuerpo. Para disminuir la resistencia del aire, se han buscado las formas para las cuales k sea lo más pequeño posible: son las "aerodinámicas". La experiencia demuestra que la función $\varphi(v)$ es igual a v, para velocidades pequeñas; si la velocidad es mayor, pero aún inferior a 200 metros por segundo, $\varphi(v)$ vale v^2; para velocidades superiores, es preciso introducir términos en v^3, v^4, etcétera, en la función $\varphi(v)$. Es imposible representar $\varphi(v)$ por una fórmula simple.

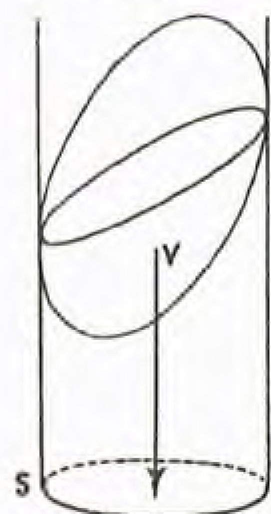


Fig. 118

Nos limitaremos a examinar el movimiento de un punto pesante que *desciende* según la vertical, y supondremos que la resistencia del aire tiene un valor igual a kmv^2. Elegiremos sobre la vertical, que es la trayectoria, como sentido positivo el dirigido de arriba hacia abajo. Las fuerzas que actúan sobre el punto son su peso, de valor algebraico mg, y la resistencia del aire, de valor algebraico $-mkv^2$. La relación fundamental $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ nos proporciona la ecuación

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - mkv^2.$$

Supongamos $g = ka^2$. Como $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, obtenemos

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = k(a^2 - v^2);$$

$$(3) \qquad \frac{dv}{k(a^2 - v^2)} = dt.$$

Integrando esta ecuación, se obtiene t en función de v; de aquí se deduce v en función de t, y por una nueva integración, se deduce x en función de t. Sin efectuar estas integraciones, vamos a deducir de las ecuaciones (2) y (3) resultados interesantes. Si la velocidad es menor que a, $\frac{dv}{dt}$ es positivo: la velocidad aumenta. Si por el contrario la velocidad es mayor que a, $\frac{dv}{dt}$ es negativo: la velocidad disminuye.

El elemento diferencial $\frac{1}{k(a^2 - v^2)}$ aumenta indefinidamente cuando v tiende hacia a, y se demuestra que la integral $\int^a \frac{dv}{vk(a^2 - v^2)}$ es infinita: teóricamente, por lo tanto, sólo al final de un tiempo infinito, la velocidad del móvil alcanza el valor de a. Si la velocidad inicial es a, el móvil estará animado de un movimiento uniforme de velocidad a. En definitiva, cualquiera que sea la velocidad inicial del móvil al caer, tenderá siempre hacia el mismo límite: al final de cierto tiempo, la velocidad será lo suficientemente próxima de a tal que parezca que el móvil está animado de un movimiento uniforme. Para ciertas formas de móviles, se alcanza muy rápidamente una velocidad próxima a a: esto es lo que hizo creer a los observadores, hasta Galileo, que el efecto de la gravedad daba lugar a un movimiento uniforme. En los paracaídas se pretende, por el contrario, obtener un valor pequeño de a y que éste se alcance rápidamente.

Integrales primeras. — La resolución de los problemas sobre la dinámica del punto mediante una doble integración de las tres ecuaciones que nos proporciona la ecuación fundamental vectorial $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ es teóricamente sencilla. Sin embargo, los ejemplos anteriores demuestran que, aun en los problemas más sencillos, aparecen integrales difíciles, y a veces imposibles. La resolución de los problemas de dinámica se facilita considerando las integrales primeras. Una integral primera es una ecuación donde pueden entrar el tiempo t, las coordenadas x, y, z y las proyecciones de la velocidad x', y', z'; el conocimiento de una integral primera disminuye en una unidad el número de integraciones. Por otra parte, las integrales primeras clásicas pueden ser objeto de interpretaciones mecánicas muy importantes: las integrales primeras más importantes son la *ley de las áreas* y la *de las fuerzas vivas.*

Integral primera de la ley de las áreas. — Supongamos que la resultante F de las fuerzas aplicadas al móvil pase por un punto fijo O: se dice entonces que las fuerzas son centrales. Hemos visto anteriormente que, si se considera el vector $\vec{OG}$ como momento del vector velocidad, la velocidad del punto G es un vector equipolente al momento $\vec{OG\gamma}$ de la aceleración $\vec{M\gamma}$ del punto M respecto al mismo punto O.

Tomemos como origen de momentos el punto O, por el que siempre pasa la resultante de las fuerzas: puesto que esta resultante pasa siempre por O, será también la línea de acción o soporte de la aceleración. Por consiguiente, el momento de la aceleración es nulo. Luego el punto G es fijo y el momento $\vec{OG}$ constante. Resulta, en primer lugar, que el punto M está siempre en el plano que pasando por O es perpendicular a OG: el movimiento del punto M (*fig.* 119) tiene lugar, por lo tanto, en el plano determinado por el punto O y el vector velocidad inicial.

Fig. 119

Tomemos en ese plano un sistema de dos ejes de coordenadas rectangulares de centro O. Si asociamos a este sistema un tercer eje, de origen O y perpendicular al plano, el valor algebraico del momento del vector velocidad es $OG = xy' - yx'$

Siendo constante este valor algebraico, *la integral primera que se obtiene de esta forma es la ecuación*

$$xy' - yx' = C.$$

Ahora bien, la expresión $xy' - yx'$ (v. Geometría analítica, p. 213) es el doble de la velocidad del área barrida por el radio vector OM, o velocidad areolar.

Cuando la fuerza que actúa sobre un punto pasa por un punto fijo, la velocidad areolar es constante: en este caso el movimiento tiene lugar según la ley de las áreas. El área M_0OM, barrida por el radio vector OM, es una función lineal del tiempo.

Si se toman coordenadas polares (v. p. 237), la integral primera de la ley de las áreas se expresa

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C.$$

Observaciones. 1º La fuerza que actúa sobre un planeta es la atracción del Sol: está fuerza pasa siempre por el centro del Sol. Como esta fuerza es central, cada planeta recorre su trayectoria con una velocidad areolar constante: nos encontramos con una de las leyes de Kepler.

2º Si la fuerza que actúa sobre un punto M (*fig.* 120) corta siempre una recta, se considera la proyección del movimiento sobre un plano perpendicular a esta recta. La proyección $\vec{mf}$ de la fuerza $\vec{MF}$ pasa siempre por el punto O: la proyección m del punto M está animada de un movimiento que "sigue la ley de las áreas", es decir, la velocidad areolar del punto m es constante.

Fig. 120

Trabajo. — Para llegar a la integral primera de las fuerzas vivas es necesario, antes de todo, precisar los conceptos muy importantes de trabajo y fuerzas vivas. Vamos a definir lo que es el trabajo, en los diferentes casos que pueden presentarse.

1º Sea $\vec{MF}$ (*fig.* 121) una fuerza, que en principio suponemos constante en magnitud, dirección y sentido. Si su punto de aplicación M se desplaza de A a B, siendo el segmento AB paralelo a la dirección de la fuerza y del mismo sentido, se llama trabajo T el producto de la fuerza F por el camino recorrido: T = MF . AB. Si el desplazamiento, paralelo a la fuerza, es de sentido contrario a ella, T = — MF . AB: en el primer caso el trabajo se llama motor, en el segundo, trabajo resistente.

Fig. 121

2º Consideremos ahora el caso en que la fuerza $\vec{MF}$ es siempre constante en magnitud, dirección y sentido, y en que el segmento AB, camino recorrido por el punto M, no está en la misma dirección de la fuerza (*fig.* 122). Si $\vec{MG}$ es la proyección de la fuerza MF sobre AB, el trabajo de la fuerza es el de su proyección MG. En todos los casos, si α es el ángulo que forma la dirección positiva de AB con la dirección de la fuerza, el trabajo viene dado por la fórmula

Fig. 122

$$T = \vec{MF} \cdot \vec{AB} \cos \alpha.$$

Esta fórmula nos dice que el trabajo es también en este caso el producto de la fuerza por la proyección del desplazamiento sobre una paralela a la dirección de la fuerza.

Si el punto M, que recorre AB, estuviera sometido a la acción de varias fuerzas $\overrightarrow{MF_1}$, $\overrightarrow{MF_2}$, ..., $\overrightarrow{MF_n}$, cuya resultante fuera $\overrightarrow{MR}$, sabemos que el valor algebraico de la proyección $\overrightarrow{MR'}$ de $\overrightarrow{MR}$ sobre AB es la suma algebraica de las proyecciones de $\overrightarrow{MF_1}$, $\overrightarrow{MF_2}$, ..., $\overrightarrow{MF_n}$. Designando por $\overrightarrow{MF'_1}$, $\overrightarrow{MF'_2}$, ..., $\overrightarrow{MF'_n}$ los valores algebraicos de estas proyecciones, se tiene

(1) $\overrightarrow{MR'} = \overrightarrow{MF'_1} + \overrightarrow{MF'_2} + \dots + \overrightarrow{MF'_n}$. $\leftarrow$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por AB, se obtiene

(2) $\overrightarrow{MR'} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MF'_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MF'_2} \cdot \overrightarrow{AB} + \dots + \overrightarrow{MF'_n} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza resultante es la suma de los trabajos realizados por las fuerzas componentes.

Si x, y, z son las proyecciones del vector $\overrightarrow{AB}$ en un sistema de coordenadas rectangulares y X, Y, Z las proyecciones de la fuerza, el trabajo realizado por ésta es la suma algebraica de los trabajos realizados por X, Y, Z. Ahora bien, el trabajo realizado por X es el producto de X por la proyección del desplazamiento AB sobre una paralela a la dirección de X: siendo esta proyección precisamente x, el trabajo realizado por X tiene por valor algebraico $X \cdot x$. Asimismo el de Y, es $Y \cdot y$ y el de Z, es $Z \cdot z$ Por lo tanto, finalmente se tiene

$$T = Xx + Yy + Zz.$$

Representación gráfica del trabajo. — Supongamos que el vector AB tenga como soporte un eje orientado: la proyección de la fuerza sobre este eje tiene un valor algebraico. Para hacer la representación gráfica del trabajo, se elige una escala para las abscisas (o desplazamientos) y otra para las fuerzas.

En un sistema de coordenadas rectangulares, sobre el eje de las abscisas, se lleva la del punto m, que es la abscisa del desplazamiento de M sobre la recta AB, y se le hace corresponder con el punto M_1, que tiene como ordenada el valor algebraico de la proyección de la fuerza. Cuando el punto M recorre el vector AB, el M_1 describe el segmento A_1B_1: en todos los casos, el valor algebraico del trabajo es un número, también algebraico, que tiene como valor absoluto el área del rectángulo abB_1A_1 (*fig.* 123) y por signo + o —, según que el contorno descrito en el orden abB_1A_1 lo sea en el sentido positivo o en el negativo (*fig.* 124).

Fig. 123

Fig. 124

Definición del trabajo: caso general. — La trayectoria es una curva, y la fuerza (o más exactamente, la resultante de las fuerzas) es variable en magnitud y dirección.

PRIMER MÉTODO. Definamos el trabajo cuando el punto M recorre el arco AB de la trayectoria (cada punto de la misma queda determinado por su abscisa curvilínea). Para obtener un valor aproximado del trabajo, se divide el arco AB por los puntos M_1, M_2, ..., M_{n-1}. Se substituye el arco de curva AB por la línea poligonal AM_1M_2, ..., $M_iM_{i+1}M_{n-1}B$ y se considera que para cada pequeño desplazamiento AM_1, M_1M_2, ..., M_iM_{i+1}, ..., $M_{n-1}B$, la fuerza es constante e igual a la que existe en el origen de cada una de las cuerdas: sean $\overrightarrow{A_AF_A}$, $\overrightarrow{M_1F_1}$, ..., $\overrightarrow{M_iF_i}$, ..., $\overrightarrow{M_{n-1}F_{n-1}}$, estas fuerzas (*fig.* 125), y $\overrightarrow{AF'_A}$ la proyección de $\overrightarrow{AF_A}$ sobre la recta AM_1, $\overrightarrow{M_1F'_1}$ la proyección de $\overrightarrow{M_1F_1}$ sobre la recta M_1M_2, ..., $\overrightarrow{M_iF'_i}$ la proyección de $\overrightarrow{M_iF_i}$ sobre la recta M_iM_{i+1}. El valor aproximado del trabajo, suma de los trabajos, es

$$T_a = \overrightarrow{A_AF'_A} \cdot \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1F'_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} + \dots + \overrightarrow{M_iF'_i} \cdot \overrightarrow{M_iM_{i+1}} + \dots + \overrightarrow{M_{n-1}F'_{n-1}} \cdot \overrightarrow{M_{n-1}B}.$$

Si se hace tender hacia infinito el número de puntos que hemos tomado sobre el arco, los arcos tenderán a cero y T_a tenderá hacia un límite: éste es el trabajo T de la fuerza $\overrightarrow{MF}$ cuando el punto M recorre el arco AB.

Fig. 125

Para precisar, utilicemos la representación gráfica (*fig.* 126). La representación gráfica del trabajo aproximado está formada por la suma de los rectángulos que representan los trabajos $\overrightarrow{AF'_A} \cdot \overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1F'_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, ...

Sobre el eje de las abscisas, tomamos sucesivamente $On_1 = AM_1$, $n_1n_2 = M_1M_2$ ..., y las cotas paralelas al eje de las ordenadas que tengan por valor algebraico $\overrightarrow{AF'_A}$, $\overrightarrow{M_1F'_1}$, $\overrightarrow{M_2F'_2}$, ..., que son los valores algebraicos de las proyecciones de las fuerzas aplicadas en A, M_1, M_2, ..., M_{n-1} ... sobre las rectas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$.

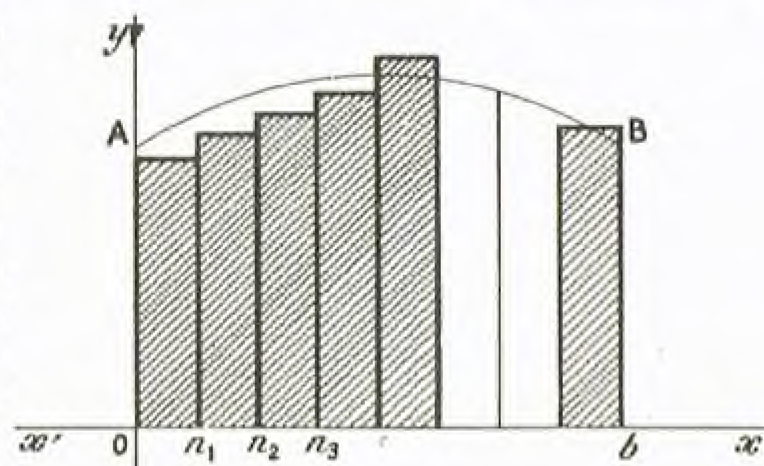


Fig. 126

Si se hacen tender hacia cero todos los arcos, se obtiene en el límite el área que queda limitada por el eje de las abscisas, dos paralelas al eje de las ordenadas y la curva representativa de la función $y = \overrightarrow{MF'}$, valor algebraico de la proyección de la fuerza aplicada en M sobre la tangente a la curva. Este valor algebraico es una función de la abscisa curvilínea, obteniéndose que el trabajo es la integral de la función MF' entre los valores a y b de las dos abscisas. Resulta que la derivada del trabajo respecto a la abscisa curvilínea s es el valor algebraico de la proyección de la fuerza sobre la tangente $\dfrac{dT}{ds} = \overrightarrow{MF'}$.

Utilizando el signo de la integración, el trabajo será

$$T = \int_a^b \overrightarrow{MF'}ds.$$

SEGUNDO MÉTODO. Sean X, Y, Z los valores algebraicos de las proyecciones de la fuerza $\overrightarrow{MF}$ sobre los tres ejes de coordenadas. Si dx, dy, dz son los elementos diferenciales del desplazamiento, el elemento diferencial del trabajo es

(1) $$dT = Xdx + Ydy + Zdz$$

y el trabajo entre los puntos A y B vendrá dado por la integral

(2) $$T = \int_A^B Xdx + Ydy + Zdz.$$

Si $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ son las expresiones de las coordenadas de la trayectoria en función de un parámetro, y si X, Y, Z se expresan también en función de ese parámetro, el trabajo vendrá dado por la integral

(3) $$T = \int_{t_0}^{t_1} [Xf'(t) + Yg'(t) + Zh'(t)]\, dt.$$

Siendo t_0 y t_1 los valores del parámetro que corresponden a los puntos extremos, A y B, del desplazamiento.

En particular, el parámetro puede ser la abscisa curvilínea, y entonces se tiene

(4) $$T = \int_a^b [Xf'(s) + Yg'(s) + Zh'(s)]\, ds.$$

Caso en que la fuerza deriva de una función de fuerzas. — X, Y, Z son entonces las derivadas parciales $\dfrac{dU}{dx}$, $\dfrac{dU}{dy}$, $\dfrac{dU}{dz}$ de una función U (x, y, z), y se tiene

(5) $$T = \int_A^B \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz.$$

La expresión bajo el signo de integración es la diferencial dU de la función de fuerzas U (x, y, z), y se obtiene

(6) $$T = U_B(x, y, z) - U_A(x, y, z).$$

Cuando la fuerza deriva de una función de fuerzas, el trabajo realizado por el móvil que va de A a B, es igual a la diferencia $U_B(x, y, z) - U_A(x, y, z)$, entre la función de fuerzas en B y en A: *ese trabajo depende únicamente de los valores* U_B (x, y, z) *y* U_A (x, y, z) *y no del desplazamiento o camino recorrido. Cuando la fuerza deriva de una función de fuerzas, el trabajo entre dos puntos es independiente del camino recorrido.*

EJEMPLOS. 1º *Punto sometido a la acción de su peso.* Si elegimos el eje de las z según la dirección de la vertical y dirigido positivamente hacia arriba, y los ejes x, y situados en el plano horizontal, las proyecciones de la fuerza son $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$. La función de fuerzas, de la que la fuerza deriva, es $U = -mgz$. El trabajo, cuando el móvil va de un punto de cota z_0 a otro de cota z_1, es $-mgz_1 + mgz_0 = mg(z_0 - z_1)$. El trabajo no depende, por lo tanto, más que de la diferencia de altura.

2º *Fuerza central, proporcional a la distancia al centro.* Si el punto O es el centro de coordenadas, la fuerza aplicada en un punto M tiene por intensidad mkr y está dirigida hacia el centro. Sus proyecciones son: $-mkx$, $-mky$, $-mkz$. Son las derivadas parciales de la función

$$U(x, y, z) = -\frac{mk}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{mk}{2}r^2.$$

El trabajo, cuando el punto M va de un punto A situado a una distancia r_0 del centro a otro M situado a una distancia r_1, es $\frac{mk}{2}(r^2_1 - r^2_0)$.

Definición. — *La fuerza viva de un punto material en movimiento es el producto* mv^2 *de su masa por el cuadrado de su velocidad en el instante considerado.*

Se llama **energía cinética** *la mitad de su fuerza viva.*

Teorema de las fuerzas vivas. — *La variación de la energía cinética (o semifuerza viva) de un punto en movimiento, durante cierto intervalo de tiempo, es igual al trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al punto durante el mismo intervalo.*

La derivada del trabajo respecto a la abscisa curvilínea es F', es decir, el valor algebraico de la proyección de la fuerza viva sobre la tangente a la trayectoria. Apliquemos el cálculo de derivadas de una función de función: la derivada del trabajo respecto al tiempo, es igual al producto de la derivada del trabajo con relación al arco por la derivada del arco con relación al tiempo, es decir, la velocidad. Podemos escribir, por lo tanto,

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} = F' \cdot v.$$

Ahora bien, haciendo uso de la relación fundamental $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$, el valor algebraico de F' proyección de la fuerza $\vec{MF}$ sobre la tangente, es igual al valor algebraico de $m\gamma t$, donde γt es el valor algebraico de la proyección de la aceleración sobre la tangente. Por lo tanto,

$$(2) \qquad \frac{dT}{dt} = m\gamma t \cdot v.$$

Si x'', y'', z'' son las proyecciones de la aceleración sobre los tres ejes, y si cos α, cos β, cos γ son los cosenos de los ángulos que forma la dirección positiva sobre la tangente con las direcciones de los ejes (cosenos directores),

$$\gamma t = x'' \cos \alpha + y'' \cos \beta + z'' \cos \gamma.$$

Por lo tanto (3) $\frac{dT}{dt} = m\,(x''v \cos \alpha + y''v \cos \beta + z''v \cos \gamma)$.

Ahora bien: $v \cos \alpha = x'$, $v \cos \beta = y'$, $v \cos \gamma = z'$.

$$(4) \qquad \frac{dT}{dt} = m\,(x''\,x' + y''\,y' + z''\,z').$$

El segundo miembro es la semiderivada, respecto al tiempo, de $x'^2 + y'^2 + z'^2$, es decir, la semiderivada con relación al tiempo del cuadrado de la velocidad. De donde

$$(5) \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{\left(\frac{1}{2} mv^2\right)}{dt}.$$

Teniendo el trabajo T y la energía cinética (o semifuerza viva) la misma derivada respecto al tiempo, se tiene

$$(6) \qquad T = \frac{1}{2} mv^2 + C,$$

siendo C una constante. Deduciéndose que

$$(7) \qquad T - T_0 = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Esta relación es la integral primera de las fuerzas vivas.

OBSERVACIÓN. Si la fuerza deriva de una función de fuerzas, y designamos por U y U_0 los valores de la función de fuerzas:

$$(8) \qquad U - U_0 = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

De donde,

$$(9) \qquad \frac{1}{2} mv_0^2 - U_0 = \frac{1}{2} mv^2 - U.$$

Durante todo el movimiento, la suma $\frac{1}{2} mv^2 - U$ es constante: $\frac{1}{2} mv^2$ es la energía cinética; $-$ U es la energía potencial. La suma de la energía cinética y de la energía potencial es constante.

La energía potencial está definida casi como una constante.

Aplicación del teorema de las fuerzas vivas a los ejemplos ya tratados. — 1° *Punto pesante móvil en el vacío* (v. p. 235). La función de fuerzas (si el eje vertical $z'z$ está orientado positivamente hacia arriba) es $U = -mgz$. Se tiene

$$(1) \qquad \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgz_0 - mgz.$$

De donde (2) $\qquad v^2 + 2z = v_0^2 + 2z_0.$

Esta igualdad nos dice que cuando el móvil pasa por dos puntos que tienen la misma altura, el valor absoluto de la velocidad es el mismo.

2° *Punto atraído por un punto fijo que ejerce una fuerza proporcional a la distancia.* Si r es la distancia al centro de atracción, la función de fuerzas es $U = -\frac{k}{2} r^2$.

La integral primera de las fuerzas vivas es

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\frac{k}{2} r^2 - \frac{k}{2} r_0^2.$$

Si $\frac{k}{m} = \omega$, $\qquad v^2 + \omega r^2 = v_0^2 + \omega r_0^2.$

Cuando el móvil pasa por dos puntos situados a la misma distancia del centro, el valor absoluto de la velocidad es el mismo.

En el caso de que el móvil se desplace sobre una recta que pase por el centro de atracción, la integral de las fuerzas vivas es

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - \omega^2 x^2.$$

Encontramos de nuevo una ecuación, en la serie de cálculos, que nos lleva a la solución.

Movimiento de los planetas. — Partiendo de las leyes de Kepler, se deduce que la fuerza que origina el movimiento de los planetas es una fuerza que pasa por el centro del Sol y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Recíprocamente, si se trata de hallar el movimiento de un móvil atraído por un punto fijo con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, se obtiene, por cálculos que sobrepasan el nivel de este estudio y que tienen como base de partida las dos integrales primeras de la ley de las áreas y de las fuerzas vivas, que la trayectoria es una elipse.

Movimiento de un punto ligado, es decir, de un punto obligado a describir una curva o una superficie. — Hemos visto en estática lo que es un punto ligado (v. página 218). Además de las fuerzas directamente aplicadas al punto, existe una reacción del apoyo. Para obtener la ley del movimiento hay que proceder como si fuera un punto libre, pero añadiendo a las fuerzas directamente aplicadas la reacción del apoyo.

La dificultad estriba también en que esta reacción es, por regla general, desconocida en dirección y magnitud. Distinguiremos también dos casos: aquel en que el apoyo está perfectamente pulimentado, la reacción es entonces normal a él y se dice que no existe rozamiento; y el caso en que la reacción no es normal y entonces hay rozamiento.

En los primeros ejemplos supondremos que no existe rozamiento. Siendo la reacción normal a la trayectoria, su trabajo es nulo. El teorema de las fuerzas vivas subsiste y no se hace intervenir nada más que las fuerzas directamente aplicadas.

Aplicación del teorema de las fuerzas vivas. — *El trabajo realizado por las fuerzas directamente aplicadas (entre dos instantes* t_0 *y* t*) es igual a la variación de energía cinética (o semifuerza viva)*

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Si las fuerzas directamente aplicadas derivan de una función de fuerzas U, se tiene siempre

$$U - U_0 = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Péndulo simple. — El péndulo simple está constituido por una partícula M, de masa m, suspendida mediante un hilo inextensible (de masa despreciable) de un punto fijo O. Es como si la partícula M estuviera situada en el interior de una esfera de centro O y de radio la longitud l del hilo. Es una ligadura o enlace unilateral. La tensión $\vec{T}$ del hilo desempeña el papel de la reacción $\vec{R}$ del apoyo. Como es normal a la esfera, todo sucede como si el móvil M se desplazase sobre la esfera sin rozamiento. Si la velocidad inicial es nula o se encuentra en el plano vertical que contiene el centro O y la posición M_0, el movimiento tiene lugar en ese plano.

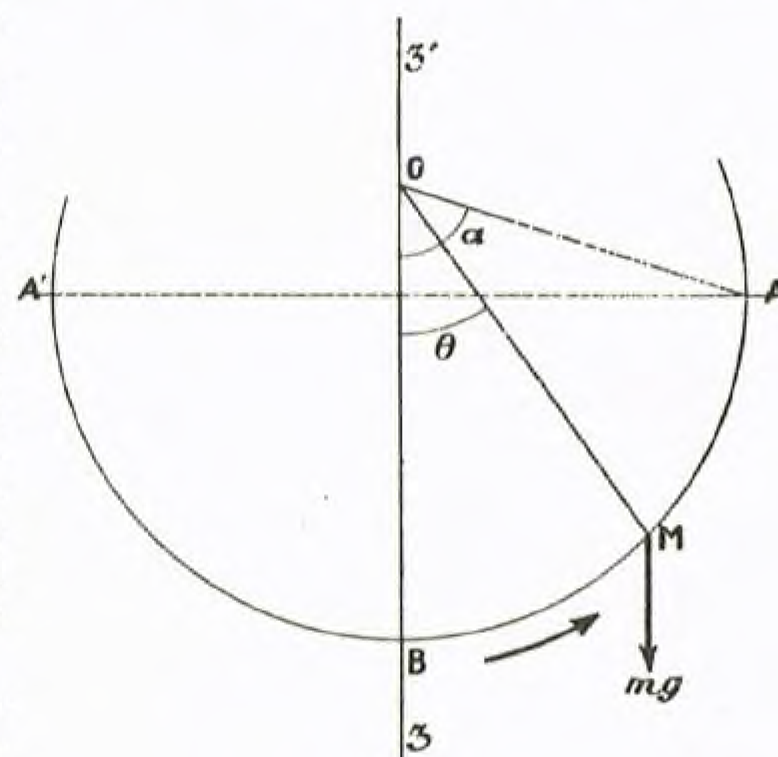


Fig. 127

Supongamos que la velocidad es nula en el punto A. Designemos por α el ángulo $\widehat{BOA}$, y por θ el ángulo variable $\widehat{BOM}$ (*fig.* 127), estando estos dos ángulos medidos en radianes y siendo el sentido positivo el de B hacia A.

Como suponemos que la velocidad es nula en el punto A, la integral de las fuerzas vivas da

$$(1) \qquad \frac{mv^2}{2} = mgl\,(\cos \theta - \cos \alpha).$$

$$(2) \qquad v^2 = 2\,gl\,(\cos \theta - \cos \alpha).$$

Una primera consecuencia de esta fórmula es que

$$\cos \theta - \cos \alpha \geqq 0.$$

De donde resulta $-\alpha \leqq \theta \leqq \alpha$. El punto móvil permanece sobre el arco AA'.

Puesto que el movimiento es circular, $v^2 = l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$;

(3) $$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Si el ángulo α es pequeño, igual sucederá con ω y entonces se puede, sin gran error, substituir $\cos\alpha$ y $\cos\theta$ por los dos primeros términos de su desarrollo en serie

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + ..., \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + ...$$

Esta aproximación nos lleva a la ecuación

(4) $$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\alpha^2 - \theta^2).$$

Nos encontramos con una ecuación análoga a la deducida para el movimiento oscilatorio simple.

Supongamos $\theta = \alpha \operatorname{sen} \varphi$, $\frac{d\theta}{dt} = -\alpha \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{dt}$.

De donde $$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \varphi = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C,$$

$$\theta = \alpha \cos\left(\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C\right),$$

siendo C una constante.

Como $\theta = \alpha$, para $t = 0$, $\cos C = 0$, $C = 1$, y se obtiene, finalmente,

$$\theta = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Si se toma el punto B, el más bajo de la trayectoria, como origen de las abscisas curvilíneas, $l\theta$ es el valor algebraico del arco $\widehat{BM}$ y $l\alpha$ el del arco $\widehat{BA}$.

Se obtiene $\widehat{BM} = \widehat{BA} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$. Esta igualdad nos dice que el movimiento de M sobre el pequeño arco AA′ es análogo al movimiento oscilatorio rectilíneo.

El móvil vuelve a pasar por el mismo punto, con la misma velocidad y en el mismo sentido, cuando $\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ aumenta en π. Por lo tanto, la duración T, de una oscilación doble, es

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = 2\pi; \qquad \text{de donde } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Esta duración es independiente de α: se expresa este hecho diciendo que las oscilaciones pequeñas son *isócronas.*

Punto móvil sin rozamiento sobre un plano inclinado. — Sea α el ángulo que forma ese plano inclinado con el plano horizontal. La única fuerza directamente aplicada es el peso mg. Este peso se descompone en dos fuerzas: una, la $\overrightarrow{MN}$, normal al plano y de intensidad $mg \cos\alpha$, y otra, la $\overrightarrow{MT}$, situada sobre la superficie del plano inclinado, según una línea de máxima pendiente y dirigida hacia abajo, siendo su intensidad $mg \operatorname{sen} \alpha$. La fuerza normal al plano se equilibra con la reacción del apoyo. El movimiento del punto en el plano, es el de un punto sometido a una fuerza cuya línea de acción es la línea de máxima pendiente y dirigida hacia abajo, por lo tanto de dirección constante e intensidad, también, constante e igual a $mg \operatorname{sen} \alpha$. La aceleración es, pues, un vector equipolente (*fig.* 128) de valor absoluto $g \operatorname{sen} \alpha$. Se plantea el mismo problema que el del movimiento de un punto pesante móvil en el vacío.

Si la velocidad inicial es nula, o si está dirigida según una línea de máxima pendiente, el punto recorre esta línea con un movimiento uniformemente variado. Si la velocidad inicial formara un ángulo con la línea de máxima pendiente, la trayectoria del punto sería una parábola situada en el plano inclinado; en ambos casos la aceleración g se substituye por $g \operatorname{sen} \alpha$, que tiene un valor menor.

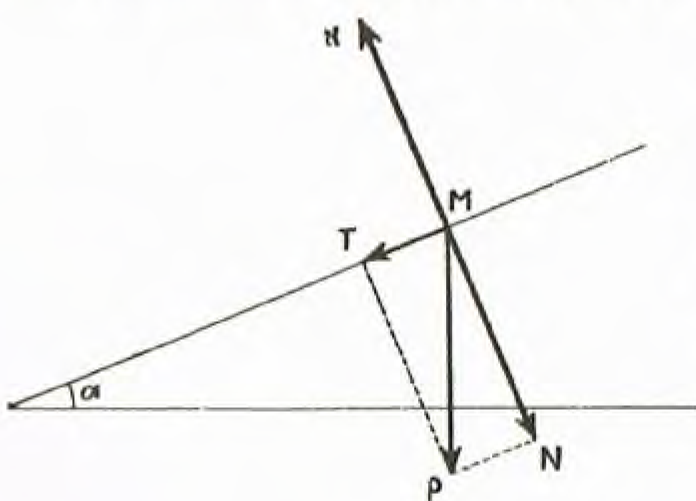


Fig. 128

Punto móvil con rozamiento sobre una curva o una superficie. — El caso en el que no existe rozamiento es el ideal. En realidad, en todo movimiento de un móvil sobre un apoyo hay rozamiento. La resistencia al deslizamiento (rozamiento) ha sido estudiada experimentalmente (v. ESTÁTICA, p. 218); los resultados son análogos a los que fueron expuestos en el estudio del rozamiento en estática.

Cuando hay rozamiento, la reacción $\overrightarrow{R}$ del apoyo no es normal a él: se puede, por lo tanto, substituir por dos componentes $\overrightarrow{R_n}$ y $\overrightarrow{R_t}$. La componente $\overrightarrow{R_n}$ es directamente opuesta a la componente normal de las fuerzas directamente aplicadas al punto. La componente $\overrightarrow{R_t}$ tiene la misma línea de acción o soporte que el vector velocidad y dirigida en sentido contrario. Su intensidad $\overrightarrow{R_t}$ es igual a $f_1\overrightarrow{R_n}$, es decir, al producto de la intensidad de la componente normal por un coeficiente f_1 que sólo depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Ese coeficiente f_1, coeficiente de rozamiento (resistencia al deslizamiento) durante el movimiento, es, en general, menor que el coeficiente de rozamiento cuando el móvil empieza a moverse.

Los valores, por ejemplo, de los coeficientes para distintas substancias son:

Madera sobre madera, en seco	$f = 0{,}50$, $f_1 = 0{,}36$.
Metal sobre metal, superficies engrasadas	$f = 0{,}10$, $f_1 = 0{,}09$.

OBSERVACIÓN. Cuando existe rozamiento, la reacción del apoyo se opone al movimiento y forma un ángulo constante con la normal: $f_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$.

EJEMPLO. *Punto pesante móvil con rozamiento sobre un plano inclinado.*

Sea α el ángulo que forma el plano inclinado con el horizontal, f el coeficiente de rozamiento al comenzar el móvil a moverse y f_1 el coeficiente de rozamiento durante el movimiento. La única fuerza directamente aplicada es el peso mg: ésta se descompone en una componente normal N de intensidad $mg \cos\alpha$ y en una tangencial T de intensidad $mg \operatorname{sen} \alpha$ dirigida según la línea de máxima pendiente hacia abajo. La reacción del apoyo se descompone en una R_n directamente opuesta a N, y, por consiguiente, de intensidad $mg \cos\alpha$, y en otra R_t, situada en el plano inclinado y opuesta a la velocidad, siendo su intensidad $f_1 \cdot mg \cos\alpha$.

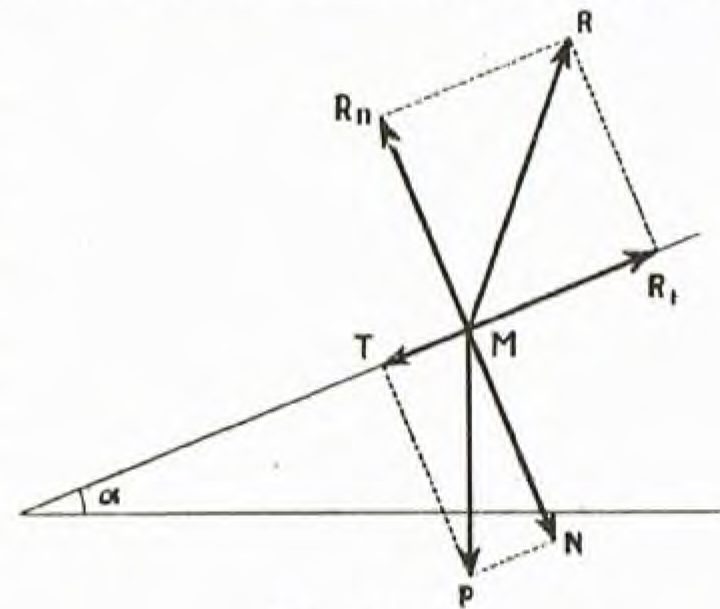


Fig. 129

Nos limitaremos a estudiar el caso en que la velocidad inicial es nula, y aquellos en que, no siendo nula la velocidad inicial, esté dirigida según una línea de máxima pendiente.

PRIMER CASO. El punto se deja sin velocidad inicial en O. Hemos visto en estática que si $\operatorname{tg} \alpha \leqq f$, el punto quedará en reposo. En caso contrario, el punto se desplaza siguiendo una línea de máxima pendiente (*fig.* 129). Orientemos esta línea positivamente hacia abajo. Las componentes de las fuerzas que actúan sobre el punto son: la tangencial del peso, que tiene por valor algebraico $mg \operatorname{sen} \alpha$, y la componente tangencial de la reacción, dirigida hacia arriba y de valor algebraico $-f_1\, mg \cos\alpha$.

Por consiguiente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha - f_1 g \cos\alpha = g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi_1).$$

La aceleración es constante, dirigida hacia abajo y menor que la que aparece cuando el rozamiento es nulo.

Si se toma como origen de abscisas el punto de partida o posición inicial del móvil, la ley del movimiento es

$$x = \frac{1}{2} g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi_1)\,t^2.$$

SEGUNDO CASO. El móvil tiene una velocidad inicial v_0 dirigida hacia abajo. El movimiento también se realiza sobre una línea de máxima pendiente. Se tiene, por tanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi_1).$$

$$v = g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi_1)\,t + v_0.$$

$$x = \frac{1}{2} g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi_1)\,t^2 + v_0 t.$$

Si $\alpha < \varphi_1$, $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi_1$, la aceleración es negativa. El movimiento es retardado y el punto queda en reposo a partir del tiempo

$$t_1 = \frac{v_0}{g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\alpha)}.$$

Si $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi_1$, la aceleración es nula. El móvil tiene un movimiento uniforme.

Si $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi_1$, el punto estará animado de un movimiento uniformemente acelerado.

TERCER CASO. La velocidad inicial está dirigida hacia arriba. El movimiento se realiza también sobre una línea de máxima pendiente. La componente tangencial de la reacción del plano está dirigida hacia abajo. Estando la trayectoria orientada siempre hacia abajo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \operatorname{sen}\alpha + f_1 g \cos\alpha = g \cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi_1).$$

La aceleración dirigida hacia abajo, es mayor que la que aparece cuando el rozamiento es nulo.

$$v = g \cos \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi_1) \, t - v_0.$$

$$x = -\frac{1}{2} g \cos \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi_1) \, t^2 - v_0 t.$$

El punto está animado de un movimiento uniformemente retardado.

Se detendrá, al cabo del tiempo $t = \dfrac{v_0}{g \cos \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi_1)}$.

Se detiene antes y sube menos que cuando no existe rozamiento.

Dinámica del sólido. — Tiene por objeto estudiar los movimientos de un sólido cuando se conocen las fuerzas exteriores que actúan sobre él. La complejidad y dificultad en los cálculos, sólo nos permiten indicar algunos resultados. Un concepto muy importante que interviene en la dinámica del sólido, es la *cantidad de movimiento*. La cantidad de movimiento de un elemento material de masa m es el vector $\overrightarrow{mv}$, producto del vector velocidad del elemento por el número positivo m.

Se deduce de la ecuación fundamental $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, que si se construye, a partir de un punto, la resultante general y el momento resultante de las cantidades de movimiento de todos los elementos del sólido, la velocidad del extremo de la resultante general es equipolente a la resultante general de las fuerzas exteriores; la velocidad del extremo del momento resultante de las cantidades de movimiento es equipolente al momento resultante de las fuerzas directamente aplicadas. La variación de la energía cinética (o semifuerza viva) de todos los elementos del sólido es también igual a la variación de la suma de los trabajos efectuados por todas las fuerzas exteriores.

Un resultado muy importante, que se deduce de las consideraciones anteriores, es el siguiente: en la dinámica del sólido, el movimiento de su centro de gravedad es igual que si se considerase que toda la masa está concentrada en él y estuviera sometido a fuerzas equipolentes a las exteriores. Para estudiar el movimiento de un sólido, hay que estudiar, por lo tanto, el movimiento de su centro de gravedad, *aplicando los métodos de la dinámica del punto*, y, a continuación, hay que considerar el movimiento relativo del sólido alrededor de su centro de gravedad (con relación a unos ejes de dirección fija que pasen por él).

Si, en un instante, el sólido tiene un movimiento de rotación con relación a un eje determinado, y si ω es la velocidad angular alrededor del mismo, la fuerza viva total es

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mr^2\omega^2;$$

el signo Σ indica que hay que efectuar la suma de las fuerzas vivas de todos los elementos que componen el cuerpo. Como es igual para todos los puntos, podemos poner ω^2 como factor común. La fuerza viva es entonces $\omega^2\Sigma mr^2$. Aparece la cantidad Σmr^2, que se llama **momento de inercia** del cuerpo respecto al eje considerado.

Definición. — *El momento de inercia de un sólido (o de un sistema de puntos) con relación a un plano* P, *a una recta* Δ *o a un punto* O, *es la suma*

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2 = \Sigma \, (mr^2)$$

que se obtiene multiplicando la masa de cada punto material por el cuadrado de su distancia a P, a Δ o a O, y sumando los productos así formados.

Para un cuerpo continuo, el momento de inercia es más exactamente el límite de la suma $\Sigma \, (mr^2)$, obtenida descomponiendo el cuerpo en partes infinitamente pequeñas. Cuando el número de esas partes aumenta indefinidamente, el límite es una integral.

Propiedades. 1° *La suma de los momentos de inercia de un sólido respecto a dos planos perpendiculares es igual al momento de inercia respecto a su intersección:*

$$\Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2) = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

2° *La suma de los momentos de inercia de un sólido respecto a tres planos perpendiculares es igual al momento de inercia respecto a su punto común:*

$$\Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2) + \Sigma(mz^2) = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ejemplo. *Momento de inercia de una barra rectilínea homogénea respecto a su centro.*

Sea $2l$ la longitud de la barra y ρ su densidad lineal. El momento con relación a su punto medio O es función de l (*fig.* 130). Incrementemos l a uno y otro extremo de la barra, en una cantidad infinitamente pequeña dl. El momento de inercia sufrirá un incremento dI como consecuencia de haber aumentado la longitud de la barra, a uno y otro extremo de la misma, con esos incrementos infinitamente pequeños situados a una distancia l del centro.

B A — A B
dl l O l dl

Fig. 130

$$dI = 2l^2 \rho dl.$$

Por consiguiente, $I = 2\rho \displaystyle\int_0^l l^2 dl = \frac{2}{3} \rho l^3$.

Como $2\rho l$ es la masa M de la barra, $I = \dfrac{1}{3} Ml^2$.

De la misma forma se demuestra que el momento de inercia de un cilindro de revolución (de masa M) con relación a su eje es $I = M \dfrac{R^2}{2}$.

El momento de inercia de una esfera respecto a su centro es $I = \dfrac{2}{5} M \cdot R^2$.

Máquinas simples

Las *máquinas simples* son instrumentos empleados desde la más remota antigüedad y que sirven para transmitir la acción de las fuerzas a las que están sometidos directamente: la potencia $\vec{P}$ y la resistencia $\vec{Q}$. La potencia es, por ejemplo, la fuerza ejercida por un obrero con la mano y la resistencia el peso de una carga. En el estudio de las máquinas simples en reposo, no se tienen en cuenta los rozamientos. Si, en algunos casos, se utilizan las máquinas simples en su estado de equilibrio (por ejemplo, cuando se utiliza una palanca para mantener una carga levantada), sirven para trasladar pesos. Si el desplazamiento es bastante lento, la potencia es ligeramente superior a la que se ejerce en estado de equilibrio, si el rozamiento no es considerable. El estudio del equilibrio permite darse cuenta de la ventaja que supone el empleo de estas máquinas simples.

Plano inclinado. — Sea α el ángulo del plano inclinado. Un cuerpo colocado sobre él está sometido a tres fuerzas: el peso $\vec{P}$ del cuerpo, que es la resistencia; la reacción $\vec{N}$ del plano y la fuerza $\vec{F}$, que es la potencia. Esta potencia debe estar situada en el plano vertical que contenga una línea de máxima pendiente y que pase por el centro de gravedad del cuerpo. Debe, pues, estar dirigida hacia arriba y si se designa por β el ángulo que forma $\vec{F}$ con la línea de máxima pendiente la condición de equilibrio, obtenida proyectando sobre dicha línea, es

$$F \cos \beta = P \operatorname{sen} \alpha.$$

Si $\beta = 0$, $F = P \operatorname{sen} \alpha$.

F es sensiblemente inferior a P (*fig.* 131) y será tanto más pequeña cuanto menor sea α. No obstante, el trabajo de F es igual al de P.

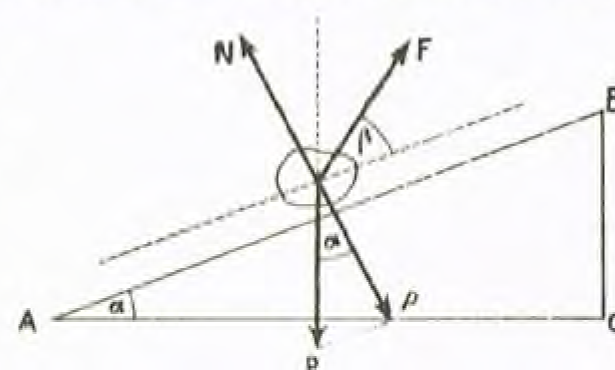


Fig. 131

En la práctica, para disminuir el rozamiento, se coloca el cuerpo sobre unas ruedas o rodillos.

Palanca. — La palanca es, en principio, un sólido que tiene un punto fijo O (*fig.* 132). Sea $\overrightarrow{AP}$ la potencia y $\overrightarrow{BQ}$ la resistencia. Las condiciones de equilibrio son las mismas que para un sólido que tiene un punto fijo: los momentos de $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$ con relación al punto fijo O, deben ser opuestos (no se tiene en cuenta el peso de la palanca). Por consiguiente, las fuerzas $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$ deben estar en un mismo plano que contenga O, tienden a hacer girar la palanca en sentido contrario y, si OH y OK son las distancias de O a las líneas de acción de las fuerzas, debe verificarse que

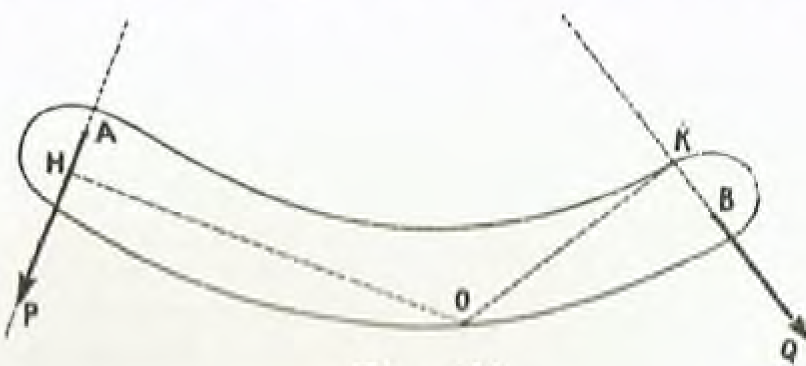


Fig. 132

$$AP \cdot OH = BQ \cdot OK.$$

OH y OK son los brazos de la palanca.

De donde

$$AP = \frac{OK}{OH} \cdot BQ.$$

Si $\dfrac{OK}{OH} < 1$, AP es menor que BQ, haciéndonos ver la relación $\dfrac{OK}{OH}$ la ventaja que supone el empleo de la palanca. El trabajo de la potencia es igual al realizado por la resistencia.

En la práctica, O, A y B, están sensiblemente alineados. Según su disposición relativa, existen tres géneros de palanca.

Una palanca es de primer género cuando O está situado entre A y B (*fig.* 133). Ejemplos: una palanca para levantar cargas, unas tijeras y unas tenazas. La palanca es de segundo género (*fig.* 133) cuando el punto de aplicación B de la resistencia está situado entre el punto fijo y el de aplicación de la potencia. Ejemplos: una carretilla, un cascanueces. Es de tercer género (*fig.* 133) cuando el punto de aplicación A de la potencia está situado entre el punto fijo y el de aplicación de la resistencia. Ejemplos: unas pinzas para coger azúcar, el pedal de una afiladora. En las palancas de tercer género, la resistencia es menor que la potencia. En el pedal de una

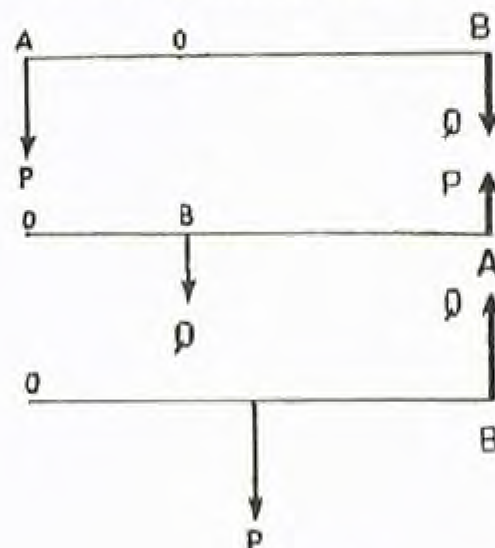


Fig. 133

afiladora no interesa el problema de equilibrio, sino el problema cinemático: siendo igual la velocidad angular alrededor de O en A y en B, la velocidad lineal en A es mayor que la de B y se obtiene, gracias al pedal, una velocidad superior en la piedra de afilar.

Torno simple. — Consta de un cilindro llamado árbol o tambor capaz de girar alrededor de su eje, que apoya sobre dos gorrones. La resistencia, que normalmente es un peso a levantar, actúa sobre el extremo de una cuerda que se enrolla sobre el tambor. Sea r el radio de ese tambor (*fig.* 134). La potencia actúa tangencialmente a una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje del torno y su radio R es mayor que el del tambor r. Esta circunferencia se materializa por una rueda, una manivela o una palanca acodada que atraviesa el tambor por su eje longitudinal.

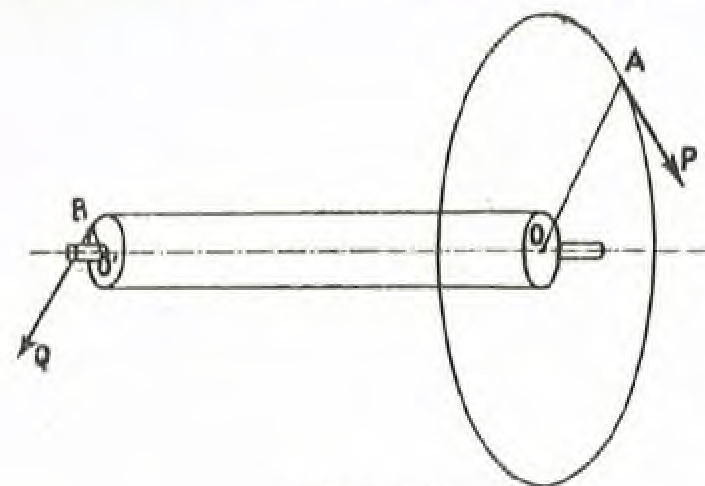


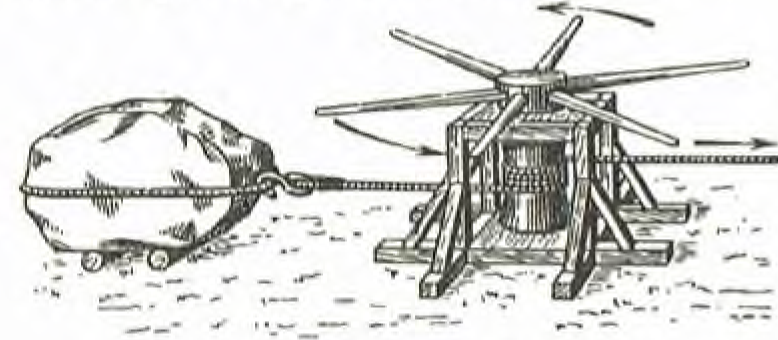
Fig. 134

Para hallar la condición de equilibrio, es suficiente expresar que el momento resultante de las fuerzas directamente aplicadas con relación al eje es nulo. El peso del tambor no interviene, ya que resulta equilibrado por el eje. Se obtiene

$$P \cdot R = Q \cdot r.$$

$$P = Q \frac{r}{R}.$$

La relación $\frac{r}{R}$ nos indica la ventaja que supone el empleo del torno. El trabajo de la potencia es igual al de la resistencia.

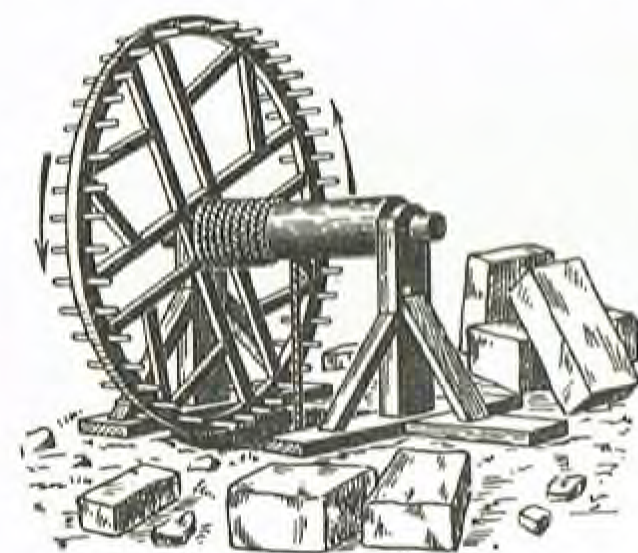

Fig. 135

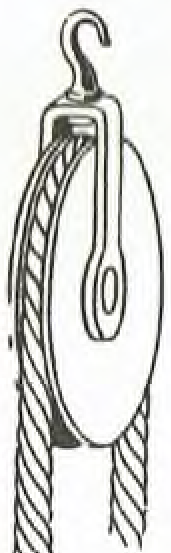
Máquinas análogas al torno son el cabestrante (*fig.* 135) y el cric.

En el torno de canteras (*fig.* 136), la potencia, que es el peso del obrero, es siempre vertical y nunca tangente a la rueda.

Poleas. Conjunto de poleas. — La polea es un disco o una rueda, generalmente maciza, acanalada en su circunferencia y móvil alrededor de un eje. Por la canal o garganta pasa una cuerda o una cadena. Lo normal es que la polea vaya montada sobre un soporte metálico llamado *armadura* o *bastidor*.

La polea se llama fija, cuando su eje es fijo. La potencia se ejerce sobre una de las ramas de la cuerda y la resistencia Q sobre la otra (*fig.* 137). Si hallamos los momentos de estas dos fuerzas respecto al eje, obtenemos $P = Q$. La ventaja de la polea fija consiste en cambiar la dirección de la fuerza.


Fig. 136


Fig. 137

La *polea móvil* está sostenida por una cuerda, que tiene uno de sus extremos atado a un punto fijo A (*fig.* 138). La potencia se aplica en el otro extremo (normalmente a través de una polea fija). La resistencia, que es normalmente un peso a levantar, actúa sobre la armadura de la polea por intermedio de un gancho.

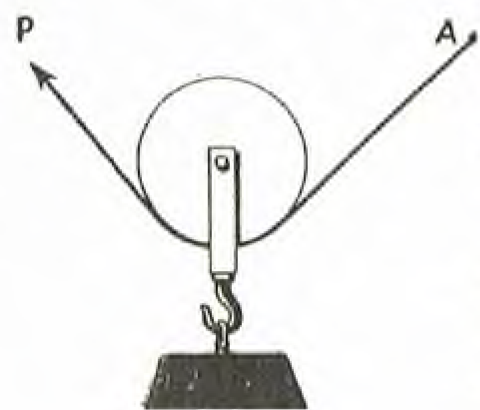


Fig. 138

Las fuerzas que actúan sobre una polea móvil son la potencia $\overrightarrow{BP}$ (*fig.* 139), aplicada en un extremo de la cuerda, la resistencia $\overrightarrow{OQ}$, aplicada en el centro de la polea, y la tensión $\overrightarrow{CT}$ de la rama de la cuerda que está atada en el punto A. Los momentos de estas fuerzas son nulos respecto al punto O, por lo tanto BP = CT, y proyectando sobre la vertical del punto O, se obtiene $\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{2 \cos \alpha}$.

En el caso particular de que las dos ramas sean paralelas, $\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{OQ}}{2}$.

La potencia, que actúa sobre una rama, es la mitad de la resistencia o peso a levantar: la ventaja de utilizar la polea móvil estriba en la solidez del punto fijo A, sobre el que se ejerce la tensión $\overrightarrow{CT}$. El trabajo que realiza la potencia $\overrightarrow{BP}$ es igual al realizado por la resistencia $\cdot \overrightarrow{OQ}$.

Se llama *trócola* el conjunto de varias poleas montadas sobre una misma armadura, y *polipasto* la combinación de dos trócolas, de las que una, la superior, está suspendida de un punto fijo por su gancho, y la otra es la que actúa sobre la resistencia. Una cuerda, que tiene uno de sus extremos atado a la trócola fija, pasa por todas las poleas. En su otro extremo se aplica la potencia P (*fig.* 140).

Todas las ramas pueden ser consideradas sensiblemente paralelas y, según la teoría de la polea simple, todas tienen una tensión igual a la potencia P. La resistencia Q está, pues, equilibrada por n fuerzas paralelas de intensidad P, siendo n el número de ramas, o, lo que es lo mismo, el número total de poleas en las dos trócolas.

Se tiene así

$$Q = nP \qquad P = \frac{Q}{n}.$$

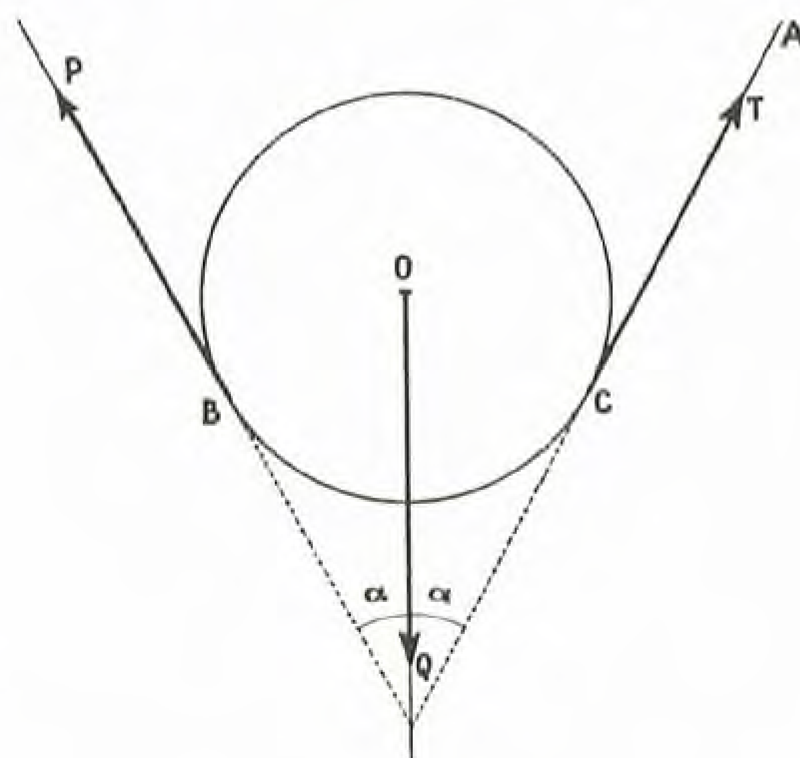


Fig. 139

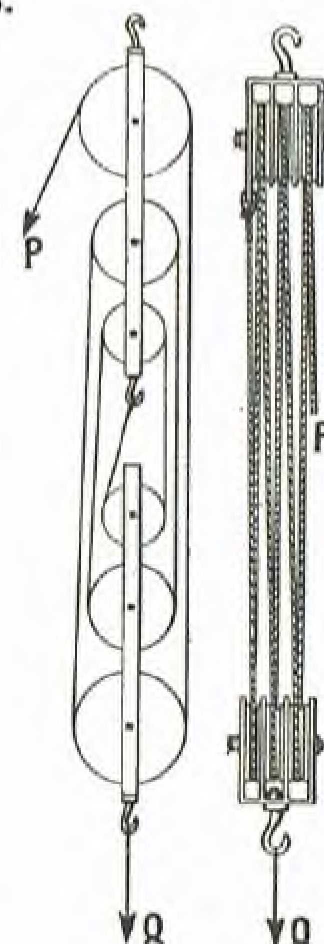


Fig. 140

Esta relación nos indica la ventaja de utilizar los polipastos.

Los tornos de engranaje, las cabrias, las grúas y los crics de engranaje son combinaciones de máquinas simples.

Las unidades de la mecánica

En todo lo que antecede, hemos expuesto las relaciones de la mecánica de forma abstracta, sin tener en cuenta las unidades elegidas. Todas las fórmulas vistas, y más particularmente la ecuación fundamental de la dinámica $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$, suponen, no obstante, que las unidades empleadas pertenecen a un mismo *sistema de unidades:* si no fuera así, tendríamos que haber afectado a cada fórmula coeficientes que dependerían del sistema de unidades elegido. En la práctica, así como en la teoría, es necesario que las medidas de las diferentes magnitudes sean tomadas con unidades que pertenezcan a un mismo sistema. Vamos a señalar los principales sistemas en uso.

Las relaciones de la mecánica, así como las de la física, demuestran que se pueden deducir todas las unidades partiendo de las unidades de *tres magnitudes fundamentales.* Los sistemas en uso son definidos por las iniciales de las tres unidades fundamentales. El sistema universalmente adoptado por matemáticos y físicos es el M. T. S. Sus tres magnitudes y unidades fundamentales son: la longitud, con el *metro* por unidad, la masa, con la *tonelada* por unidad, y el tiempo, con el *segundo* por unidad.

El sistema M. T. S. ha reemplazado al sistema C. G. S., todavía bastante empleado, cuyas unidades fundamentales son el *centímetro*, el *gramo* y el *segundo.*

En la práctica, se emplea muy a menudo el sistema técnico o M. K. S., cuyas magnitudes y unidades fundamentales son: la longitud con el *metro* por unidad, la fuerza con el *kilogramo-fuerza* por unidad, y el tiempo con el *segundo* por unidad. Como se ve, este sistema difiere de los anteriores en que se adopta como magnitud fundamental la fuerza en lugar de la masa.

Para las unidades de longitud y de masa, véase el capítulo SISTEMA MÉTRICO, en *Aritmética y Álgebra*, pág. 34.

Para las unidades de tiempo, véase el capítulo ASTRONOMÍA, páginas 259 y 262. La unidad de velocidad es el metro por segundo en los sistemas M. T. S. y M. K. S., el centímetro por segundo en el sistema C. G. S.

La unidad de aceleración es el metro por segundo (M. T. S. y M. K. S.): es la aceleración de un movimiento uniformemente acelerado cuya velocidad crece un metro por segundo. En el sistema C. G. S., la unidad de aceleración es el centímetro por segundo: por ejemplo, $g = 9, 81$ en París en el sistema M. T. S. y 981 en el sistema C. G. S.

Fuerza. — La unidad de fuerza es el *estenio* (sn). Es la fuerza que es necesario aplicar, durante un segundo, a un cuerpo de masa igual a una tonelada para que la aceleración resultante sea igual a un metro por segundo.

Unidad C. G. S.: la *dina*, es la fuerza que debe aplicarse a un cuerpo de masa igual a un gramo para que la aceleración resultante sea igual a un centímetro por segundo (1 sn = 100 000 000 dinas). Unidad M. K. S.: el *kilogramo-fuerza*, que es la fuerza con que una masa igual a un kilogramo es atraída por la tierra.

Energía o trabajo. — Sistema M. T. S.: el *kilojulio* (kJ), es el trabajo producido por un estenio cuando su punto de aplicación se desplaza un metro en dirección de la fuerza.

$$\text{El julio} = \frac{1}{1\,000}\ \text{kJ}.$$

Unidad C. G. S.: el *ergio*, trabajo producido por una dina cuando su punto de aplicación se desplaza un centímetro en la dirección de la fuerza.

1 kJ = 10 000 000 000 ergios.

Unidad M. K. S.: el *kilográmetro* es el trabajo producido por un kilogramo-fuerza cuando su punto de aplicación se desplaza un metro en la dirección de la fuerza.

Potencia. — Sistema M. T. S.: el *kilowatio*, (kW). Es la potencia que produce 1 kilojulio por segundo. El watio produce 1 julio por segundo.

Sistema M. K. S.: el *poncelet*, potencia que corresponde a 100 kilográmetros por segundo; el *caballo de vapor*, potencia que corresponde a 75 kilográmetros por segundo.

Presión. — Sistema M. T. S.: la *pieza* (pz). Es la presión uniforme que, repartida sobre una superficie de 1 metro cuadrado, produce un esfuerzo total de 1 estenio.

Sistema C. G. S.: la *baria* (1 pieza = 10 000 barias).

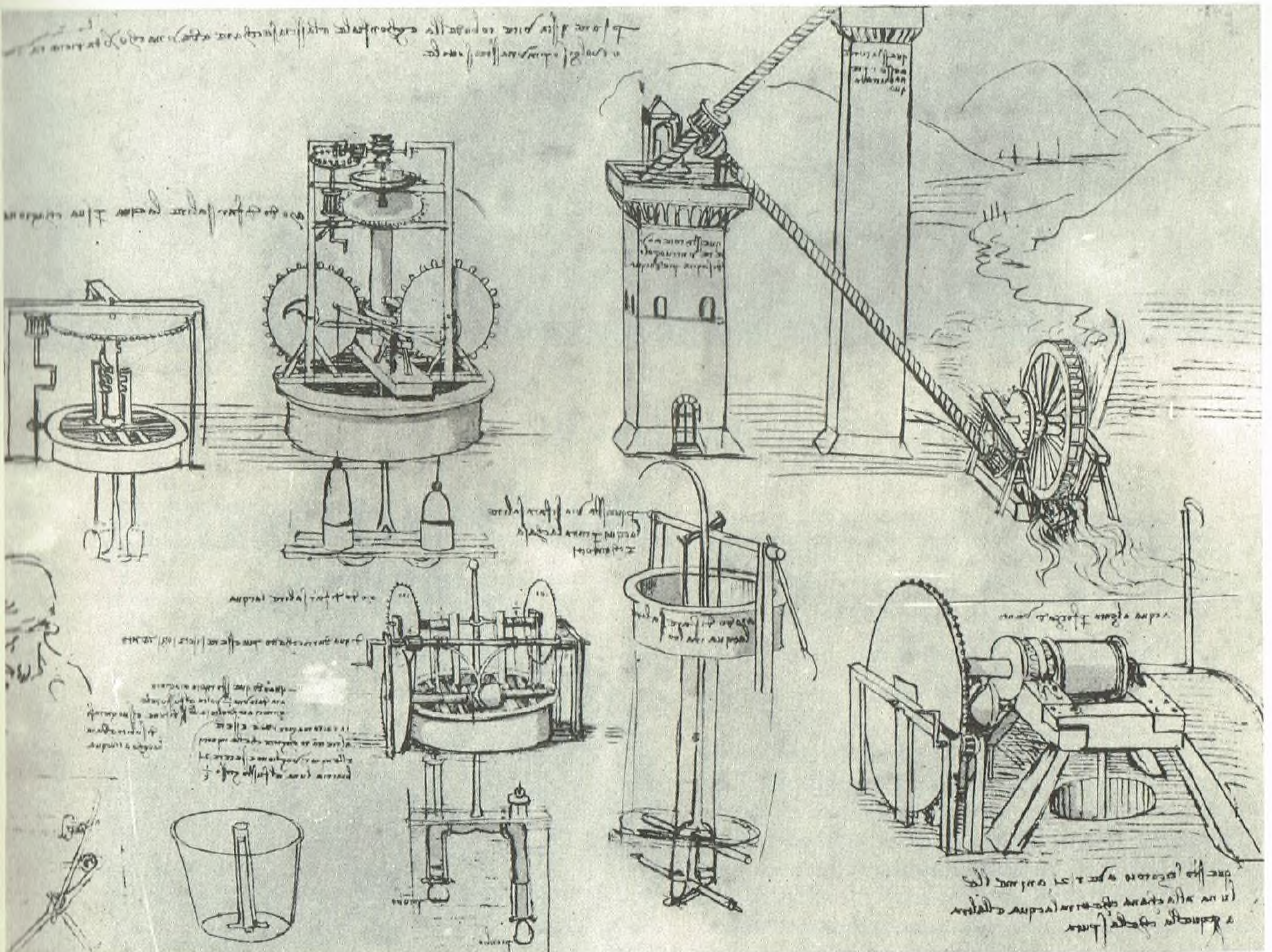
Ecuación de dimensiones. — La expresión simbólica que define una cierta magnitud derivada en función de las fundamentales recibe el nombre de **ecuación de dimensiones** de aquélla. Podemos expresar simbólicamente las magnitudes fundamentales de esta forma: L = longitud, M = masa, T = tiempo.

La velocidad, límite del cociente de una longitud por el tiempo, tiene por ecuación de dimensiones $\frac{L}{T}$; la aceleración, límite del cociente de la velocidad por el tiempo, tiene por ecuación de dimensiones $\frac{L}{T^2}$; la de la fuerza es $\frac{M \cdot L}{T^2}$; la de la potencia, $\frac{M \cdot L}{T^3}$; la de la presión, $\frac{M}{L \times T^2}$.

Las ecuaciones de dimensiones sirven para efectuar cambios de unidades y permiten también relacionar distintos conceptos que, antes de su estudio, parecían no tener ninguna relación.

Roger FRANK.

BIBLIOGRAFÍA. — Carlos MATAIX: *Mecánica Racional*. Edit. Dossat. Madrid, 1961. — Pedro LONGHINI: *Mecánica Racional*. Edit. El Ateneo. Buenos Aires, 1961. — Manuel LUCINI: *Lecciones sobre teoría mecánica y sus aplicaciones*. Edit. Labor. Barcelona. — Enrique BELDA VILLENA: *Compendio de Mecánica General y Técnica*. 2 vol. Bilbao. — I. RUBIO SANJUÁN: *Mecánica General*. Edit. Labor. Barcelona.



Proyectos de máquinas elevadoras de agua. Dibujos de Leonardo de Vinci (Doc. Biblioteca Nacional, París) [*Fot. Larousse*]

Nebulosa filamentosa del Cisne en un campo estelar (*Fot. Observatorio de Monte Wilson*)

Astronomía



El misterio de los astros atrajo siempre con fuerza invencible las miradas humanas, y los fenómenos celestes, sus características, su periodicidad, fueron observados y utilizados para medir el tiempo antes de que surgiera una concepción relativa a sus causas. La disposición «astronómica» de ciertos monumentos megalíticos nos instruye precisamente acerca de esas primeras etapas de la ciencia del cielo.



Reseña histórica

Los caldeos conocían el período de 18 años 11 días, *Saros*, que, al colocar el Sol y la Luna en la misma situación relativa, permite determinar la periodicidad de los eclipses.

La astronomía fue floreciente entre los griegos. Uno de éstos, **Thales** de Mileto (¿636-546? a. de J. C.), descubrió la causa de los eclipses. **Pitágoras** (hacia 570-496 a. de J. C.) enseñó la esfericidad de la Tierra, su rotación y su movimiento, así como el de otros planetas, alrededor del Sol; para él, las estrellas eran otros soles. **Aristarco** de Samos (s. III a. de J. C.) estudió el valor del diámetro del Sol y su distancia a la Tierra. **Eratóstenes** de Alejandría (275-194 a. de J. C.) se sirvió de un célebre experimento para determinar las dimensiones del globo terrestre. **Hiparco** (190-125 a. de J. C.) señaló la duración del año trópico, descubrió la precesión de los equinoccios y redactó el primer catálogo de estrellas.

Al hispanorromano **Cayo Julio Higinio,** bibliotecario y liberto de Augusto (s. I), debemos un tratado de astronomía y el libro *De Ratione Sphaerae.* **Lucio Anneo Séneca** (2-68) atribuyó la causa de las mareas a los movimientos del Sol y de la Luna e indicó que los cometas no eran meteoros, sino cuerpos como los planetas.

Ptolomeo (s. II) reunió en su *Almagesto* todos los conocimientos de sus antecesores y descubrió a su vez la evección o desigualdad periódica de la órbita de la Luna. En cambio situó la Tierra en el centro del Universo: el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas giraban a su alrededor siguiendo movimientos circulares, que consideraba como los más perfectos. El sistema de Ptolomeo fue enseñado hasta el fin de la Edad Media.

En el siglo IX, los árabes recogieron y perfeccionaron los trabajos contenidos en el *Almagesto.* Las escuelas de Córdoba, Granada, Sevilla y Toledo fueron centros mundiales de cultura y en ellas descollaron eminentes astrónomos árabes, judíos y mozárabes españoles. Distinguióse entre todos **Azarquel** (s. XI), que ideó varios instrumentos astronómicos y efectuó observaciones para determinar el apogeo del Sol y el movimiento de precesión de los equinoccios.

En el siglo XIII fue figura relevante el mallorquín **Ramón Llull** o **Raimundo Lulio** (1235-1315), que demostró la importancia de las matemáticas en el estudio de la astronomía. En el siglo XV apareció la *Cosmografía* de **Nebrija.**

En 1507, **Copérnico** (1473-1543), apoyándose en las hipótesis de Pitágoras, demostró el error del sistema de Ptolomeo y estableció que el Sol se halla en el centro del sistema planetario y que los planetas giran a su alrededor. El mismo día de su muerte aparecía la obra en que se recogía el resultado de sus trabajos.

Tycho Brahé (1546-1601) fue uno de los principales observadores; la precisión de sus mediciones sirvió de base a la obra de Kepler. Preconizó, por otra parte, un sistema terrestre intermedio entre los de Ptolomeo y Copérnico.

En España, entre los cosmógrafos y astrónomos insignes del siglo XVII se destacó **Alonso de Santa Cruz**, que rectificó posiciones de estrellas, redactó unas tablas del Sol y de la Luna y estudió el *radio astronómico*. **Jerónimo Muñoz** mereció los elogios de Tycho Brahé, y **Juan de Rojas** alcanzó gran renombre en Europa.

Kepler (1571-1630) resumió la armonía de los mundos celestes en las leyes inmortales que llevan su nombre.

Pero, al lado de las investigaciones, indispensables para la concepción de la estructura del universo, se ha desarrollado una segunda rama: la *astronomía física*, que, después de la invención de los instrumentos ópticos, ha alcanzado considerable extensión. Los anteojos y telescopios, al mismo tiempo que permiten obtener la precisión requerida para las medidas, revelan el verdadero aspecto de ciertos astros o sus particularidades, así como sus dimensiones. A **Galileo** (1564-1642) se debe este progreso. Con su primer anteojo (1610), Galileo descubrió los satélites de Júpiter, el peculiar aspecto de Saturno, las manchas del Sol y las fases de Venus, cuya comprobación dio prueba de la exactitud del sistema de Copérnico. A él se deben asimismo las leyes de la aceleración y el conocimiento del movimiento de libración de la Luna. El español **Caramuel** (s. XVII) concibió la astronomía como una ciencia puramente física.

Newton (1642-1727) dio a conocer el principio general de la gravitación universal y definió las leyes del movimiento de los cuerpos celestes. También inventó el telescopio que lleva su nombre y descubrió el espectro solar.

Roemer (1644-1710) determinó la velocidad de la luz por la observación de los satélites de Júpiter.

Halley (1656-1742) examinó y calculó la forma elíptica de las órbitas de los cometas, con lo que demostró que estos cuerpos celestes obedecían a las mismas leyes que los planetas.

Bradley (1693-1762) descubrió la nutación de la Tierra y la aberración de la luz, prueba de la traslación de nuestro globo.

D'Alembert (1717-1783) explicó la nutación y la precesión de los equinoccios.

Durante el siglo XVIII distinguiéronse también por sus observaciones astronómicas algunos españoles, especialmente **Jorge Juan**, que en su *Examen marítimo* reseñó las que hizo en el Perú, y **Ferrer y Cafranga**, cuyas *Transacciones* fueron elogiadas más tarde por Laplace.

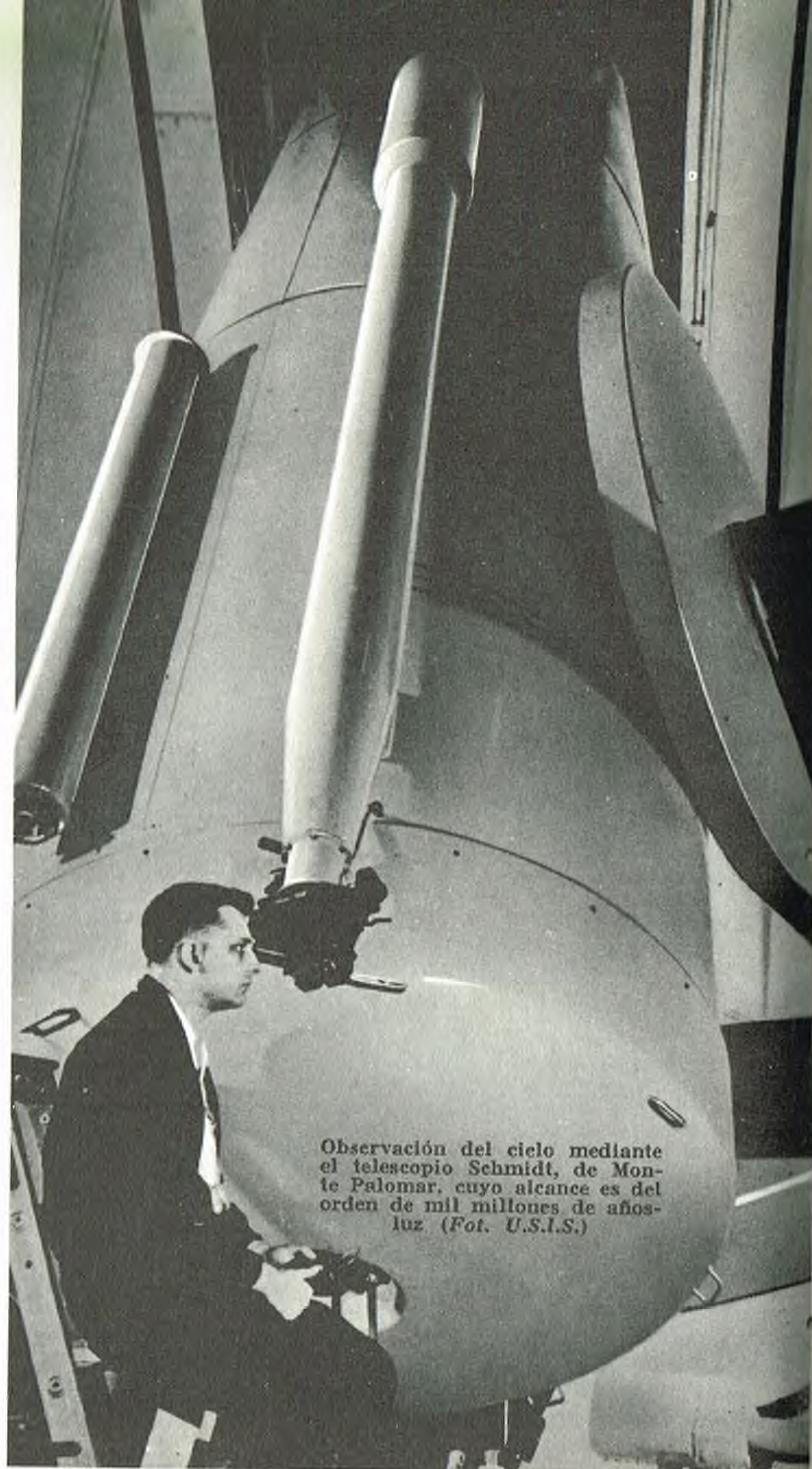
Lagrange (1736-1813) abordó el cálculo de las perturbaciones de los movimientos planetarios.

Laplace (1749-1827) descubrió la causa de la gran desigualdad de los movimientos de Júpiter y Saturno, la invariabilidad de las distancias medias de los planetas al Sol, la razón de la ecuación secular de la Luna y la estabilidad del sistema planetario. Se hizo inmortal con su *Exposición del sistema del mundo* y su *Tratado de mecánica celeste*, base de las tablas de los movimientos de los planetas construidas en Francia por **Delambre** (1749-1822), y después por **Le Verrier** (1811-1877). Éste descubrió a su vez el planeta Neptuno basándose exclusivamente en cálculos matemáticos.

En el transcurso del siglo XIX realizaron meritísimos trabajos los franceses **Charles Delaunay** (1816-1872), **F. F. Tisserand** (1845-1896) y **Henri Poincaré** (1854-1912), así como el español **Gabriel Ciscar** (1769-1829), cuyo *Tratado de Cosmografía* sirve de pauta a este género de obras.

En la edad contemporánea, los trabajos del astrónomo norteamericano **Brown** sobre la teoría de la Luna —ya establecida detalladamente en el último siglo por Delaunay— permiten conocer el movimiento de este astro con tal precisión que ha sido necesario revisar la definición del tiempo. La teoría de la relatividad de **Einstein,** al explicar el avance de los perihelios de las órbitas planetarias —problema que la mecánica celeste no es capaz de resolver— y al permitir el estudio del problema del equilibrio general del universo mediante las teorías de la expansión —que dan cuenta de la recesión de las galaxias—, añadió a nuestro conocimiento del mundo un progreso comparable al de la revelación de la esfericidad de la Tierra por los astrónomos de la Antigüedad griega. Junto a Einstein debemos citar también a **Schwartzschil,** al astrónomo holandés **de Sitter,** al canónigo belga **G. Lemaître** y al matemático ruso **A. Friedmann.**

Paralelamente a este impulso, la astronomía física adquirió importancia cada vez mayor a partir del siglo XVIII, al final del cual **W. Herschel** (1738-1822) se inmortalizó con su descubrimiento del planeta Urano y sus innumerables arqueos celestes, y se desarrolló considerablemente durante el siglo XIX con el perfeccionamiento de los instrumentos, cada vez más numerosos, empleados en los observatorios. **Fizeau** (1819-1896) y **Foucault** (1819-1868) midieron directamente la velocidad de la luz y aplicaron el principio llamado de *Doppler-Fizeau*, que permite determinar las velocidades radiales de los astros. En 1860, gracias a **Kirchhoff** y **Buensen,** se creó el análisis espectral, y poco después el **P. Secchi** (1818-1878) estableció la primera clasificación espectral de las estrellas en cuatro tipos princpales. **Janssen** (1824-1907) fue uno de los apóstoles de la astrofísica. **Deslandres** (1853-1948) y **Hall** inventaron el espectroheliógrafo.



Observación del cielo mediante el telescopio Schmidt, de Monte Palomar, cuyo alcance es del orden de mil millones de años-luz (*Fot. U.S.I.S.*)

La fotografía, aplicada por primera vez en 1845 por Foucault y Fizeau —que obtuvieron la primera fotografía del Sol—, tomó importancia decisiva y tiende cada vez más a substituir la observación visual. La fotografía ha permitido la espectrografía, que es la base de nuestro actual conocimiento del mundo estelar. El sistema de clasificación espectral de las estrellas, introducido por el P. Secchi, fue perfeccionado a principios de siglo por los astrónomos norteamericanos del *Harvard College*, que estudiaron más de 225 000 espectros.

El astrónomo danés **Hertsprung** y el norteamericano **Russell** han establecido el primer diagrama que permite distinguir las diferentes categorías de estrellas.

Los estudios teóricos sobre el equilibrio interno de las estrellas, esbozados en 1870 por el norteamericano **Homer Lane** y perfeccionados hacia 1906 por los alemanes **Schwarzschild** y **Emden,** han sido sobre todo obra del inglés **Eddington,** que, entre 1916 y 1926, formuló una doctrina de conjunto muy coherente. Esos estudios fueron proseguidos por los indios **Chandrasekahr** y **Khotari.** Por otra parte, en 1928, los astrónomos norteamericanos **Hubble** y **Humason** enunciaron la ley de recesión de las galaxias, confirmada después con nuevas determinaciones. A su vez, el físico norteamericano **Bethe** estableció en 1939 el ciclo del carbono, fuente de la energía irradiada por las estrellas.

Merecen mención, entre los astrónomos contemporáneos más distinguidos, el francés **Bernard Lyot** (1897-1952), a quien se debe el coronógrafo y el filtro monocromático polarizante, así como los españoles **José María Plans** (1878-1934), autor de notables estudios de mecánica racional y terrestre, **José Comás Solá** (1868-1937), que descubrió varios asteroides, uno de los cuales lleva su nombre, y el Padre **Luis Rodés** (1881-1940).

Instrumentos y métodos de la astronomía

Anteojos y telescopios: Telescopio electrónico. Ecuatorial. Anteojos meridianos. — **Métodos generales de la astronomía física:** Unidades. Magnitud aparente de las estrellas. Magnitud absoluta de las estrellas. Fotografía. Espectrografía. — **Espectros estelares:** Observación de los espectros. Desplazamiento de las rayas espectrales. Efecto Doppler-Fizeau. Radioastronomía. — **Las leyes de la radiación:** Determinación de la temperatura de las estrellas. Presión de radiación. Efecto fotoeléctrico

Anteojos y telescopios

No expondremos aquí la teoría de los instrumentos ópticos, cuyo estudio pertenece a la física. Diremos solamente que los colectores de luz empleados en astronomía son de dos tipos: los *anteojos astronómicos* o *refractores*, en los que la imagen se forma en el foco de un objetivo, y los *telescopios* o *reflectores*, en los que la imagen se forma en el foco de un espejo cóncavo.

Los refractores, montados dentro de tubos cerrados, dan imágenes más estables que los reflectores, y se utilizan especialmente para realizar mediciones: tienen el inconveniente de absorber una parte de las radiaciones, particularmente las infrarrojas lejanas (más allá de 30 000 angströms). Su campo es también más grande que el de los telescopios (2 grados y algunas veces más, en lugar de una decena de minutos). Pero el poder separador del instrumento crece con el diámetro del objetivo y es difícil fabricar lentes de grandes dimensiones que presenten todas las características de cristales ópticos. mientras que la fabricación de espejos para telescopios no exige la misma calidad y precisión.

La dimensión de los objetivos de los anteojos está limitada prácticamente a 1 metro; el mayor anteojo construido es el del observatorio de Yerkes (U.S.A.): abertura, 102 cm, y distancia focal, 19,30 m. Para eliminar en los anteojos la influencia de las aberraciones residuales de esfericidad y cromáticas, se está a menudo obligado a reducir a $\frac{1}{15}$ la relación de abertura, mientras que, para los telescopios, cuyo acromatismo es riguroso, se pueden admitir relaciones de abertura de $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{6}$, lo que da lugar a instrumentos más reducidos y más fáciles de construir. Por esto, los mayores instrumentos son los telescopios destinados a la fotografía y a la espectrografía de los objetos poco luminosos. Sus tubos no están, en general, cerrados lateralmente. Hasta la instalación en Monte Palomar (California) de un telescopio de 5 m de diámetro, el mayor telescopio del mundo era el de Monte Wilson, de un diámetro de 2,54 m. El peso del espejo de éste es de 4 toneladas, en tanto que el de Monte Palomar pesa 15.

Telescopio electrónico. — Se designa con este nombre un amplificador electrónico que puede adaptarse a un telescopio ordinario y aumentar su potencia unas 100 veces. Sin haber entrado todavía en el campo de las realizaciones corrientes, el *telescopio electrónico* permite esperar en un futuro próximo la aparición de numerosos instrumentos capaces de ampliar nuestro conocimiento del universo. Su principio es el siguiente (*fig.* 1): en el foco del telescopio está situada la cara de entrada AB de un tubo cilíndrico de cristal, en cuyo interior se realiza un vacío considerable. La cara AB aparece cerrada por una capa de cesio de un espesor inferior a una micra. Los fotones que llegan a esta capa le arrancan electrones que son atraídos con fuerza por el ánodo CD. El haz, por otra parte, se hace convergente por la interposición de una lente electrostática cuyo foco está situado sobre la cara CD. Cada fotón recibido no arranca un electrón al cesio; el rendimiento es del orden de $\frac{1}{100}$, pero un electrón acelerado de esta forma impresiona la placa fotográfica, mientras que, en general, se necesitan 10 000 fotones para llegar a este resultado.

Aparte de la formación de imágenes, es a menudo interesante medir de forma precisa el flujo luminoso recibido de un astro y sus variaciones. Se obtiene un aparato de extraordinaria sensibilidad al colocar, en el foco de un telescopio, una célula *fotoeléctrica como multiplicador de electrones.*

Ecuatorial. — Para permitir la observación cómoda, y principalmente la fotografía, de los objetos celestes, los anteojos y los telescopios se montan en *ecuatorial.* La montura ecuatorial (*fig.* 2) comprende un primer eje paralelo a la línea de los polos. La rotación del anteojo alrededor de este eje permite seguir un astro E que describe su paralelo bajo el efecto del movimiento diurno. La inclinación de este eje sobre el horizonte debe ser igual a la latitud del lugar.

Un segundo eje, perpendicular al primero, permite apuntar el instrumento en declinación, y observar todos los puntos del círculo graduado del esquema. El montaje de la figura 2 se llama *montaje alemán.* Necesita un contrapeso. Los anteojos se montan generalmente de esta forma. Pueden fijarse al pedestal por una gran plataforma que permite unirles otros instrumentos (espectrógrafo, cámara fotográfica). A este instrumento se le llama *mesa de observación.*

Existen otros tipos de montajes ecuatoriales; el telescopio de Monte Wilson está montado "en cuna" (esquema *fig.* 3). Esta montura, más fácil de realizar para un instrumento pesado, tiene el inconveniente de que no permite observar estrellas próximas al polo. El movimiento alrededor del eje principal, que permite seguir la estrella, se halla asegurado por un mecanismo de relojería o un motor regulado por un reloj. Un instrumento fotográfico va siempre acompañado de un instrumento de observación directa, que un operador mantiene fijo sobre una estrella guía. Se corrigen de esta manera las imperfecciones del movimiento mecánico. Se ha podido, para obtener la fotografía de objetos de poca luminosidad, continuar una misma exposición durante varias noches. El telescopio de Monte Wilson permite la fotografía de estrellas de 21ª magnitud.

Anteojos meridianos. — El ecuatorial, que permitiría perfectamente la medida directa de las ascensiones rectas y las declinaciones, no se utiliza de hecho más que para efectuar mediciones diferenciales en el interior del campo del instrumento. La medida precisa de grandes ángulos se hace únicamente mediante un anteojo llamado *meridiano,* que es más estable. Sus ejes están orientados en el sentido Este-Oeste y soportados por sólidos pilares, y permite determinar las coordenadas de las estrellas: la ascensión recta, por la observación de la hora de paso por el meridiano del lugar, y la declinación con medidas efectuadas sobre círculos graduados muy exactos, leídos mediante microscopios. Con un anteojo de este tipo pueden hallarse las coordenadas de las estrellas a fin de determinar la hora sideral local, o dicho más llanamente, para "leer el reloj del Universo".

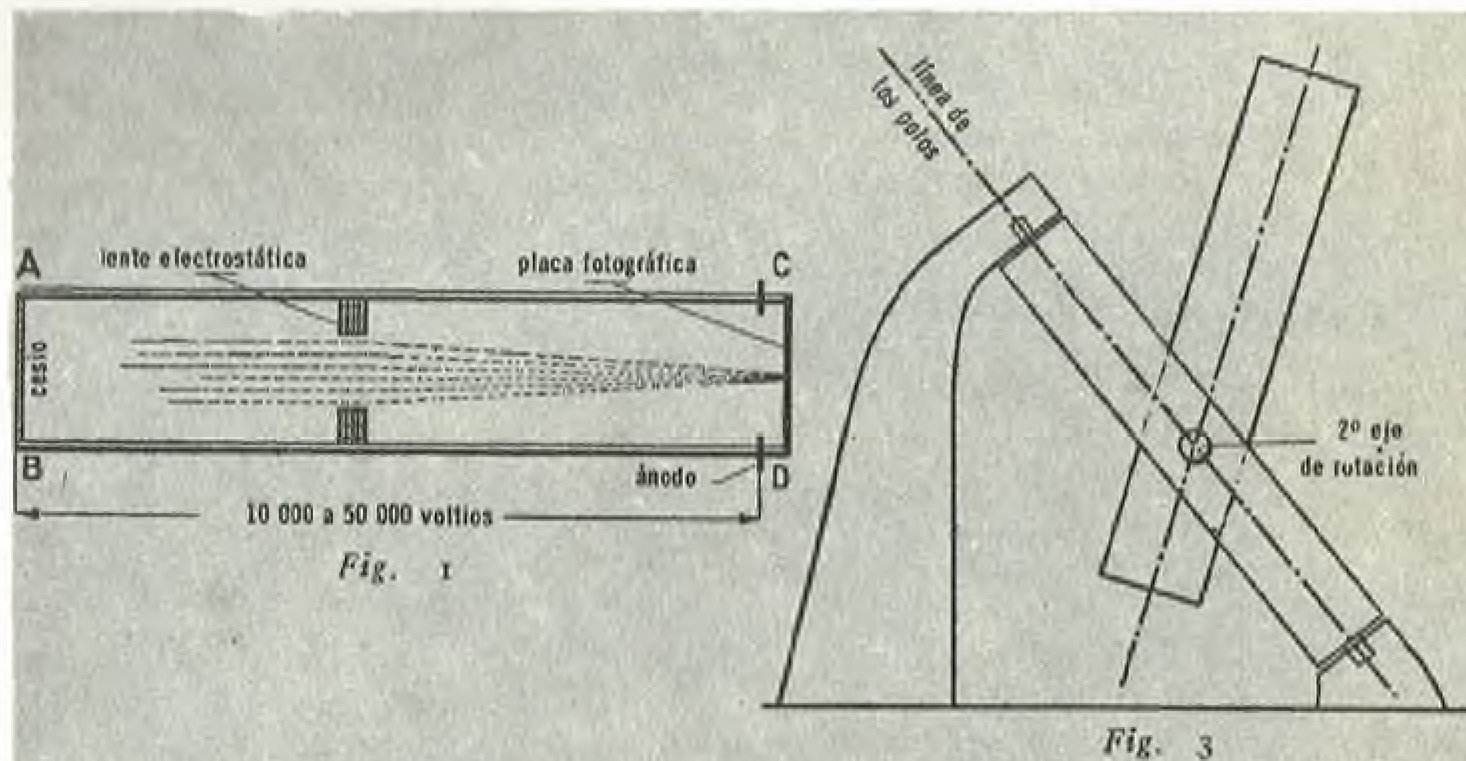


Fig. 1

Fig. 3

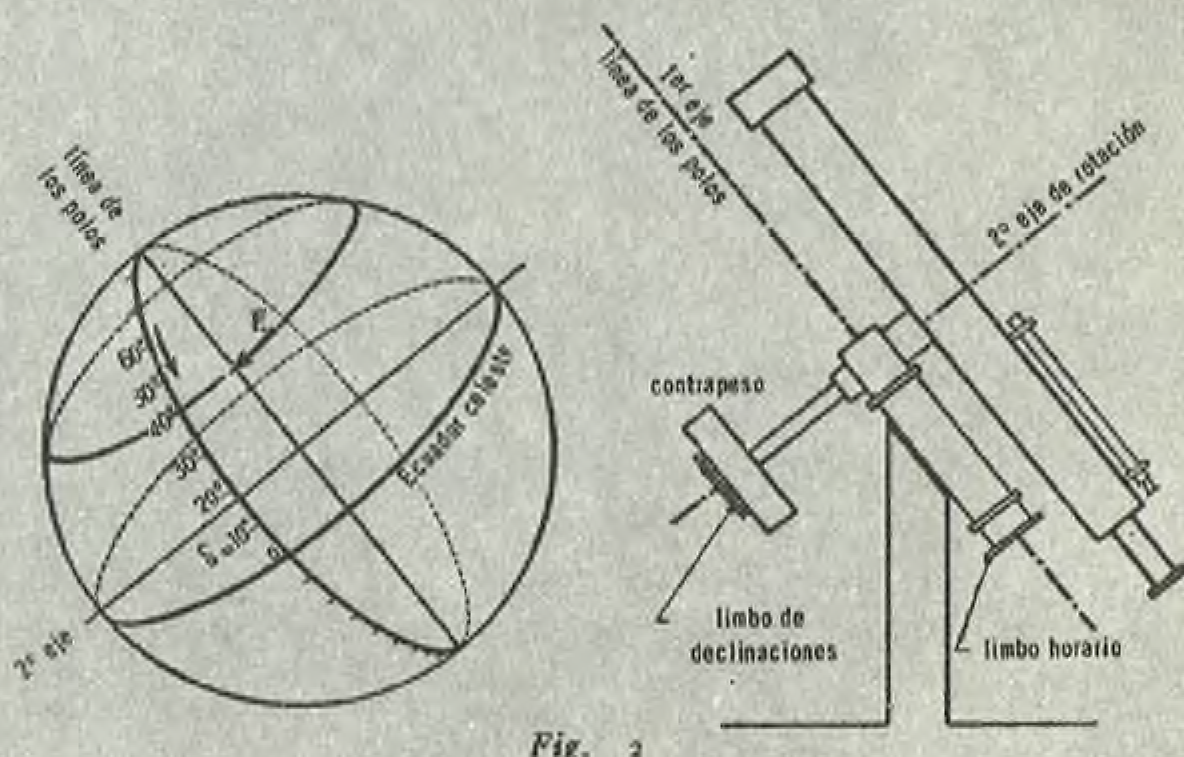
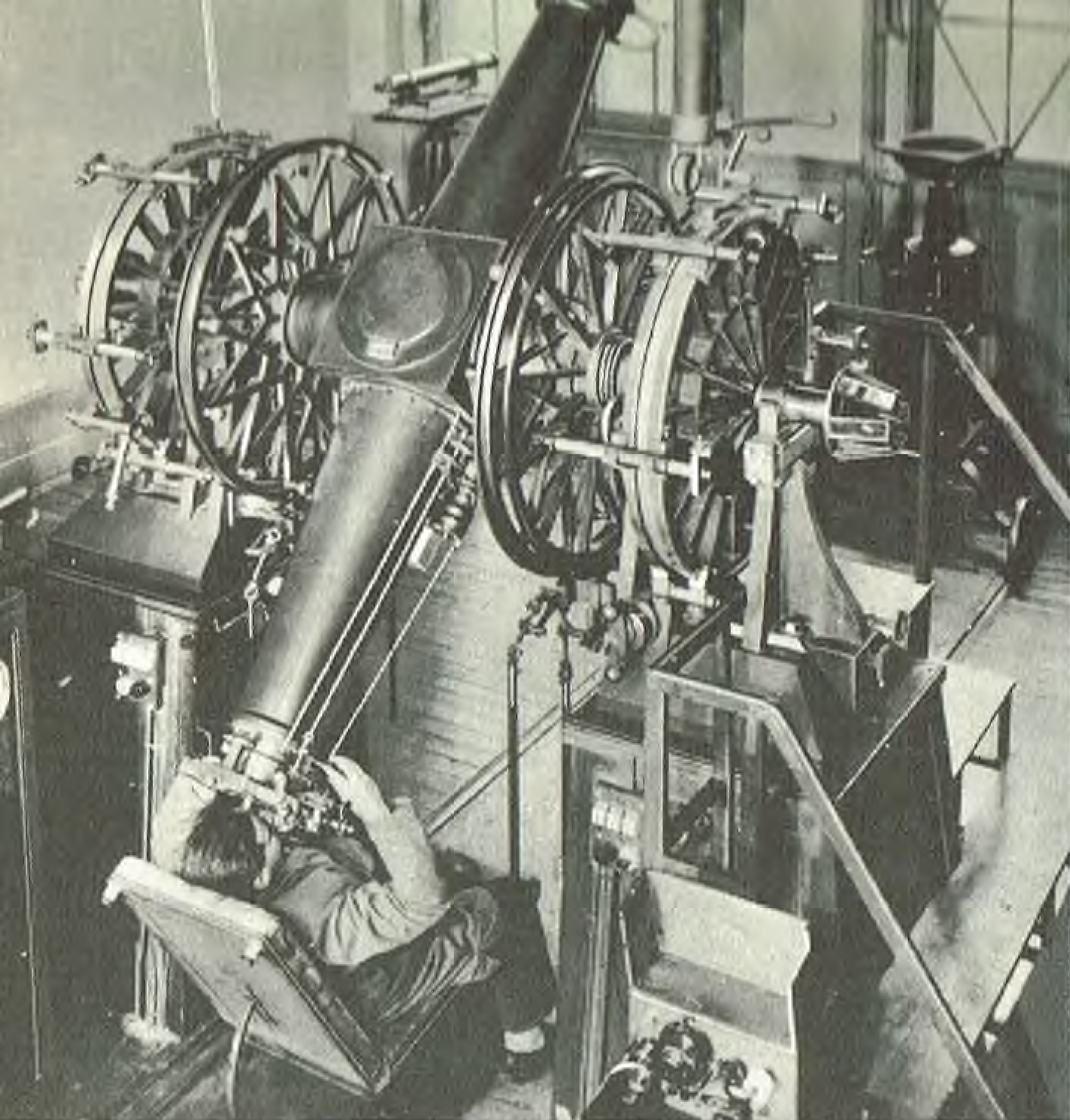


Fig. 2



Anteojo meridiano del Observatorio de Besançon (*Fot. del Observatorio de Besançon*)

Métodos generales de la astronomía física

Unidades. — Definiremos posteriormente el año-luz, unidad de distancia utilizada para las estrellas (v. p. 264). Los astrónomos emplean generalmente otra unidad, fundada en la distancia media de la Tierra al Sol *a (unidad astronómica* en el interior del sistema solar), o sea el *parsec* o distancia en la que es necesario colocar normalmente *a* para verla bajo un ángulo de 1″ sexagesimal. 1 parsec = 3,26 años-luz.

Magnitud aparente de las estrellas. — El resplandor de una estrella se mide como el de un foco luminoso terrestre y está caracterizado por la *magnitud* de la estrella.

La magnitud aumenta una unidad en cuanto el resplandor se divide por una constante K, cuyo valor es de 2,5 aproximadamente. Esta constante ha sido elegida de forma que se puedan conservar los valores básicos del catálogo de Ptolomeo, donde las estrellas visibles estaban clasificadas en 6 *magnitudes*. Siendo la relación media de los resplandores aproximadamente 100 para las estrellas de la 1ª y 6ª magnitud, K se define por $K^5 = 100$ o log K = 0,4. Para aplicar esta definición, faltaba establecer la magnitud de una primera estrella. Se ha fijado, en consecuencia, la magnitud de cierto número de estrellas fundamentales de comparación, de modo que permanezcan de acuerdo con la magnitud 7 en un catálogo muy extenso publicado en el siglo XIX. Las magnitudes así definidas no son enteras y se ve que ciertas estrellas muy brillantes poseen magnitudes inferiores a la unidad, e incluso negativas (Vega, 0,12; Sirio — 1,58). La escala de brillos aparentes de las estrellas es muy extensa: entre una estrella de 1ª y una estrella de 21ª magnitud, la relación de brillos es de 10^8. Cuando se duplica el diámetro de un instrumento, el flujo luminoso recibido es 4 veces mayor y el aumento en magnitud observable resulta aproximadamente 1,5. Un aumento de una magnitud multiplica por 4 el volumen explorado.

Magnitud absoluta de las estrellas. — La magnitud aparente depende de la distancia de la estrella; no permite compararlas entre sí. Se llaman *magnitudes absolutas* los valores que podrían obtenerse llevándolas todas a una misma distancia, para lo cual se adopta el valor de 10 parsecs. La magnitud absoluta del Sol es de 4,7; de ahí su calidad de estrella de luminosidad media. Rigel (β de Orión), con una magnitud absoluta de — 5,8, es 18 000 veces más luminosa que el Sol. Existen, por el contrario, estrellas de magnitud absoluta + 19. La magnitud absoluta se calcula fácilmente a partir de la magnitud aparente y la distancia de la estrella. Inversamente, si por un procedimiento cualquiera se puede estimar la magnitud absoluta de una estrella, será suficiente medir la magnitud aparente para deducir la distancia. Este procedimiento se utiliza a menudo en la determinación de las distancias de las estrellas.

Fotografía. — La fotografía tiene hoy una importancia primordial en astronomía y tiende a substituir, cada vez más, la observación visual. Ofrece sobre ésta grandes ventajas, entre ellas las de poder efectuar, según se desee, medidas de precisión en los clisés y conservar documentos para hacer comparaciones después de un largo intervalo de tiempo. La fotografía con exposición sobre el ecuatorial permite descubrir astros que serían invisibles, con el mismo instrumento, para el ojo humano.

El empleo de placas especiales, sensibles a la radiación infrarroja, descubre objetos de los que el ojo no puede tener percepción directa. Los resultados obtenidos muestran que el número de estrellas rojas y rojo obscuro es muy superior al de las estrellas directamente visibles. La sensibilidad de la placa fotográfica ordinaria corresponde al azul violeta, mientras que la de la retina corresponde, sobre todo, al amarillo. En la determinación de la magnitud aparente de una estrella, se obtienen diferencias según se opere visualmente o por fotografía. Se da los nombres de *magnitud visual* y *magnitud fotográfica* a los dos resultados obtenidos. Su diferencia, llamada *índice de color*, informa sobre la repartición de la energía en el espectro de la estrella estudiada, la cual caracteriza la temperatura de la "fuente luminosa", que es la de la superficie de la estrella. La medida fotométrica de las magnitudes visuales resulta difícil cuando las dos estrellas no son del mismo color, y se tiende a reemplazarla por la de las magnitudes fotovisuales, que se obtienen mediante una placa isocromática. Veremos seguidamente que la clasificación espectral de las estrellas corresponde, prácticamente, a una clasificación por colores. En el caso de las estrellas débiles, de las que es imposible obtener un espectro utilizable (más allá de $m = 14$), la clasificación se hace únicamente por el índice de color.

Espectrografía. — El haz luminoso que atraviesa un prisma forma un espectro. Cada color del espectro está caracterizado por su longitud de onda expresada en angströms (Å). La espectrografía forma parte de la física.

El estudio de los espectros de las estrellas es uno de los más poderosos medios de investigación de que dispone la astronomía. La luz emitida por un cuerpo sólido incandescente da un espectro continuo. El arco iris es un espectro de la luz solar. Un gas brillante da un espectro de rayas; su luz está compuesta solamente por un pequeño número de radiaciones monocromáticas en serie. Si la presión es lo bastante elevada, da un espectro continuo. Un gas molecular da un espectro de bandas. El espectro de un gas es característico de este gas, pero varía según su estado de excitación (temperatura y presión). Cada raya emitida corresponde al paso de un electrón del átomo de una órbita a otra inferior. Se pueden calcular todas las rayas que un átomo dado es capaz de emitir. Entre las rayas posibles, las hay que no se producen a las temperaturas y presiones que podemos conseguir en laboratorio. Pero aparecen cuando la presión es muy débil (en ciertas nebulosas y en la corona solar). Estas rayas, que no se pueden reproducir experimentalmente, son llamadas *prohibidas*. Durante algún tiempo se creyó que existían, en las nebulosas y en la corona, cuerpos desconocidos en la superficie de la Tierra (nebulium, coronium). Mientras el átomo posee todos los electrones es neutro y emite un espectro llamado *espectro de arco;* una vez ionizado, es decir, cuando la excitación a la que está sometido le ha arrancado uno o varios electrones, emite un espectro que se llama *de chispa.*

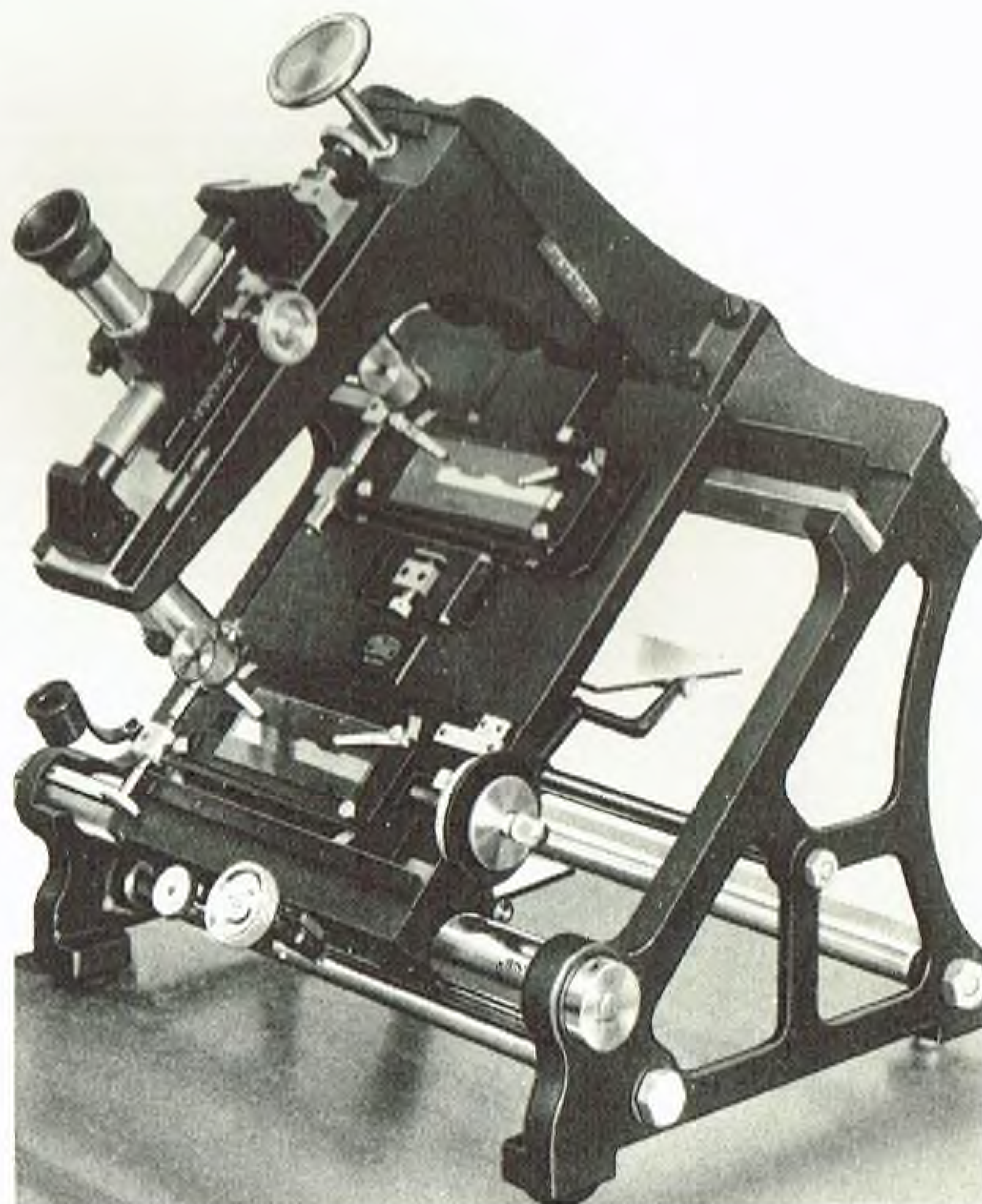
Cuando un gas incandescente es observado por transparencia delante de un haz luminoso que emite un espectro continuo, se observan, en este espectro, rayas obscuras en el mismo lugar donde el gas daría rayas brillantes. Dicho espectro se llama *espectro de absorción* del gas considerado. De hecho, las rayas no son negras; lo que puede suceder es que el gas atravesado substituya la radiación recibida por su propia emisión, que es menos brillante. En una atmósfera compleja, la intensidad de una raya no es proporcional a la cantidad del cuerpo correspondiente; las condiciones físicas favorecen la aparición de ciertas rayas que pueden ser muy nítidas sin que el cuerpo que las produce esté en una proporción importante en la mezcla. La interpretación de los espectros estelares resulta por esto muy compleja.

Espectros estelares

Las estrellas son inmensas esferas gaseosas en las cuales la temperatura decrece del centro a la superficie pasando de valores del orden de 20 000 000 de grados a sólo algunos millares. La presión central es del orden de varios millares de millones de atmósferas, y decrece hacia el exterior de forma continua, hasta llegar a ser prácticamente nula. Existe un valor de la presión que marca el límite entre la emisión de un espectro continuo y la de un espectro de rayas; esta superficie ficticia —que es la que vemos cuando miramos el Sol— lleva el nombre de *fotosfera.*

La fotosfera, por ser completamente absorbente para todas las radiaciones que recibe, es considerada como equivalente a un "cuerpo negro".

Arriba: Espectro comparador de Hartmann (*Fot. X*). — *Abajo*: Relación entre la distancia y la velocidad radial de los espectros de nebulosas extragalácticas (*Fot. Observatorio de Monte Wilson*)



La atmósfera gaseosa o *cromosfera* que la rodea, y en la que la temperatura y presión decrecen rápidamente, produce en el espectro continuo de la fotosfera rayas de absorción. Se han enumerado en el espectro del Sol 25 000 rayas. En ciertas estrellas raras, algunas rayas de la cromosfera son más brillantes que el fondo continuo. Estas rayas provienen de la parte periférica de la atmósfera estelar; las estrellas de este tipo son llamadas *rayas de emisión*. Las rayas del espectro se deben principalmente a la parte inferior de la cromosfera (la más densa), que se llama *capa inversora*.

La capa inversora ha sido estudiada en el Sol durante los eclipses, en el momento en que la Luna oculta el disco de la fotosfera: el fondo continuo se esfuma y aparecen las rayas brillantes durante un corto instante; luego desaparecen a su vez, en el momento en que la Luna, a su vuelta, cubre la capa inversora. La duración del espectro relámpago permite conocer el espesor de esta capa (unos 1 000 km en el Sol).

Observación de los espectros. — En el *espectrófrago*, la imagen de la estrella viene a formarse en una ranura muy fina ($\frac{1}{50}$ de mm) [*fig.* 4]. En la misma ranura se forma, debajo de la estrella, la imagen de una fuente luminosa terrestre. La comparación de los dos espectros es, como veremos, muy fecunda. Esa ranura se encuentra en el foco de un importante sistema óptico formado por una sucesión de prismas. La imagen final se forma sobre una placa fotográfica. La dispersión empleada corrientemente es de 50 angströms por milímerto. Se llega a veces a 1 mm e incluso a 2 por angström. Siendo la imagen de la estrella un punto, se la alarga en el sentido de la ranura mediante varios artificios. Se puede, por ejemplo, orientar la ranura en el sentido del movimiento diurno. Es difícil conseguir espectros de estrellas muy pequeñas; no se sobrepasa la magnitud 14. Para establecer catálogos espectroscópicos extensos, se utiliza un *prisma objetivo* constituido por un prisma de gran tamaño colocado delante de una cámara fotográfica montada en ecuatorial. Las dispersiones así obtenidas son muy pequeñas.

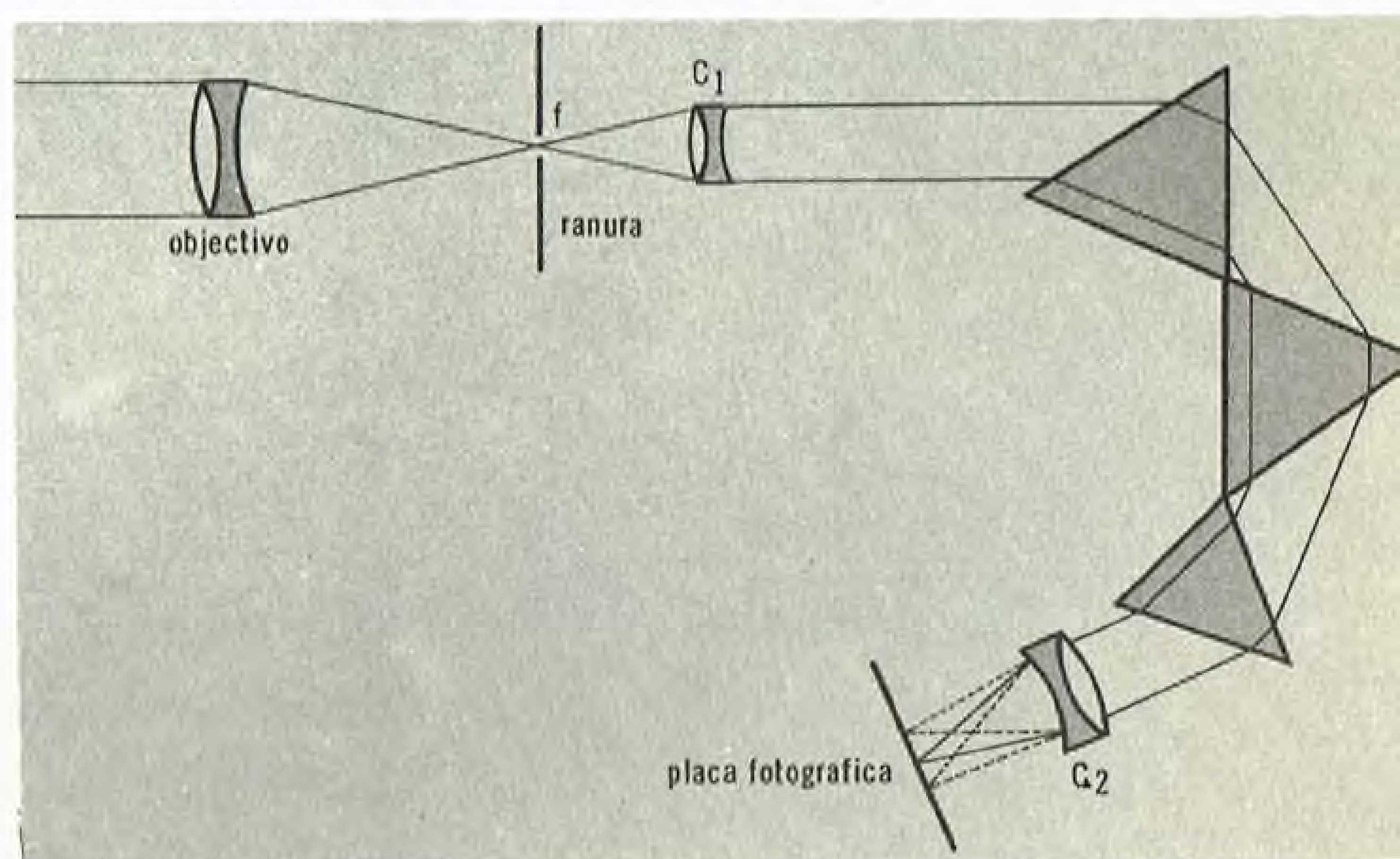
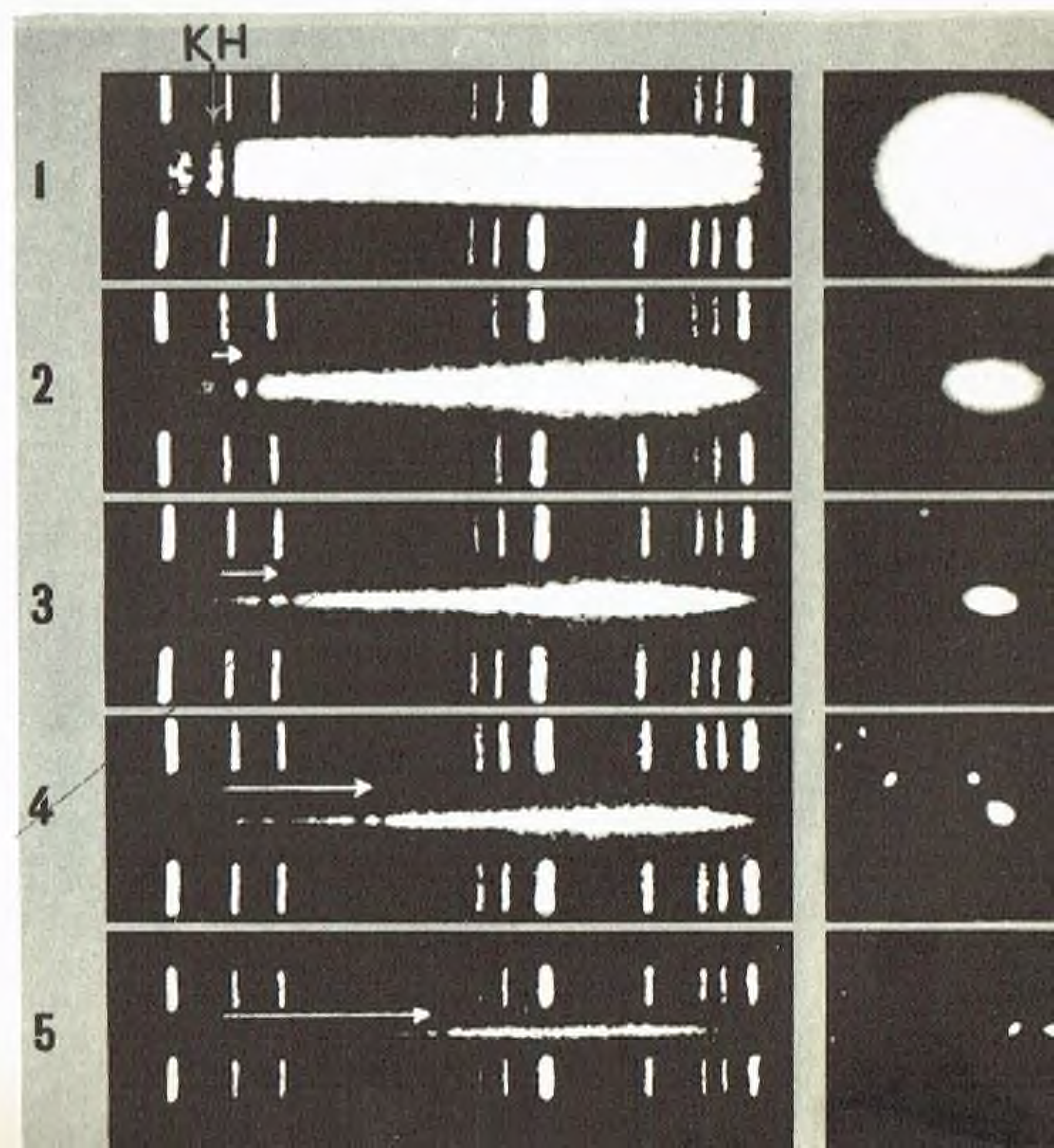
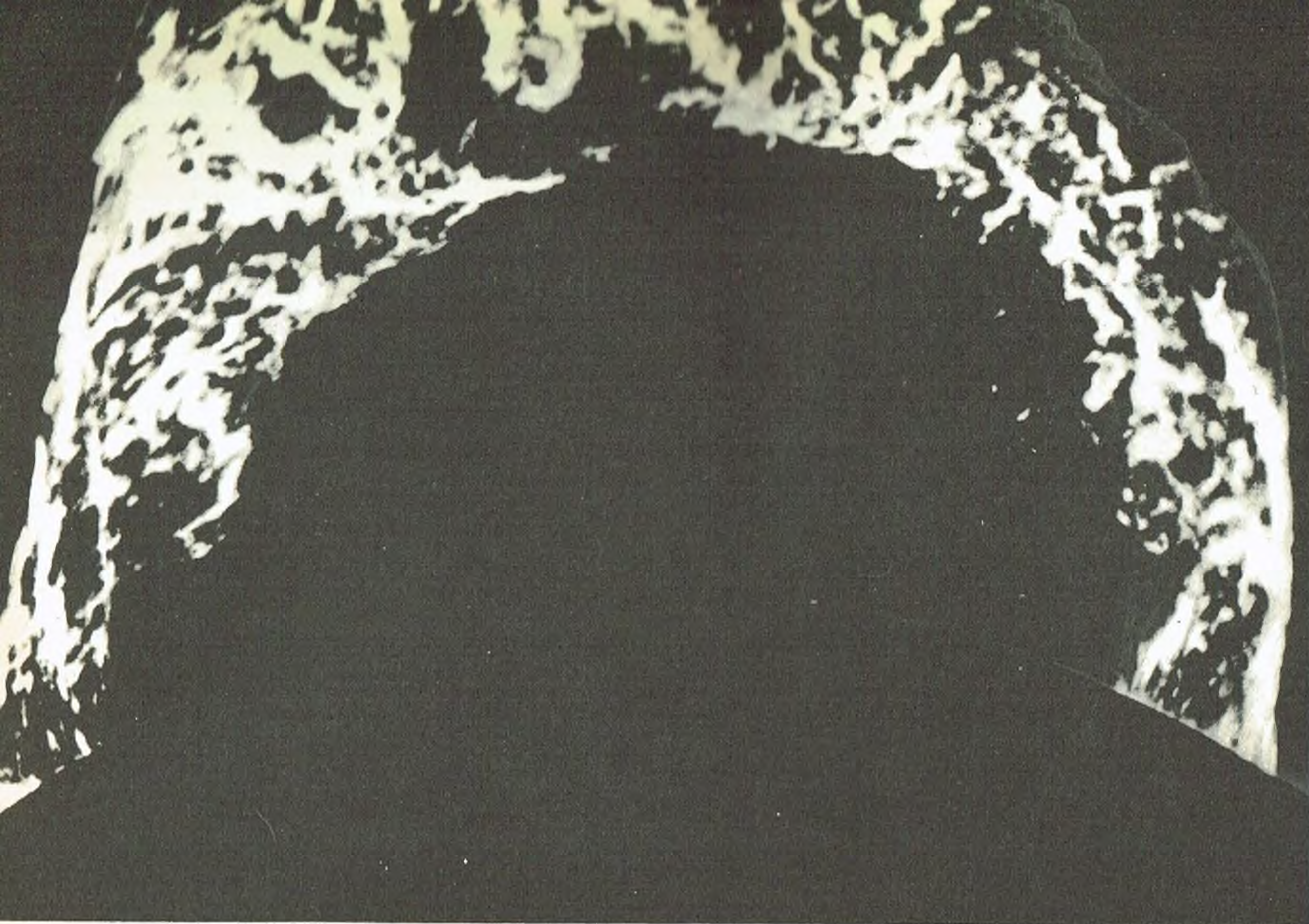


Fig. 4

Desplazamiento de las rayas espectrales. Efecto Doppler-Fizeau. — Cuando el cuerpo emisor de radiaciones tiene con respecto a la Tierra una velocidad relativa apreciable, las rayas de emisión o de absorción aparecen desplazadas en el espectro. Este fenómeno fue estudiado por Doppler en 1843 en relación con el sonido y aplicado a la luz por Fizeau en 1846. El desplazamiento es proporcional a la velocidad relativa Vr y a la longitud de onda λ considerada. Se utiliza para medir la velocidad de alejamiento o acercamiento de los astros: se tiene $\lambda' = \lambda (1 + \frac{V_r}{c})$; siendo λ' la longitud de onda de la raya desplazada, la fórmula contiene la velocidad de la luz *c*. Con las dispersiones obtenidas por los espectros de astros suficientemente brillantes, se pueden apreciar desplazamientos hasta de 0,001 angström (Å). Con λ = 3 000 Å se determina la velocidad del astro con una precisión absoluta de 100 m por segundo, y esto independientemente de la distancia de la estrella. El desplazamiento se efectúa hacia el rojo en el caso de un astro que se aleja de nosotros. El *efecto Doppler* permite incluso el estudio de la rotación sobre sí mismos de los astros que tienen un diámetro aparente sensible (un borde se acerca mientras que el otro se aleja). El método ha sido aplicado al Sol, a los planetas y a los anillos de Saturno, y permite también descubrir los sistemas binarios de estrellas cuyos componentes no son separables por otros procedimientos. Como ambas estrellas giran alrededor de su centro de gravedad, se obtiene un desdoblamiento de las rayas con oscilación de los dos componentes a una parte y otra de una posición media. El conocimiento de las velocidades radiales de los componentes proporciona elementos para el cálculo de las órbitas. Una variación en la energía de cada fotón acompaña la variación de la longitud de onda.

Existen otras causas que producen un desplazamiento de las rayas espectrales, como la presencia en la superficie de la estrella de un campo magnético intenso (efecto Zeeman), de un campo eléctrico potente e incluso de un campo de gravitación importante (efecto Einstein). Estos desplazamientos o desdoblamientos de rayas, mucho menos importantes cuantitativamente que los que se producen por el efecto Doppler-Fizeau, señalan las condiciones físicas que reinan en la superficie de la estrella. De esta manera se ha puesto en evidencia el campo magnético de las manchas solares. El desplazamiento debido a la gravitación, o *efecto Einstein*, es muy sensible en las estrellas enanas blancas, que encierran una masa equivalente a la del Sol en un radio 100 veces más pequeño.





Protuberancia solar (*Fot. X.*)

La exploración de los espectros estelares se ha extendido al rojo y al infrarrojo con el empleo de células fotoeléctricas de sulfuro de plomo. La amplitud de las rayas del espectro, incluso independientemente de la amplitud de la ranura del espectroscopio, muestra la *abundancia de diversos elementos* en la atmósfera de la estrella, pues varias de las causas que producen el ensanchamiento dependen del número de átomos en presencia.

Radioastronomía. — El astrónomo norteamericano Jansky comprobó en 1931 la existencia de fuentes de emisión radioeléctrica en la Galaxia. Una de esas misteriosas fuentes, descubierta en la constelación del *Cisne* en 1948, no coincide con la posición de ninguna estrella conocida. Por su parte, Ryle ha identificado más de 2 000 de esas radiofuentes, casi todas ellas situadas en el hemisferio Norte.

El Sol empezó a ser observado radioeléctricamente desde que, en 1942, se comprobó que las erupciones cromosféricas solares perturbaban el funcionamiento de los aparatos de radar. Así se ha llegado a obtener el esquema de un Sol "emisor radioeléctrico" que difiere bastante del obtenido al observarlo con los medios habituales.

En esta nueva técnica de observación, los telescopios son substituidos por los *radiotelescopios,* potentes instrumentos compuestos de una superficie receptora que concentra las ondas que recibe en un foco, donde una antena las recoge. El mayor de todos ellos es el de Jodrell Bank, instalado en Cheshire (Gran Bretaña), cuyo peso es de 2 032 toneladas.

Las leyes de la radiación

Determinación de la temperatura de las estrellas. — Hemos dicho anteriormente que se admitía que una estrella irradia del mismo modo que un "cuerpo negro" de la física, o sea, bajo la sola influencia de la elevación de temperatura. Se ha formulado en física la *ley de Stefan,* que liga a la temperatura absoluta la radiación por unidad de superficie del cuerpo negro e igualmente la repartición de la energía emitida entre las diferentes longitudes de onda del espectro. La ley de Stefan permite, pues, calcular la temperatura de la fotosfera, a condición de conocer la energía total irradiada por la estrella y la superficie de la fotosfera, y si, una vez medida la energía recibida sobre cierta superficie, se conoce la distancia de la estrella, se puede deducir la energía que recibiría la esfera completa teniendo la estrella por centro. La superficie de la fotoesfera es más difícil de determinar, ya que los diámetros aparentes de las estrellas no se pueden medir directamente. El procedimiento no es apenas aplicable más que al Sol. Pero la ley de repartición de la energía en función de la longitud de onda permite deducir del estudio del espectro la temperatura de la fotosfera de la estrella. El empleo del índice de color, definido a propósito de las magnitudes, es en realidad una aplicación de este procedimiento. Una de las dificultades principales de esta técnica reside en que se debe tener en cuenta la absorción producida por la atmósfera terrestre, que puede también variar con la longitud de onda.

El conocimiento de la temperatura de una estrella y la medida de la radiación total permiten, incluso, estimar la superficie radiante y con ello la superficie y el volumen de la estrella. Es uno de los procedimientos que facilitan el cálculo de las dimensiones de las estrellas.

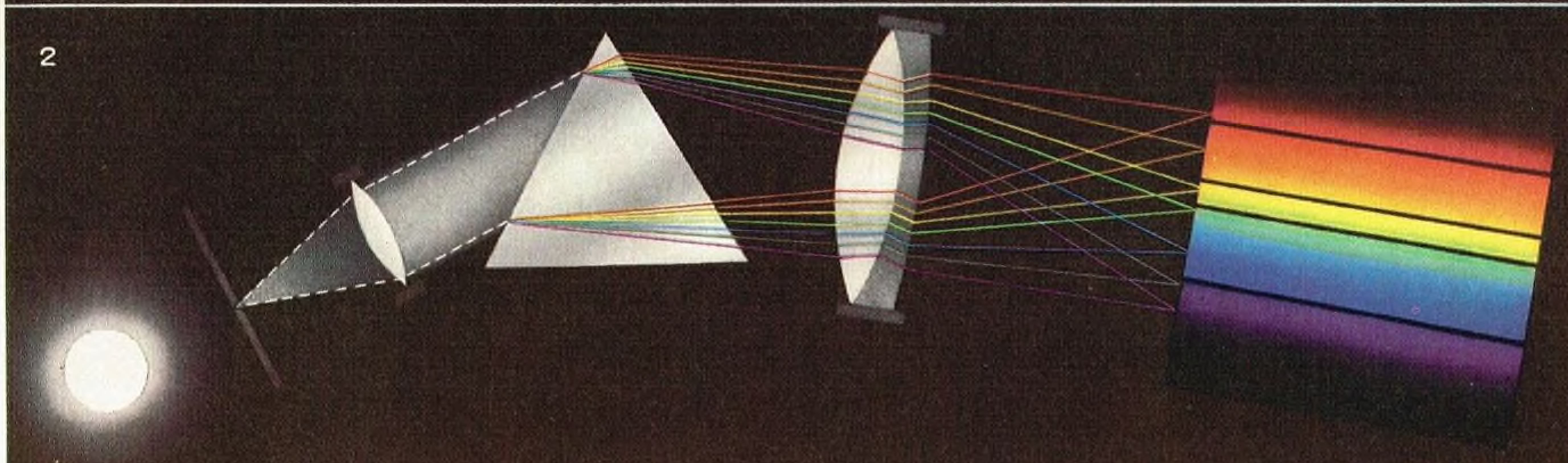
Presión de radiación. — Consideraciones teóricas han hecho suponer que una superficie plana, expuesta a la radiación de un haz, soporta una presión llamada *presión de radiación.* Su existencia ha sido establecida más tarde experimentalmente.

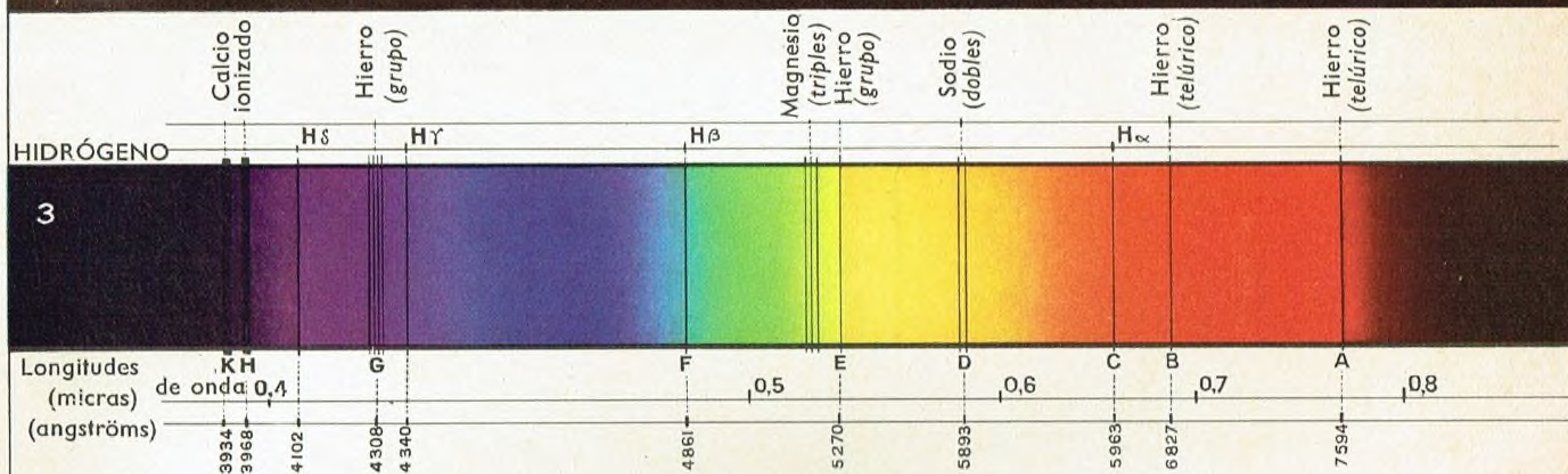
El cálculo de la presión ejercida por la radiación solar en la superficie de la Tierra muestra una fuerza de unos 4 g por hectárea. Pero la acción de repulsión es considerablemente mayor en la proximidad del Sol, y como para una pequeña partícula la atracción newtoniana ejercida por el Sol varía igual que su peso —es decir, como el cubo de su radio—, mientras que la presión de radiación varía igual que su superficie—, es decir, como el cuadrado del radio—, para las partículas suficientemente pequeñas la presión de radiación predomina sobre la gravitación y puede lanzarlas desde el Sol a las proximidades de la Tierra (el cuadrado de 0,1 es 0,01 y el cubo 0,001). Esta teoría sirve de base para explicar la llegada hasta la Tierra de emisiones corpusculares que provienen del Sol.

La absorción por la cromosfera de ciertas radiaciones de la irradiación fotosférica provoca igualmente una presión llamada *de radiación selectiva,* que mantiene en equilibrio, por ejemplo, nubes de calcio en la atmósfera solar.

Efecto fotoeléctrico. — Las radiaciones luminosas son capaces de arrancar electrones a ciertos átomos. En el caso de un gas, sólo las radiaciones ultravioleta son capaces de provocar su ionización. La capa ionizada de la alta atmósfera terrestre o *ionosfera* se debe, por esto, a la acción de los rayos ultravioleta de la luz solar. Subrayaremos su importancia más adelante.

1





ESPECTROS ESTELARES

Un cuerpo sólido incandescente produce, cuando su luz es descompuesta por un prisma (o por una red de trama muy fina), un espectro coloreado *continuo*. Lo mismo sucede cuando se trata de una masa gaseosa sometida a una presión muy elevada.

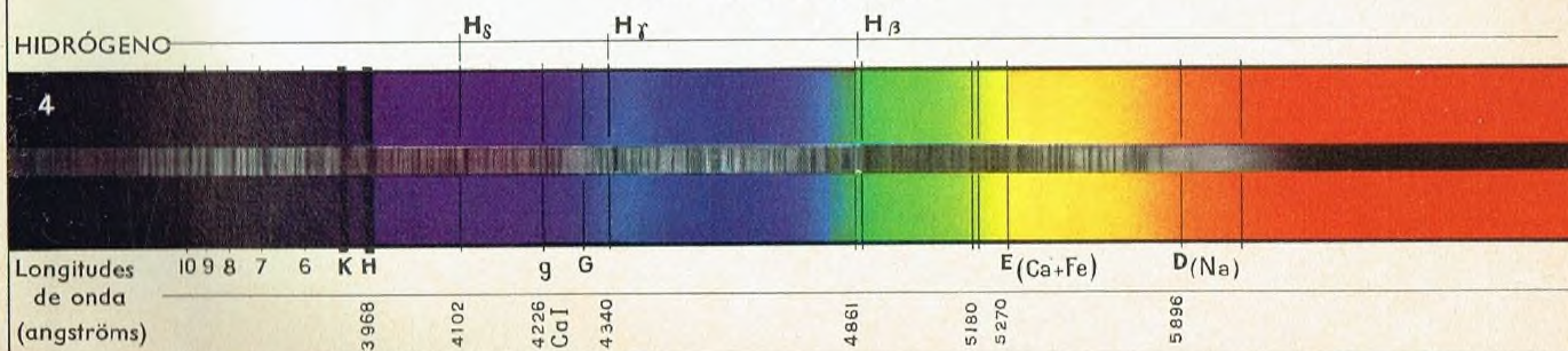
Un gas sometido a una excitación térmica o eléctrica produce un espectro *discontinuo* formado por determinado número de rayas brillantes características del gas considerado y del grado de excitación (el llamado espectro de *emisión*) [fig. 1].

Si ese gas es observado por transparencia, aprovechando la luz emitida por un cuerpo brillante cuyo espectro sea continuo, se observan las mismas rayas, pero *oscuras* esta vez (espectro llamado de *absorción*) [fig. 2].

En el caso de las estrellas puede obtenerse un espectro coloreado continuo procedente de la parte central del astro, y, en sobreimpresión sobre este espectro, rayas oscuras correspondientes a la absorción provocada por la atmósfera estelar y también por el paso a través de la atmósfera terrestre. Excepcionalmente, pueden verse en este espectro algunas rayas brillantes de emisión.

La figura 3 representa *esquemáticamente* el espectro solar con algunas de sus rayas oscuras características (se han catalogado cerca de 30 000 de éstas), las cuales son emitidas por los cuerpos que figuran en las atmósferas solar y terrestre (las rayas son provocadas también por las distintas condiciones a que estos cuerpos se hallan sometidos).

La figura 4 es, por el contrario, la reproducción *real de un clisé obtenido* en el Observatorio de París y correspondiente a la estrella *Alfa* de Perseo. El clisé ha sido reproducido sobre un espectro coloreado a fin de precisar con exactitud la correspondencia entre rayas y colores.





Halo solar observado en Groenlandia el día 21 de julio de 1951, a las 22 horas (Lat. 71° 25′N.; long. 0. 37° 30′; 3 155 m. de altitud; temperatura, 15,5° c.) La forma especial de este halo, extraordinariamente rara, hace de esta fotografía un documento de carácter excepcional (Clisé Expediciones Polares Francesas, J. Masson)

El mundo solar

El movimiento de los planetas. Cálculo de las órbitas de los planetas y de los cometas basado en las observaciones. Perturbaciones. Descubrimiento de Neptuno por Le Verrier. — **La mecánica celeste y la relatividad.** — **El movimiento de la Luna.** Distancias. Fases. Órbita de la Luna

El movimiento de los planetas

Como se verá por las leyes de Kepler (v. p. 264), que rigen el movimiento de los planetas y son consecuencia de la ley de atracción universal de Newton, aun sin entrar en el cálculo propio de los movimientos keplerianos se puede demostrar en un caso particular, el de la rotación uniforme en una órbita circular, cómo la tercera ley de Kepler se deduce del principio de la atracción universal y cómo está ligada a la masa del cuerpo atrayente.

Consideremos el movimiento de rotación uniforme en una órbita de radio R con una velocidad ω de un planeta de masa m alrededor del Sol, de masa M (*fig.* 5). Si T es el período de revolución, está ligado a ω por la relación $\omega = \frac{2\pi}{T}$. El planeta está en equilibrio entre la fuerza centrífuga de su movimiento circular y la atracción newtoniana ejercida por el Sol. La fuerza centrífuga del movimiento tiene por valor $m\omega^2 R$ o $m \frac{4\pi^2}{T^2} R$.

La atracción ejercida por el Sol tiene por valor $f \frac{mM}{R^2}$, y como f es el coeficiente de la atracción universal (v. pp. 264 y 267), $m \frac{4\pi^2}{T^2} R = f \frac{mM}{R^2}$, o $4\pi^2 \frac{R^3}{T^2} \frac{1}{f} = M$; así $\frac{R^3}{T^2}$ es proporcional a la masa del cuerpo atrayente y tiene el mismo valor para todos los astros que giran alrededor del Sol.

Si se ha podido determinar el valor del coeficiente de la atracción universal, el movimiento de un planeta permite calcular la masa del Sol. Del mismo modo, el movimiento de un satélite permite calcular la masa del planeta. De hecho, el planeta efectúa su movimiento alrededor del centro de gravedad G del conjunto planeta-Sol, que es el único inmóvil, y en la expresión de la fuerza centrífuga, R debe ser reemplazado por la distancia del planeta a este centro, es decir, $R \frac{M}{M + m}$, mientras la atracción newtoniana se ejerce a la distancia R. Se obtiene así una relación más exacta

$$4\pi^2 \frac{R^3}{T^2} \frac{1}{f} = M + m.$$

La tercera ley de Kepler es sólo aproximada; resulta válida cuando —como ocurre generalmente— la masa del planeta es insignificante con respecto a la masa del Sol. En el caso del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, sin embargo, la masa de la Luna no es despreciable.

Cálculo de las órbitas de los planetas y de los cometas basado en las observaciones. — Indicaremos en la página 262 los elementos necesarios para definir una órbita en el espacio. Conviene añadir a esos factores dos incógnitas para definir la ley del movimiento: período e instante de paso por el perihelio.

Así pues, para definir la órbita y el movimiento, se necesitan 7 elementos, que el conocimiento de la tercera ley de Kepler reduce a 6. Para los astrónomos que estudian las órbitas de los planetas y de los cometas, el problema se plantea de la siguiente forma: la observación les da la posición del astro en varios instantes t_1, t_2, t_3 ... Al substituir el valor de t y las coordenadas observadas en las ecuaciones generales de un movimiento kepleriano alrededor del Sol, se obtienen las relaciones entre las incógnitas. De todos modos es necesario que el número de las relaciones así obtenidas sea al menos igual al número de incógnitas. Diferentes métodos, generales o aproximados, han sido imaginados para resolver este problema.

Perturbaciones. Descubrimiento de Neptuno por Le Verrier. — Los planetas y los cometas efectúan su movimiento alrededor del Sol, pero otros planetas intervienen en estos movimientos como astros perturbadores que vienen a añadir su atracción a la del Sol. Del mismo modo, en el movimiento de los satélites alrededor de los planetas, el Sol y los demás planetas son astros perturbadores.

Las perturbaciones introducidas en los movimientos keplerianos tienen por efecto una ligera variación de las *constantes* de las órbitas. Producen una rotación lenta y continua de las diferentes direcciones que las definen: línea de nodos, línea de ápsides, y por una ligera oscilación alrededor de una posición media de sus características: inclinación del plano de la órbita, excentricidad, valor del eje mayor (y como consecuencia del período, en virtud de la tercera ley de Kepler). El estudio de las perturbaciones exige complicados cálculos. La *teoría completa de los cuatro grandes planetas* (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), establecida por Le Verrier, comprende cinco volúmenes de cálculos. La teoría del *movimiento de la Luna* fue establecida en el siglo pasado por Delaunay, que le consagró veinticinco años de su existencia. Trabajos recientes, llevados a cabo por el astrónomo norteamericano Brown, permiten pensar que, a pesar de su complejidad, el movimiento de la Luna es hoy conocido perfectamente en sus menores detalles.

En el caso del estudio de la influencia de un solo astro perturbador, alejado y situado en el plano de la órbita, un sencillo análisis geométrico permite, al menos, darse cuenta de las modificaciones que éste introduce: sea un planeta A que gira alrededor del Sol S, y P el astro perturbador (*fig.* 6).

P ejerce su atracción a la vez sobre el planeta y sobre el Sol, y la perturbación introducida en el movimiento de A alrededor de S se debe a la diferencia de aceleraciones impuestas por P a A y a S.

Esta diferencia, representada por AR, suma geométrica de A*a* y de A*a*₁ (opuesta a S*s*), es la aceleración debida a la acción perturbadora.

La figura 6 permite una construcción sencilla del vector AR en la dirección AB.

Si el vector A*a* está representado por la mismo longitud D′, el vector S*s* debe ser representado por una longitud igual a $D' \times \frac{D'^2}{\Delta'^2}$.

Ahora bien, la construcción que hace pasar de A a L y a G da $PG = D' \times \frac{D'}{\Delta'}$, y por lo mismo, $PB = PE = PG \times \frac{D'}{\Delta'}$.

Aplicando al caso de un movimiento elíptico esta construcción para diferentes posiciones de A en su órbita, se obtienen las direcciones de las aceleraciones perturbadoras indicadas por la figura 7.

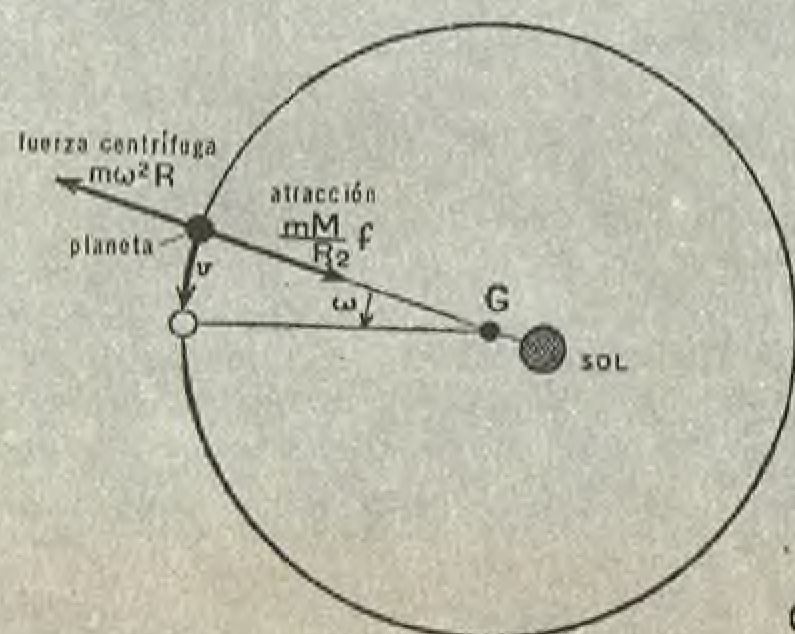


Fig. 5.

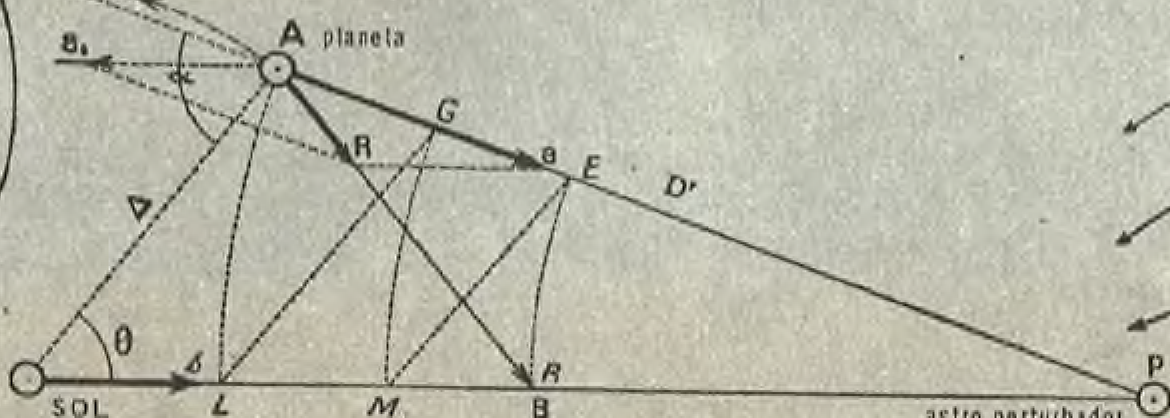


Fig. 6.

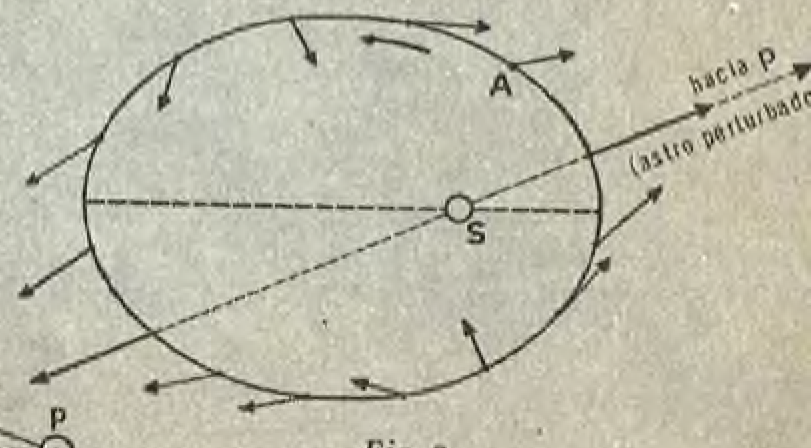


Fig. 7.

La distribución de las aceleraciones perturbadoras demuestra claramente que tienden a modificar la excentricidad de la órbita, y la longitud y la dirección del eje mayor.

Un estudio geométrico análogo, en el caso en que el astro perturbador no esté en el plano de la órbita, muestra cómo se produce un retroceso de la línea de nodos.

En razón de las perturbaciones del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, la línea de ápsides de la órbita gira en su plano 11″6 por año y el plano de la eclíptica se desplaza ligeramente: su inclinación con respecto al ecuador varía de 21° 59′ a 24° 36′ en unos 200 siglos.

El hecho de que los ejes mayores de las órbitas planetarias no puedan sufrir más que variaciones periódicas, llevó a Lagrange a enunciar el principio de la *estabilidad del mundo solar*. Esta estabilidad no concierne más que a los planetas importantes; no se aplica a los pequeños planetas, y con menos motivo a los cometas y a los corpúsculos que gravitan en el interior del mundo solar.

Los dos más espectaculares resultados conseguidos desde hace un siglo por la mecánica celeste han sido:

a) El cálculo, en 1846, por Le Verrier, de las coordenadas de un planeta desconocido que permitía explicar las perturbaciones residuales del planeta Urano, cálculo que trajo consigo el descubrimiento de Neptuno;

b) La teoría más completa del movimiento de la Luna, citada más arriba. Este conocimiento, prácticamente perfecto, de su movimiento, ha influido incluso en la definición del tiempo (v. pp. 257 y 262).

La mecánica celeste y la relatividad

La mecánica clásica se revela impotente para resolver el problema planteado por el equilibrio general del universo con sus condensaciones de materia en estrellas y en galaxias.

La *relatividad limitada* fue imaginada por Einstein para reunir en una síntesis lógica la mecánica y el electromagnetismo.

Las *ecuaciones de Maxwell-Lorentz*, que sintetizan el conjunto de las propiedades electromagnéticas, se modifican notablemente cuando en ellas se efectúa un cambio de coordenadas mediante el paso de un triedro fijo a un triedro en traslación uniforme en el sistema de Galileo (caracterizado por la distinción del espacio y el tiempo y la geometría de Euclides). En la relatividad limitada (limitada al caso del movimiento uniforme), el tiempo es relativo y depende del observador. La masa de un cuerpo aumenta con la velocidad. Esta masa no es más que uno de los aspectos de la energía, de la que es una forma muy condensada.

La teoría de la *relatividad generalizada* engloba a su vez los fenómenos de la *gravitación* e interpreta la identificación de la masa que pesa y de la masa inerte, que la física clásica menciona sin explicarla. No hace distinción entre el espacio y el tiempo. El universo se convierte en un *espacio-tiempo de cuatro dimensiones*. Su espacio es curvo, y la noción de línea recta pierde su sentido. Sólo a infinita distancia de toda materia, y de toda irradiación, el espacio-tiempo vuelve a ser euclidiano.

En el sistema solar, sólo la masa del Sol es lo bastante importante para "curvar el espacio"; las estrellas se encuentran demasiado lejos para actuar. La curvatura del espacio en las proximidades del Sol arrastra los planetas hacia este astro como si los atrajera. La ley de Newton es todavía perfectamente válida, salvo en la proximidad inmediata del Sol. Solamente aparecen divergencias sensibles a causa de dos fenómenos que la mecánica clásica es incapaz de interpretar y que permiten inclinarse sin ningún género de duda a favor de la ley de la relatividad de la gravitación.

Desviación de un rayo luminoso en la proximidad inmediata de una masa (*fig.* 8). — La verificación experimental de la variación de la dirección de una estrella, cuando pasa muy cerca del Sol, es muy difícil porque la desviación que debe medirse es inferior a 2″, pero el resultado obtenido es considerado como aceptable. Esta experiencia no puede hacerse más que durante un eclipse total del Sol, ya que las estrellas no son normalmente visibles en la proximidad de este astro.

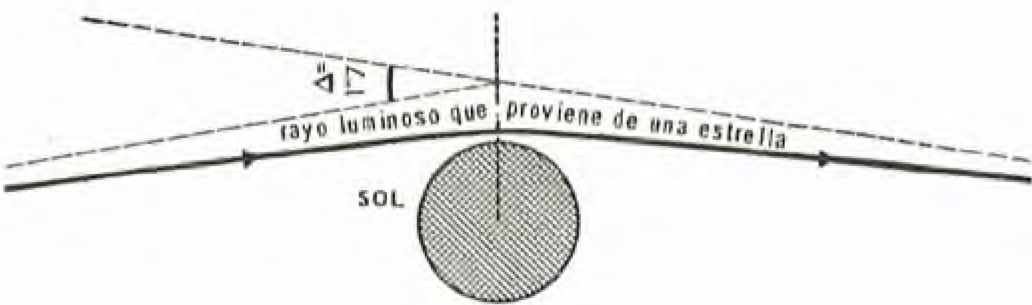


Fig. 8

Rotación de los ejes mayores de las órbitas planetarias. — El avance secular del perihelio de Mercurio, debido a las perturbaciones y calculado por Le Verrier, era 43″ inferior al valor dado por las observaciones. En relatividad generalizada, los ejes mayores de las órbitas están animados de un movimiento de rotación suplementario, y el cálculo da exactamente el valor comprobado en el caso de Mercurio.

El fenómeno es menos sensible en las órbitas de otros planetas a causa de su menor excentricidad.

Elementos principales del movimiento de los planetas

	DISTANCIA MEDIA AL SOL	DURACIÓN DE REVOLUCIÓN		ÓRBITA		ROTACIÓN PROPIA	
		SIDERAL	SINÓDICA	INCLINACIÓN	EXCENTRICIDAD	DURACIÓN	INCLINACIÓN EN LA ÓRBITA
Mercurio	0,387	88 d	115,9 d	7° 0	0,206	88 d	
Venus	0,723	224,7 d	583,9 d	3° 24'	0,007	224,7 d	
Tierra	1	365,24 d			0,017	23 h 56 mn 4 s	23° 27'
Marte	1,524	1 año 321 d	2 años 49 d	1° 51'	0,093	24 h 37 mn 23 s	24° 50'
Júpiter	5,203	11 años 315 d	1 año 34 d	1° 18'	0,048	9 h 50 mn y 9 h 56 mn	3° 5'
Saturno	9,555	29 años 167 d	1 año 13 d	2° 29'	0,056	10 h 14 mn	26° 48'
Urano	19,218	84 años 7 d	1 año 57 d	0° 46'	0,047	?	82°
Neptuno	30,108	164 años 280 d	1 año 2 d	1° 47'	0,008	15 h 8 mn	30° ?
Plutón	39,6	247 años	1 año 0 d	17° 09'	0,249	?	?

Distancia media de la Tierra al Sol: 23 400 radios terrestres de 6 378,39 km



El movimiento de la Luna

Distancia. Fases. — La Luna gira alrededor de la Tierra con un movimiento kepleriano. El aplastamiento de la órbita hace variar su distancia de 56 a 64 radios terrestres. Su diámetro medio aparente es de 31′ y su radio, en consecuencia, de 1 738 kilómetros.

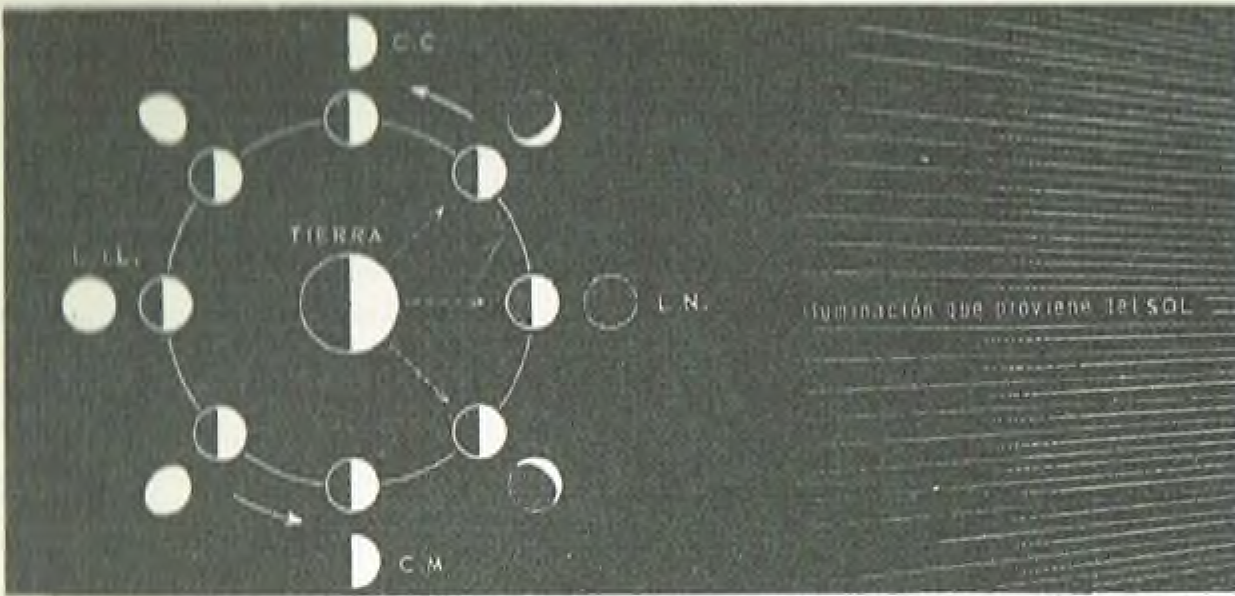


Fig. 9

Las fases se deben a que el hemisferio de la Luna que mira hacia nosotros no coincide con el que es alumbrado por el Sol.

El período de las fases es la duración de la revolución sinódica de la Luna o lunación: su valor es de 29 días 12 h 44′ 31″. La duración de su revolución es de 27,32 días, aproximadamente.

La figura 9 explica el fenómeno de las fases; los dibujos exteriores de la Luna representan el aspecto correspondiente a cada una de sus posiciones con respecto a la dirección del Sol. Mientras está en conjunción es luna nueva; en oposición, luna llena. En el momento de la luna nueva, la Luna sale y se pone al mismo tiempo que el Sol: al día siguiente ha girado ya 13 grados o 53 minutos en la esfera celeste, mientras que el Sol no ha girado más que 4 minutos en igual sentido; se pone, pues, 49 minutos después que el Sol. Unos 7 días después, se está en el cuarto creciente. En la luna llena, la Luna sale cuando el Sol se pone. Luego se hace visible antes de la salida del Sol, y en el cuarto menguante sale 6 horas antes que el Sol.

El plano de la órbita lunar está poco inclinado sobre la eclíptica (5° 09′). El plano Tierra-Sol-Luna, plano de simetría para el fenómeno de las fases, difiere poco del plano de la eclíptica (cuando la Luna está bastante alejada de la línea Tierra-Sol). La perpendicular a la línea que une los cuernos de la Luna indica entonces la dirección del plano de la eclíptica.

nodo de la órbita en el momento de las conjunciones u oposiciones tiene gran importancia: de ella depende la distancia de la Luna a la línea Tierra-Sol. Es importante, pues, tener en cuenta el período de los pasos de la Luna por su nodo ascendente, llamado duración de la *revolución draconítica* (27,212 días).

Si se representa el movimiento de la Luna con respecto al Sol, se obtiene una trayectoria que oscila a una y otra parte de la órbita terrestre, y que pasa tanto por encima como por debajo del plano de la eclíptica. Pero, siendo la distancia Tierra-Luna $\frac{1}{400}$ de la distancia Tierra-Sol, la trayectoria de la Luna dirige siempre su concavidad hacia el Sol.

La Luna presenta constantemente hacia nosotros el mismo hemisferio, lo cual se debe a que su rotación sobre sí misma se efectúa sobre un eje casi perpendicular a su órbita, y al mismo tiempo que su rotación alrededor de la Tierra (*fig.* 10). El período de iluminación solar de la Luna es la *lunación*. En realidad, el movimiento orbital se efectúa sobre una elipse que sigue la ley de las áreas, mientras que el movimiento de rotación es uniforme: de ahí resulta que si bien los dos movimientos tienen el mismo período, no coinciden exactamente en cada instante.

El hemisferio que nosotros vemos oscila un poco hacia una y otra parte de su posición media.

Incluso el eje de rotación no es exactamente perpendicular al plano de la órbita: forma un ángulo de 83° 30′ con este plano,

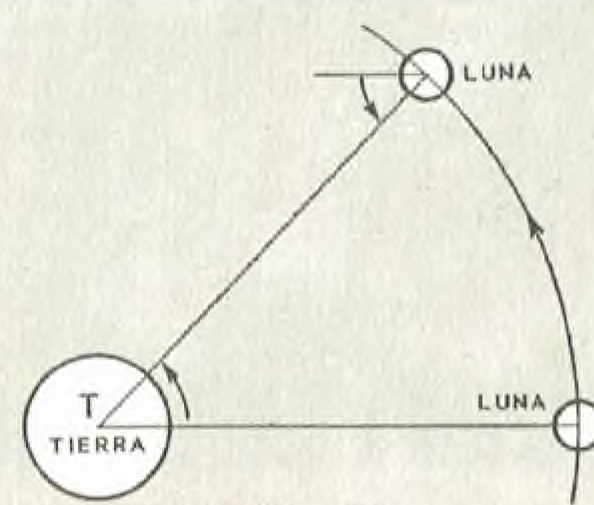
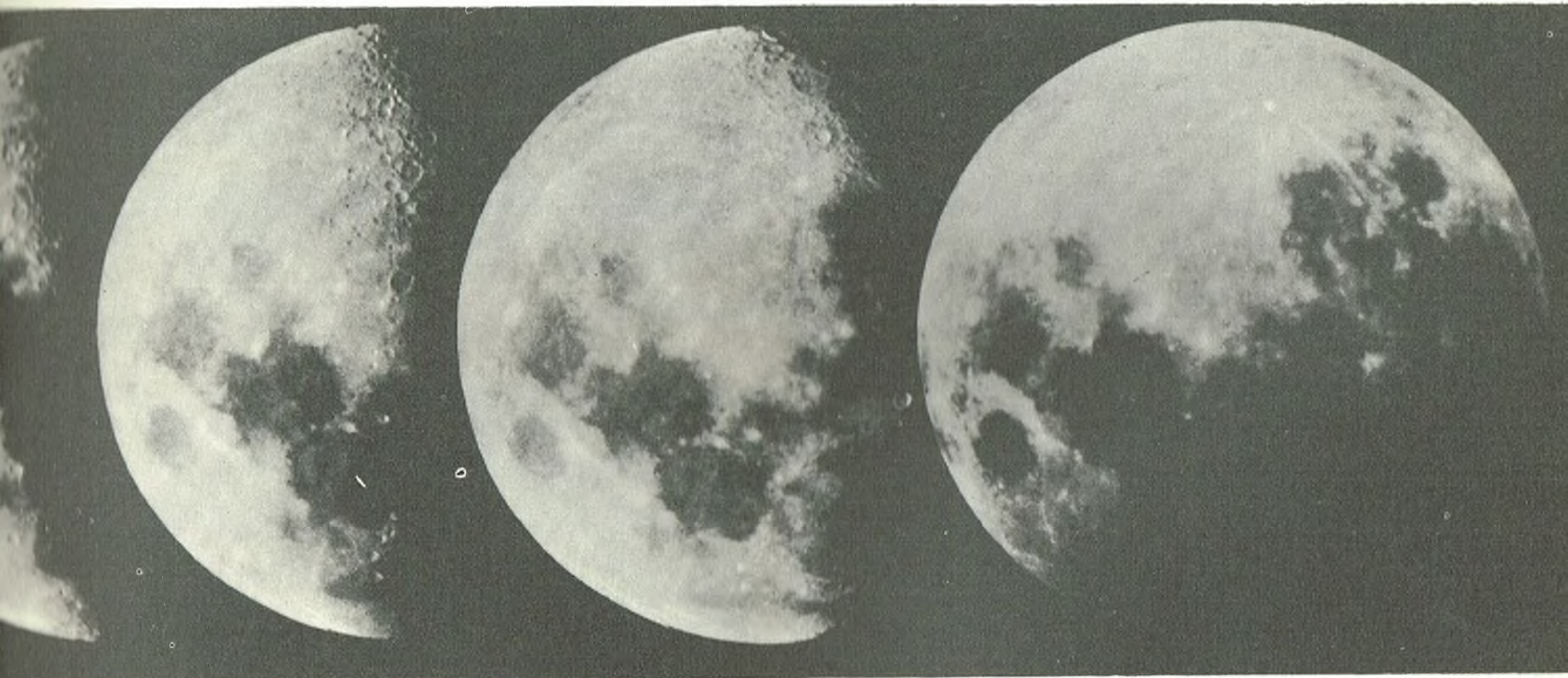


Fig. 10

Alumbramientos sucesivos del globo lunar vuelto hacia la Tierra *(Fot. X.)*



En la fase de luna llena, nuestro satélite se encuentra en la esfera celeste en oposición al Sol, es decir, en el lugar en que el Sol se encontrará seis meses después. Esto explica que en invierno la luna llena esté en el cielo tan alta como el Sol en el verano.

Mientras el aumento de la Luna es pequeño, el resto del disco está débilmente alumbrado por la Tierra (exactamente como la Luna nos alumbra): es la llamada *luz cenicienta.*

Órbita de la Luna. — El plano de la órbita lunar no tiene una dirección fija; su intersección con el plano de la eclíptica o línea de nodos gira en sentido retrógrado con un período de 18 años $\frac{2}{3}$. Es una perturbación introducida por el Sol. En relación con los eclipses de Sol y de Luna, la posición del

lo que nos permite ver tan pronto un polo como otro de la Luna. Estos fenómenos reciben el nombre de *libraciones* (*fig.* 11). Se le añade el ligero cambio de punto de vista del observador bajo el efecto de la rotación de la Tierra. Conocemos, en total, un 60% de la superficie de la Luna; sin embargo, debemos añadir que el aparato astronáutico soviético *Lunik III* logró transmitir a la Tierra, el 4 de octubre de 1959, fotografías del hemisferio oculto de nuestro satélite.

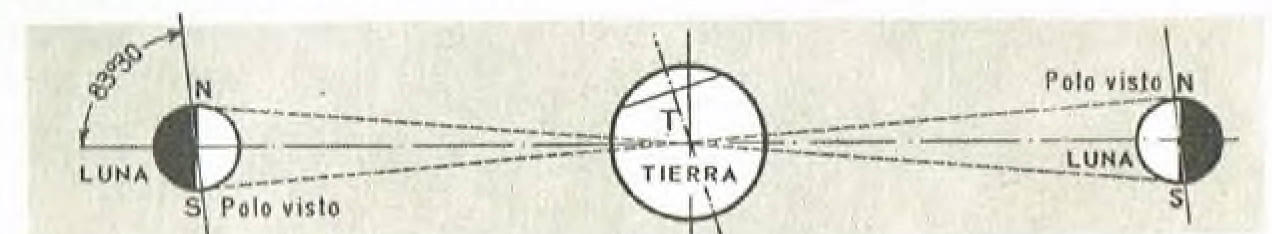


Fig. 11



Cosmografía

Rotación de la Tierra sobre sí misma: Movimiento diurno aparente. Coordenadas celestes. Tiempo sideral. Determinación de las diferencias de longitud. — **Movimiento aparente del Sol en la esfera celeste y movimiento orbital de la Tierra:** Las estaciones. Aspecto del cielo nocturno. Días solares y días siderales. — **Movimientos del eje de rotación de la Tierra:** Precesión de los equinoccios. Año trópico. Nutación del eje de la Tierra. Tiempo sideral medio. Desplazamiento del polo. — **Tiempo solar medio:** Medida del tiempo. Ecuación del tiempo. Tiempo universal. Husos horarios. Tiempo legal. Calendario. — **Los planetas:** Fases de los planetas. Órbitas de los planetas. Leyes de Kepler. La atracción universal. Ley de Newton. Perturbaciones. Rotación de los planetas sobre sí mismos. Movimiento de los satélites. Visión de conjunto del sistema solar. Sentido de rotación. Cometas. — **Descripción de conjunto del universo:** Nuestra galaxia. Otras galaxias. — **Las mareas.** — **Los eclipses:** Eclipses de Luna. Eclipses de Sol. — **Determinación de los elementos del mundo solar:** Distancias. Masas

Rotación de la Tierra sobre sí misma

Movimiento diurno aparente. — La observación, en una noche serena, de los sucesivos aspectos que presenta el cielo, muestra que las estrellas forman figuras o *constelaciones*, y que giran con movimiento uniforme en torno a un centro determinado del espacio, centro materializado con error inferior a un grado por la *Estrella Polar*. Tal es el *movimiento diurno*.

El eje de rotación o eje del mundo es fijo a la vez con respecto a las estrellas y con respecto a los objetos terrestres que nos rodean.

Una fotografía con exposición de la región del cielo vecina a la Estrella Polar, efectuada con una cámara corriente, muestra de modo evidente la rotación y determina su eje. La imagen de una estrella está siempre situada en un pequeño arco de círculo con centro en el polo. El período del movimiento o día sideral es 3′ 56″ más corto que el día solar medio que regula nuestra vida cotidiana. Los astrónomos de la Antigüedad, que consideraban la Tierra como el centro del mundo y carecían de medios para apreciar la distancia a las estrellas, admitían que éstas se hallaban en una esfera de radio inmenso —*esfera celeste* o *esfera fija*—, que giraba realmente alrededor de la Tierra. Todavía es cómodo, al tratarse de cuestiones en las cuales las estrellas no intervienen más que por sus direcciones, suponer la existencia de esta esfera celeste estrellada. El eje del mundo o línea de los polos atraviesa la esfera celeste por dos puntos: los polos celestes Norte y Sur.

La inmensidad de su radio hace que cualquier punto de la Tierra, a pesar del desplazamiento de ésta sobre su órbita, se pueda considerar situado en el centro de la esfera celeste. Así, por ejemplo, el eje del mundo pasa siempre por un observador terrestre.

Las estrellas que se ven siempre desde un lugar dado, se llaman *circunpolares* del lugar. Incluso la Polar describe alrededor del polo un pequeño círculo. Las estrellas próximas al ecuador celeste —gran círculo perpendicular a la línea de los polos— describen paralelos que cortan el círculo del horizonte (*fig.* 12), es decir, salen y se ponen, y lo hacen adelantándose 3 mn 56 s por día. Para un observador del hemisferio boreal, las constelaciones próximas al polo Sur, como la *Cruz del Sur*, son siempre invisibles.

En un punto dado de la Tierra, el plano vertical que pasa por el polo corta la esfera celeste según un gran círculo llamado *meridiano del lugar*. Durante el día sideral, una estrella pasa dos veces por el meridiano del lugar, una vez por la parte superior, del lado del cenit con respecto a la línea de los polos, y otra vez por la parte inferior. En el momento del verdadero mediodía local, el Sol se encuentra en su paso superior por el meridiano del lugar (estas nociones de hora solar se precisarán más adelante). El paso superior de un astro por el meridiano recibe el nombre de *culminación*: el astro sale por el Este, se eleva poco a poco por encima del horizonte y a su paso por el meridiano alcanza la máxima altura. El Sol participa del movimiento diurno en estas condiciones, pero su altitud de culminación varía —insistiremos en ello— de un día a otro. El trazo del plano meridiano sobre el plano horizontal define las dos direcciones geográficas: Norte y Sur. Los polos son los puntos en que el eje del mundo, pasando por el centro de la Tierra, atraviesa su superficie. Ambos polos son fijos con respecto a la Tierra. Determinada la dirección del polo y proyectada con un plano vertical sobre el horizonte del lugar, se define prácticamente y con precisión el meridiano de dicho lugar y la orientación de una dirección cualquiera.

La nebulosa oscura Barnard 92, en el Sagitario *(Fot. Observatorio de Monte Wilson)*

Fig. 13

Desde un punto de la Tierra se ve toda la esfera celeste, a excepción del pequeño casquete que queda siempre debajo del horizonte. Al variar la dirección del plano del horizonte con el lugar de la Tierra, la parte de la esfera celeste visible varía igualmente. En la figura 13 se ha representado, de izquierda a derecha el aspecto de la esfera celeste para lugares de latitudes diferentes, desde el polo al ecuador.

La latitud de un lugar en la superficie de la Tierra es definida como el ángulo de su vertical con el plano ecuatorial terrestre; se ve en la figura 14 que dicha latitud es igual a la altura del polo sobre el horizonte. Esta consideración permite una práctica *determinación de las latitudes terrestres.*

El movimiento diurno aparente resulta de la rotación real del globo terrestre en el sentido contrario, llamado sentido directo.

Coordenadas celestes. — Las coordenadas ecuatoriales celestes, definidas con respecto al eje principal que constituye la línea de los polos, son análogas a las coordenadas terrestres: latitud y diferencia de longitud. A la latitud corresponde la declinación de la estrella (δ en la figura 15) contada positivamente de 0 a 90º desde el ecuador hacia el Norte, y a la diferencia de longitud corresponde la ascensión recta. La ascensión recta se cuenta sobre el ecuador en sentido contrario al movimiento diurno, a partir del punto γ o punto vernal, que definiremos más adelante. De esta manera se obtienen coordenadas fijas para cada estrella, que se anotan en los catálogos de estrellas. Como se verá, varían muy poco con el tiempo.

El gran semicírculo que pasa por la estrella y por los polos recibe el nombre de *círculo horario de la estrella.* Si se le relaciona, en un lugar dado, con el meridiano, se obtiene un ángulo variable de un instante a otro denominado *ángulo horario de la estrella* AH. Se le mide sobre el ecuador en el sentido del movimiento diurno.

Tiempo sideral. Determinación de las diferencias de longitud. — El ángulo horario de una estrella, y en particular el ángulo horario de la estrella ficticia que constituye el punto γ, puede servir para señalar la posición de la esfera celeste en un instante dado con respecto al meridiano del lugar. En un día sideral, este ángulo aumenta en una circunferencia completa, y si se divide la circunferencia en 24 partes iguales u horas, en lugar de dividirla en 360 grados, puede imaginarse un reloj que marque siempre una hora igual al ángulo horario del punto y que se denomina la *hora sideral del lugar*. La figura 16 muestra que, considerada en este instante una estrella A, se tiene $H = \alpha + AH$.

La hora sideral varía de un lugar a otro el valor de la diferencia de longitud entre esos lugares. Esto es evidente en la figura 17, donde se encuentra el principio mismo de toda *determinación de diferencia de longitud* en la superficie de la Tierra: el cálculo del valor de las horas siderales en los dos puntos M y M′ en el mismo instante.

La determinación de la hora local en M se hará por observación del paso de una estrella por el meridiano; su ángulo horario es entonces nulo, y la relación general $H = \alpha + AH$ se reduce a $H = \alpha$: la hora sideral local es igual a la ascensión recta de la estrella.

En M′ se procede de la misma forma. La dificultad consistía, antes de la invención de la T.S.H., en transmitir a M la hora sideral de M′. En virtud de un convenio internacional, se cuentan las diferencias de longitud a partir del meridiano del observatorio inglés de Greenwich o *meridiano internacional.* La hora de Greenwich es transmitida cada día con gran precisión por todos los grandes observatorios. La hora civil de Greenwich y las tablas dadas por las efemérides, como la titulada *Connaissance des temps* (publicada por la Oficina de Longitudes), permiten pasar de esta hora a la hora sideral de Greenwich. El reloj sideral adelanta cada día 3 mm 56 s con respecto al tiempo civil.

Fig. 12

Fig. 14

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

Fig. 18

Movimiento aparente del Sol en la esfera celeste y movimiento orbital de la Tierra

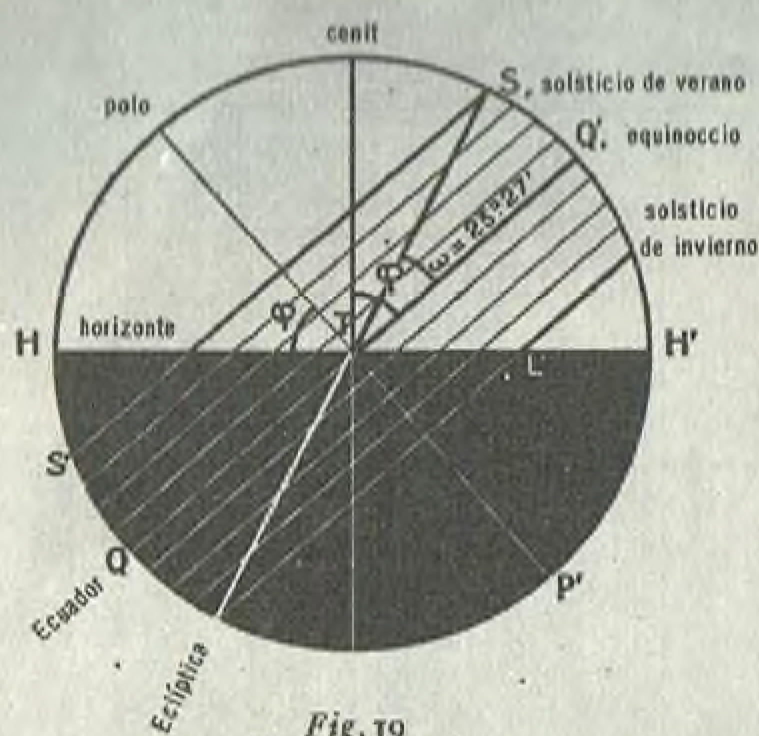


Fig. 19

Las estaciones. — El Sol, en conjunto, participa del movimiento diurno de las estrellas, pero, si se le sitúa diariamente en la esfera celeste por sus coordenadas, nos daremos cuenta de que no ocupa una posición fija, sino que, en un año, describe en sentido directo un gran círculo llamado *eclíptica* (*fig.* 18). Encontramos ahora la definición del punto γ: punto de intersección de la eclíptica con el ecuador, donde el Sol pasa del hemisferio Sur al hemisferio Norte. El Sol atraviesa así diferentes constelaciones. Los astrónomos de la Antigüedad habían dividido la eclíptica en doce partes iguales o *Signos del Zodiaco*, cada uno de los cuales, con el nombre de la constelación correspondiente, era designado con un signo particular (*fig.* 20).

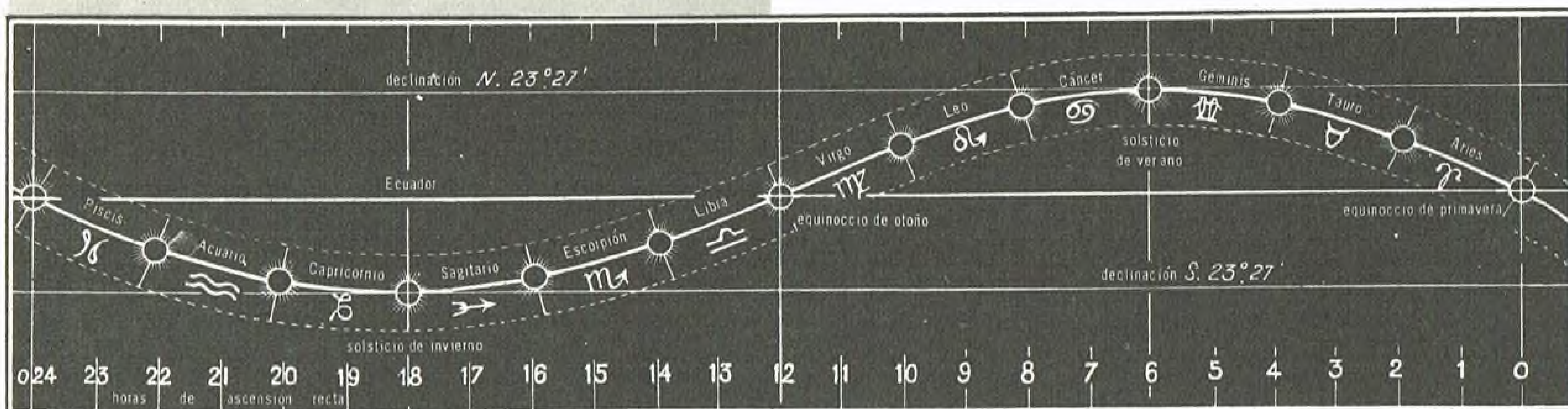


Fig. 20

Aries	Cáncer	Libra	Capricornio
Tauro	Leo	Escorpión	Acuario
Géminis	Virgo	Sagitario	Piscis

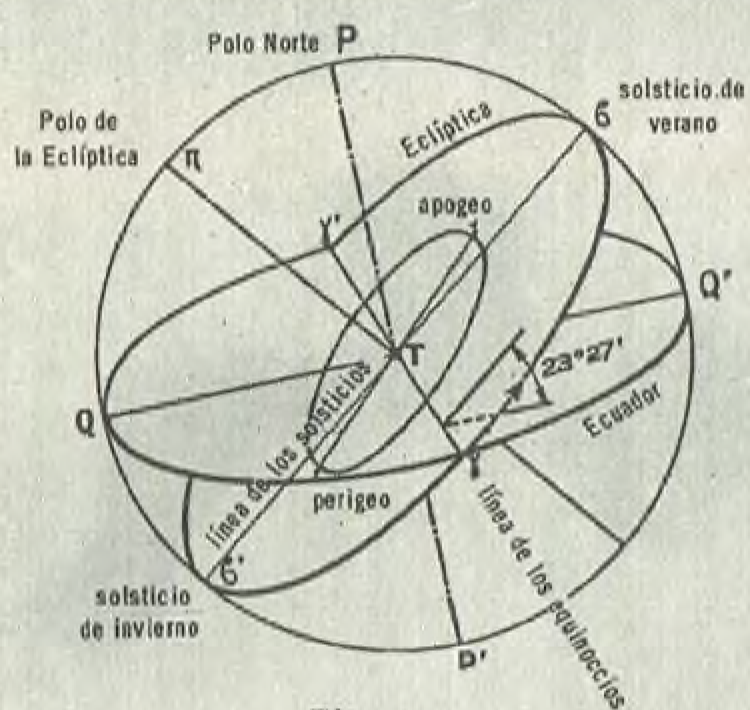


Fig. 21

Veremos más adelante que, debido a la precesión de los equinoccios, los signos del Zodiaco están actualmente desplazados con respecto a las constelaciones: el signo de Aries coincide con la constelación de Piscis. La eclíptica está comprendida entre los dos paralelos extremos + 23° 27′ y — 23° 27′; la declinación del Sol varía en el transcurso del año entre estos dos límites: esto es lo que da lugar a las *estaciones*. En el momento del *equinoccio de primavera*, hacia el 21 de marzo, el Sol está en el punto γ: su declinación es nula; se presenta en el movimiento diurno como una estrella ecuatorial. En todo el globo las noches son iguales a los días (*fig.* 19). A continuación su declinación aumenta; se presenta como una estrella boreal y culmina en el hemisferio Norte cada vez más alto hasta el *solsticio de verano*, que marca el comienzo de esta estación. Su declinación alcanza entonces + 23° 27′. Se ve en la figura 20 que en el hemisferio Norte, durante la estación calurosa, los días son más largos que las noches. La variación de distancia de la Tierra al Sol no interviene en el ritmo de las estaciones; su influencia es muy débil y actúa en sentido contrario. Durante el verano, el Sol desciende del solsticio de verano al *equinoccio de otoño* en el que los días son otra vez iguales a las noches. Después, en otoño y en invierno, el Sol se presenta como una estrella austral. Su mínimo de altitud en la culminación se produce en el *solsticio de invierno* (hacia el 21 de diciembre). En el hemisferio Sur, pues, la estación caliente es el invierno.



Fig. 22

La eclíptica es la proyección sobre la esfera celeste de las posiciones sucesivas del Sol, pero, si se tiene en cuenta su distancia para obtener su posición real, se encuentra como lugar una elipse, en la cual la Tierra ocupa uno de los focos (*fig.* 21). El eje mayor de la elipse o *línea de los ápsides* está inclinada con respecto a la línea de los solsticios unos 12° que aumentan 61″ 72 por año. En uno de los vértices de la elipse, llamado *perigeo*, el Sol está a la menor distancia de la Tierra: pasa por ese punto unos doce días después del solsticio de invierno. El otro vértice se llama *apogeo*.

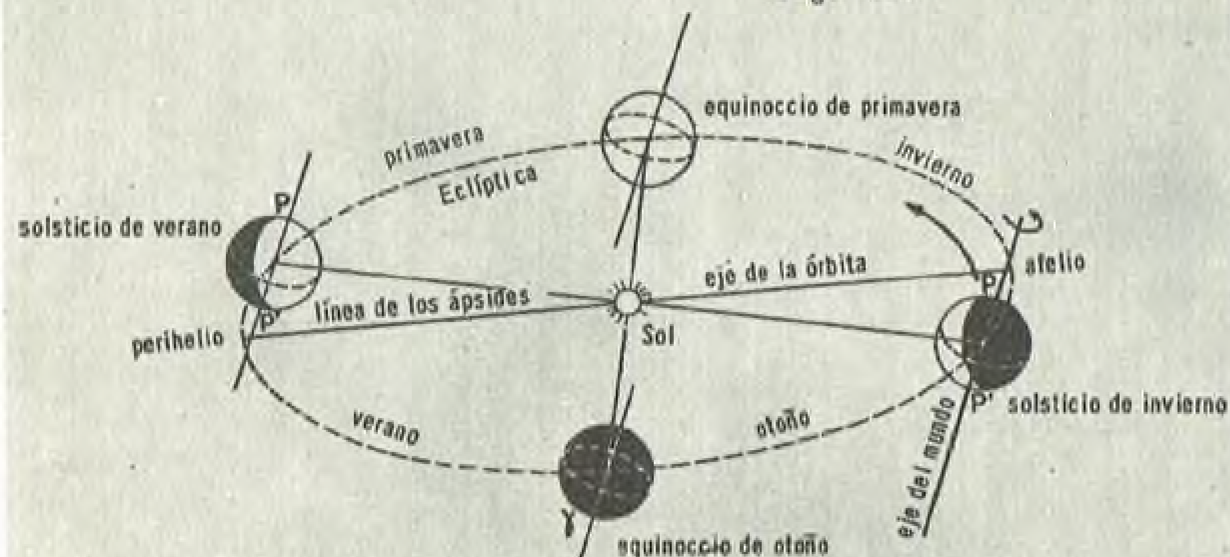


Fig. 23

El movimiento aparente del Sol es el aspecto del movimiento real de la Tierra alrededor de este astro, que se efectúa siguiendo la *ley de las áreas*. La duración de las diferentes estaciones es proporcional a las áreas limitadas sobre la elipse por los solsticios y los equinoccios (*fig.* 22). El verano es actualmente la más larga de las estaciones, y el invierno la más corta; esta situación se modifica muy lentamente con la rotación de la línea de los ápsides. Duración actual de las estaciones:

Primavera:	92 d 20 h.	Otoño:	89 d 19 h.
Verano:	93 d 15 h.	Invierno:	89 d 0 h.

En el movimiento real, el Sol está fijo en el espacio, y la Tierra describe una elipse en la que aquél ocupa uno de los focos.

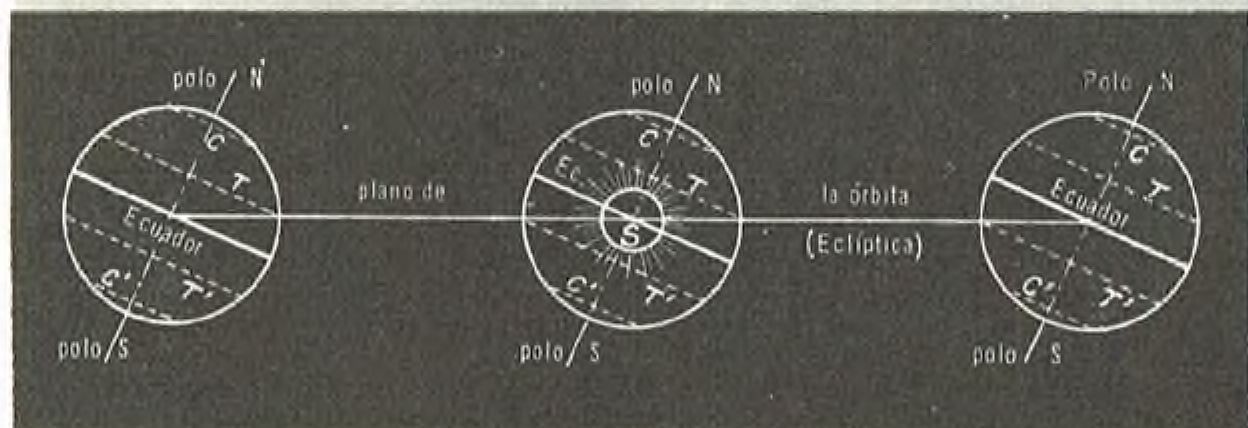


Fig. 24

Al perigeo y apogeo del Sol corresponden el *perihelio* y el *afelio* de la Tierra. El movimiento obedece a las leyes de Kepler (v. p. 264) y se produce en el sentido directo con una velocidad media de 30 kilómetros por segundo.

La figura 23 representa la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol. La rotación de la Tierra sobre sí misma en un día alrededor de su eje p' produce el movimiento diurno. Cuando la Tierra está en uno de los equinoccios, el plano del ecuador terrestre pasa por el Sol, pues la declinación se anula. La línea de los solsticios es perpendicular a la línea de los equinoccios. En el solsticio de verano, el polo Norte es el que está iluminado. Se ve más claro en la figura 24.

La inclinación del eje de rotación de la Tierra sobre la normal a la eclíptica produce las estaciones.

Aspecto del cielo nocturno. Días solares y días siderales. — El desplazamiento aparente del Sol en la esfera celeste explica que las constelaciones visibles de noche en el cielo varíen de una estación a otra; en general, vemos en una época dada las estrellas que están en oposición al Sol, que son las que pasan, a medianoche, por el meridiano del lugar. Dicho de otra manera: el movimiento del Sol en la esfera celeste es el que crea la diferencia diaria de 3′ 56″ entre el día solar y el día sideral. Volveremos sobre ello oportunamente cuando hablemos de la medida del tiempo.

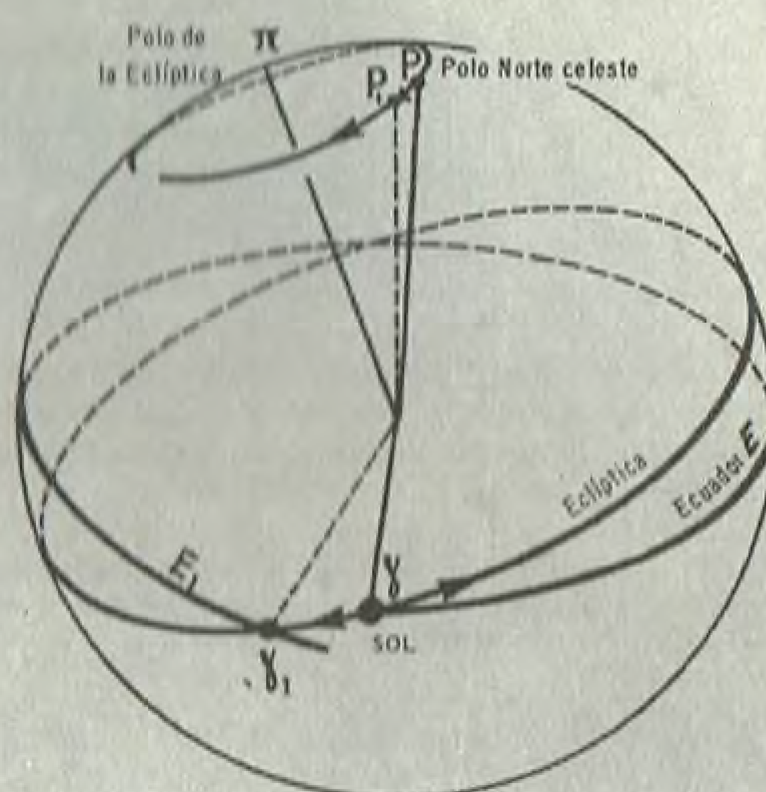


Fig. 25

Movimientos del eje de rotación de la Tierra

Precesión de los equinoccios. Año trópico. — El plano de la eclíptica o plano de la órbita terrestre no está totalmente fijo en el espacio. Aunque su movimiento es muy lento, varía 48″ por siglo y oscila alrededor de una posición media con un período de 200 siglos. El plano del ecuador terrestre y su eje (eje de rotación de la Tierra) son relativamente menos fijos. Giran lentamente en el sentido retrógrado alrededor del polo de la eclíptica. La rotación es de 50″ 2 por año. Su período es de 26 000 años aproximadamente (*fig.* 25).

El punto γ se desliza sobre la eclíptica y precede al Sol, que da la vuelta completa. Es el fenómeno de la *precesión de los equinoccios*, descubierto por Hiparco. Se denomina *año sideral* el tiempo que necesita el Sol para recorrer la eclíptica, y *año trópico* el intervalo de tiempo que separa dos pasos consecutivos del Sol por el punto γ (éste es unos 20 minutos más corto).

El polo celeste no se encuentra absolutamente fijo entre las estrellas. La Estrella Polar actual no será siempre la estrella más próxima al polo. Dentro de 12 000 años, el polo estará cerca de Vega (*fig.* 26).

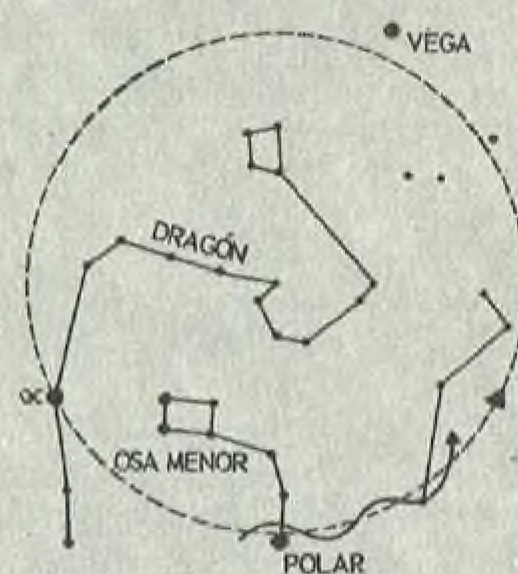


Fig. 26

El año trópico es el período de las estaciones. Empieza cuando la longitud del Sol alcanza 280°.

El desplazamiento del ecuador y del punto γ hace variables las coordenadas ecuatoriales de las estrellas que hemos definido con anterioridad. Un catálogo de estrellas solamente se refiere a una época dada. Las coordenadas al principio de cada año y sus variaciones posteriores son publicadas en efemérides, como la ya citada *Connaissance des temps*.

Nutación del eje de la tierra. Tiempo sideral medio. Desplazamiento del polo. — La precesión se debe a la acción de la Luna y el Sol sobre el ensanchamiento ecuatorial de la Tierra. Al no ser la Tierra esférica, la atracción ejercida por un astro como el Sol o la Luna no pasa por el centro de gravedad y tiende a hacer oscilar el eje. La Tierra en rotación reacciona como un giróscopo y adquiere un movimiento de precesión.

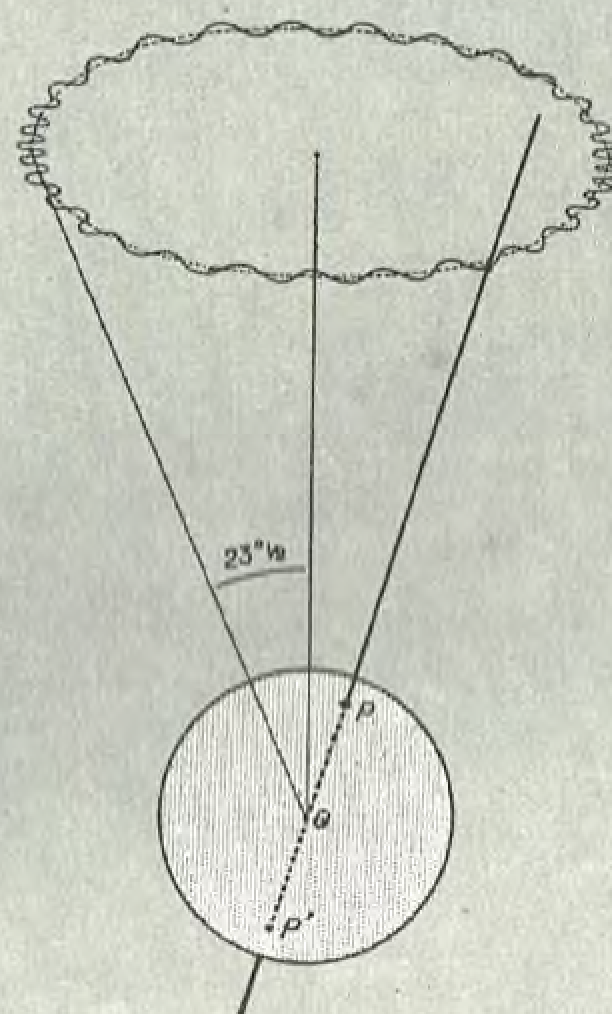


Fig. 27

La presencia de dos astros perturbadores, que son a su vez móviles, complica la precesión sencilla, antes descrita, con variaciones periódicas que se reúnen bajo el nombre de ***nutación*** (la nutación del eje en el sentido giroscópico es insensible). La posición media del eje describe el cono de precesión; el eje verdadero traza alrededor del eje medio una pequeña elipse cuyo eje mayor, dirigido hacia el polo de la eclíptica, tiene una amplitud de 18″ y el eje menor una amplitud de 13″, con un período de 18 años $\frac{2}{3}$. (Este período es el de la rotación del plano de la órbita lunar.)

La nutación comprende además términos secundarios menores.

El movimiento resultante del eje de la Tierra forma un cono (*fig.* 27).

La oscilación de la eclíptica modifica ligeramente la posición de γ y añade su efecto a la precesión planetaria definida antes (50″ 3) para dar la precesión general, cuya amplitud es de 50″ 2. El ángulo horario del punto γ u hora sideral de un lugar no varía en realidad como el de una estrella cualquiera, pero su variación, teniendo presente la precesión, permanece uniforme.

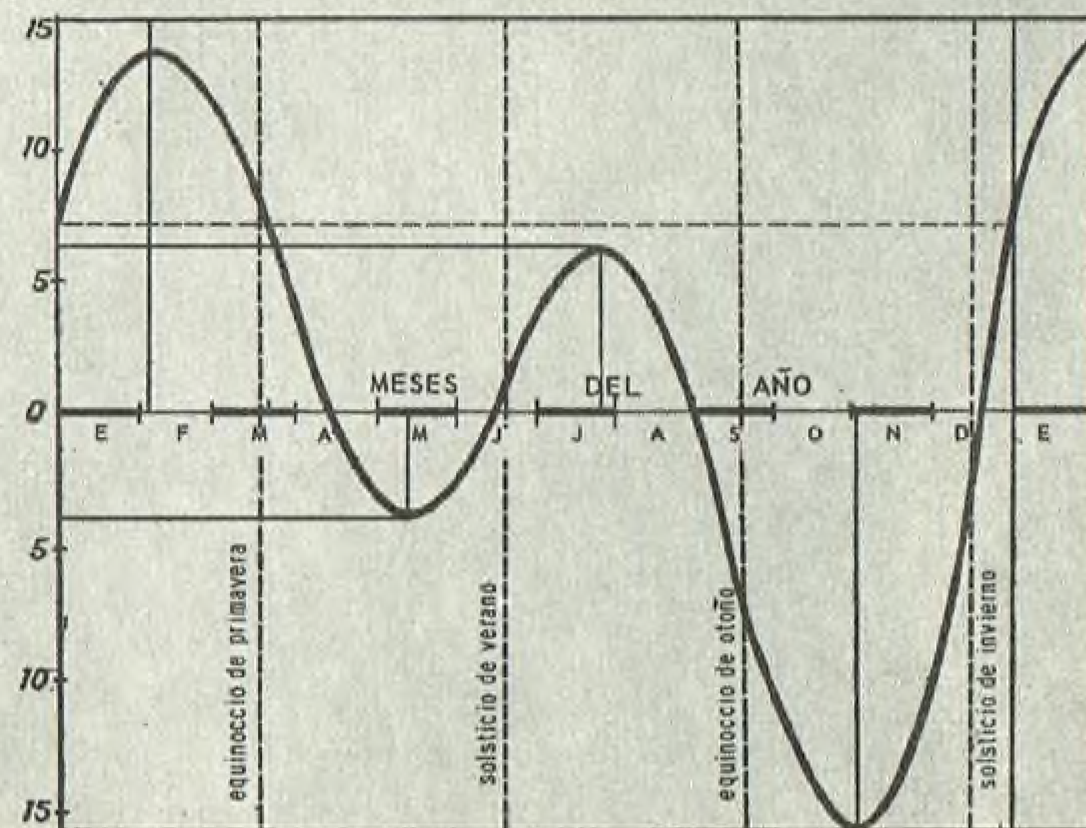


Fig. 28

La nutación, por el contrario, lo coloca unas veces adelantado y otras atrasado con respecto a su posición media. Esta irregularidad es insignificante; vale 1 segundo en un período de 18 $\frac{2}{3}$ años, pero la precisión de los relojes astronómicos modernos es tal que deben ser regulados en la posición media de γ.

Precesión y nutación son los movimientos del eje de rotación de la Tierra con respecto a las direcciones de las estrellas; este eje guía la Tierra como una bola atravesada por una aguja. De hecho, la masa de la Tierra oscila ligerísimamente alrededor de su eje, y a pesar de que el polo describe en la superficie de la Tierra una curva bastante compleja, nunca la separa más de 6 metros de su posición media.

Tiempo solar medio

Medida del tiempo. — Hemos definido antes el tiempo sideral. La rotación uniforme de la Tierra sobre sí misma constituye así el reloj fundamental sobre el cual están regulados los relojes de los grandes observatorios. Pero es indispensable que las circunstancias de la vida diaria puedan ser reguladas con respecto al Sol. Ya hemos definido una unidad de tiempo ligada al Sol: el *año trópico*, período de las estaciones. Es fácil determinar con precisión el número de días siderales contenidos en el año trópico: basta marcar en un reloj sideral los instantes de dos equinoccios de primavera sucesivos. En la proximidad de estos equinoccios, se mide con regularidad la declinación del Sol y se deduce por interpolación el instante en que se anula. Se admite actualmente como valor del año trópico en días siderales (en la época del principio del año 1900): 366, 2419647, o sea alrededor de 366,242 2. Queda por definir un día y una hora de acuerdo con el Sol ya que los verdaderos días solares, intervalos de tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el meridiano de un lugar, no son constantes en el transcurso del año. La verdadera variación del ángulo horario del Sol no es uniforme; depende, sobre todo, evidentemente, del movimiento diurno; además se añade el movimiento del Sol sobre la eclíptica, que hace el verdadero día solar más largo, aunque en una cantidad que no es constante, por dos razones: el Sol gira alrededor del eje de la eclíptica y no alrededor de la línea de los polos; por otra parte, el movimiento en la eclíptica se hace siguiendo la ley de las áreas.

Para hallar un astro cuyo ángulo horario pueda definir la hora solar media, es necesario substituir el verdadero Sol por un Sol ficticio: el *Sol medio*, que coincide cada año con el Sol verdadero (al menos en ascensión recta), pero que gira alrededor del eje del mundo con un movimiento uniforme, mientras que el verdadero Sol recorre la eclíptica. En un año trópico de 366, 242 2 días siderales, el Sol da una vuelta en la esfera celeste en sentido contrario al movimiento diurno, y su ángulo horario aumenta rigurosamente una vuelta menos que el del punto γ. El día solar medio queda definido por la fracción del año trópico: $\frac{1 \text{ año trópico}}{365{,}242\,2}$. Esta relación permite transformar en tiempo solar medio un intervalo de tiempo expresado en tiempo sideral. Basta, pues, haber determinado la posición del Sol medio en un instante que se toma como origen para poder calcular la hora solar media correspondiente a una hora sideral dada.

Así, por el movimiento de la esfera celeste, se regula un reloj que marca la hora sideral del lugar y se deduce por el cálculo la hora media correspondiente.

La *hora civil* es la hora solar media aumentada en 12 horas. Y es mediodía en la hora civil cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar.

La hora civil, como la hora sideral, cambia con cada lugar; la diferencia existente entre las horas civiles de dos lugares es su diferencia de longitud. La gran precisión de los relojes modernos ha puesto en evidencia, en el movimiento de rotación de la Tierra, *irregularidades en las estaciones*, que llegan hasta ± 0,06 segundos. Por otra parte, la comparación de las observaciones de los planetas, y sobre todo de la Luna y de las posiciones calculadas de este astro, permiten descubrir un *retraso secular* del movimiento de rotación de la Tierra. Este retraso, atribuido a las mareas, hará que la Tierra gire un día presentando siempre el mismo hemisferio hacia el Sol, como Mercurio y Venus, pero ¡sólo dentro de 15 mil millones de años!

Además de este retraso, aparecen también ligeras variaciones en la velocidad de rotación que son actualmente inexplicables.

Ecuación del tiempo. — El ángulo horario del Sol verdadero difiere del del Sol medio, u hora solar media, en una cantidad que se denomina *ecuación del tiempo*.

Ésta no comprende más que términos periódicos; su signo se define por la relación:

Ángulo horario del Sol medio = ángulo horario del Sol verdadero + ecuación del tiempo.

Los valores extremos son aproximadamente + 15 y — 15 minutos de tiempo.

Así, al mediodía, hora civil de un lugar, el Sol verdadero puede haber pasado hace 16 minutos o estar todavía a 14 minutos de su paso por el meridiano.

La ecuación del tiempo se anula cuatro veces por año, como se ve en la figura 28, en épocas que no coinciden con los solsticios, ni con los equinoccios, ni con el instante del perigeo (hacia el 16 de abril, el 14 de junio, el 1º de septiembre y el 24 de diciembre).

Tiempo universal. Husos horarios. Tiempo legal. — La hora civil, al ser local y tener igual valor sólo en un instante dado para los puntos del globo situados sobre el mismo meridiano, no se utiliza en la vida normal. En virtud de un convenio internacional, las horas empleadas en los distintos países dependen de la hora civil del *meridiano internacional* (muy próximo al meridiano del observatorio de Greenwich) o *tiempo universal*. Por esto, el globo está dividido en 24 husos de 15° de longitud (o de 1 hora) enumerados de 0 a 23 hacia el Este. El huso nº 0 es el que tiene por eje el meridiano de Greenwich. La hora de un huso se obtiene añadiendo su número al tiempo universal. Cada país depende, según su extensión, ya del huso único que más le conviene, ya de varios husos consecutivos.

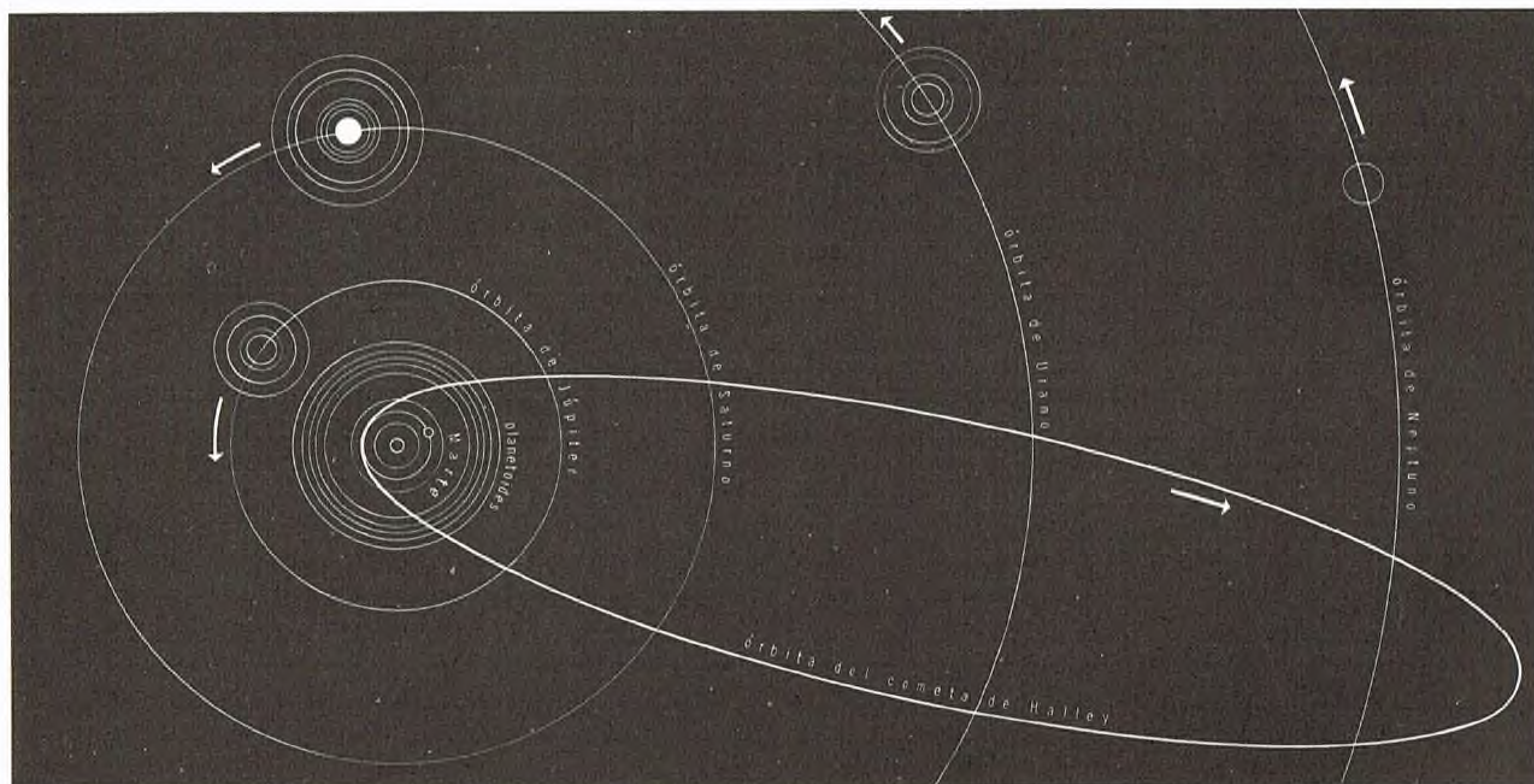


Fig. 29

Ciertos países adoptan en verano un huso más al Este (hora de verano); desde 1947, Francia depende del huso de Europa Central, pese a que su territorio está casi íntegramente situado en el huso nº 1.

La noción de fecha es una noción local, como la de hora: mientras son las 4 del 23 de mayo, por ejemplo, en el meridiano de Greenwich, es todavía el 22 de mayo al oeste del huso nº 20 (*fig.* 30).

Dada la necesidad de que exista en alguna parte del globo otro límite entre el 22 y 23 de mayo, se acordó hacer este cambio en el meridiano opuesto al de Greenwich: el viajero que lo atraviesa desde el Oeste retrocede un día en el calendario; el que lo atraviesa de Este a Oeste avanza un día.

Calendario. — El año civil debe estar regulado sobre el año trópico, pero debe comprender un número entero de días. Al tener el año trópico 365,242 2 días, comprenderá el civil años de 365 días y años, llamados ***bisiestos***, de 366 días. El *calendario juliano* (Julio César) tenía un año bisiesto cada 4 años; así el año civil contaba por término medio 365,25 días; era más largo en 0,007 8 días, o sea unos 3 días cada 400 años. En 1582, el 21 de marzo fue 10 días después que el equinoccio de primavera. El retraso fue anulado dando un salto en el calendario; se pasó del 4 al 15 de octubre de 1582, y la *reforma gregoriana* suprimió tres años bisiestos cada 400 años: solamente son bisiestos entre los años seculares aquellos cuyo número de siglo es divisible por 4 (1600-2000-2400). Así la duración media del año civil es de 365,242 5 días. Se ha previsto una reforma periódica del calendario, pero aún no se ha podido llegar a ningún acuerdo a este respecto.

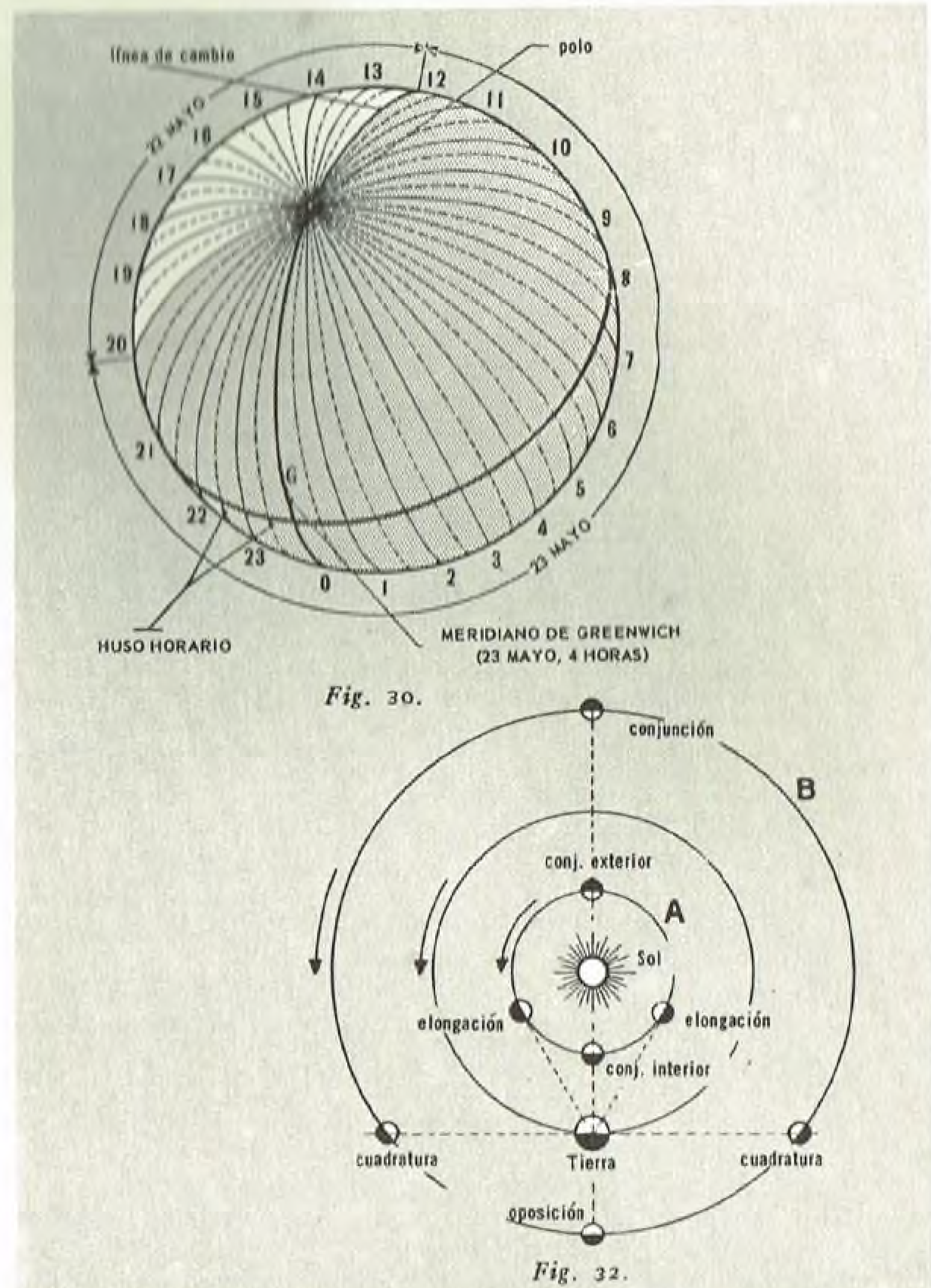


Fig. 30.

Fig. 32.

Los planetas

Los *planetas* son astros que, como la Tierra y la Luna, no son luminosos por sí mismos. Deben su brillo a la luz del Sol. Se distinguen en el cielo por su posición aparente, que no es fija con respecto a las estrellas. Están siempre en una banda bastante estrecha, a uno y otro lado de la eclíptica. Recorren, más o menos, los signos del Zodiaco en el sentido directo, pero con un movimiento complicado que presenta estacionamientos y retrocesos. Estas particularidades se explican fácilmente, ya que se admite que son cuerpos que, como la Tierra, giran alrededor del Sol. Los nueve principales planetas son, ordenados según su proximidad al Sol: Mercurio (el más cercano), Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón. Además, el sistema comprende una multitud de minúsculos planetas, o planetas telescópicos (asteroides), que se mueven principalmente entre Marte y Júpiter. Alrededor de los planetas (exceptuando Mercurio y Venus) giran los satélites. La Tierra no tiene más que un satélite: la Luna; Marte tiene dos, Júpiter once, Saturno diez, Urano cuatro y Neptuno dos. Desde la más remota antigüedad se conocían, además de la Tierra, los cinco planetas mayores, o sea dos planetas inferiores (situados entre la Tierra y el Sol): Mercurio y Venus, y tres planetas superiores: Marte, Júpiter y Saturno. Es relativamente fácil ver el diámetro aparente de los planetas mayores, pero las estrellas se presentan siempre, incluso con los más potentes instrumentos, como puntos luminosos. Se ven con la misma facilidad los cuatro satélites mayores de Júpiter, las fases de Venus y el anillo de Saturno.

Los planetas son de tamaño muy desigual (*fig.* 31). Júpiter, que es el mayor, tiene un diámetro de $\frac{1}{10}$ del solar, mientras que el de la Tierra no es más que $\frac{1}{109}$. Mercurio es más pequeño que la Luna y ciertos planetoides no tienen más que algunos kilómetros de diámetro.

En su movimiento aparente, los planetas inferiores nunca se separan mucho del Sol, mientras que los otros pueden tomar con respecto a él todas las direcciones. Dos astros están *en conjunción* cuando se les ve en la misma dirección, que es contada sobre la eclíptica o longitud eclíptica. Se hallan *en oposición* cuando se les ve en direcciones opuestas. y se dice que están *en cuadratura* cuando forman un ángulo recto con la dirección del Sol.

Los planetas inferiores tienen dos conjunciones, una interior y otra exterior (más allá del Sol) [*fig.* 32]. No están nunca en oposición con el Sol. Siguiendo su posición sobre su órbita, Venus precede al Sol al salir o le sigue al ponerse. Puede separarse 47 grados y seguirle o precederle más de 4 horas. La elongación de Mercurio, es decir, su máxima separación respecto al Sol, varía de 18 a 25 grados en razón de la excentricidad de su órbita.

órbita de los planetas principales (En el interior de la órbita de Marte se ve la de la Tierra con su satélite la Luna y después las de Venus y Mercurio)

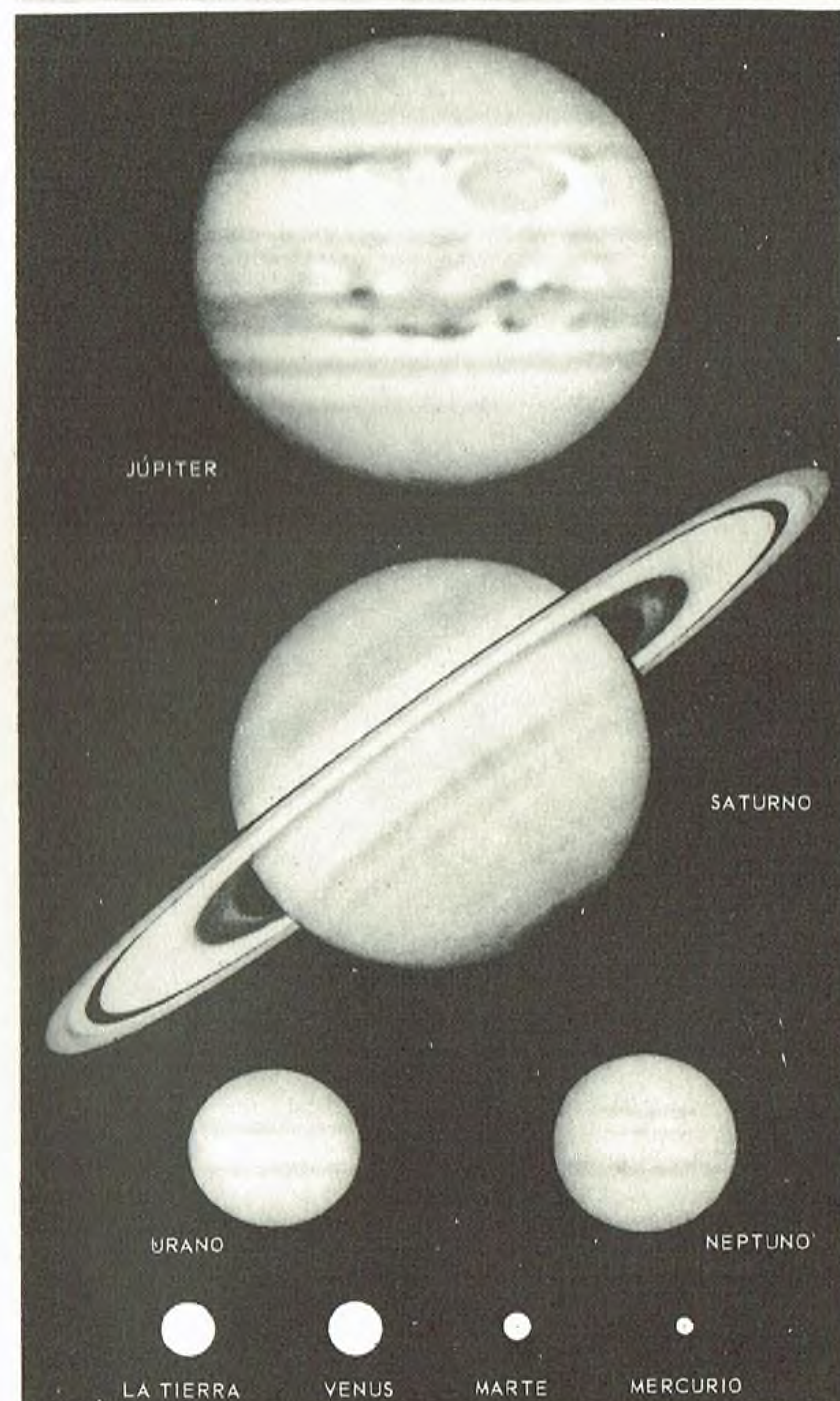


Fig. 31

Se llama *duración de revolución sinódica* de un astro el período que separa dos conjunciones o dos oposiciones sucesivas. Difiere de la duración de la revolución sideral o duración del recorrido de la órbita. Los planetas inferiores giran más rápidamente que la Tierra y los planetas superiores más despacio. Entre los períodos de revolución sinódica Σ y sideral T de un planeta y la duración de la revolución A de la Tierra, se verifica la relación

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{A} + \frac{1}{\Sigma}$$

para un planeta inferior y

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{A} - \frac{1}{\Sigma}$$

para un planeta superior.

Fases de los planetas. — Como la Luna, los planetas presentan fases: del hemisferio vuelto hacia nosotros no vemos más que la parte alumbrada por el Sol. Solamente los planetas inferiores tienen fases completas, pero van acompañadas de variaciones del diámetro aparente: en conjunción interior, el planeta es obscuro; pero brilla en conjunción exterior (*fig.* 32). Los planetas superiores tienen fases poco marcadas, ya que nuestro punto de vista está siempre situado del lado del Sol. Las fases no son prácticamente sensibles más que para Marte (Tierra en T_2 en la figura 33). La oposición es el momento más favorable para la observación de Marte.

Órbitas de los planetas. Leyes de Kepler. — Mientras que sus antecesores, que se atenían a los movimientos circulares uniformes, no llegaban a interpretar de forma satisfactoria las observaciones, Kepler, sometiendo al cálculo las exactas y numerosas medidas de su preceptor Tycho Brahé, descubrió las tres célebres leyes que llevan su nombre.

PRIMERA LEY. *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.*

SEGUNDA LEY. *Los planetas se mueven de tal forma que el radio que los une al Sol (radio vector) cubre superficies iguales en tiempos iguales.*

TERCERA LEY. *Los cuadrados de los tiempos de revolución de los planetas son proporcionales como los cubos de sus distancias medias al Sol.*

Se definen las órbitas elípticas por su excentricidad $e = \frac{c}{a}$ o por su aplastamiento $\frac{a-b}{a}$, diferencia entre los dos ejes con respecto a la longitud del eje mayor. La excentricidad de la órbita terrestre es de $\frac{1}{60}$, realmente muy pequeña. Venus y Neptuno tienen órbitas casi circulares. En los vértices de sus órbitas los planetas alcanzan su mayor y menor distancia al Sol (afelio y perihelio) [*fig.* 34]. Según la tercera ley de Kepler, los períodos aumentan enormemente cuando se alejan del Sol: de 88 días para Mercurio a 250 años para Plutón. A causa de las diferencias de excentricidad de las órbitas, el planeta Eros, que es uno de los pequeños planetas comprendidos entre Marte y Júpiter, tiene su perihelio en el interior de la órbita de Marte. Los planos de las órbitas no se confunden con la eclíptica, pero su inclinación es pequeña, inferior a 4 grados, excepto para Mercurio (7°) y Plutón (17°). Su intersección con la eclíptica se llama *línea de nodos de la órbita*; su dirección está marcada por su longitud eclíptica (*fig.* 35).

Para que un planeta como Venus se proyecte sobre el disco del Sol en el momento de una conjunción interior, basta que esté en la proximidad del plano de la eclíptica, es decir, cerca de uno de sus nodos.

La atracción universal. Ley de Newton. Perturbaciones. — Las leyes experimentales de Kepler se vuelven a encontrar matemáticamente como consecuencia de la ley de la atracción universal, que ha inmortalizado el nombre de Newton: *Todos los cuerpos se atraen en razón directa de sus masas y en razón inversa del cuadrado de su distancia.* Cuando se estudia el movimiento de los cuerpos, se ve con más exactitud que cada uno de ellos describe una órbita kepleriana alrededor del centro de gravedad común. En el movimiento de los planetas, este centro de gravedad está muy cerca del Sol. Si existe un *tercer cuerpo*, el problema se complica enormemente. Para calcular el movimiento de uno de los cuerpos, se le supone en primer lugar solo en presencia del cuerpo que atrae y se considera el tercer astro como un astro perturbador. La presencia del Sol es, por ejemplo, causa de fuertes *perturbaciones* en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.

La atracción newtoniana se ejerce entre todos los cuerpos, incluso entre los situados en la superficie de la Tierra, y la constante de la ley de atracción o *coeficiente de la atracción universal* ha podido ser determinada gracias a difíciles experimentos (Hely en Washington en 1931). El conocimiento de este coeficiente permite determinar la masa de la Tierra, la de los astros del sistema solar y la de las estrellas (v. p. 267).

Rotación de los planetas sobre sí mismos. Movimiento de los satélites. — Para definir completamente el movimiento de los planetas, debemos decir que, como la Tierra, giran sobre sí mismos. Esta rotación crea en cada uno de ellos un movimiento análogo al movimiento diurno de la Tierra. El período de este movimiento varía con el planeta; así, el de Marte es muy parecido al de la Tierra (24 h 37 en lugar de 23 h 56), y el de Júpiter es mucho más corto (aproximadamente 10 h).

La inclinación del eje de rotación sobre el plano de la órbita crea un fenómeno análogo al de las estaciones terrestres. Para Marte, la inclinación es de 24° 50′, mientras que para la Tierra es de 23° 27′. Tiene, pues, las estaciones marcadas (v. p. 271). La inclinación del eje de Júpiter no es más que de 3° 5′.

Los satélites describen alrededor del planeta órbitas keplerianas. Veremos que la constante de la tercera ley, que depende del cuerpo atraído, es proporcional a la masa de este cuerpo.

Visión de conjunto del sistema solar. Sentido de rotación. Cometas. — Para completar esta apreciación de conjunto del sistema solar, falta añadir que el Sol gira sobre sí mismo y que salvo raras excepciones casi todos estos movimientos de rotación de los planetas alrededor del Sol, de los satélites alrededor de los planetas y de los planetas sobre sí mismos tienen el mismo sentido o sentido directo. Entre las excepciones: los satélites octavo, noveno y undécimo de Júpiter se mueven en sentido inverso, y cabe pensar que se trata de pequeños planetas que han sido capturados por este astro. De la misma forma, el noveno satélite de Saturno gira en sentido retrógrado. Como astros del sistema solar, aparte de los planetas y de sus satélites, hay también que citar los cometas, que obedecen de la misma forma a las leyes de Kepler, pero que circulan en órbitas mucho más excéntricas, a veces muy próximas a la parábola, y más inclinadas. Se ha podido apreciar la periodicidad de algunos de ellos. Estos astros, a veces voluminosos, pero siempre de masa pequeña, pueden ser fuertemente perturbados en su movimiento por el paso de un planeta cerca de ellos (v. p. 255).

Descripción de conjunto del universo

Nuestra galaxia. — El esquema de la figura 33, que muestra la Tierra en su órbita alrededor del Sol, está lejos de representar las proporciones de sus diversos elementos: si la Tierra es representada por una bola de 1 cm de diámetro, la distancia Tierra-Sol debería ser representada por 120 m, y el Sol debería tener 1,10 m de diámetro. En esta escala, la estrella más próxima estaría a 27 000 km. Las estrellas que vemos en el cielo, comprendidas las de la Vía Láctea, están escalonadas en distancias hasta de 60 000 años-luz. Esta unidad es la distancia recorrida por la luz en un año a razón de 300 000 kilómetros por segundo. Todas las estrellas están agrupadas en un volumen que tiene forma de disco abultado por su centro. Este cúmulo de estrellas ha recibido el nombre de *galaxia* y agrupa como mínimo 100 mil millones de estrellas, con una gran concentración en el centro. Su diámetro es de 80 000 años-luz, y el espesor del abultamiento central, de unos 15 000. La figura 36 ofrece un corte esquemático de la galaxia, que pasa por el centro y por el Sol. El Sol se encuentra aproximadamente a los $\frac{2}{3}$ del radio a partir del centro. Esta concentración de estrellas próximas a un plano crea la apariencia de la Vía Láctea, donde su abundancia toma el aspecto de nubes brillantes; la observación con el telescopio demuestra que estas nubes son estrellas. El centro de la galaxia se encuentra en la dirección de Sagitario. Vemos en la Vía Láctea, y particularmente hacia el centro de la galaxia, nebulosas brillantes u obscuras que están en realidad constituidas por materia difusa, gas o polvo (v. p. 278). No todas las estrellas están aisladas; los sistemas dobles o triples son muy numerosos. Tampoco tienen el mismo brillo todas las estrellas. Las causas de las discrepancias no se deben sólo a las diferentes distancias: el brillo intrínseco varía mucho de una a otra; hay estrellas que tienen 50 000 veces más brillo que el Sol, y otras que tienen 100 000 veces menos. Existen en la galaxia y alrededor de ella aglomeraciones de estrellas, *cúmulos globulares*, en los cuales se han podido enumerar hasta 40 000 cuerpos brillantes.

Otras galaxias. — Hacia 1850 se apreció en algunas nebulosas de pequeñas dimensiones una forma espiral. Desde entonces, y principalmente gracias a la fotografía, se han descubierto gran número de estos objetos difusos, que se han llamado *nebulosas espirales.* Se nos presentan en diversos planos: unas se ven de

frente, enseñando a menudo dos brazos que rodean un núcleo central; otras se ven completamente de perfil, en forma de huso alargado. El telescopio de 2,50 metros de Monte Wilson permite descubrir 100 millones de estas nebulosas. En algunas fotografías de regiones más lejanas que la Vía Láctea, las nebulosas espirales son más numerosas que las estrellas. Se ha podido demostrar que algunas se reducen a estrellas, y de esta manera se ha establecido que se trata de otras galaxias, análogas a la nuestra, que pueblan el universo. Se han determinado las distancias a que se encuentran muchas de ellas; la distancia máxima encontrada es de 250 millones de años-luz.

Las mareas

Las mareas se deben a las deformaciones que las atracciones ejercidas por la Luna y el Sol hacen sufrir a la masa de los océanos.

Consideremos, por ejemplo, la Luna y una Tierra esférica rodeada de una capa uniforme de agua (*fig.* 37): la Tierra y la Luna a la distancia D giran alrededor del centro de gravedad común G. El centro de la Tierra está en equilibrio entre la fuerza centrífuga del movimiento $M\omega^2 r$ (M = masa de la Tierra; r = distancia del centro a G; y ω = velocidad angular) y la atracción de la Luna (v. p. 255):

$$M\omega^2 r = f\,\frac{mM}{D^2}.$$

Para una partícula de masa μ en el centro de la Tierra, se tiene igualmente

$$\mu\omega^2 r = f\,\frac{m\mu}{D^2}.$$

En los puntos de la superficie, se concibe fácilmente que en A las partículas de agua sean atraídas hacia la Luna, pero igualmente se produce un abultamiento en B, ya que, para una partícula situada en este punto, habiendo aumentado las dos distancias r y D, la fuerza centrífuga vence la atracción lunar, que ha disminuido.

La masa de los océanos toma así la forma de un huevo cuyo eje queda dirigido hacia la Luna, y la rotación de la Tierra, que hace desfilar bajo los abultamientos las diferentes partes del globo, produce las mareas. Al girar la Luna en el mismo sentido que la Tierra unos 13 grados por día, tendremos dos mareas lunares en cada período de unas 24 h 50'. El Sol impone una acción análoga a los océanos, pero de una manera menos marcada, ya que su acción es alrededor de dos veces más débil (1 en vez de 2,2). Cuando ambos astros están en conjunción o en oposición, las dos mareas se ju..tan, lo que explica la importancia que toman en estas épocas llamadas de *sicigias*.

Las desnivelaciones de los océanos serán más fuertes para un punto M de la Tierra arrastrado en la rotación del globo, ya que su trayectoria le hará pasar exactamente por debajo de las dos prominencias. Esto es lo que ocurre en las mareas de *sicigia del equinoccio*, pues el Sol y la Luna se encuentran entonces en el plano ecuatorial de la Tierra. El efecto de arrastre de la rotación de la Tierra produce un retraso de la marea con respecto al paso de los astros. La altura de la marea estática teórica es de 0,60 m, pero el fenómeno es profundamente modificado por la forma de las costas y los períodos de resonancia de las cuencas oceánicas.

Los eclipses

Los *eclipses* se producen en el momento de la luna llena o de la luna nueva. Hay eclipse de Sol cuando la Luna se interpone entre la Tierra y el Sol; hay eclipse de Luna cuando este astro penetra en el cono de sombra de la Tierra. De no estar la órbita de la Luna en el plano de la eclíptica (inclinación de 5º), no habrá eclipse en cada oposición y en cada conjunción; hará falta que en esos momentos la Luna se encuentre cerca de la línea Tierra-Sol, cerca de la eclíptica, es decir, en la proximidad de uno de los nodos de su órbita. El período de los eclipses será entonces un múltiplo común de la lunación y de la duración de la revolución draconítica de la Luna (v. página 257). Este período, llamado *Saros*, ya conocido por los caldeos, es de 18 años y 11 días y contiene 213 lunaciones y 242 revoluciones draconíticas.

Los caldeos habían previsto la repetición de los eclipses de Luna. Los eclipses de Sol no son visibles más que desde una pequeña porción de la superficie terrestre, variable de un eclipse a otro; su periodicidad fue, pues, más difícil de comprobar.

Eclipses de Luna. — La sección del cono de sombra de la Tierra a la distancia de la Luna es suficiente para que la Luna pueda sumergirse enteramente en ella; la inclinación de su órbita le permite igualmente pasar por fuera cuando está lejos de sus nodos.

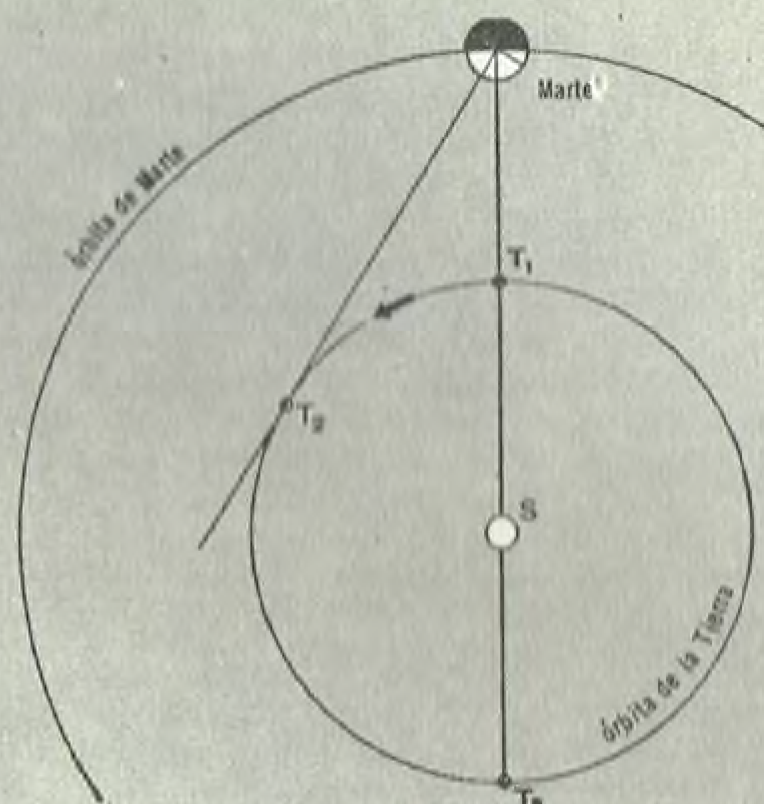


Fig. 33

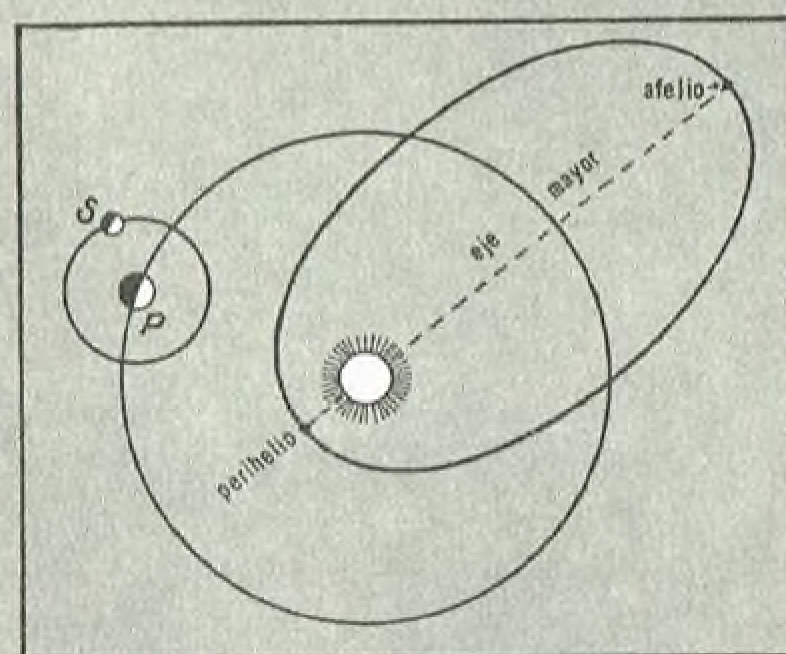


Fig. 34

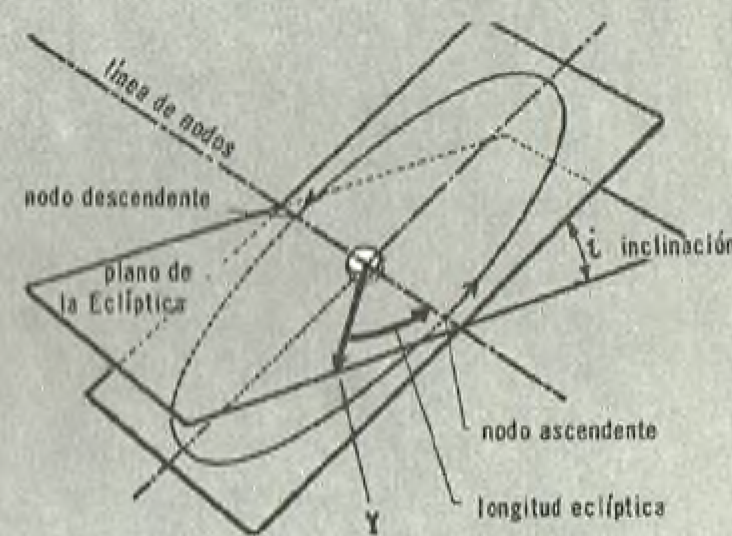


Fig. 35.

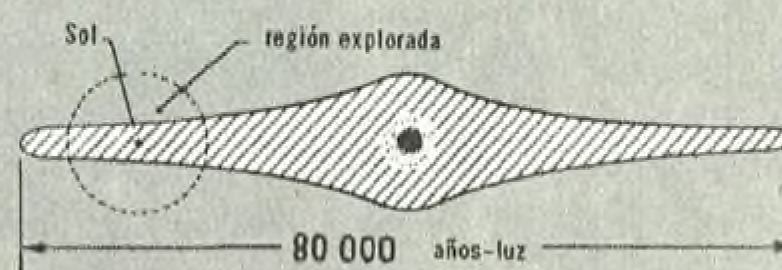


Fig. 36

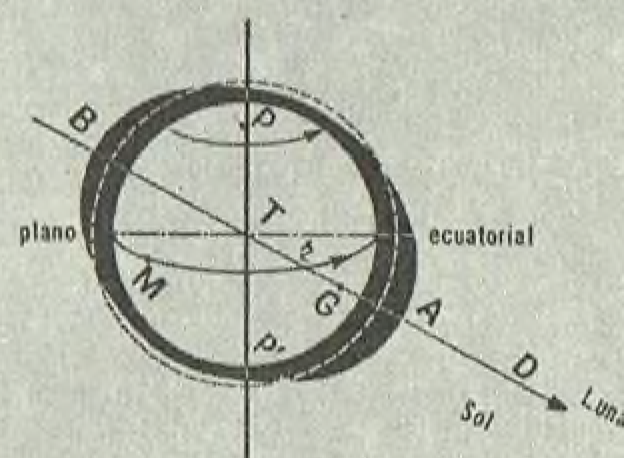


Fig. 37

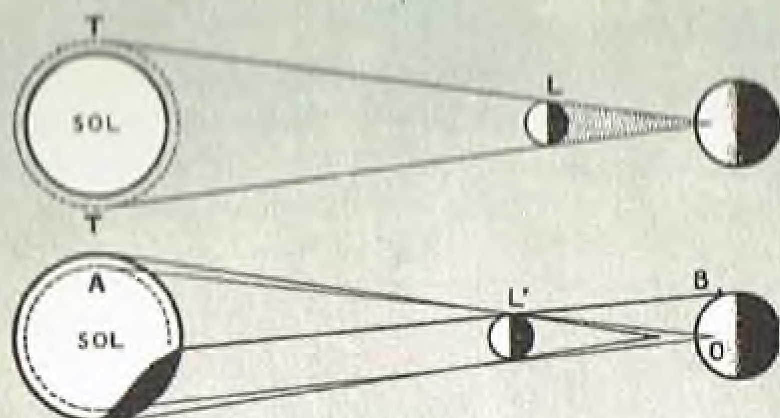


Fig. 38. — Eclipses de Sol. *Arriba*: eclipse total. *Abajo*: eclipse anular en O, parcial en B

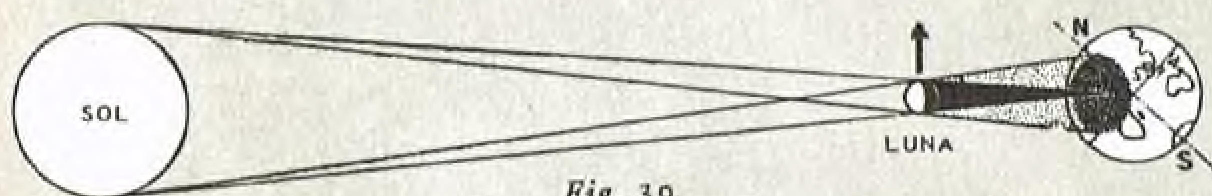


Fig. 39.

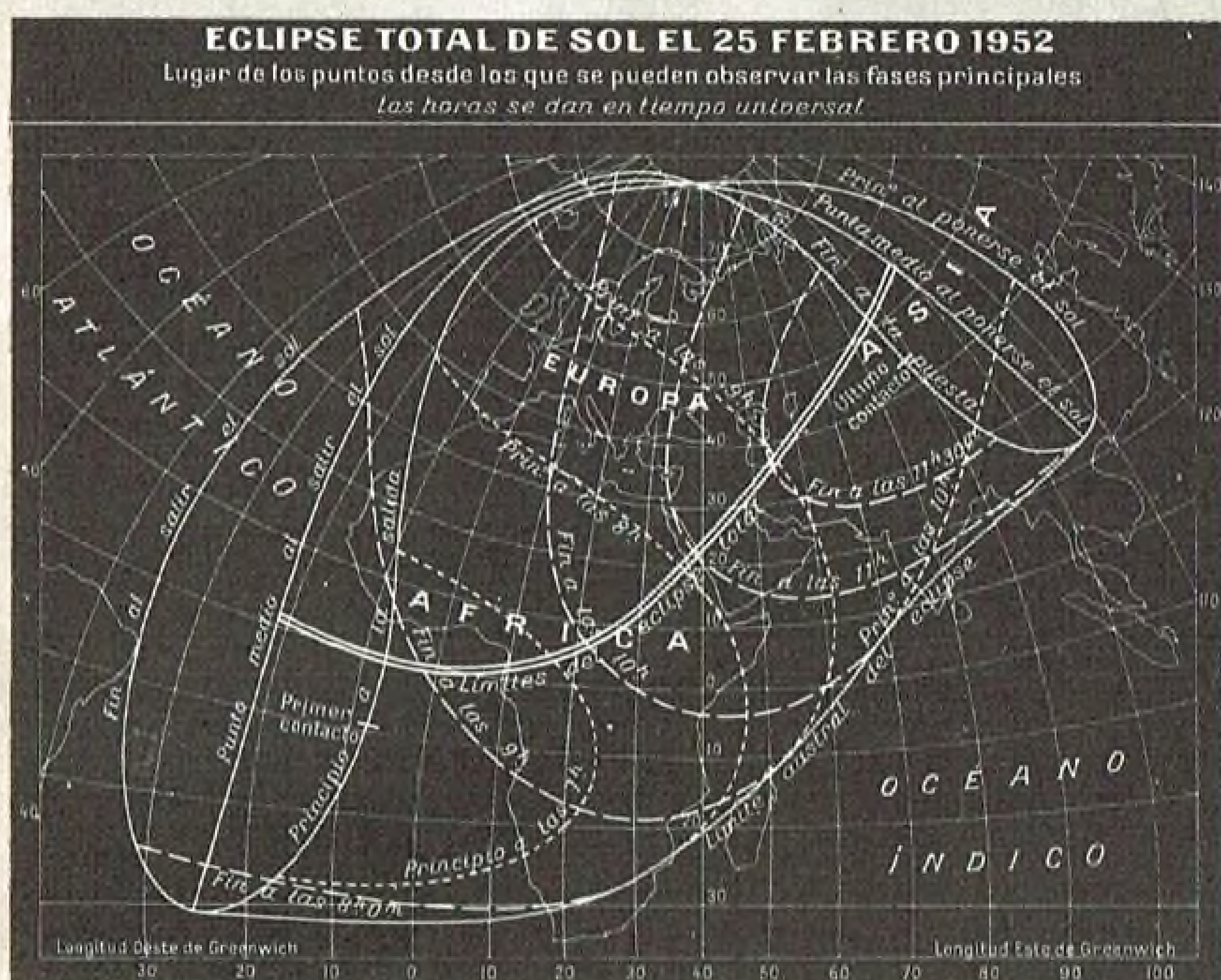


Fig. 40

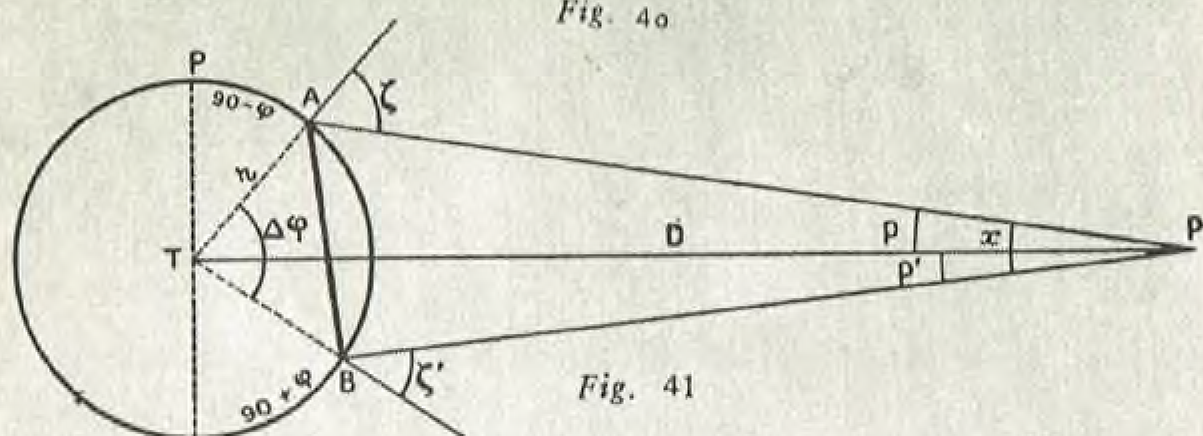


Fig. 41

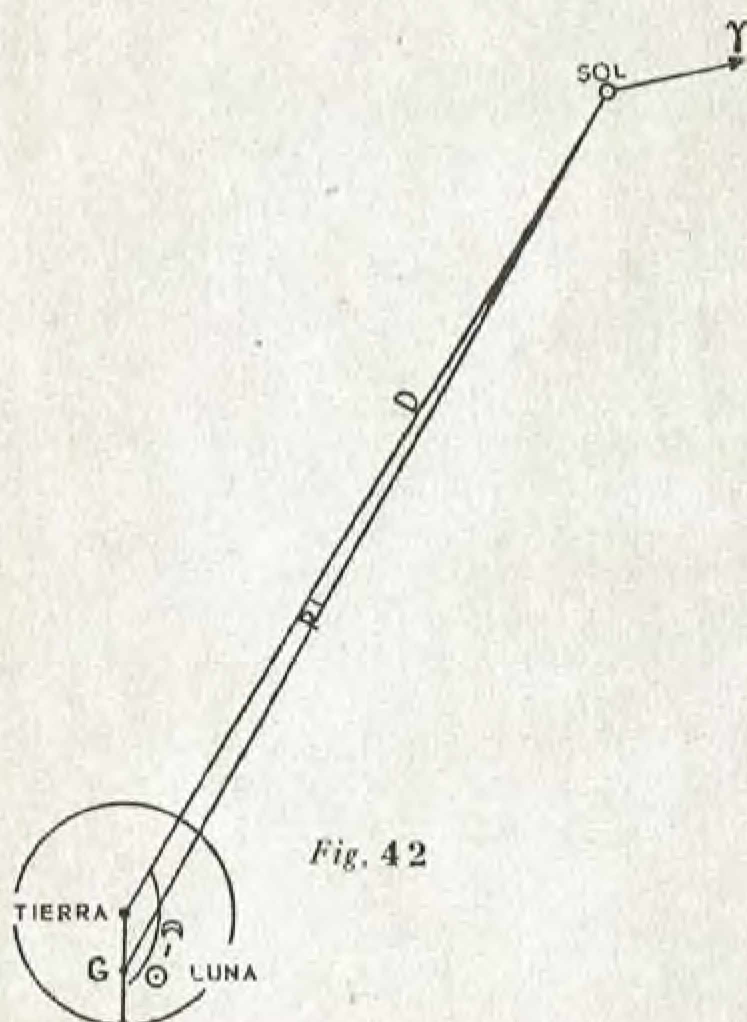


Fig. 42

Esta sección del cono de sombra varía con la distancia de la Tierra al Sol y con la distancia de la Luna a la Tierra; interviene, pues, la posición de los astros con respecto a su perigeo.

La duración total de un eclipse de Luna entre el momento en que la Luna alcanza el cono de sombra y el momento en que lo abandona puede durar 4 horas.

El eclipse de Luna es visible al mismo tiempo desde la mitad del globo en la que es de noche.

Los rayos luminosos que pasan tangencialmente por la superficie de la Tierra están curvados hacia el suelo en más de 36′ por la *refracción*, que tiende a recortar considerablemente el cono de sombra, pero, al mismo tiempo, estos rayos rasantes son en parte absorbidos. El fenómeno se puede prever, aproximadamente, por la simple teoría geométrica, si bien los límites de los conos de sombra y de penumbra no son nítidos y quitan al fenómeno todo rigor geométrico. En el cono de penumbra, la Luna, al absorber principalmente la atmósfera terrestre las radiaciones azules, toma un tinte rojo.

Eclipses de Sol. — Desprovista la Luna de atmósfera, nos encontramos ahora con un fenómeno geométrico que empezará y se terminará en instantes precisos.

Al variar el diámetro aparente del Sol de 31′ 30″ a 32′ 32″, y el de la Luna de 29′ 20″ a 33′ 26″, la Luna puede, cuando está en conjunción en el momento del paso por uno de sus nodos, cubrir completamente el Sol o dejar desbordar una corona del disco solar (*fig.* 38) [*eclipse anular*].

Cuando está lejos de sus nodos, puede igualmente pasar por debajo o por encima del disco del Sol sin que se produzca eclipse. Entre estos dos extremos, hay eclipses parciales.

En el momento de un eclipse total, el vértice del cono de sombra de la Luna penetra en la Tierra; su intersección con la superficie terrestre da la mancha de sombra en la que el eclipse es visible (*fig.* 38). La anchura de la mancha de sombra es como máximo de 216 km.

Para los puntos próximos a la mancha de penumbra, el eclipse es parcial (B).

En el momento de un eclipse anular, el vértice del cono de sombra no alcanza la Tierra. Estando el Sol muy lejos con respecto a la Luna, los rayos que salen de un punto de su disco y pasan por un lado y otro de la Luna son paralelos; el radio de la mancha de penumbra es equivalente al diámetro de la Luna, o sea del orden de 3 500 km (*fig.* 39).

Al ser la velocidad de rotación aparente de la Luna 12 veces mayor que la del Sol, la Luna pasará siempre delante del Sol de Oeste a Este. Este movimiento relativo desplaza las manchas de sombra y de penumbra en la superficie de la Tierra. Al mismo tiempo, la Tierra gira, desplazando al observador en el mismo sentido a una velocidad que aproximadamente es la mitad (450 m en el ecuador). Las manchas de sombra se desplazan, pues, de Oeste a Este.

La *Connaissance des temps* publica cada año las previsiones detalladas de los eclipses y, para cada eclipse de Sol, ofrece un mapa que muestra los lugares en que será visible (total o parcialmente) [*fig.* 40].

Características de los principales astros del sistema solar con respecto a la Tierra

	DIÁMETRO APARENTE	DIÁMETRO ECUATORIAL	VOLUMEN	MASA	DENSIDAD CON RESPECTO AL AGUA	SATÉLITES
Mercurio	5″ a 12″	0,37	0,05	0,056	6,2	0
Venus	17″ a 100″	0,966	0,90	0,817	5,0	0
Tierra		1	1	1	5,52	1
Marte	13″ a 26″	0,54	0,157	0,108	3,8	2
Júpiter	30″ a 50″	11,14	1295	318,36	1,36	11
Saturno	15″ a 21″	9,4	745	95,22	0,7	10 y anillos
Urano	4″	4,0	63	14,58	1,3	4
Neptuno	2″7	4,3	78	17,26	1,2	2
Sol	31′30″ a 32′32″	109,05	1.301.200	333.432	1,41	
Luna	29′20″ a 33′32″	0,272	0,020	1/81,45	3,33	

Dado el interés de las observaciones realizadas en el momento de los eclipses totales (estudio de la corona, por ejemplo), los observatorios envían a menudo misiones a los lugares en que es visible el fenómeno.

El eclipse total dura como máximo 6 minutos en París. El eclipse parcial puede durar algo más de 4 horas.

Hay en conjunto más eclipses de Sol que eclipses de Luna, pero como los primeros sólo son visibles desde una pequeña parte de la Tierra, en un lugar dado se ve mayor número de eclipses de Luna.

Determinación de los elementos del mundo solar

Distancias. — Conocidas las dimensiones de la Tierra mediante las medidas geodésicas, la figura 41 muestra cómo se puede determinar la distancia D a que se halla un astro observado desde dos puntos A, B (supuestos aquí en el mismo meridiano).

La medida de las dos distancias cenitales ζ y ζ' y el conocimiento de la diferencia de latitud $\Delta\varphi$ permiten calcular el ángulo x bajo el cual se ve, del planeta P, la distancia conocida AB. Suponiendo AB perpendicular a la dirección del planeta, se tiene $AB = D \times x$.

El método aplicable a la Luna no es válido para el Sol; el ángulo $\widehat{x}$ sería demasiado pequeño (9″ como máximo). Pero, en el sistema solar, basta conocer la distancia de un planeta al Sol para deducir todas las demás por la tercera ley de Kepler. De hecho, se determinará por el procedimiento indicado anteriormente la distancia que separa la Tierra de un planeta próximo en el momento de una oposición o de una conjunción; esta diferencia de sus distancias hasta el Sol permitirá deducir las distancias mismas. Una de las dificultades era, antes de la invención de la T. S. H., visar el planeta desde dos puntos en el mismo instante. Se observaba entonces *Venus* en el momento de sus *pasos sobre el disco solar*. Actualmente se utiliza el pequeño planeta *Eros*, que, en el momento de sus oposiciones más favorables, se acerca más a la Tierra que Marte ($\frac{1}{8}$ de la distancia Tierra-Sol). En lugar de medir las distancias cenitales, se transporta la dirección del planeta a la de una estrella que se puede suponer en el infinito. Para determinar las *distancias de las estrellas más próximas*, se tomará como base la propia órbita terrestre, separando las observaciones por un intervalo de 6 meses (la Tierra ocupa entonces dos puntos opuestos de la órbita).

Masas. — Hemos visto en la página 264 el principio de la determinación de las *masas del Sol y de los planetas* que tienen al menos un satélite. Esta determinación está fundada en el conocimiento del coeficiente f de la atracción universal. Antes de que éste fuera conocido, solamente se podía evaluar la masa relativa, con respecto a la Tierra, por ejemplo, de los cuerpos que sufren su atracción.

El conocimiento de la masa de la Tierra se obtiene directamente por la determinación del coeficiente $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ CGS y del valor de la gravedad g_0 (aceleración de la gravedad restada de la influencia de la fuerza centrífuga de la rotación terrestre). La gravedad es, en efecto, la atracción ejercida por la Tierra sobre la masa unidad situada en su superficie $g^8 = f \frac{M}{R^2}$; siendo R el radio de la Tierra, se deduce $M = 6 \times 10^{27}$ gramos.

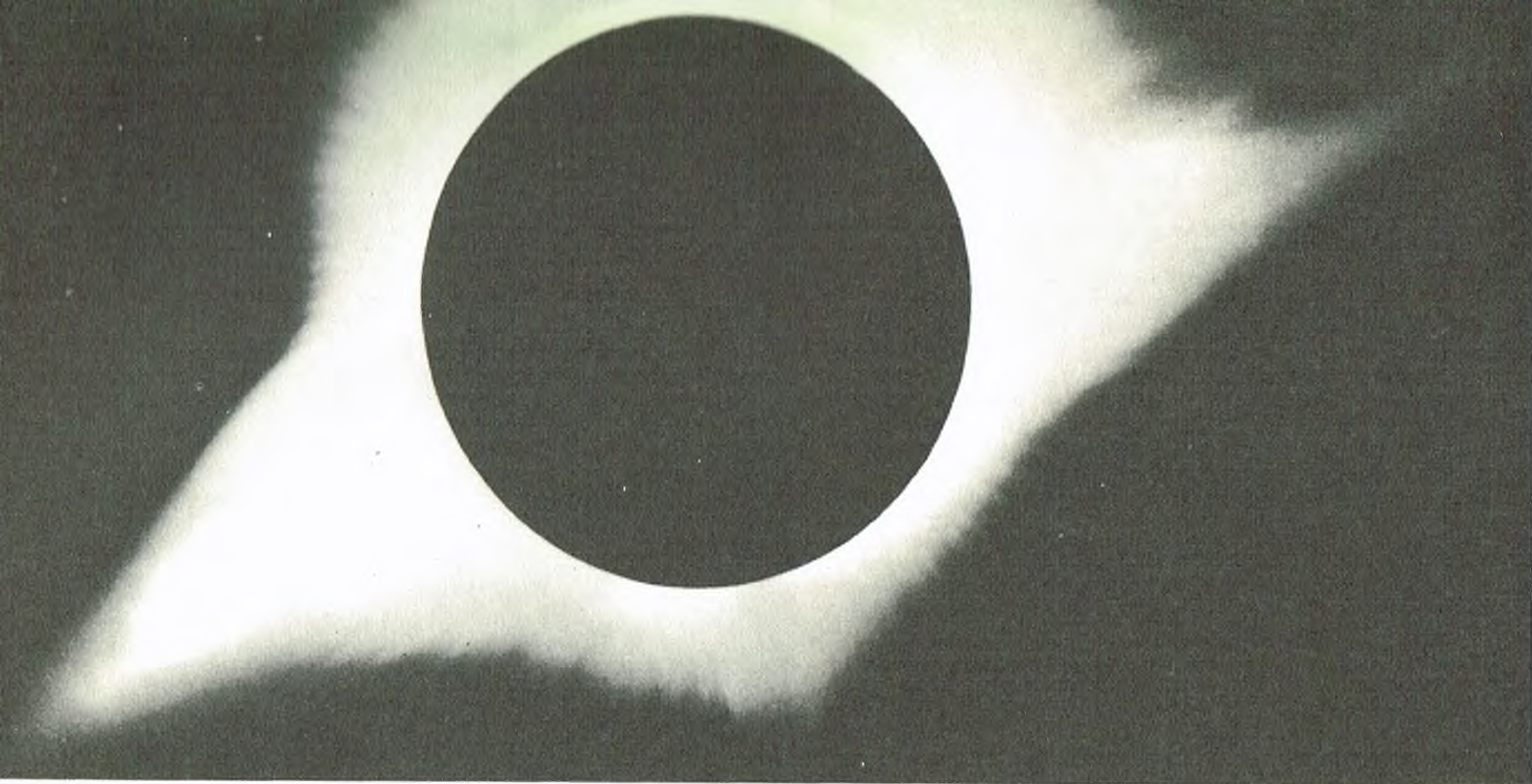
Para determinar el semieje mayor de las órbitas de los satélites, necesario para el cálculo de la masa del planeta, hace falta calcular la órbita real, de la que no vemos más que una proyección. Sabiendo que el planeta está en el foco de la órbita real, la geometría permite resolver el problema. Las masas de los planetas sin satélites se deducen de las perturbaciones que introducen en los movimientos de los otros planetas.

La masa de la Luna se obtiene considerando las perturbaciones que introduce en el movimiento de la Tierra; el centro de gravedad G del conjunto Tierra-Luna describe un movimiento kepleriano alrededor del Sol (*fig.* 42). Se sabe calcular el movimiento y obtener la dirección GS en función del tiempo. Mientras se observa desde la Tierra la dirección TS, la máxima separación p permite calcular la posición del centro de gravedad G, de donde la relación de las masas es igual a: $\frac{1}{81{,}45}$.





Arriba: Constelación de Orión. *Abajo*: Nebulosa de Orión *(Fot. Observatorio de Monte Wilson)*



Estudio físico del mundo solar

Corona solar durante un eclipse total
(Fot. X.)

El Sol: Datos numéricos. Rotación del Sol. Espectro solar. Irradiación solar. Temperatura. La cromosfera. Protuberancias. Las erupciones cromosféricas. Relación entre los accidentes de la cromosfera y ciertos fenómenos terrestres. La corona. — **Los planetas:** Mercurio. Venus. Marte. Júpiter. Saturno. Urano y Neptuno. Plutón. — **Variedad de las atmósferas planetarias:** La vida en los planetas. Sistemas planetarios extraños. — **La Luna.** — **El medio cósmico interplanetario.** Meteoritos. Cometas

El Sol

Datos numéricos. — Distancia a la Tierra: 23 439 radios terrestres, o sea 149 500 000 km; diámetro medio aparente: 32′; radio: 109 radios terrestres (700 000 km); volumen: 1 300 000 veces el de la Tierra; masa: 333 432 veces la masa de la Tierra.

[Para el estudio del equilibrio interno del Sol y de su energía de radiación, consultar las páginas 277 y 280 relativas a las estrellas.]

Se observa generalmente el Sol con los telescopios fijos de eje vertical, al ser reflejada su imagen por un espejo que gira o *celóstato* (torres solares). Para debilitar las radiaciones sin alterarlas, se opera por reflexión. El empleo de cristales coloreados está limitado a las observaciones de posición.

Se han obtenido imágenes fotográficas parciales del Sol correspondientes a un disco de 70 cm de diámetro y espectros de la luz de cerca de 17 m de longitud. Hemos definido ya, a propósito de los espectros, la fotosfera y la cromosfera (v. p. 252 y 253).

En el momento de los eclipses totales, se distingue más allá de la cromosfera una envoltura gaseosa extremadamente rarificada: la corona solar (densidad 10^{-15} g por cm^3). También se puede percibir después de la puesta del Sol un resplandor difuso en la proximidad del plano medio de gravitación de los planetas, la *luz zodiacal,* que proviene de una corona de partículas extremadamente finas muy alejadas del Sol.

La *fotosfera* aparece como una superficie granular cuyos elementos, llamados *granos de arroz,* se deforman sin cesar. El solo hecho de que sean visibles permite atribuirles una dimensión de 700 km por lo menos.

La intensidad luminosa de la fotosfera decrece desde el centro hacia los bordes; la fotosfera presenta *manchas negras* y manchas brillantes llamadas *fáculas.* Sus dimensiones, sus formas y sus duraciones son muy variables. Algunas, visibles a simple vista, tienen un diámetro varias veces mayor que el de la Tierra. Se distinguen, en una mancha, la sombra, que constituye el fondo y que parece negra por contraste, y la penumbra. La mancha está rodeada de fáculas brillantes cuya aparición precede a la de la mancha. Las fáculas se encuentran por encima de la superficie de la fotosfera.

La importancia de las manchas es variable; se ha comprobado un período de aparición de 11,2 años. En el curso de este período, la latitud de aparición de las manchas varía desde 40 a 5 grados. No aparecen nunca manchas en el ecuador ni en los casquetes polares. Una mancha raramente dura más de un mes: se vuelve circular a medida que envejece.

Las manchas están generalmente agrupadas de dos en dos; el efecto Zeeman ha demostrado de modo evidente la existencia de un campo magnético intenso con polaridades de signos contrarios en cada dos manchas. Ocurre todo como si las dos manchas estuvieran en la sección producida por la fotosfera en un torbellino cilíndrico interior al Sol.

La espectroscopia ha descubierto en las manchas un descenso de la temperatura del orden de 1 250 grados.

Rotación del Sol. — La observación de las manchas y el efecto Doppler han demostrado esta rotación comparando los dos bordes del disco. El eje de rotación está inclinado 7 grados sobre la normal a la eclíptica. El Sol no gira como un cuerpo sólido, su período de rotación crece con la latitud; de 25 días en el ecuador, pasa a 34 días en los 80 grados de latitud.

Espectro solar. — Entre las 25 000 rayas aproximadamente del *espectro solar,* se han identificado la mitad, y se ha dado como evidente la existencia en el Sol de 66 elementos simples, de los 92 de la química; son metales en su mayor parte.

Entre estas rayas, 6 500, llamadas *rayas telúricas,* se deben a la atmósfera terrestre. Se identifican con facilidad: su intensidad crece cuando el Sol baja hacia el horizonte, y no están sometidas al efecto Doppler de rotación del astro (v. p. 253).

El estudio de la amplitud de las diferentes rayas (v. p. 254) permite evaluar en 2,5 g la masa total de gas de cada centímetro cuadrado de fotosfera (en lugar de 1 000 g para la Tierra). Sobre estos 2,5 g, hay 1,2 g de hidrógeno (o sea 80 p. 100 de los átomos) y 1 g de helio (o sea 16 p. 100 de los átomos). Algunas rayas de calcio son particularmente intensas, pese a que la proporción de este elemento es muy pequeña.

Irradiación solar. Temperatura. — A la distancia que se encuentra la Tierra, cada centímetro cuadrado de su superficie expuesta al Sol recibe 1,93 calorías por minuto. Ampliando este resultado a toda la esfera centrada sobre el Sol y comparándolo con la masa, se ve que cada gramo del Sol emite una energía de 2 ergios por segundo.

Si se le aplica la relación fundamental de la relatividad limitada, que asimila la energía a la masa m : $U = mc^2$ (siendo c la velocidad de la luz), se establece que la ***pérdida total de masa*** del Sol por irradiación es de *4 millones de toneladas por se-*

gundo. Por fabuloso que parezca este número, permitiría al Sol una duración de 10^{13} años si toda su masa pudiese transformarse en radiación. La radiación solar corresponde a una temperatura de 5 740 grados absolutos en la fotosfera.

La cromosfera. Protuberancias. — La observación directa de la cromosfera se ha hecho durante los eclipses totales. El espectro relámpago o espectro de emisión de la cromosfera se presenta bajo la forma de luminosidades crecientes de longitud desigual.

Los arcos más largos corresponden a las capas más profundas de la cromosfera. Se conoce por este medio la repartición en altura de los elementos. La parte más elevada de la cromosfera contiene nubes de calcio, llamadas *flóculos*, que están sin duda en equilibrio bajo el efecto de la presión de radiación selectiva.

El *espectroheliógrafo*, inventado al mismo tiempo por Deslandres en Francia y por Hale en los Estados Unidos, permite obtener fotografías monocromáticas de la cromosfera. Se aisla en el espectro una raya en medio de una pantalla detrás de la que se coloca una placa fotográfica, y, mientras la ranura del espectroscopio barre toda la superficie del disco solar, se da a la placa el desplazamiento apropiado. Gracias a la raya aislada, se puede explorar la cromosfera en profundidad.

El aspecto general de la cromosfera es el de un campo de trigo en el que las espigas se doblaran en todos sentidos a causa de vientos de direcciones diferentes. En los bordes del disco aparecen enormes llamas denominadas *protuberancias*, que se clasifican en protuberancias *eruptivas* y protuberancias *quiescentes* (o tranquilas). Las mayores se elevan a alturas de 60 000 a 80 000 km; algunas protuberancias excepcionales se elevan a más de un radio solar por encima de la cromosfera. Apenas contienen más que calcio e hidrógeno. En el mismo disco, las protuberancias aparecen bajo la forma de filamentos cuya longitud pasa a menudo de 600 000 km (*fig.* 43). Se comprueba que, en general, la frecuencia de las protuberancias varía como la de las manchas.

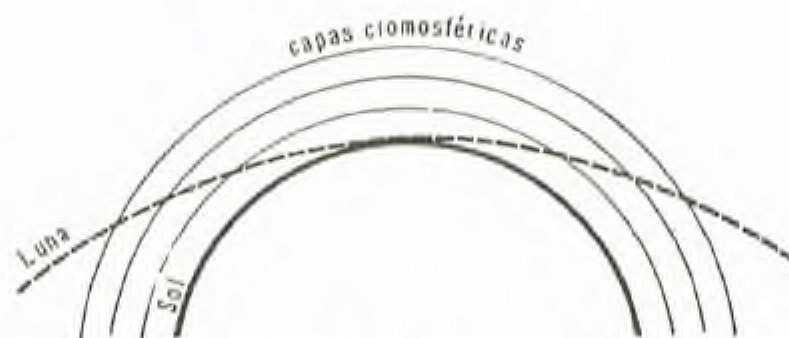


Fig. 43

Ciertas películas cinematográficas, realizadas recientemente, permiten comprender el mecanismo continuo de las protuberancias. Se observan erupciones de materia de enorme violencia y de una extraordinaria extensión. A continuación la materia expulsada vuelve a caer sobre la base de la cromosfera, siguiendo al efecto trayectorias preferentes en todo punto análogas a las líneas de fuerza de un campo de atracción determinado.

Las erupciones cromosféricas. — Además de las manchas, fáculas y protuberancias, se producen en la superficie del Sol otros accidentes cuya importancia se ha descubierto más recientemente. Consisten en apariciones repentinas, en las regiones faculares, de masas luminosas mucho más brillantes que los contornos próximos y que sufren modificaciones muy rápidas de forma e intensidad. Se las designa generalmente con el nombre de *erupciones cromosféricas solares*. Su duración no pasa normalmente de una hora, aunque a menudo es más bien menor. La luminosidad de la perturbación puede llegar a ser, en algunos minutos, más de diez veces mayor que la de las partes próximas. La temperatura que le corresponde es del orden de 1 millón de grados en lugar de los 6 000 grados de la fotosfera.

El estudio de estos fenómenos revela una correlación muy marcada con los elementos magnéticos terrestres a los que perturba de modo sensible.

Relación entre los accidentes de la cromosfera y ciertos fenómenos terrestres. — Se sabe que la declinación magnética terrestre sufre una variación diurna que evidencia la acción del Sol. Pero esta acción no puede explicarse exclusivamente suponiendo la existencia de un campo magnético cuyo centro fuese el Sol. Se ha demostrado la existencia, en la alta atmósfera terrestre, entre 100 y 200 km de altura, de una capa ionizada por las radiaciones solares ultravioletas y recorrida por corrientes eléctricas: la *ionosfera*. Las variaciones de su ionización y de su altitud se manifiestan de forma muy sensible por perturbaciones en las transmisiones de las ondas cortas de la radiotelegrafía.

La declinación sufre también variaciones bruscas de más de un grado, llamadas *tormentas magnéticas*, que van acompañadas de auroras polares o boreales, bellísimas capas luminosas irregulares y variables que aparecen en el cielo en las regiones septentrionales.

Se ha podido establecer que las erupciones cromosféricas van seguidas muy a menudo de perturbaciones radiotelegráficas instantáneas y que las tormentas magnéticas se presentan con un retraso de unas 26 horas. Después de una erupción, la radiación ultravioleta recibida del Sol varía y provoca instantáneamente perturbaciones radiotelegráficas, pero la Tierra recibe igualmente, cuando pasa "por encima" de las manchas solares, una radiación corpuscular cuya velocidad de propagación es de 1 500 km/s. Se trata sin duda alguna de átomos de H, Ca y He, expulsados por un aumento de la presión de radiación.

La corona. — Hasta estos últimos años no se podía observar la *corona* más que durante un corto instante en los eclipses totales. Su extensión depende del ciclo solar, y en el momento de máxima actividad rebasa por lo tanto el radio del astro. Su resplandor se puede comparar al de la Luna llena.

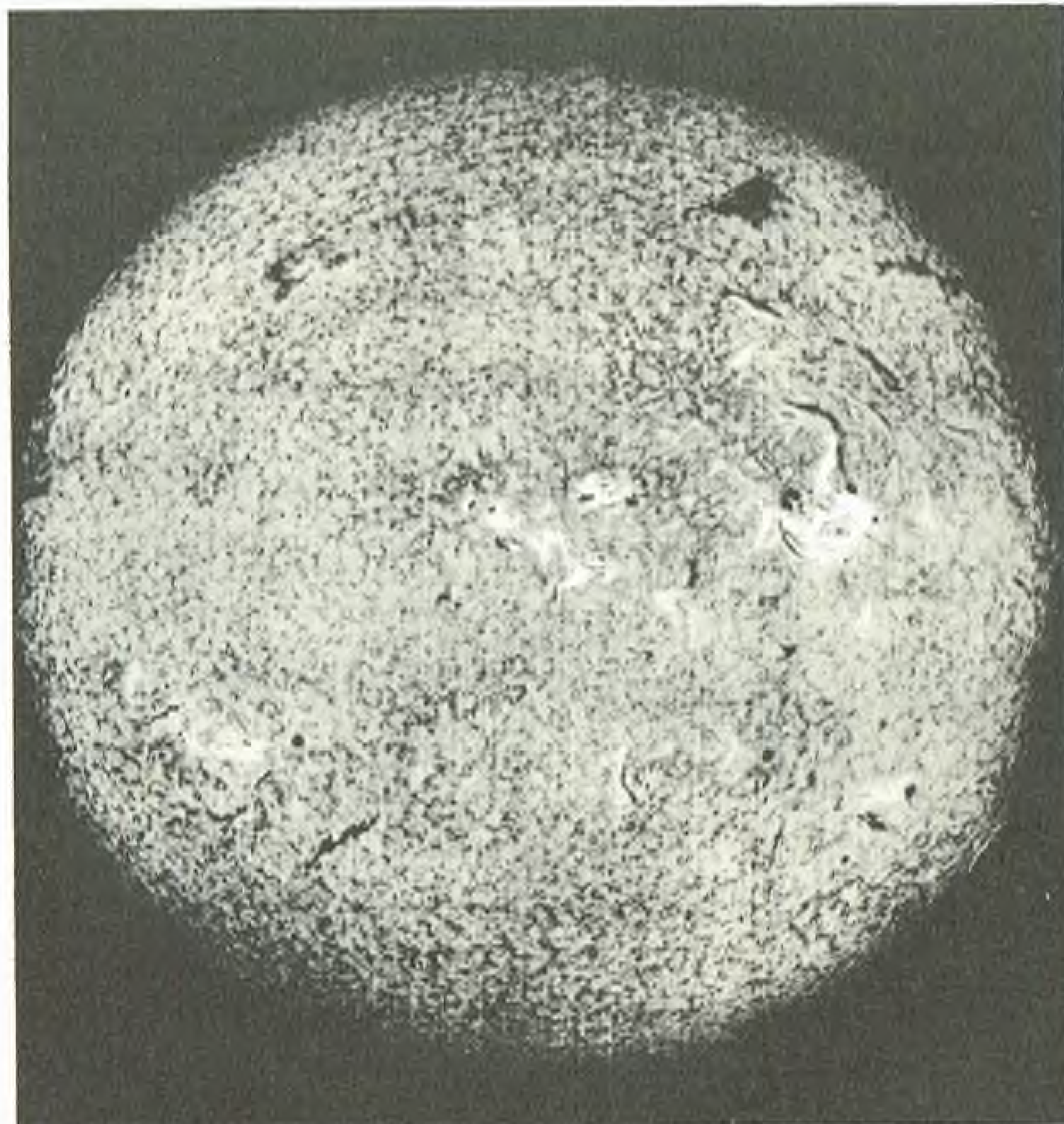
El astrónomo francés Lyot puso a punto un instrumento llamado *coronógrafo*, que, capaz de eliminar la luz del Sol, permite observar la corona sin necesidad de esperar los eclipses. La difusión de la luz solar por la atmósfera terrestre obliga a observarlo desde alta montaña.

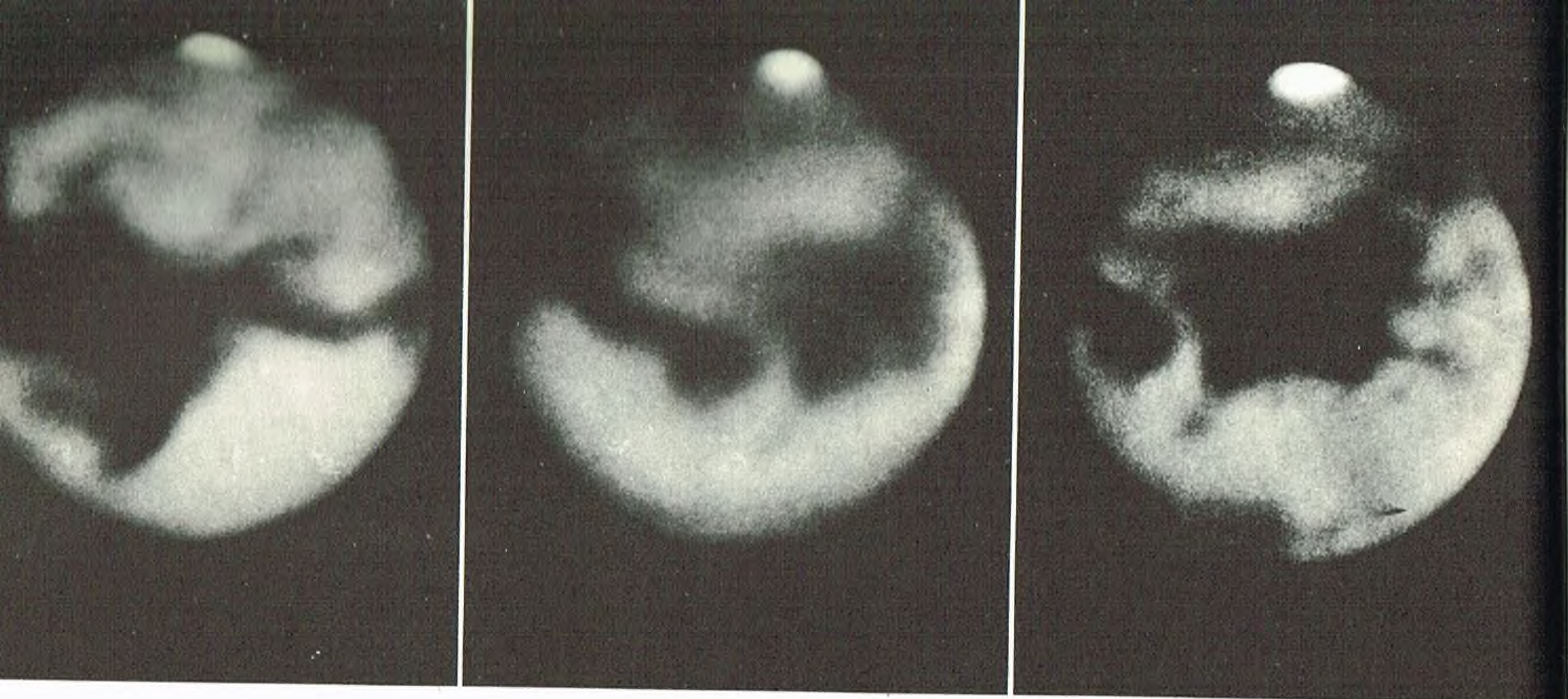
Los cambios de aspecto de la corona no son producidos por movimientos, como ocurre con las protuberancias de la cromosfera, sino por apariciones e iluminaciones sucesivas de arcos, surtidores y nubes.

El espectro de la corona contiene, ademas de la luz solar que difunde, rayas brillantes, en particular una raya verde y otra roja que no coinciden con las de ningún elemento conocido. Hoy se sabe que corresponden a rayas *prohibidas* (v. p. 252), del átomo de hierro muy ionizado.

La ionización de este tipo exige una temperatura del orden del millón de grados, o, al menos, una agitación de los electrones y de los iones que corresponda a esa temperatura. Se ha sugerido, para explicarla, un mecanismo según el cual se producen, procedentes de las profundidades del Sol, intensas erupciones en la corona. Los átomos emitidos, ionizados, se vuelven, según esta teoría, a combinar poco a poco con los electrones libres y dan lugar a radiaciones; después, la materia, al volver a caer en las regiones bajas de la corona, se hace visible y produce en las protuberancias ese predominio de los movimientos descendentes tan frecuentemente observado. A pesar de este ensayo de interpretación, subsisten muchos misterios, en particular sobre las condiciones de equilibrio físico en la corona.

Distribución de las nubes de hidrógeno en la cromosfera *(Fot. Observatorio de Monte Wilson)*





Tres aspectos del planeta Marte, próximo a la oposición de 1947 *(Fot. Observatorio del pico de Mediodía)*

PLANETAS	MERCURIO 1	VENUS n = 2	TIERRA 3	MARTE 4	PLANETA DE OLBERS 5	JÚPITER 6	SATURNO 7	URANO 8	NEPTUNO 9	PLUTÓN 10
Distancia exacta (Semieje mayor a)	0,39	0,72	1	1,52	(2,8) med.	5,20	9,56	19,22	30,11	39,6
Ley de Bode	0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10,0	19,6	38,8	77,2

Cuadro comparativo de las distancias exactas de los planetas al Sol y de las obtenidas teóricamente mediante la aplicación de la ley de Bode

Los planetas

Tomando como unidad la distancia Tierra-Sol, se observa que, hasta Urano inclusive, las distancias de los planetas siguen de forma satisfactoria una ley comprobada empíricamente, llamada *ley de Titius-Bode*, $D = 0{,}4 + 03 \times 2^{n-2}$ con la condición de atribuir 0 a Mercurio por el 2º término y $n = 5$ al conjunto de los planetas telescópicos, que son, realmente, restos de un planeta llamado de *Olbers.*

Esta ley empírica ha tenido una justificación en la teoría cosmogónica de von Weizsäcker (1944), la cual explica la génesis de los planetas por la formación, en un medio difuso que rodea el Sol, de coronas sucesivas de remolinos, condensándose a continuación la materia de cada corona para formar un planeta.

Los planetas se dividen en dos grupos: los cuatro más próximos al Sol, llamados *telúricos*, tienen una densidad media superior a la de las rocas (2,7); los otros, más lejanos, tienen una densidad sensiblemente igual a la del Sol.

A pesar de su proximidad relativa, los planetas son difíciles de estudiar, por estar constituidos de materia fría que no emite ninguna radiación visible. Este estudio ha hecho recientemente progresos con la exploración del espectro infrarrojo mediante células fotoeléctricas de sulfuro de plomo. La radiación visible recibida desde los planetas es el reflejo de la luz solar. Las rayas de absorción creadas por la atmósfera del planeta señalan la composición de estas atmósferas. La radiación infrarroja se debe al mismo planeta y ha permitido determinar las *temperaturas de los planetas.*

Por otra parte, considerando los planetas como masas enfriadas e isotérmicas, que reciben todo el calor del Sol e irradian a su vez, se ha podido calcular la temperatura teórica de cada planeta.

Las dos series de resultados obtenidos son dadas en el siguiente cuadro:

Las diferencias concernientes a Marte se explican por la rotación rápida y la presencia de una atmósfera.

Esta teoría induce a abandonar la idea del fuego central de la Tierra. El calor interno del globo se debe exclusivamente a la radiactividad de las rocas de la litosfera. El vulcanismo parece tener el mismo origen; la presencia de una gran proporción de agua en las lavas indica que provienen de la corteza terrestre.

Mercurio. — Próximo al Sol (distancia = 0,4 tomando como unidad la de la Tierra al Sol), *Mercurio* es muy difícil de observar. La figura 32 muestra que pasa, como la Luna, por todas las fases y que éstas van acompañadas de una variación del diámetro de 5″ a 12″. Mercurio presenta siempre el mismo lado al Sol, como la Luna con respecto a la Tierra. No se le ha descubierto atmósfera alguna. Su temperatura experimental es de 413º. Mercurio parece presentar bastantes analogías con la Luna, y sus pasos ante el disco solar se producen por grupos de seis cada 46 años.

Venus. — Después del Sol y la Luna, el astro más brillante del cielo es *Venus,* que se encuentra a la distancia 0,7 del Sol y pasa por todas las fases, como Mercurio, en el curso de la duración de su revolución sinódica: 584 días. La duración de su revolución sideral es de 228 días. Su diámetro aparente varía durante este tiempo de 17″ a 1′40″.

Su brillo se debe al poder reflector de la espesa atmósfera gaseosa que lo envuelve y que no permite descubrir la superficie del planeta. Su color blanco plata exige que estas espesas nubes estén formadas por partículas sólidas o líquidas. El estudio del espectro indica de forma indiscutible la ausencia casi total de oxígeno y de vapor de agua y, por el contrario, una abundancia de *gas carbónico.*

	MERCURIO	VENUS	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NEPTUNO	PLUTÓN
Temperatura del cuerpo negro (Tierra 119º)	+ 358º	+ 190º	+ 43º	— 100º	— 145º	— 184º	— 200º	— 210º
Temperatura experimental (radiaciones infrarrojas)	+ 412º	+ 57º	+ 12º	— 138º	— 153º	— 180º	?	?

Página siguiente. A la izquierda: Júpiter. *A la derecha:* Saturno *(Fot. Observatorio del Pico de Mediodía)*

Marte. — *Marte*, a la distancia 1,5 del Sol, es el planeta más fácil de observar. En el momento de sus oposiciones, su distancia a la Tierra es 0,5 y presenta entonces su cara iluminada. Esta distancia varía en razón de la excentricidad de la órbita, y su diámetro aparente suele estar comprendido entre 13″ y 26″, aunque puede bajar a 2 ó 3″ en las conjunciones. Su duración de rotación, bien estudiada por la observación de las manchas, es de 1 día 40′. La inclinación del eje de rotación sobre el plano de la órbita crea un fenómeno de estaciones análogo al de las estaciones terrestres: se manifiestan por la aparición de un casquete blanco de nieve que pasa de un polo al otro y que se derrite rápida y completamente cuando el polo correspondiente recibe de nuevo la radiación solar. Esta capa de nieve es, pues, delgada. La presencia de vapor de agua se manifiesta, además, por nubes muy tenues (cirros a gran altura) que aparecen sobre el planeta, pero no ha podido ser descubierta en el espectro. La precisión de las medidas permite afirmar que la cantidad de vapor de agua en la atmósfera de Marte no alcanza el 5 por 100 de su valor en la atmósfera terrestre. Manchas más o menos regulares aparecen en la superficie del planeta y muestran un cambio de color con las estaciones, lo que había hecho pensar en la existencia de una vegetación en Marte comparable a la de la Tierra. Se ha hablado mucho de los *canales de Marte*, de los que se han trazado mapas muy precisos. Pero la existencia de una vegetación clorofílica entrañaría la presencia de oxígeno en la atmósfera, y el estudio del espectro no revela la menor presencia de este elemento.

Marte está rodeado de una atmósefra rarificada de gas carbónico. Su carácter desértico está probado, y concuerda con el color rojizo del planeta. Las manchas de colores que cambian se deben probablemente a la presencia de una vegetación sin clorofila, como los líquenes. Marte tiene dos satélites: *Fobos* y *Deimos*, de muy pequeñas dimensiones y muy próximos al planeta. La velocidad de revolución de Fobos es muy superior a la velocidad de rotación del planeta. Un observador colocado en Marte vería Fobos salir por el Oeste y ponerse por el Este.

Júpiter. — A la distancia 5,2 del Sol, con una duración de revolución sideral de 11 años 315 días, *Júpiter* es el mayor de los planetas. Su diámetro alcanza $\frac{1}{10}$ del diámetro del Sol. Al ser la misma su densidad, la relación de las masas es de 1 a 1 000, o sea 300 veces la masa de la Tierra. Su diámetro máximo aparente es de 50″. La lentitud de su movimiento hace que le veamos durante mucho tiempo situado en la misma región del cielo con un brillo semejante al de Venus. Su duración de revolución sinódica se acerca a la duración de revolución de la Tierra (399 días). La rotación se efectúa en unas 10 horas alrededor de un eje casi perpendicular a su órbita. Esta gran velocidad de rotación lleva consigo un aplastamiento muy sensible. La superficie de Júpiter aparece estriada de bandas claras y obscuras paralelas al ecuador. Se trata, en realidad, de una atmósfera espesa superpuesta en abundantes capas ligeras. Apareció en 1831 una gran mancha rojiza de 40 000 km por 10 000 km, aún visible en nuestros días, que alcanzó su máxima intensidad en 1878. Esa mancha se desplazó un cuarto de vuelta en cierta época y no puede tratarse sino de un cuerpo sólido flotando en la atmósfera.

A la temperatura de — 140°, esta atmósfera no puede estar constituida más que de gas difícilmente licuable. Intensas bandas de absorción entre el anaranjado y el verde, fueron identificadas en 1932 y 1934 como procedentes del metano y el amoniaco. Las nubes coloreadas están quizá constituidas por cristales de NH_3 teñidos por impurezas metálicas. El metano, licuado en la superficie, constituye formaciones nubosas que flotan en una atmósfera compuesta esencialmente de hidrógeno.

Júpiter tiene *once satélites*, de los que cuatro, visibles con prismáticos, fueron descubiertos por Galileo. Los grandes satélites (Io, Europa, Ganimedes y Calixto) tienen diámetros de 3 000 a 5 000 km; los otros tienen minúsculas dimensiones. Tres de ellos giran en el sentido de retrogradación y son, quizá, asteroides captados por el planeta. El movimiento de los grandes satélites es perfectamente conocido desde hace mucho tiempo. En el momento en que se eclipsan en la sombra de Júpiter es particularmente fácil observarlos. Esta *ocultación* se produce con un desplazamiento de 16 minutos según se le observe en conjunción o en oposición (*fig.* 44). Se retrasa en el momento de las conjunciones, que es cuando la luz, para llegarnos, debe atravesar toda la órbita de la Tierra, lo cual exige 16 minutos. Esto permitió a Roemer, en 1672, hacer la primera determinación de la velocidad de la luz.



Fig. 44

Saturno. — Casi tan grande como Júpiter, su masa no es más que $\frac{1}{3\,000}$ de la del Sol. Su densidad es inferior a la del agua (0,7). Su duración de revolución sideral es de 29 años 167 días, su distancia al Sol de 9,6 y su diámetro aparente máximo de 20″. Último planeta visible a simple vista, su rotación se efectúa en 10 horas, su aplastamiento es del orden de $\frac{1}{10}$ y su aspecto resulta análogo al de Júpiter.

El rasgo esencial de este planeta reside en la existencia de sus anillos, que coinciden sensiblemente con su plano ecuatorial, inclinado 28°. El radio exterior de los anillos respecto al del planeta es de 2,25 y el radio interior de 1,48. Estos anillos forman zonas concéntricas de tintes diferentes, separadas por lagunas más o menos marcadas. Su espesor, muy débil, no pasa de los 20 km; cuando se presentan de canto, forman en el planeta un delgado trazo sólo perceptible con grandes instrumentos.

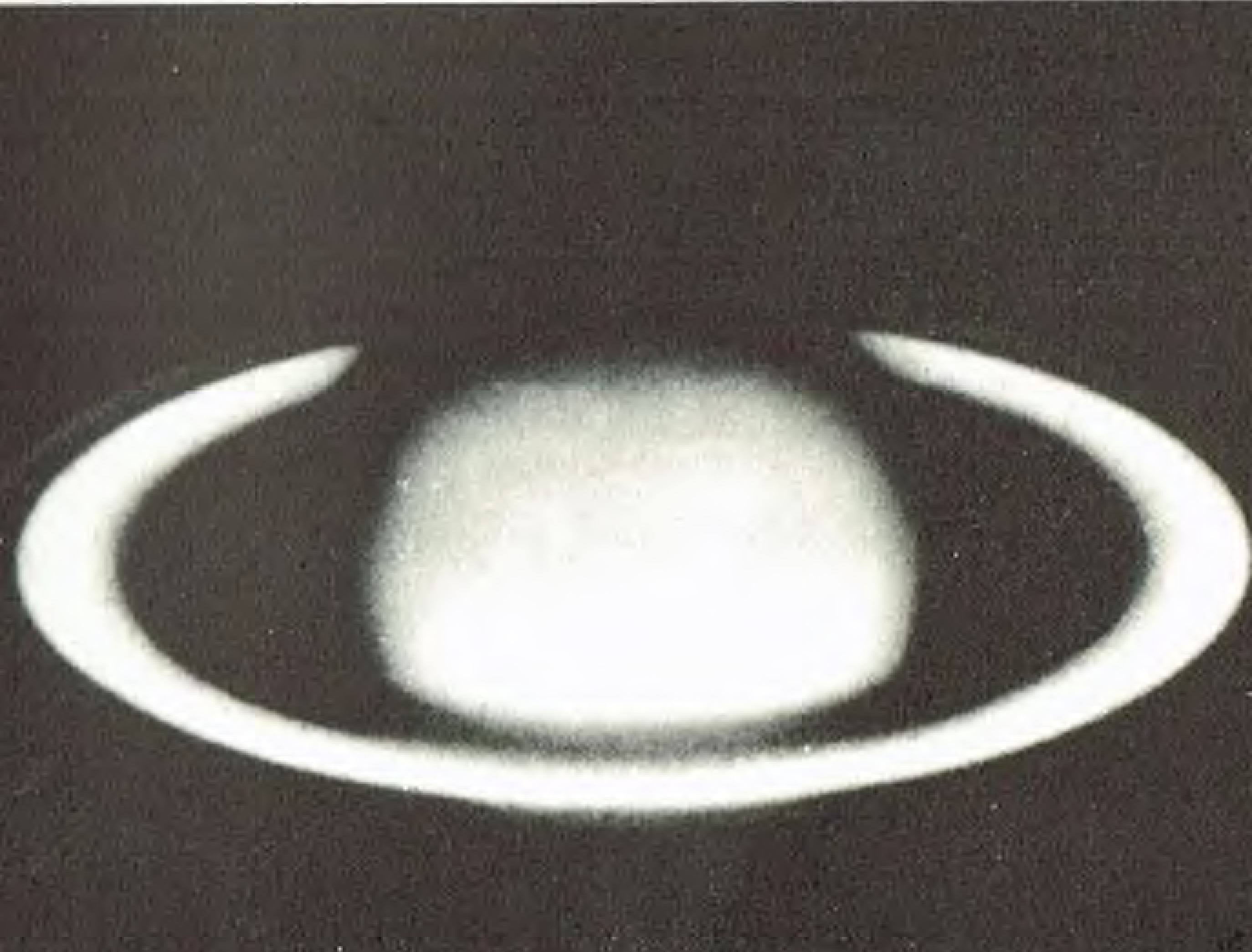
Estos anillos están indiscutiblemente formados por finas partículas separadas que gravitan, según las leyes de Kepler, alrededor del planeta. Las partículas del borde interior giran más rápidamente que las que forman el borde exterior.

El anillo está iluminado por el Sol, y lo observamos desde un punto de vista muy próximo. Así, pues, casi siempre vemos la cara iluminada, salvo cuando su plano pasa entre el Sol y la Tierra, lo cual se produce aproximadamente cada treinta años. No se ve entonces más que la parte que se proyecta en el disco del planeta.

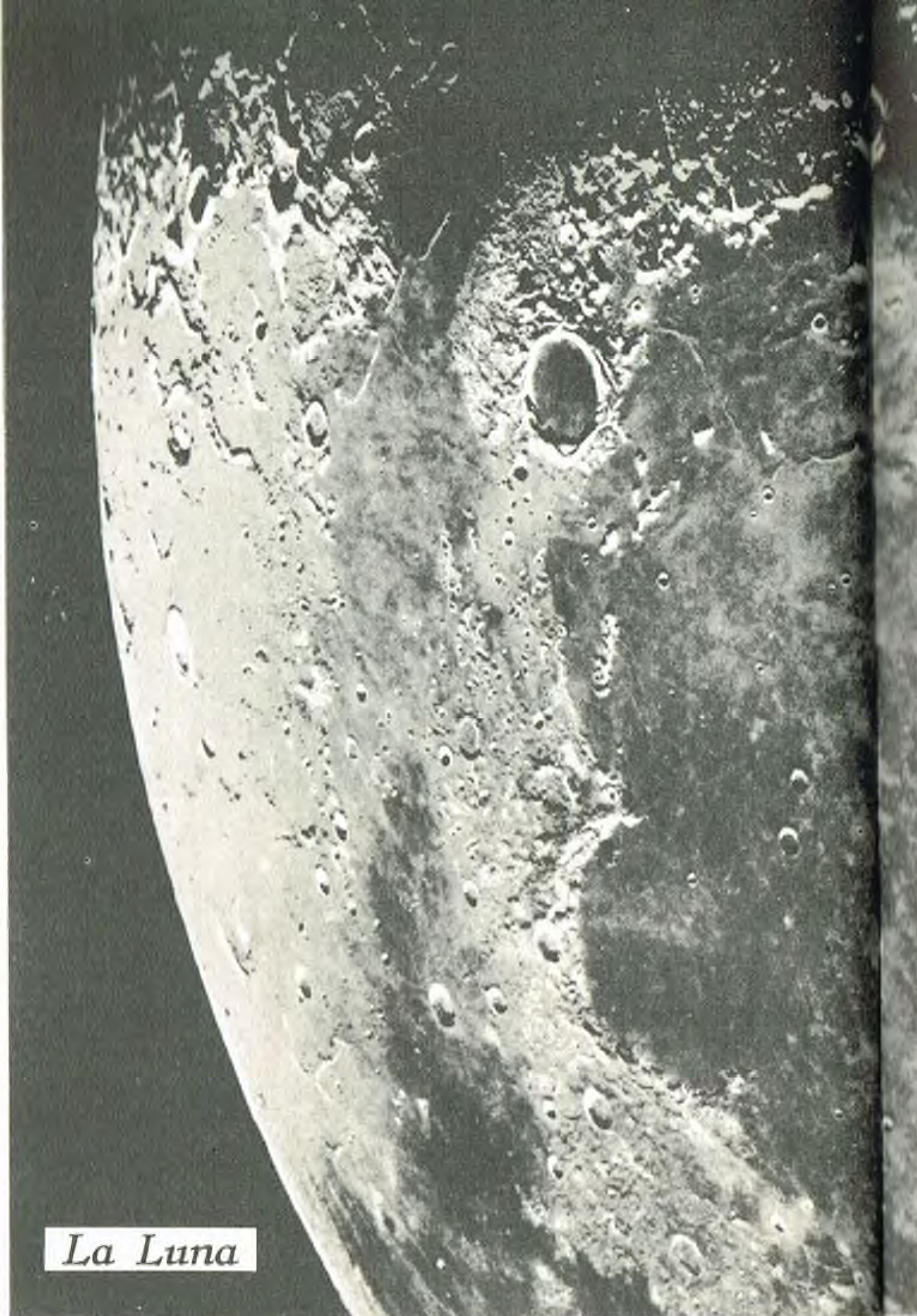
Saturno es 15 grados más frío que Júpiter, aunque su atmósfera muestra las mismas características. El amoniaco solidificado debe precipitar mejor en él, dejando la atmósfera más clara. Kuiper mostró que el espectro de los anillos no era otra cosa que el del hielo. Las partículas que lo componen estarían, pues, cubiertas de hielo o formadas de cristales de hielo.

Saturno tiene *diez satélites*. Los cinco primeros circulan muy cerca del planeta, casi en el plano de los anillos. Las órbitas de los demás tienen, al contrario, inclinaciones bastante grandes. El noveno está animado de un movimiento de retrogradación.





Región norte de la Luna *(Fot. Observatorio de Monte Wilson)*



Urano y Neptuno. — *Urano* fue descubierto por W. Herschel en 1781. Su distancia al Sol es 19 y su duración de revolución 84 años; Urano, tiene, pues, un movimiento muy lento. Su diámetro aparente es de 4", su eje de rotación está situado en el plano de la eclíptica ($i = 98°$) y sus cuatro satélites giran en un plano muy próximo al ecuatorial del planeta.

Neptuno fue descubierto en 1846 por Le Verrier (v. p. 256). Éste indicó el 31 de agosto de 1846 la posición que debía ocupar en el cielo el mencionado astro, lo cual era necesario para explicar las perturbaciones de Urano. A su vez, el astrónomo Galle, de Berlín, descubrió este astro el 23 de septiembre en la posición indicada por Le Verrier. Su distancia al Sol es 30 y su duración de revolución sideral 164 años 280 días. Tiene dos satélites observables, cuya revolución se efectúa en el sentido retrógrado, mientras que la rotación del planeta sobre sí mismo es directa.

Estos dos planetas gemelos tienen densidades y estructuras parecidas a las de Júpiter, pero con temperaturas muy inferiores (— 180° y — 200°). En su atmósfera, sólo el metano señala su presencia por bandas extremadamente acusadas. No se han descubierto más que trazas de amoniaco. Donde la atmósfera es más clara, la agitación parece menor. En Neptuno no se ve mancha alguna.

Plutón. — Pequeño astro de 15ª magnitud, descubierto en 1930 gracias a la fotografía, en condiciones análogas a las de Neptuno y según los cálculos de Lowell y Pickering. Es un planeta de masa análoga a la de la tierra, perdido en los confines del sistema solar (distancia 39). Su duración de revolución sideral es de 249 años. El rasgo más acusado de *Plutón* es la gran excentricidad (0,246) de su órbita, cuya inclinación es de 17 grados sobre el plano de la eclíptica (v. p. 254).

Variedad de las atmósferas planetarias

La vida en los planetas. — Las importantes diferencias comprobadas en la densidad de los planetas y en la composición de su atmósfera pueden explicarse por las modalidades de la disipación de las atmósferas en el momento de su formación. La cohesión de los elementos de un planeta está asegurada por la gravedad, que es tanto más grande cuanto mayor es la masa del planeta. Las moléculas de gas se escapan por agitación térmica; la velocidad media en esta agitación es más grande para las moléculas más ligeras, que son expulsadas las primeras. A la temperatura actual, las moléculas de hidrógeno escaparían incluso de la atmósfera terrestre.

Si se admiten 6 000° como temperatura de formación, todo el oxígeno está disipado por igual. Los planetas de poca masa han perdido de esta forma todos sus elementos ligeros y se han convertido en densos (planetas telúricos). Los planetas gigantes, como Júpiter, han guardado todo el gas con el que nacieron y, por otra parte, su enfriamiento ha sido más rápido en razón de su alejamiento. Su densidad permanece aproximada a la del Sol. La atmósfera terrestre actual se formó con posterioridad al enfriamiento. Su oxígeno se debe a la clorofila de los vegetales, que transforma el gas carbónico. Este oxígeno permite la re piración de los seres vivientes y los protege al mismo tiempo, formando bajo la acción de los rayos ultravioleta una capa de ozono cuyo primer efecto es convertirse en absorbente para esta radiación destructora. La misma radiación pudo ser, paradójicamente, la que produjo en la superficie de la Tierra la síntesis de las primeras materias orgánicas indispensables a la vida. Dada la forma en que la respiración constituye el fenómeno esencial de la vida, ésta no parece posible en Marte ni en Venus y menos aún en los otros planetas.

Sistemas planetarios extraños. — La óptica clásica no permite esperar que podamos descubrir pronto los planetas poco luminosos, sobre todo a contraluz de esos focos cegadores que son las estrellas. Sin embargo, desde hace poco, la gravitación, en tres sistemas de estrellas dobles de órbita bien estudiada, señala la existencia de un tercer cuerpo obscuro cuya masa es del orden del 1 p. 100 de la del Sol. Estos cuerpos tienen la ventaja de ser grandes planetas de masa 10 ó 15 veces mayor que Júpiter. Es necesario señalar, no obstante, que la física cuántica asigna a los cuerpos sólidos un límite más allá del cual las presiones internas engendran el estado de "degeneración", límite que está muy poco por encima del estado de Júpiter (v. p. 280).

Los tres sistemas ya conocidos se encuentran entre las 38 estrellas más próximas a nosotros, y es posible que, entre los millones de estrellas de nuestra galaxia, gran número de ellas vayan acompañadas de sistemas planetarios.

La *Luna* tiene una densidad de 3,3. Su momento de inercia corresponde al de un cuerpo homogéneo, mientras que el de los planetas pone en evidencia un núcleo central más denso. El hecho de que su densidad sea precisamente la de la litosfera terrestre induce a pensar que quizá se separó de la Tierra cuando ésta estaba ya medianamente enfriada. Aparte de la Tierra, la Luna es el único astro del sistema solar del que podemos observar los detalles topográficos. La Luna está desprovista completamente de atmósfera: las estrellas se ocultan detrás de su disco sin que su dirección haya sufrido la menor desviación.

La sombra que produce el relieve lunar, y la forma en que los vértices emergen de la sombra antes de ser alcanzados por el limitador (círculo que limita la parte iluminada), permiten determinar geométricamente la altura de este relieve. Tiene verdaderas cadenas de montañas, más altas que el Himalaya. Por otra parte, comprende grandes extensiones grises unidas, apenas rizadas, a las que se llama impropiamente *mares*.

Toda la superficie de la Luna está, además, sembrada de circos que van del agujero redondo apenas observable hasta grandes fosos de más de 300 km de diámetro. Por último, grietas de varios miles de kilómetros franquean sin desviarse circos y montañas y se ramifican en una inextricable red. Los circos lunares no se asemejan a los volcanes terrestres, pues, contrariamente a éstos, son más bien accidentes profundos cuyo borde está apenas elevado y cuyo fondo se encuentra a nivel muy inferior al del suelo exterior.

Según la teoría de Puiseux, estos circos se deben al hundimiento de cúpulas en forma de ampollas rellenas de materias eruptivas y formadas como burbujas que estallan en la superficie de un líquido pastoso. Puiseux señala también dos pequeños abultamientos que considera como semejantes a dos ampollas sin reventar.

Otra teoría atribuye la formación de los cráteres lunares al bombardeo meteórico. Los circos tendrían así el mismo origen que el célebre *Meteor Crater* de Arizona (v. p. 273). Basta un bólido cada 10 000 años durante 300 millones de años para justificar la presencia de los 30 000 circos que se pueden observar. La Tierra ofrece una docena de ejemplos de circos a pesar de la acción intensa de la erosión.

El relieve lunar ha recibido nombres: los de las montañas han sido tomados del relieve terrestre, y los de los circos, de la historia de la astronomía (por ejemplo, nombres de astrónomos).



En el momento de la luna llena, el relieve es mucho menos visible que en los del cuarto creciente y cuarto menguante, donde la iluminación es lateral. Lo que llama especialmente la atención cuando se mira la faz de la Luna son los rayos blancuzcos que emanan de ciertos puntos. Los más importantes son los que parten del circo *Tycho*.

Es evidente que el relieve lunar no ha sido modelado por la erosión. Aparte de esta característica, el relieve terrestre ofrece gran analogía con el lunar: las fosas oceánicas que representan los $\frac{3}{4}$ de la superficie terrestre poseen la misma estructura que los mares lunares.

Cada punto de la Luna está alternativamente alumbrado durante 14 días y a obscuras durante el mismo tiempo. Esto, unido a la ausencia de atmósfera, produce para nuestro satélite variaciones excesivas de temperatura: de + 100 grados a — 100 grados.

El medio cósmico interplanetario

Meteoritos. — La materia de la nebulosa inicial no aglomerada en planetas o satélites no se ha evadido totalmente, y el sistema solar está surcado en todos sentidos por una multitud de corpúsculos de masas y dimensiones variadas. En su inmensa mayoría, la masa individual de las partículas no pasa del miligramo. Algunas de ellas pueden alcanzar un centenar de kilogramos y muy excepcionalmente pasar de varias toneladas. Se da el nombre de *meteoritos* a estos corpúsculos.

Se reserva el nombre de *meteoro* al fenómeno luminoso que acompaña la aparición de meteoritos en la atmósfera terrestre. La denominación de *bólidos, estrellas fugaces* y *aerolitos* es proscrita por los astrónomos.

Frecuentemente los meteoritos se agrupan en cometas que, bajo la acción de grandes planetas, pueden disgregarse. No se puede afirmar en el momento actual si todos los meteoritos provienen o no de cometas disgregados, y si meteoritos y cometas tiene por origen común una condensación planetaria abortada.

Cuando los meteoritos provienen de la disgregación relativamente reciente de un cometa, se presentan en forma de masas siderales cuyas trayectorias paralelas parecen, por un efecto de perspectiva, provenir del mismo punto de la bóveda celeste llamado *radiante*. Algunos de estos fenómenos se producen cada año en fecha fija, cuando la Tierra corta en su curso la trayectoria de un cometa disgregado (*fig.* 45). El más conocido en nuestras latitudes es el llamado de *Perseides*, visible hacia el 10 de agosto. Su trayectoria se parece a la de un cometa observado en 1862 y que no ha reaparecido.

El fenómeno luminoso provocado por el paso del meteorito a través de la atmósfera terrestre es complejo. La luminosidad proviene de una capa gaseosa que rodea el meteorito.

El recuento minucioso de los meteoritos que llegan a la Tierra conduce a pensar que ésta puede recibir así *6 toneladas de materiales por día.*

Si un meteorito tiene una masa de menos de 5 kg (aproximadamente), se disuelve totalmente en la atmósfera. Se recogen los restos en la nieve de los polos y de las altas cumbres bajo la forma de partículas microscópicas.

La altura de aparición es de unos 110 km, y la desaparición se produce entre los 85 y 45 km. Las grandes masas llegan al suelo y abren profundos cráteres [*Meteor Crater* en Arizona: diámetro, 1 200 m; borde, 45 m; profundidad, 180 m].

Los bólidos de luz cegadora corresponden a masas del orden de 5 toneladas, y la formación de un cráter a una masa mínima de 100 toneladas.

Los meteoritos son de naturaleza ferruginosa (con el 8'5 por 100 de níquel), o pétrea (con el 26 por 100 de hierro). Su contextura implica el lento enfriamiento de las profundidades de algún cuerpo celeste de dimensiones planetarias. La medida fotográfica de su velocidad, que nunca pasa de los 42 km por segundo, muestra que corresponde a la circulación de estos corpúsculos alrededor del Sol. Se afirma que pertenecen en propiedad al sistema solar.

Cometas. — El aspecto de los *cometas* es muy variable. Están constituidos generalmente por una cabeza formada por un núcleo muy pequeño y la cabellera; el conjunto es prolongado por una cola que se extiende a grandes distancias.

Una cabeza de cometa iguala generalmente a Júpiter en volumen. Su cola se dirige siempre a la parte opuesta al Sol: sigue al cometa que se acerca y precede al cometa que se aleja (*fig.* 46). La cola no se despliega más que en las proximidades del Sol, siempre en el interior de la órbita de Marte. El 87 por 100 de los cometas que descubrimos tienen su perihelio a menos de dos unidades astronómicas del Sol (distancia Tierra-Sol). Puede que muchos escapen a nuestras observaciones.

El origen de las colas reside en la presión de radiación (v. p. 255), que desprende de la cabeza moléculas y finas partículas. La cola es generalmente encorvada; puede ser recta, ya porque sea vista en su plano, ya porque las partículas expulsadas tengan enormes velocidades.

Tres observaciones separadas por uno o dos días permiten calcular una órbita aproximada. Ningún cometa ha mostrado hasta el presente una órbita francamente hiperbólica, que implicaría un origen exterior al sistema solar. Alrededor del 30 por 100 corresponde a órbitas francamente elípticas; para los otros, las órbitas no se diferencian de la parábola; corresponden a períodos de larga duración, indeterminados para muchos de ellos. Toda una familia de cometas de cortos períodos tiene su afelio en la proximidad de la órbita de Júpiter. Este gran planeta produce a menudo cambios en las órbitas de los cometas.

Se conoce el caso de cometas periódicos que se desintegran. El más célebre es el cometa de *Biela*, al que se vio dividirse en 1846 y 1852. No se le volvió a ver más, y, en 1872 y 1886, grandes lluvias de masas de meteoritos nos trajeron lo que probablemente eran sus restos.

Las masas de los cometas son muy débiles: en el mejor de los casos representan 0,0001 de la masa de la Tierra. En cuanto a las colas, encierran en mil kilómetros cúbicos menos substancia que un cm^3 de aire. En un siglo, la Tierra ha pasado dos veces por una cola de cometa. Ningún sólido de dimensión apreciable ha sido observado en el núcleo de un cometa.

El espectro de un cometa es un espectro de gas formado por rayas brillantes que manifiestan la presencia de compuestos de carbono, de hidrógeno, de oxígeno y de nitrógeno (óxido de carbono y nitrógeno en la cola).

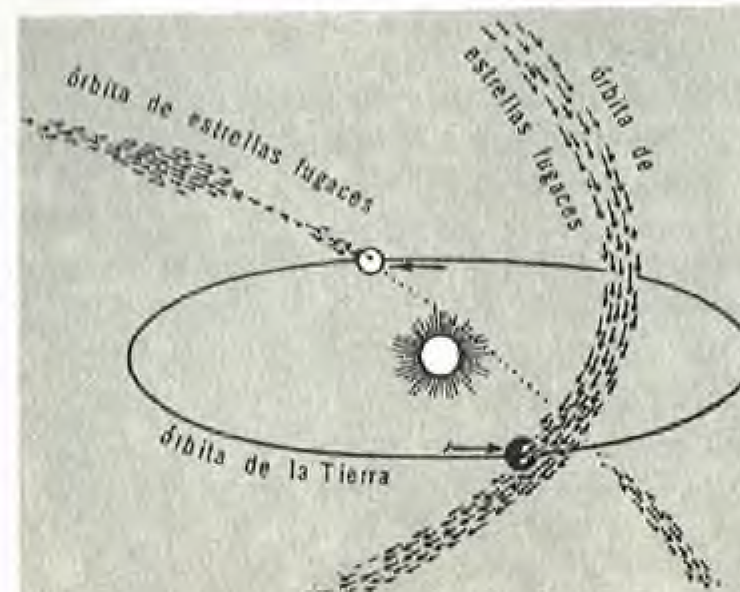


Fig. 45

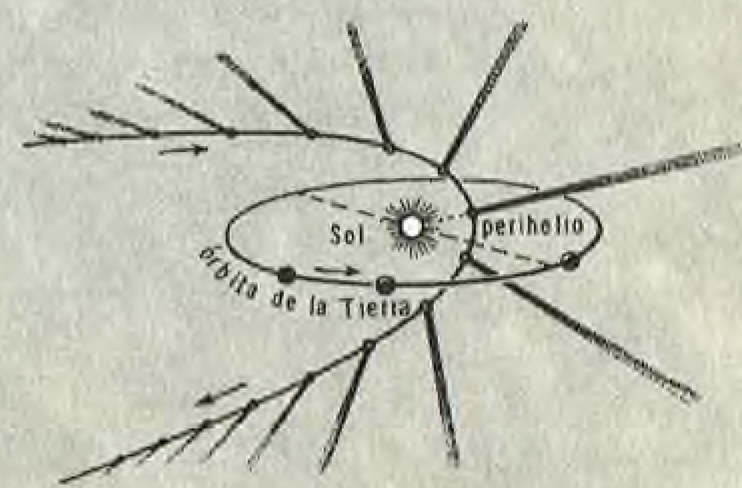
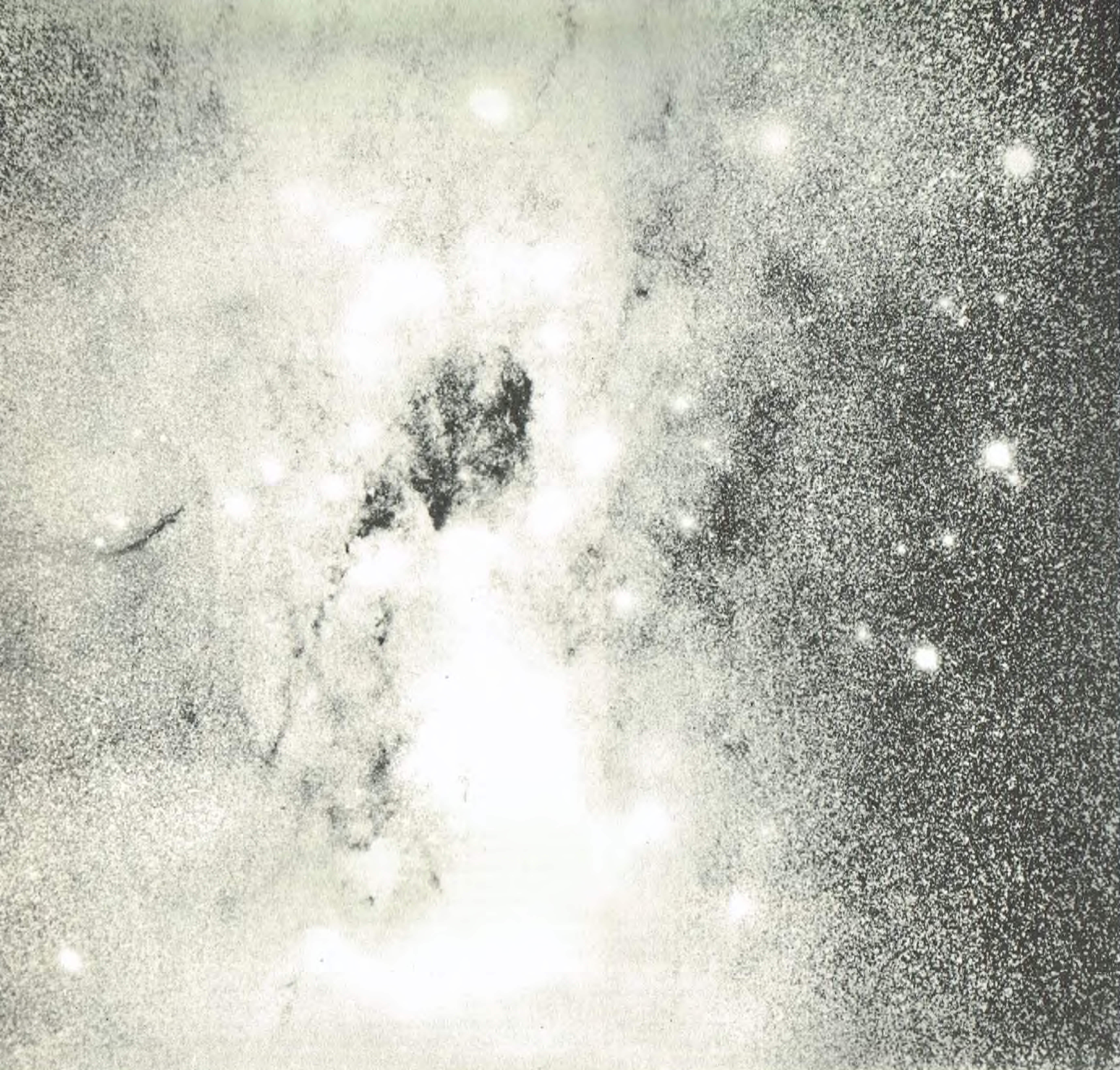


Fig. 46.



Vía Láctea, en la región de la Cruz del Sur *(Fot. Observatorio de Harward College, Estación Boyder [África Austral])*

El mundo estelar

Coordenadas de las estrellas. Movimientos propios. Traslación del conjunto del sistema solar. Cúmulos abiertos. Clasificación espectral. — **Distancias, volúmenes, temperaturas, masas de las estrellas:** Distancias de las estrellas. Volúmenes relativos de las estrellas. Estrellas enanas y estrellas gigantes. Temperaturas de las estrellas. Diámetro de las estrellas. Masas y densidades de las estrellas. Resultados. — **El equilibrio interno de las estrellas.** — **Descripción general del universo:** Determinación de las dimensiones de la galaxia. Su rotación. Su masa. Número de estrellas. Las estrellas variables. Las novas. Las supernovas. Los materiales interestelares. Estrellas en formación. Glóbulos. Los universos extragalácticos. Velocidad radial de las galaxias. — **Las concepciones generales del universo y la relatividad.** — **Las fuentes de energía y los caracteres generales de la evolución estelar:** Fuentes de energía. Caracteres generales de la evolución estelar. La fase final. Las enanas blancas

Las *estrellas* están agrupadas en figuras o constelaciones. En cada una de éstas, las estrellas se designan, según un orden de brillos decrecientes, por letras del alfabeto griego (α, β, γ ...), luego por letras latinas y finalmente por números. Ciertas estrellas llevan nombres de origen árabe.

Coordenadas de las estrellas. Movimientos propios. — Las coordenadas de las estrellas definidas en la página 259 no son absolutamente constantes. Su mayor variación se debe al desplazamiento del propio sistema de referencia: ecuador y polos giran, como hemos visto, alrededor del polo de la eclíptica. Otras causas hacen variar las coordenadas aparentes de las estrellas, como la *aberración de la luz*, debida a la velocidad del observador, que viene a componerse con la del rayo luminoso y altera su dirección. La principal velocidad que el observador debe tener en cuenta es la de la traslación de la Tierra, que le desplaza a 30 km por segundo. La dirección aparente describe así alrededor de la dirección real una pequeña elipse cuyo eje mayor tiene un valor de 20″ 47. Esta dirección aparente describe además una elipse bajo el efecto del cambio de perspectiva producido por el desplazamiento de la Tierra sobre su órbita. Este efecto de *paralaje* es mucho menos importante que el de la aberración anual y deja de ser apreciable en cuanto la estrella se aleja; no representa más que unas décimas de segundo en las estrellas más

cercanas. Pero su medida es la que permite precisamente *determinar las distancias* de las estrellas, y por ello los astrónomos han tratado de medir los paralajes antes incluso de que dispusieran de elementos lo bastante precisos para llegar a un resultado. En su búsqueda de los paralajes, Bradley descubrió la aberración anual y la nutación del eje de la Tierra.

Otro fenómeno importante que es necesario tener en cuenta en las observaciones es la *refracción debida a la atmósfera terrestre.*

Cuando el rayo luminoso que llega de las estrellas penetra en la atmósfera, atraviesa capas cada vez más densas. La refracción continua que sufre lo curva hacia el suelo (*fig.* 47). La distancia cenital aparente es así más pequeña que la distancia cenital real. Las medidas deben, pues, ser corregidas en una cantidad que aumenta rápidamente con la distancia cenital: de 1′ a 45°, alcanza más de 36′ para una visual horizontal. Eso hace que el Sol parezca achatado en el momento del ocaso, al estar el borde superior menos realzado por la refracción que el borde inferior. Prolonga al mismo tiempo la duración del día. La variación de la refracción con la distancia cenital complica el problema de orientar los instrumentos fotográficos.

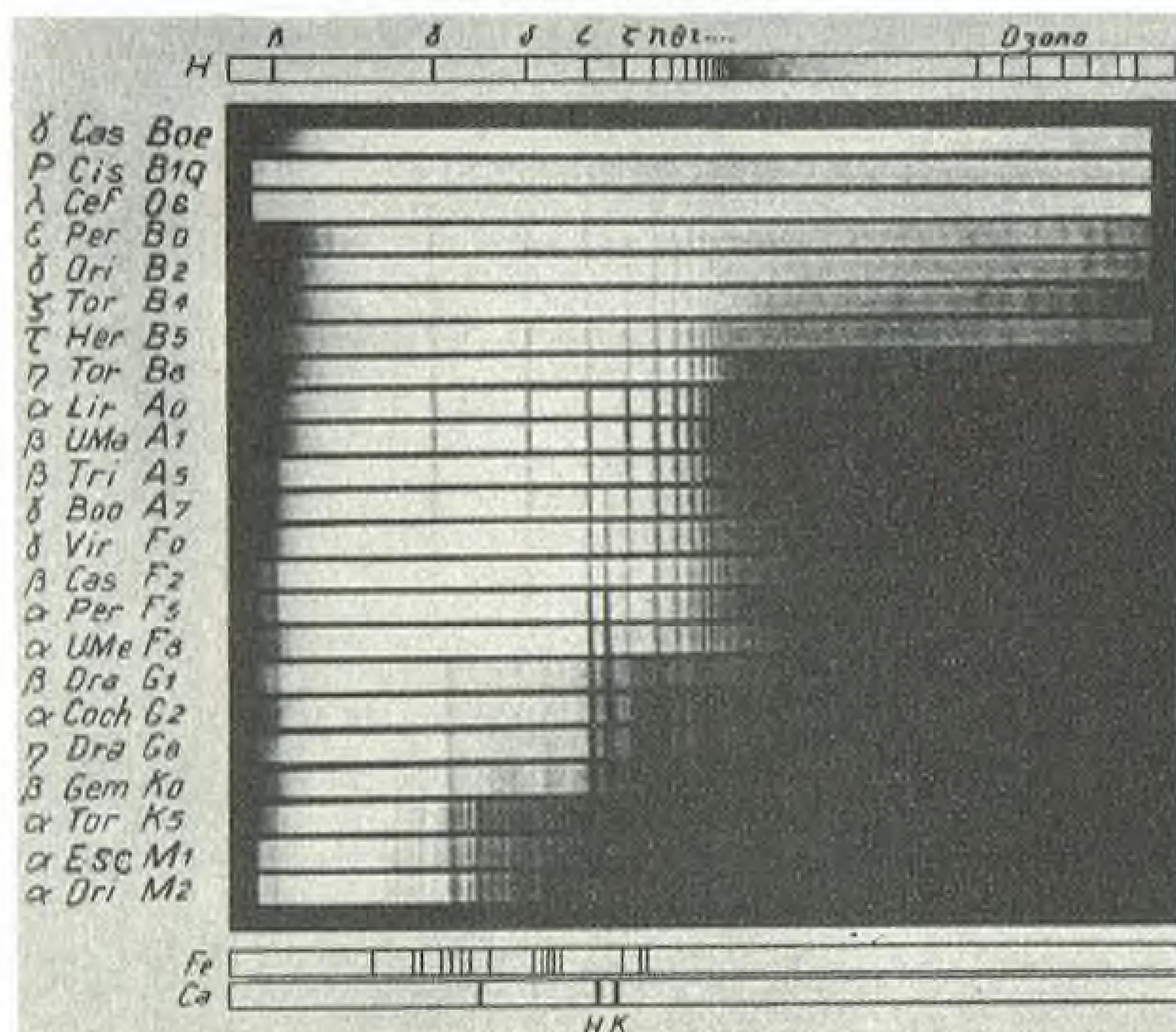
Aparte de estos movimientos aparentes, las estrellas no están absolutamente inmóviles en la esfera celeste: tienen *movimientos propios*, de los cuales observamos la componente transversal. Estos desplazamientos angulares son muy débiles y parecen, para cada estrella, siempre en el mismo sentido, porque nuestra escala de tiempos es muy corta. Apenas se conocen 200 estrellas cuyo movimiento propio anual pase de 1″. Actualmente el más importante es el de la estrella *flecha de Barnard*, que alcanza 10″ 3. Se trata de una de las estrellas más próximas a nosotros.

La determinación de los movimientos se hace por la observación de los clisés tomados con un año de intervalo. Se conocen en la actualidad alrededor de 250 000 movimientos propios. La medida del efecto Doppler-Fizeau (v. p. 253) da la velocidad radial métrica de la estrella. Conocida su distancia, se puede reconstruir la velocidad real en magnitud y dirección. Las velocidades de las estrellas son normalmente inferiores a 30 km por segundo. Sus direcciones son muy variadas.

Traslación del conjunto del sistema solar. Cúmulos abiertos. — Comprobado que los movimientos propios de gran número de estrellas las hacen converger aproximadamente hacia el mismo punto de la esfera celeste, se ha podido deducir que esta convergencia se debe a un desplazamiento del Sol, con una velocidad de 20 km por segundo, hacia el punto opuesto de la esfera, llamado *ápex*, que se encuentra en la constelación de la Lira. Este desplazamiento del Sol constituye un movimiento con respecto a las estrellas próximas. Es arrastrado con las mismas estrellas a una velocidad 15 veces mayor en la rotación del conjunto de la galaxia.

Algunas estrellas, próximas unas de otras, pero que parecen a veces en direcciones muy diferentes, se mueven de forma tan parecida que puede perfectamente suponerse una correspondencia entre ellas. Se denominan esos grupos, por ejemplo el de las Pléyades y las estrellas de la Osa Mayor (exceptuando α), *cúmulos abiertos.*

Serie de espectros estelares que cubren la región ultravioleta, violeta y azul (λλ 3 100— 4 000A). Puede observarse la evolución progresiva de las rayas de los diversos elementos a lo largo de la clasificación espectral: aparecen algunas rayas del hidrógeno, el hierro y el calcio, y se producen en la atmósfera terrestre franjas de ozono (Doc. Observatorio de París) [*Fot. Chalonge*]



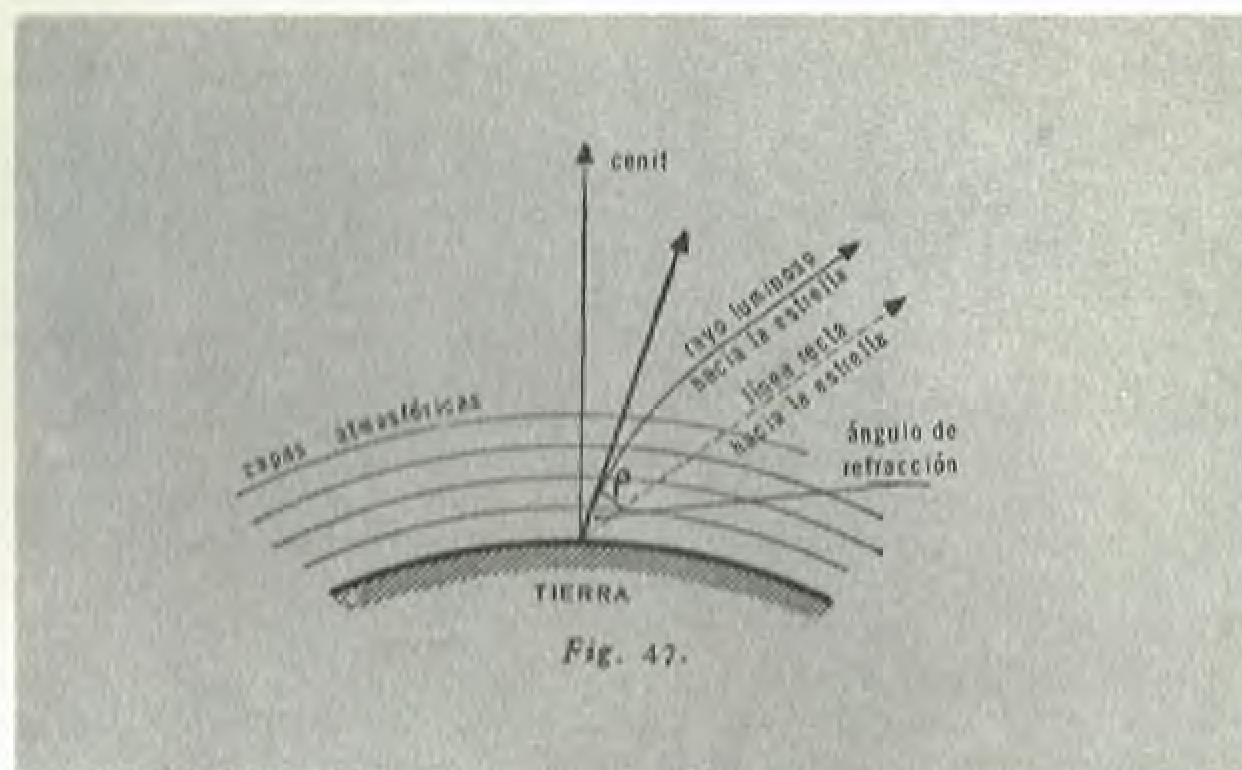


Fig. 47.

Clasificación espectral. — Las estrellas han sido clasificadas según su espectro (v. p. 252) en seis clases principales (que comprenden el 99'8 por ciento de las estrellas) y cinco clases secundarias. Las temperaturas fotosféricas, que se escalonan desde 2 000 grados a 30 000 grados, tienen una importancia esencial en la definición del espectro. De hecho se obtiene una clasificación por temperaturas.

Las seis clases principales, en orden de temperaturas decrecientes, son designadas por las letras B, A, F, G, K y M, y corresponden a estrellas cuyo color varía del azul al rojo.

Las clases secundarias son las siguientes: una clase W de estrellas muy calientes, cuyo espectro contiene poderosas rayas de emisión; una clase O, más caliente que las estrellas *β*, y las clases R, N y S, que corresponden a los mismos intervalos de temperatura que las clases K y M, con algunas particularidades. Los espectros estelares forman en realidad una serie continua, y cada clase está dividida en diez grupos. Los índices distinguen las estrellas en *enanas, gigantes* y *supergigantes* (ver más adelante).

Como los espectros de emisión de las estrellas raras W, los espectros de las estrellas más calientes están caracterizados por el espectro de centelleo del helio y por el del hidrógeno, que, cuando se ha descendido poco a poco en la clasificación, dejan lugar a los espectros de arco, mientras que aparecen las rayas metálicas (potasio, calcio ionizado) después las neutras y por último las bandas moleculares.

El Sol pertenece a la clase G. Los estudios de los espectros se centran en las estrellas más brillantes, aunque desde el punto de vista de la repartición numérica en las clases espectrales las estrellas calientes, visibles desde lejos, están muy favorecidas con respecto a las estrellas enanas rojas de la clase M, que son en realidad mucho más numerosas.

Distancias, volúmenes, temperaturas, masas de las estrellas

Distancias de las estrellas. — Hemos dicho en la página 267 que la determinación de las distancias de las estrellas estaba fundada en la medida de su paralaje: ángulo bajo el que se ve desde la estrella al semieje mayor de la órbita terrestre, al que se supone colocado perpendicularmente. El conocimiento del paralaje equivale al de estas distancias.

Se llaman *paralajes trigonométricos* los medidos directamente. El límite que se puede medir es 0″025 (con 0″005 de aproximación) sobre clisé fotográfico. Se llega así a estrellas cuya distancia es inferior a 40 *parsecs* (v. p. 252). Se conocen actualmente 5 500 paralajes trigonométricos.

El conocimiento de las distancias a las estrellas más lejanas puede adquirirse por diversos métodos, todos los cuales se fundan en el conocimiento previo de las 5 500 distancias básicas. Ya hemos visto en la página 252 que del conocimiento de la magnitud absoluta se deduce fácilmente la distancia; añadiremos que se puede estimar la magnitud absoluta de varias formas.

En una misma clase espectral, es decir, a igual temperatura, el resplandor intrínseco de la estrella, caracterizado por su magnitud absoluta, depende sólo de su volumen. Pero ya veremos que las masas de las estrellas son prácticamente equivalentes; la magnitud absoluta depende, en conclusión, de la densidad de la estrella, o, mejor aún, de la presión en ella existente. Ahora bien; las variaciones de presión llevan consigo variaciones de la intensidad relativa de ciertas rayas del espectro. Estas variaciones han podido ser estudiadas en las estrellas de distancia conocida, y su observación en el espectro de otras estrellas nos lleva al conocimiento de su distancia.

Otro método, muy utilizado, es el llamado de las *cefeidas*, estrellas de brillo variable con un período inferior a 45 días. Miss Leavitt descubrió en 1912 que, para las cefeidas de la pequeña *Nube de Magallanes*, el período era proporcional a la magnitud. Dado que estas estrellas se hallan sensiblemente a la misma distancia de nosotros, su magnitud no difiere más que en una constante de la magnitud absoluta (v. p. 252). Se ha podido confirmar este hecho por otras observaciones y trazar la curva fijando el período en función de la magnitud absoluta con una constante aproximada. El conocimiento de esta constante permite evaluar las magnitudes absolutas, y por lo tanto las distancias de todas las cefeidas. Basta, al efecto, determinar la magnitud absoluta de una sola de ellas. Como no existe ninguna estrella cuyo paralaje trigonométrico haya podido medirse, ha sido necesario emplear el método de los *paralajes hipotéticos*, fundado en el cambio de perspectiva producido por el desplazamiento del sistema solar hacia Apex. Las distancias determinadas por este método tienen una aproximación del 10 por 100. Pero el método alarga considerablemente el campo de nuestros conocimientos, y se puede, con él, determinar la distancia de todos los cúmulos que contienen cefeidas, lo cual se ha observado no sólo en nuestra galaxia, sino en las *nebulosas extragalácticas más cercanas* (M 31 de Andrómeda y M 33 del Triángulo, particularmente). A partir de las distancias de estas galaxias, próximas a nosotros, se podrá determinar la de las más lejanas.

Volúmenes relativos de las estrellas. Estrellas enanas y estrellas gigantes. — Hemos dicho antes que, en la misma clase espectral, la magnitud absoluta de una estrella depende de sus dimensiones. Clasificar estas estrellas por magnitudes absolutas equivale a clasificarlas por dimensiones. Se creyó que las estrellas de una misma clase espectral se agrupan alrededor de una dimensión media, mas una primera clasificación hecha por Russell en 1914 demostró que, si bien esto ocurría así respecto a las estrellas calientes de la clase A, las demás clases se agrupan alrededor de dos valores que, a medida que se desciende en la clasificación, se separan cada vez más. Se ha llegado así a distinguir las estrellas *enanas* de las *gigantes*. Las curvas muestran igualmente la existencia, en cada clase, de algunas estrellas muy luminosas, llamadas *supergigantes*, y, en las clases A y F, la de un pequeño número de estrellas de muy débil luminosidad, llamadas *enanas blancas*.

Temperatura de las estrellas. — Hemos visto en la página 254 el principio de la determinación de las temperaturas superficiales. El cuadro siguiente muestra los resultados generalmente admitidos.



Cúmulo globular de las Pléyades, con sus nebulosidades polvorientas (Doc. Observatorio Yerkes) [*Fot. Barnard*]

Temperaturas de las estrellas

CLASES	W	O	B	A	F	G	K	M
Temperaturas	20 000° a 80 000°	30 000° (O 5) a 22 000° (O 9)	20 000° (B 0)	11 000° (A 0)	7 500° (F 0)	5 600° (G 0)	4 200° (K 0)	3 200° (M 0) .... 1 500° (Mg)

Diámetro de las estrellas. — También hemos visto que la medida de la radiación permitía estimar las dimensiones de las estrellas. Un método interferométrico, fundado en la producción de franjas por la luz que proviene de los dos bordes de la estrella, permite igualmente determinar el *diámetro aparente* de estrellas muy grandes.

De las cuatro estrellas estudiadas en el cuadro inserto al pie de esta página, las dos primeras son estrellas supergigantes; las otras dos, gigantes. Encontramos en general en las estrellas enanas de la serie principal diámetros que son del orden del diámetro del Sol. En las enanas blancas, se encuentran radios comprendidos entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$ del solar. Se ve así la inmensa variedad de las dimensiones ofrecidas por las estrellas.

Masas y densidades de las estrellas. — La *masa* de las estrellas se determina como la de los planetas provistos de satélites (v. p. 267).

Existen muchas estrellas dobles cuyos componentes giran alrededor del centro de gravedad común. Se cuentan 40 de esta clase entre 130 estrellas más brillantes que la magnitud 3.

Cuando las dos estrellas no se pueden separar visualmente, la existencia del par puede ser revelado, y el movimiento estudiado, ya por observaciones espectroscópicas (v. p. 253), ya por observaciones fotométricas. Estos métodos se completan frecuentemente y permiten determinar algunas veces la distancia de la pareja.

Resultados. — El conjunto de los resultados obtenidos conduce a la importante conclusión de que, en su conjunto, *las masas de las estrellas varían poco*. Con respecto a la masa del Sol, los valores extremos de las masas van de 0,5 a 10 aproximadamente; pero para el 99 por 100 de las estrellas estudiadas la masa varía solamente entre la mitad y el doble de la del Sol.

Dimensiones de las estrellas

ESTRELLAS	CLASE ESPECTRAL	DIÁMETRO APARENTE		PARALAJE	RADIO CON RESPECTO AL SOL
		1er MÉTODO	2o MÉTODO		
α *Orionis* (Betelgeuse)...	c MO	0″047	0″045	0″011	460
α *Scorpii* (Antares)... ...	c MO	0″045	0″062	0″026	160
α *Bootis* (Arturo)	g KO	0″022	0″026	0″080	30
α *Tauri* (Aldebarán) ...	g K5	0″020	0″054	0″057	38

Cúmulo globular M 13, de Hércules, en el que se han contado 40 250 estrellas (*Fot. Observatorio de Monte Wilson*)

La diferencia entre las enanas y las gigantes consiste esencialmente en una diferencia de densidad.

Los dos croquis de la figura 48 representan la repartición de las masas y densidades de las dos ramas principales del diagrama de Russell. La interpretación de estos diagramas es de gran importancia para el estudio de la evolución de las estrellas.

Equilibrio interno de las estrellas

Las temperaturas de varios millones de grados que reinan en el interior de las estrellas llevan la materia a un grado de ionización tal que éstas, a excepción de las estrellas enanas blancas, se comportan como esferas de gases perfectos.

Hay, en efecto, una relación al menos de 1 a 10 000 entre las dimensiones del núcleo de un átomo y las del átomo en sí, y la materia ionizada podría alcanzar una densidad del orden de 1 000 sin cesar de comportarse como un gas perfecto. En esta esfera gaseosa, la presión desempeña, por otra parte, el papel de un módulo de elasticidad y, con una presión de 10^9 atmósferas, el Sol es no obstante 1 000 veces más rígido que el acero.

Homer Lane fue el primero que, hacia 1870, examinó las propiedades de una esfera de gas perfecto constituida por el hidrógeno en estado atómico. Este estudio fue considerado entonces como puramente académico. Recogido y completado a continuación por Emden, Ritter, Eddington y Chandrasekhar, ha permitido conocer las condiciones físicas que reinan en el interior de las estrellas.

Esta teoría, confirmada por la experiencia, establece que la magnitud absoluta de una estrella es función de su masa. Es la célebre ***relación masa-luminosidad de Eddington.*** Esta relación se encuentra brillantemente confirmada por la experiencia, como lo demuestra la figura 49, donde los valores experimentales se agrupan de manera perfecta sobre la curva teórica de Eddington (que toma como base Capella).

Los elementos iniciales del estudio son sencillos: un elemento gaseoso en el interior de la estrella está en equilibrio entre la presión ejercida por el peso de las capas superiores y las presiones gaseosas y de radiación que le empujan hacia el exterior. Desde el punto de vista de los cambios energéticos, el equilibrio interno de las estrellas están en equilibrio radiativo: cada capa absorbe la radiación de las capas interiores y desprende sus radiaciones propias. Esto explica que la estrella no se vacíe más rápidamente de toda su energía, pues las radiaciones de corta longitud de onda emitidas a las temperaturas considerables que reinan en el interior de las estrellas son fácilmente absorbidas. En la parte fotosférica, una capa de iones negativos de hidrógeno realiza la principal acción de absorción. El equilibrio por conducción o por convección no se concibe más que hacia la parte central o *núcleo de la estrella.*

Se ha demostrado que la presión de radiación desempeña un papel insignificante en la mayoría de las estrellas y que no llega a ser importante más que para las masas anormalmente grandes. El estudio teórico muestra que, en su generalidad, la materia estelar sufre una presión de 10^9 atmósferas.

En el centro del Sol, con una temperatura de 20 millones de grados, la presión es de 10^{11} atmósferas y la densidad 75,6.

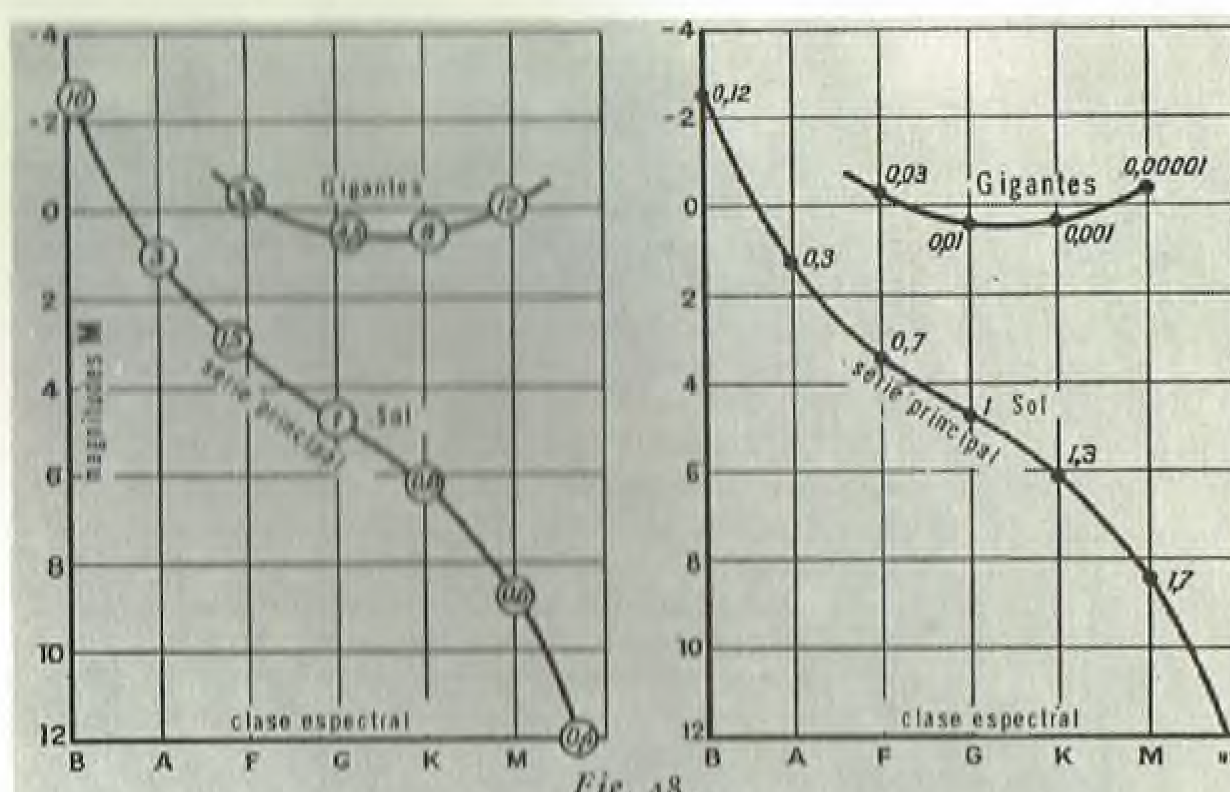


Fig. 48.

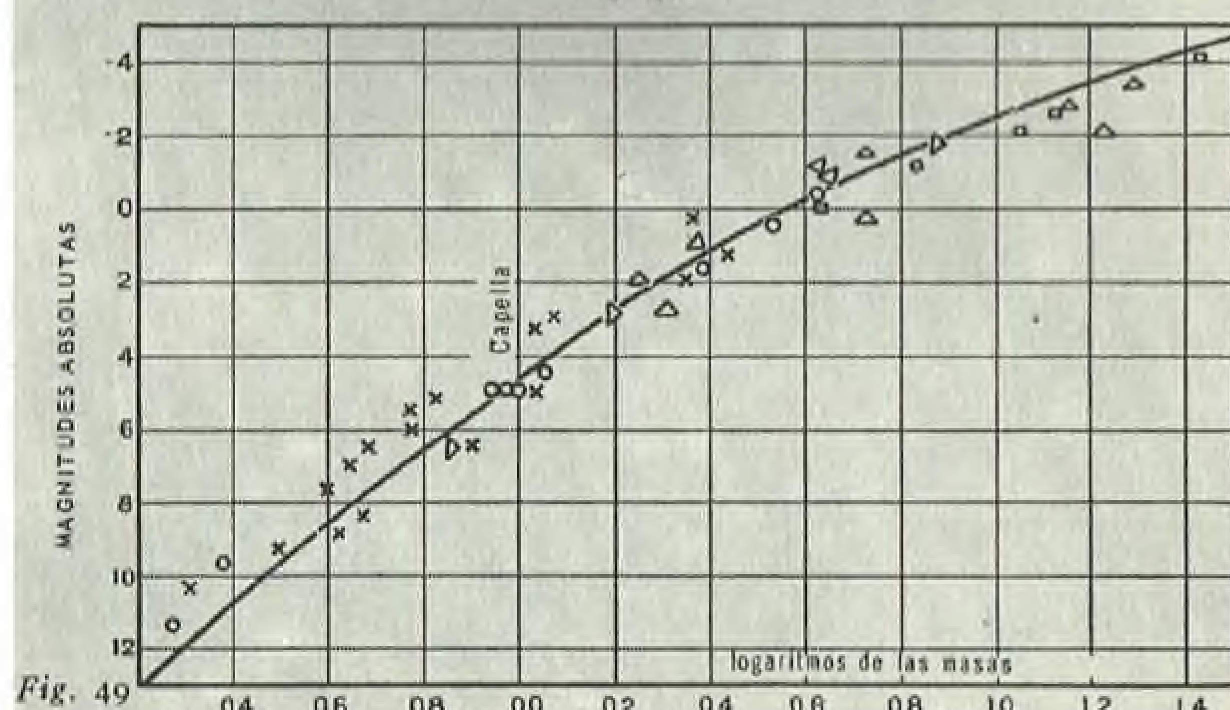


Fig. 49

Sabemos que esta temperatura decrece hasta 7 000 grados en la superficie, pero la temperatura media del astro es de 12 millones de grados. En el interior del núcleo se producen las transformaciones del *ciclo de Bethe,* que engendra toda la energía que suministra la estrella (v. p. 280).

Descripción general del universo

Determinación de las dimensiones de la Galaxia. Su rotación. Su masa. Número de estrellas. — Hemos definido en la página 264) la Galaxia, que contiene todas las estrellas de la Vía Láctea. El estudio de los *cúmulos globulares* ha permitido definir sus dimensiones.

Designamos con este nombre ciertos conglomerados esféricos redondos que contienen decenas de millares de estrellas con una gran condensación central. Ninguno de ellos pasa de la 3ª magnitud. Se conocían ya 103 cúmulos en 1888, y como no se descubren otros, se puede suponer que se conocen casi todos.



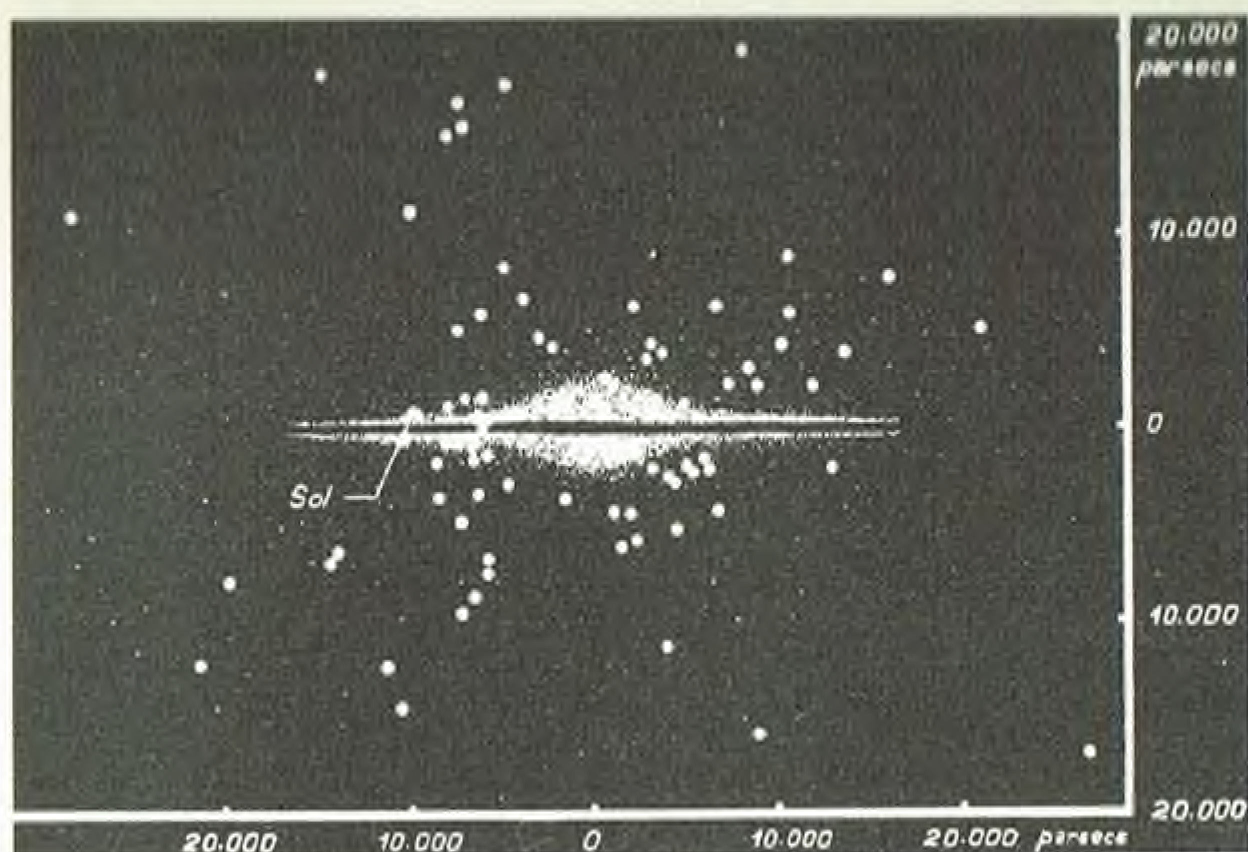


Fig. 50. Repartición de los conjuntos globulares con relación al plano meridiano galáctico pasando por el Sol (Según J. S. Plaskett, 1935)

Se han podido determinar las distancias de 19 de ellos por las cefeidas que contienen (v. p. 275). Se ha estimado la de los otros por comparación con los 19 primeros. Así se ha comprobado que los cúmulos globulares estaban repartidos simétricamente, con respecto al plano galáctico, en el interior de una esfera cuyo centro se encuentra hacia la constelación de Sagitario. Se les considera como *satélites periféricos de la Galaxia*, de la cual dan así el centro y el diámetro (*fig.* 50).

La Galaxia, que tiene seguramente una estructura en espiral, como muchas nebulosas, gira alrededor de una normal a su plano medio: esta rotación de tipo kepleriano fue puesta en evidencia, de una parte, determinando la velocidad del Sol con respecto al punto medio de los cúmulos globulares (se halla una velocidad de 270 km por segundo perpendicularmente a la dirección de Sagitario), y, de otra, por el estudio estadístico de la distribución de las velocidades de las estrellas. Este estudio difícil, ya que se efectúa sobre estrellas que están como máximo a algunos centenares de parsecs de nosotros, mientras que nosotros estamos a 9 000 parsecs del centro, nos lleva a obtener, en el caso del Sol, una velocidad de 300 km por segundo, que está de acuerdo con la precedente.

La pequeña variación de la velocidad en función de la distancia al centro enseña, por otra parte, que la masa central de la Galaxia es dos o tres veces mayor que la masa repartida por todo el espacio.

La mejor apreciación del número de estrellas de la Galaxia se deriva de este conocimiento de la masa total, estimada en 2×10^{11} veces la del Sol. Admitiendo que la mitad de la masa está condensada en estrellas, por término medio inferiores al Sol, se hallan *cien mil millones de estrellas para la Galaxia*. La otra mitad de la masa no condensada constituye la *nube cósmica interestelar* (ver más adelante).

Las estrellas variables. — Como estrellas de brillo variable hemos encontrado ya las *cefeidas típicas*, cuyo período está comprendido entre 3 y 45 días. Existen igualmente variables de un período muy corto, inferior a 0,8 de día, abundantes en los cúmulos globulares, y variables de largo período más o menos regular, como *Mira Ceti* (320 a 370 días). Todas éstas son estrellas gigantes. No hablaremos de las numerosas variables con eclipses, estrellas dobles en las que los dos componentes desigualmente luminosos se ocultan a cada rotación, ni de las *variables extremadamente irregulares*.

Se ha comprobado, en las variables regulares, que sus velocidades radiales varían con su brillo. Como se mide de hecho la velocidad radial de la superficie exterior, se admite que se trata de *estrellas pulsátiles*. De su situación en el diagrama de Russell, y de la existencia de la relación masa-luminosidad, se puede deducir una relación período-luminosidad que corresponde al descubrimiento experimental de miss Leavitt.

Las novas. — Las *novas* son estrellas cuyo brillo aumenta bruscamente de una forma considerable para volver después lentamente a su valor inicial. El aumento de brillo alcanza a veces 12 magnitudes. Su nombre viene de que no siempre se había observado la pequeña estrella primitiva. La magnitud absoluta en el momento del máximo es del orden — 7. Algunas han podido ser observadas en las galaxias próximas. Una de las más curiosas es la *Nova Aquilae de 1918*, que pasa en 3 días de la magnitud 10,50 a la magnitud — 1 (v. p. 252). Su número se estima en un millar por año y por galaxia.

Se ha podido verificar en varias ocasiones la existencia de novas reincidentes. Se trata de astros especiales que ocupan una posición particular en el diagrama de Russell. En el curso del aumento de resplandor, la temperatura de la estrella varía poco, pero el efecto Doppler muestra que corresponde a una expulsión de gas a velocidades de 100 a 1 000 km por segundo. El fenómeno se revela como una explosión que sólo afecta a la superficie de la estrella. La pérdida de energía corresponde a 1 000 y hasta 10 000 años de radiación solar, cantidad insignificante si se consideran las posibilidades subatómicas de una estrella.

Algunas veces se ven aparecer en el espectro, al cabo de varios meses, cierto número de rayas brillantes de emisión que corresponden a una envoltura gaseosa extremadamente rarificada que se disiparía en unos cuantos años.

Esto hace considerar como novas las *nebulosas galácticas* llamadas *planetarias*, que son pequeños objetos redondos de aspecto bastante parecido al de un planeta. Se conocen unas 150 y su diámetro es inferior a 1′. Se observa generalmente hacia su centro una pequeña estrella de la clase O y su espectro presenta siempre rayas brillantes que corresponden a rayas prohibidas.

Se cree que las nebulosas planetarias son remotas novas lentas que no han recobrado todavía su calma aparente.

Las supernovas. — En 1885, en la espiral de Andrómeda, una nova alcanzó la magnitud 6,5, dando un brillo superior al de la misma espiral, mientras que las novas que se descubren anualmente (alrededor de 30) alcanzan la magnitud 15.

Observaciones análogas en unas cincuenta espirales diferentes han hecho admitir la existencia de *supernovas*. Su frecuencia se estima en una por galaxia cada 400 años. La magnitud absoluta alcanza una media de — 14,5, y las velocidades de explosión registradas son de 5 000 a 10 000 km por segundo. La pérdida de energía corresponde al valor total de la energía subatómica de una estrella ordinaria. La estrella residual es al parecer una enana blanca.

En la Galaxia, se pueden citar como supernovas la nova de Tycho Brahe (1572), que iguala a Venus, y la nova de Kepler (1604). En 1940 se descubrió una nebulosidad en forma de abanico, visible sólo a la luz Hα, que le corresponde. La *Crab Nebula* de Toro aumenta 0″18 por año, y sus dimensiones sitúan el origen de la expansión en nueve siglos atrás: viejas crónicas japonesas (1054) señalan en este lugar una nova tan brillante como Júpiter. La *nebulosa filamentosa del Cisne* (v. p. 248) correspondería así a una supernova de más de 100 000 años.

Los materiales interestelares. Estrellas en formación. — Los materiales difusos son visibles en las espirales, que muestran ordinariamente bandas ecuatoriales obscuras, y en la Galaxia, donde había en abundancia nebulosas brillantes, difusas, y nebulosas obscuras llamadas algunas veces *sacos de carbón*. Pero nebulosidades invisibles se revelan igualmente por sus efectos: ocultan las estrellas, creando regiones pobres y regiones vacías de estrellas. Son ellas las que dividen la Vía Láctea en dos ramas, y también las que impiden ver las espirales y los cúmulos globulares en las proximidades del plano galáctico.



Página precedente. Abajo: La nebulosa del Cangrejo M 1 fotografiada mediante la luz del hidrógeno *alpha*. (Doc. Observatorio de Monte Wilson) [*Fot. Baade*]. *A la derecha*: La gran nebulosa espiral M 31 de Andrómeda (*Fot. Shane*)

Se ha establecido que ninguna nebulosa galáctica es brillante por sí misma; todas consisten en gas rarificado que transporta algunas finas partículas. Brillan por difusión cuando el azar las asocia a estrellas potentes, y por luminiscencia cuando estas estrellas son bastante calientes para ionizar sus átomos. Su espectro contiene entonces rayas de emisión, algunas de las cuales prohibidas (v. p. 253).

Los gases interestelares se manifiestan en los espectros de las estrellas por rayas que no participan en el desplazamiento por efecto Doppler de otras rayas; tienen su desplazamiento propio mostrando a menudo que el rayo ha atravesado nubes animadas de velocidades diferentes.

Lo esencial de los materiales intersiderales es gas, sobre todo hidrógeno. Las principales absorciones se deben a los vapores, aunque la cantidad total de éstos es insignificante. *Se estima que la masa total de los materiales, aún muy diluidos* (algunos átomos por cm3), *es equivalente a la de las estrellas.*

Glóbulos. — Se llama así a pequeñas nebulosidades redondas muy frecuentes, cuyo diámetro lineal llega a ser 100 veces el del sistema solar. Por otra parte, las técnicas del infrarrojo revelan astros gigantes todavía obscuros (1 500°). Se cree que se trata de dos fases de la formación de las estrellas a partir de los materiales difusos. La vida breve de ciertas categorías de astros brillantes implica que el nacimiento de tales astros constituye todavía un proceso actual.

Los universos extragalácticos. — El número de las nebulosas extragalácticas accesibles al gran telescopio de Monte Wilson se estima en 30 millones. Con exposiciones más largas, se podría pasar sin duda de los 100 millones, y las primeras observaciones hechas en Monte Palomar parece que permitirán quintuplicar este número.

Son cúmulos de estrellas análogas a nuestra Galaxia. Los más cercano· se revelan como estrellas. La mayor parte tienen una estructura en espiral, pero algunos son de forma elíptica, y otros de forma irregular. Ciertas teorías estiman que las nebulosas espirales corresponden a una época reciente. La rotación debe, en efecto, hacer la repartición uniforme al cabo de un pequeño número de vueltas. En las nebulosas elípticas, la aglomeración de la materia en estrellas parece terminada. No se encuentran estrellas supergigantes azules de evolución muy rápida.

La *Gran Nube* y la *Pequeña Nube de Magallanes*, que pertenecen al cielo austral, son dos galaxias irregulares próximas a la nuestra (26 000 y 29 000 parsecs).

La repartición de las galaxias en el espacio no es uniforme; están agrupadas en cúmulos de importancia desigual. Nuestra Galaxia pertenece a un grupo, llamado *cúmulo local*, del que se han identificado 19 miembros. Pero, si se considera en conjunto, la población del espacio es homogénea.

Aparte las *Nubes de Magallanes*, las dos galaxias más próximas a nosotros son *M 31 de Andrómeda*, a 276 000 parsecs, y *M 33 de Triángulo*, a 260 000 parsecs (por el método de las cefeidas). La mayor distancia estimada es de 100 millones de parsecs. Por sus dimensiones, la opinión unánime de los astrónomos señala que nuestra Galaxia, sin constituir una excepción, figura entre las más importantes. Hasta el presente, no se ha podido descubrir indicio alguno de absorción intergaláctica.

La utilización del telescopio gigante de Monte Palomar ha venido a modificar recientemente esta estimación de las distancias.

La distancia atribuida a la gran nebulosa de Andrómeda debía permitir observar en ella, con este nuevo instrumento, algunas estrellas variables fáciles de identificar (del tipo R R Lyrae). El hecho de que no se haya podido apreciar en ella más que otra categoría de estrellas de magnitud absoluta mediana —conocida igualmente y superior a la de R R Lyrae—, ha permitido deducir que la distancia calculada de 276 000 parsecs es insuficiente y que la verdadera se aproxima al doble de esa cifra.

Así, pues, ha sido preciso revisar el contraste de la curva período-magnitud absoluta de las cefeidas, pues se había fijado el origen de las magnitudes absolutas mediante la distancia de las cefeidas de corto período y se había admitido que la curva relativa a las cefeidas típicas (período de 30 a 45 días) prolongaba la de las cefeidas de corto período.

Estas conclusiones, presentadas en la Asamblea general de la Unión Astronómica Internacional, que se celebró en Roma en 1952, llevan a multiplicar por dos todas las distancias determinadas por el método de las cefeidas —es decir, todas las distancias de los universos extragalácticos— y a suponer igualmente que el valor de dos mil millones de años calculado como edad del Universo debe ser aproximadamente el doble.



Velocidad radial de las galaxias. — Si se tiene en cuenta el movimiento del Sol para reducir los resultados a velocidades con respecto a nuestra Galaxia, el efecto Doppler (v. p. 253), estudiado en los espectros de las galaxias, hace aparecer únicamente velocidades de fuga, las cuales son proporcionales a la distancia de las galaxias. La velocidad aumenta 520 km por segundo cuando la distancia aumenta un millón de parsecs. Tal es la *ley de Hubble*, enunciada en 1928, mas ésta no implica, para nuestra galaxia, una situación privilegiada: si se la considera como dentro de una nube de vapor, las distancias de las partículas a una cualquiera de ellas aumentan proporcionalmente a sus valores.

La ley de Hubble se aplica de hecho a las velocidades medias de los cúmulos, en el interior del cúmulo, y, en particular, en el cúmulo local; las velocidades están distribuidas al azar. No existe ninguna teoría a la que se pueda apelar contra la realidad de este movimiento de recesión de la Galaxia.

La mayor velocidad determinada en nuestros días es de 42 000 kilómetros por segundo. Una vez admitida la ley de Hubble, en toda nueva galaxia descubierta la medida de la velocidad de alejamiento da la distancia.

Suponiendo que el movimiento sea continuo desde un principio según la misma ley, se puede calcular que las galaxias estaban reunidas en una sola masa hace dos mil millones de años.

Las concepciones generales del universo y la relatividad

Hemos visto que las propiedades físicas del espacio en las proximidades de una masa como el Sol no son euclidianas. Las relaciones algebraicas entre ángulos y distancias pueden traducirse por la "imagen" de una curvatura local del espacio-tiempo.

A pesar de estas curvaturas locales, el universo podría ser infinito y euclidiano en su conjunto. Es mucho mejor admitir que la estructura general depende, como la estructura local, de la distribución de las masas.

Einstein realizó investigaciones en torno a la existencia de un esquema general del universo determinado por el conjunto de las masas e independiente, a primera vista, de las desigualdades locales.

En principio, Einstein admitió que la materia de las estrellas estaba uniformemente distribuida en el espacio, creando una niebla cuya densidad, no nula, era constante en cualquier lugar. En segundo lugar, las velocidades estelares le parecieron bastante débiles para admitir una agitación nula; la niebla es estática. La ley de gravitación en el vacío, que concierne a los espacios planetarios, ha debido ser completada para tener en cuenta la presencia universal de la materia.

Einstein trató de averiguar si existía una definición del elemento universo que respondiera a las condiciones siguientes:

1º Satisfacer las ecuaciones de la gravitación que él había definido;
2º Producir un espacio conforme a la teoría de Riemann, homogéneo e isótropo;
3º Admitir a primera vista un espacio euclidiano;
4º Presentar una métrica espacial independiente del tiempo.

En 1917, Einstein afirmó que, entre los tres espacios homogéneos de Riemann (espacio euclidiano, espacio de Lobatchewski —que es un espacio abierto— y espacio esférico de curvatura constante positiva, que está cerrado), sólo el tercero era compatible con las condiciones que él se había impuesto.

Pero *Lamaître* mostró que el universo estático de Einstein era inestable con respecto a la menor fluctuación de la densidad uniforme.

De Sitter, en 1917, estableció igualmente un modelo de universo que responde al problema planteado, con la condición de que la densidad sea nula. Trátase, pues, de un universo vacío utópico, pero se fijó toda la atención en él en cuanto la astronomía descubrió la fugacidad de las nebulosas espirales. En su espacio, un observador tiene la impresión de que toda partícula material se aleja de él con una velocidad proporcional a la distancia. El universo real, que no es estático —pero cuya densidad resulta débil—, parece tender hacia el vacío de De Sitter a través de una expansión indefinida.

En 1922, el matemático ruso *A. Friedmann* mostró que las dificultades debidas a la existencia de una densidad de materia no nula podían desaparecer abandonando la hipótesis de una métrica espacial independiente del tiempo. Un universo estático es imposible: el *universo está en expansión*. La naturaleza del modelo (euclidiano o curvo) está determinada por el valor de la densidad de materia; el universo en expansión sería euclidiano si la densidad fuese de 6×10^{-28} g por centímetro cúbico. Ahora bien, nuestro conocimiento de la distribución de las galaxias y de su masa conduce a un valor de 10^{-29} g por centímetro cúbico. En el estado actual de nuestros conocimientos, la solución de Friedmann sugiere, pues, un universo abierto como el de Lobatchewky, que crece con el tiempo desde cero hasta lo infinito. El descubrimiento de materiales ignorados que aumentasen la densidad convertiría el Universo en cerrado: oscilaría entre cero y un valor finito. Lemaître estableció otra solución, conservando en la ley de gravitación una constante cosmológica introducida por Einstein y abandonada en la solución de Friedmann. (Incluso Einstein se adhirió a la solución de Friedmann.)

Esta constante aparece como una fuerza de repulsión antagónica de la gravitación, y un valor particular permitiría el equilibrio del modelo estático de Einstein. En el modelo en expansión de Lemaître, el estado estático de Einstein constituye uno de los estados sucesivos alcanzados. Es un modelo hiperesférico cerrado cuyo radio R está ligado a la densidad. El modelo ha pasado por 0 hace cuatro mil millones de años, ha superado el estado estático de Einstein y tiende asimptóticamente hacia un universo de De Sitter (con un valor límite para la constante de recesión).

La evolución más rápida del modelo de Friedmann parece menos satisfactoria.

Fuentes de energía y caracteres generales de la evolución estelar

Fuentes de energía. — El fabuloso gasto de energía del Sol (v. p. 268), y el mucho mayor de ciertas estrellas, no pueden explicarse en virtud de la combustión, ni por la radiactividad natural, ni aun por la contracción del astro. Esta última será considerada para las estrellas como una energía inicial que promueve por elevación de temperatura las relaciones termonucleares.

En la formación de los átomos de oxígeno de masa atómica 16 a partir de átomos de hidrógeno de masa atómica 1,008, se ve desaparecer el $\frac{1}{125}$ de la masa. Ya en 1911, *Langevin* interpretó estas pérdidas de masa como correspondientes a la energía desprendida por la transmutación. La esencial se ha desprendido ya en la transformación de cuatro átomos de hidrógeno en un átomo de helio.

Ésta es una fuente de energía capaz de explicar la radiación solar durante cien millones de años. Se sabe hoy que tales transmutaciones entre elementos químicos simples, que existen en abundancia en las estrellas, son posibles mediante la utilización de proyectiles que tengan una energía cinética suficiente.

El agente de transmutación atómica en el seno de una estrella es el protón, producido por ionización de las masas de hidrógeno y que obtiene su energía de la elevación de temperatura. Se han podido determinar las temperaturas necesarias para dar al protón la energía que podría requerir su penetración en un núcleo atómico cargado positivamente como él, y se ha obtenido para cada elemento una *temperatura umbral*. Para los elementos más ligeros, las temperaturas empiezan a 400 000 grados, valor que puede ser alcanzado por la contracción. La fusión nuclear de estos elementos ligeros (deuterio, litio, berilio y boro), rápidamente agotados, produce un formidable suministro de energía que permite alcanzar el umbral de la reacción normal.

Para realizar la transmutación de hidrógeno en helio, no se puede suponer que cuatro átomos de hidrógeno se encuentren a la vez; es necesario establecer un proceso en el que actúa como intermediario el átomo de carbono, o sea el *ciclo de Bethe*, establecido en 1939. El átomo de helio se constituye en cuatro etapas, y el átomo de carbono se encuentra así restituido.

El átomo de helio, no afectado por las temperaturas de los núcleos estelares, se comporta como un residuo. Así, cuando todo el hidrógeno ha sido transformado en helio, la emisión de energía cesa. (La formación de los elementos pesados no puede explicarse más que por el estado "monobloc" inicial.) Dos de las reacciones del ciclo de Bethe se hacen muy lentamente y limitan el suministro energético. Su larga duración y la rareza del elemento catalizador impiden a las estrellas perder demasiado rápidamente su energía.

El proceso del ciclo de Bethe es muy sensible a las variaciones de temperatura y se produce únicamente en el núcleo central de la estrella.

Caracteres generales de la evolución estelar. — Partiendo de la duración media del ciclo de Bethe y de la proporción actual de helio y de hidrógeno en el Sol, se ha podido estimar su edad en cuatro mil millones de años, valor hacia el cual convergen las apreciaciones más diversas de la edad del universo.

Respecto a su porvenir, las apreciaciones varían de 9 a 90 mil millones de años, según se admita que todo el hidrógeno puede participar en la reacción o que ésta no interese más que a la fracción contenida en el núcleo. El helio formado es mucho menos transparente a las radiaciones cortas que el hidrógeno; la temperatura del Sol debe, pues, elevarse y la reacción acelerarse. El cálculo muestra que su irradiación alcanzará 100 veces su valor actual, después de lo cual su luminosidad y su radiación decrecerán bruscamente.

Se pensaba hace unos treinta años que las estrellas, calentándose por contracción, pasaban por todas las fases de la clasificación espectral, de la clase M (gigantes) a la clase B, para volver en seguida la clase M (enanas). Hoy se sabe que este "deslizamiento", a lo largo de la V del diagrama de Russell, exigiría un tiempo desmesuradamente más largo que los cuatro mil millones de años que hemos ya citado.

Las estrellas no han podido aún sufrir más que un principio de evolución; su diversidad proviene de la desigualdad de las masas iniciales. Las estrellas anormalmente grandes están por otra parte en desequilibrio (cefeidas, novas y supernovas).

Gamow ha establecido que las estrellas de la serie principal del diagrama de Russell corresponden al ciclo de Bethe; las estrellas variables, que están todavía en el estadio de la fusión nuclear de los elementos ligeros, no han alcanzado este estadio. Su desequilibrio podría provenir del paso del régimen de contracción al de las reacciones termonucleares.

Una supergigante infrarroja como ϵ de Auriga acaba apenas de nacer a expensas del gas cósmico y está aún en el estadio de la contracción inicial que debe suscitar las primeras reacciones.

Las gigantes blancas (γ de Cisne) son estrellas de masa grande (17 veces el Sol) que tienen una evolución rápida: en menos de 200 millones de años, habrán agotado su hidrógeno.

La fase final. Las enanas blancas. — Una vez consumidas las energías nucleares que puede liberar, la estrella se contrae y agota rápidamente su energía de contracción. Cesa de irradiar y se convierte en un cuerpo sombrío y frío.

Las *estrellas enanas blancas* parecen astros que han llegado a este estado; sólo una franja externa de gas se halla aún en estado normal.

El *Compañero de Sirio* es una enana blanca que concentra en un radio de 13 000 km (dos veces el de la Tierra) una masa equivalente a la del Sol (0,98). Su densidad alcanza 210 000 con respecto al agua. Para alcanzar tal densidad, es necesario que los átomos, habiendo perdido todos sus electrones, se hallen reducidos a su solo núcleo. La materia fría de los planetas puede igualmente ser reducida a este estado bajo el efecto de una presión suficientemente elevada. Esta presión es casi alcanzada en el centro de Júpiter, que realiza probablemente el sólido máximo.

Chandrasekhar y Kotari establecieron que el radio del cuerpo enfriado es tanto más pequeño cuanto mayor es su masa. El Sol tendrá en su estado final un radio parecido al de la Tierra. Sirio B no ha alcanzado aún totalmente este estadio.

M. DUHAMEL

BIBLIOGRAFÍA. — F. BIOSCA: *Astronomía* (Enciclopedia Labor, tomo I). Edit. Labor. Barcelona. — Enrique CALVET: *Las maravillas del Cosmos*. Edit. Plus Ultra. — José COMÁS SOLÁ: *Astronomía*. Edit. Labor. Barcelona. — Luis RODÉS: *El firmamento*. Edit. Salvat. Barcelona. — *Astronomie, les astres, l'univers*. Ed. Larousse. París.



Ciencias naturales

Introducción

Bajo el título de *Historia natural* se agrupaban antes la *Zoología*, la *Botánica* (o *Fitología*) y la *Geología*. Al perder vigencia la palabra *historia* en nuestro siglo ultracientífico, ha sido reemplazada por la de *ciencia*. Al hablar de ciencias naturales queremos mostrar que no intentamos solamente presentar y describir unos hechos o unos seres, sino explicarlos por una serie de encadenamientos de causas a efectos como se ha procedido siempre en las ciencias fisicoquímicas.

Las ciencias naturales están limitadas a los tres reinos de la naturaleza y podemos dividirlas inmediatamente en dos grupos: Zoología y Botánica, que se ocupan de los seres vivos, y Geología, conjunto de las ciencias de la Tierra.

Es evidente que las dos primeras tienen más afinidades entre sí que con la tercera y que, por lo tanto, deben admitir las mismas subdivisiones y casi los mismos métodos de investigación. Por el contrario, la Geología emplea sus métodos propios.

Ocupémonos primero de las ciencias relativas a los seres vivos. Su nombre común y más general es el de *Biología*, aunque se reserve más bien este nombre a la parte de las ciencias naturales que estudia los animales y los vegetales vivos, y no *post mortem*, como lo hacen los anatomistas.

¿Cómo procederemos en el estudio de animales o plantas? Si están vivos, veremos cómo viven, es decir, cómo se alimentan, respiran, se reproducen, etc. Estudiaremos sus costumbres (*Etología*), sus relaciones con el medio que los rodea (*Ecología*). Estas relaciones nos servirán para explicar su distribución geográfica (*Biogeografía*). Procederemos también al estudio experimental de sus funciones orgánicas (*Fisiología*), midiendo su intensidad y cociente respiratorio, ritmo cardíaco, movimiento ascensional de su savia, su digestión, asimilación, secreción, excreción, etc. Una vez muertos, estos seres serán objeto de una descripción precisa de su forma (*morfología*). La morfología interna (*Anatomía*) nos dará a conocer la disposición de los órganos internos o vísceras.

Penetrando aún más en el estudio morfológico, el microscopio nos ayuda a establecer la forma y disposición de las células en los diferentes tejidos. La *Histología* o estudio de los tejidos se completa con la *Citología* o estudio de las células.

La *Anatomía* y la *Fisiología* sirven de punto de partida a la *Medicina*, encargada de describir las anomalías que se producen en el funcionamiento de los órganos, y a la *Farmacología*, cuya misión consiste en restablecer su buen funcionamiento.

A medida que se progresa en el conocimiento de los seres vivos, se percibe la identidad profunda de los elementos que los constituyen. Si bien distinguimos una morfología animal y otra vegetal, una histología animal y otra vegetal, en realidad no hay más que una sola citología: animales y plantas se identifican en la célula.

Esta confluencia de los dos reinos se observa cuando son tratados desde el punto de vista de la clasificación (*Sistemática, Taxonomía*). Mientras que un animal y una planta superiores no pueden confundirse, la diferencia se atenúa a medida que se desciende en la doble escala de los seres. En cierto punto ya no se sabe si tal ser, unicelular o no, es un fitoflagelado por su clorofila o un zooflagelado en razón del flagelo que le permite moverse. Es posible que tales animales-plantas hayan sido el origen de la vida sobre nuestro globo.

Hemos dicho que la Geología era, a primera vista, una ciencia muy distinta de las precedentes. Al querer definir las limitaciones de esta afirmación pensamos en seguida en la *Paleontología*, enlace fundamental entre zoólogos, botánicos y geólogos. Consagrada al estudio de los fósiles, es decir, de los restos conservados en las capas del suelo, de animales y plantas que vivieron en otros tiempos en la superficie de la Tierra, esta ciencia es evidentemente más biológica que geológica. Sin embargo, los fósiles no tienen solamente valor como testigos de la evolución de la vida sobre el globo, sino también para la determinación de los terrenos en que se encuentran. Como las medallas y monedas descubiertas por los arqueólogos en los monumentos antiguos, los fósiles permiten fechar los estratos de la corteza terrestre y se convierten así en los fundamentos de la *Estratigrafía*.

Desde luego, el geólogo estudia también las rocas sedimentarias que constituyen esos mismos estratos, las rocas metamórficas que han podido cambiar con el paso del tiempo y las rocas eruptivas que las atraviesan. Así nace una nueva ciencia, la *Petrografía*, que es homóloga de la Histología de los seres vivos. Y de la misma manera que los tejidos están compuestos por células, las rocas están constituidas por minerales. A la Citología corresponde, por consiguiente, la *Mineralogía*.

La historia antigua de la Tierra sólo se comprende en función de su vida presente, por lo que el geólogo debe conocer los "órganos y funciones terrestres" que son la atmósfera, las corrientes de agua (de superficie o subterráneas), las montañas, los glaciares, los mares, los volcanes, los terremotos, etc. Las ciencias particulares que se ocupan de su estudio son la *Meteorología*, la *Espeleología*, la *Orología*, la *Glaciología*, la *Oceanografía*, la *Vulcanología* y la *Sismología*.

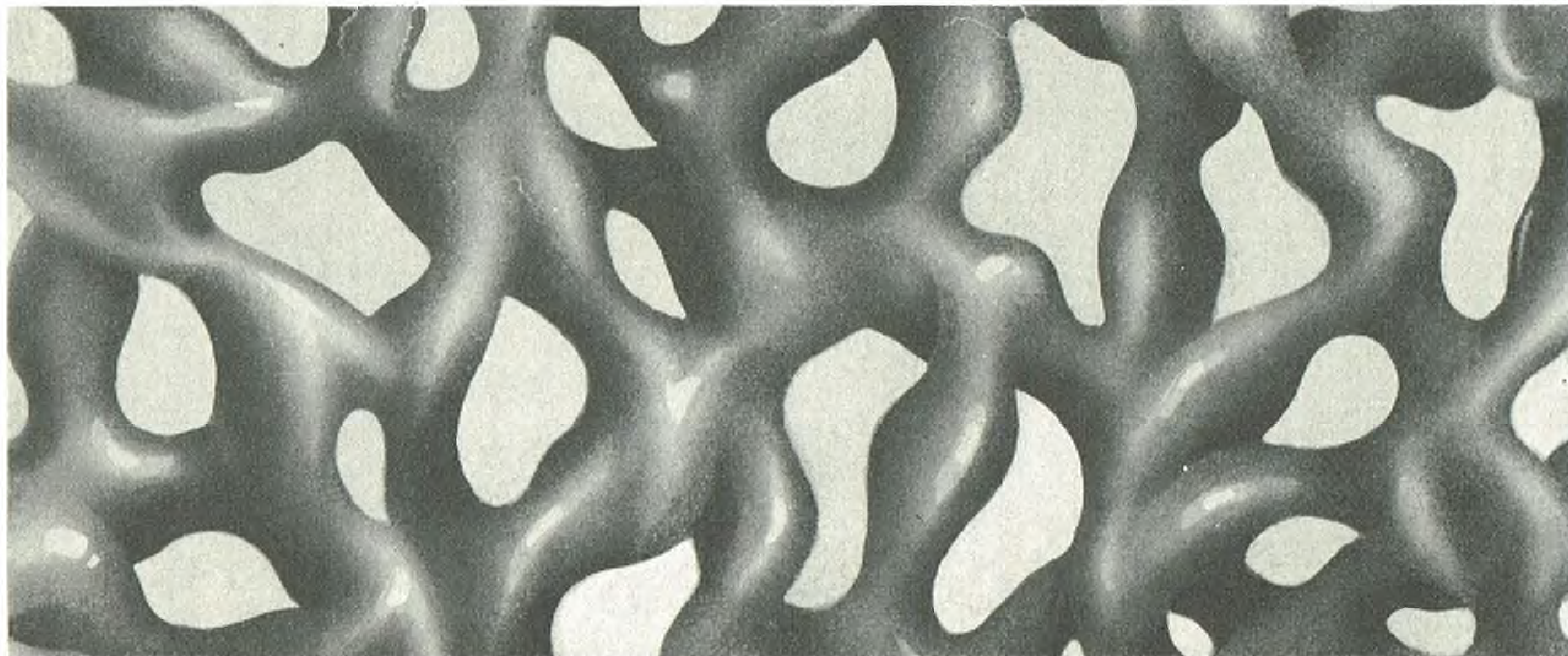
Gracias a todas estas ciencias, el geólogo puede explicar la evolución terrestre a través de los dos mil millones de años que nos separan de la primera solidificación de la corteza. El estudio de la estructura y de la génesis de las cadenas de montañas que se han sucedido en el transcurso del tiempo (*Tectónica*) es una ciencia de las más complejas. Las vicisitudes geográficas del globo originadas por desplazamientos de los mares las estudia la *Paleogeografía*, ciencia que cobra vida con ayuda de la *Paleobiología*, la cual reconstituye la fauna y flora desaparecidas. En contraste con este acercamiento a la Biología, podemos "salir" del globo terrestre y, gracias a la *Astronomía*, confrontar nuestro conocimiento de la Tierra con los que podemos adquirir sobre otros planetas. El estudio de los meteoritos, "mensajeros celestes", constituye el enlace directo entre la Geología y la Astronomía.

Las ciencias naturales, ¿forman en la actualidad un todo homogéneo e independiente de las otras ciencias? Evidentemente, no. De lo expuesto se deduce hasta qué punto la Física, la Química e incluso las Matemáticas les son indispensables. "La investigación —decía yo en la nota final de mi libro *Las anguilas*— exige conocimientos profundos y variados: conocimientos matemáticos, necesarios en biometría y por consiguiente en sistemática; conocimientos anatómicos; conocimientos fisicoquímicos, indispensables en fisiología [...]. Cuanto mayores sean los conocimientos que se posean antes de emprender cualquier clase de trabajo zoológico, mayores serán las probabilidades de éxito. Y lo que es verdad para la Zoología lo es también para las otras ciencias."

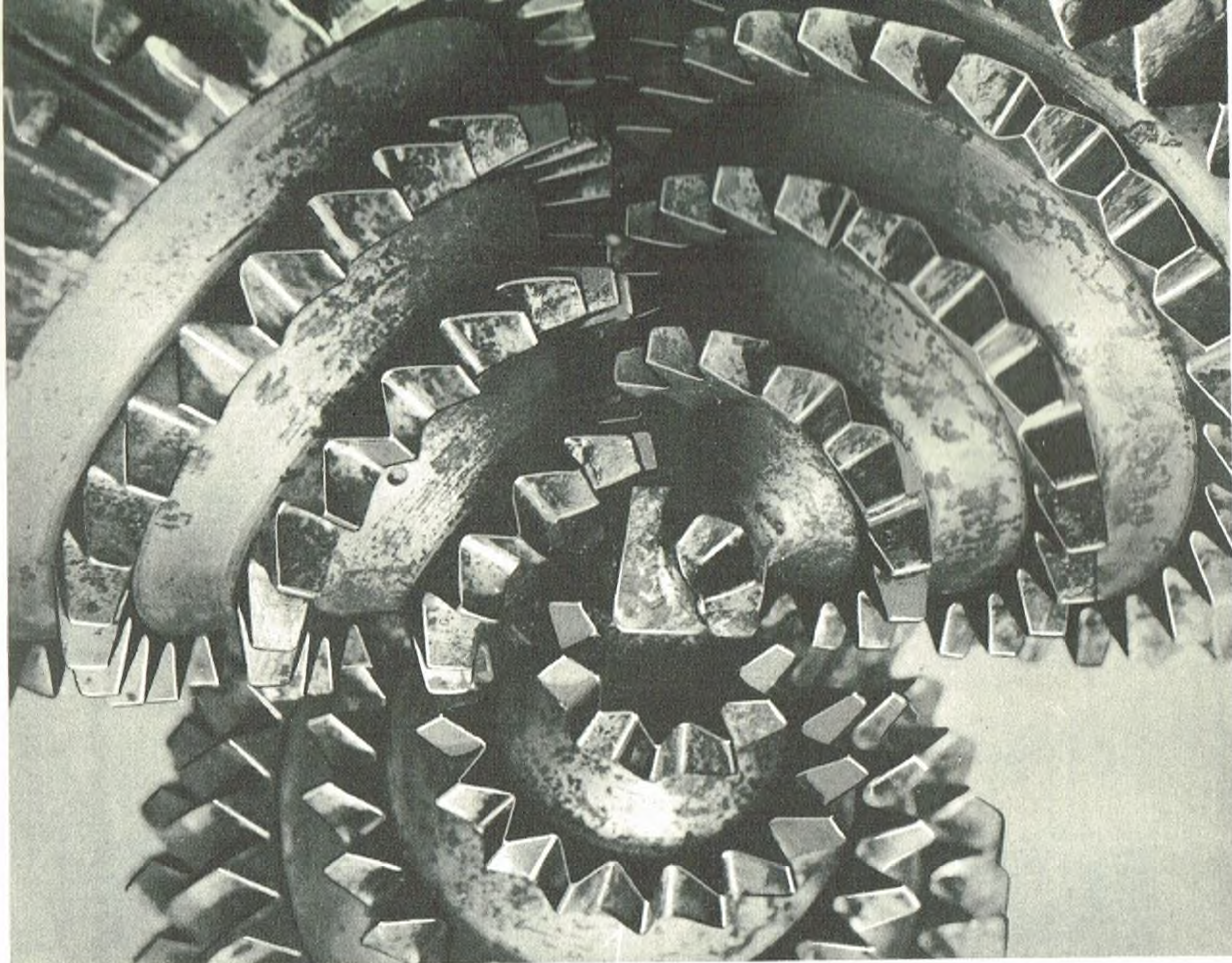
Antiguamente, los sabios estaban menos especializados que en nuestros días debido a la menor complejidad de las diversas ciencias, todavía en estado embrionario. Así, en el siglo XV, Leonardo de Vinci sobresalía como matemático, físico, ingeniero, arquitecto, anatomista y aun como paleontólogo. Junto con Bernardo de Palissy nos dio la primera concepción de la verdadera naturaleza de los fósiles. Y todo eso además de ser gran pintor, escultor, músico y poeta.

Ya casi no existen esos espíritus polivalentes. El desarrollo de cada una de las ciencias exige una especialización cada vez más precoz y cada día más estricta. A la especialización de los estudios superiores se añade la de la enseñanza secundaria, y vemos al investigador encerrado en una sola ciencia, cuando al contrario debería poder maniobrar en el límite de la ciencia que cultiva y sus vecinas. En estos dominios fronterizos es precisamente donde se realizan los más sensacionales descubrimientos.

Léon Bertin



Venas de petróleo bruto: Imagen teórica de una roca-depósito ***(Doc. Esso)***



Taladro de tres moletas encabezando las sondas utilizadas para la búsqueda del petróleo *(Doc. Esso)*

Geología y mineralogía

Introducción

La *Geología* es la ciencia de la Tierra. Su misión es estudiar la estructura del globo terrestre y explicar los fenómenos que han ocurrido en él desde la consolidación de su corteza hasta nuestros días. La Geología comprende diversas ciencias particulares que examinan nuestro planeta desde diferentes puntos de vista.

Las rocas que constituyen el suelo están formadas por agregados de cuerpos simples o compuestos: los minerales. La *Petrografía* y la *Mineralogía* tratan, respectivamente, de las rocas y de los minerales que las componen.

Además de minerales, las rocas contienen vestigios de animales o plantas hoy día desaparecidos cuya descripción es el objeto de la *Paleontología.* Gracias al estudio de estos fósiles se ha podido establecer una verdadera cronología de la historia de la Tierra y precisar las fases de su evolución; esta importante rama de la Geología es la *Estratigrafía,* llamada todavía *geología histórica.*

La *Tectónica* se basa en la observación de las deformaciones mecánicas que han originado las cadenas montañosas.

La *Geografía física* y su asociada la *Geofísica* se ocupan de las modificaciones continuas que, bajo la influencia del aire, del agua y a veces de los volcanes o los terremotos, se efectúan en montañas, valles y ríos.

La evolución de nuestro planeta se ha realizado por ciclos, en cada uno de los cuales se han repetido aproximadamente los mismos fenómenos físicos. Después de describir los materiales de la corteza terrestre, y para poder definir las fases principales de un ciclo tipo, estudiaremos la evolución de esta corteza en el tiempo tomando como base los fenómenos actuales.

Una vez expuestos los principios que rigen la evolución del relieve terrestre, abordaremos la cronología geológica y describiremos los aspectos sucesivos de nuestro planeta, así como los animales y plantas que lo habitan.

Materiales de la corteza terrestre. — Solamente la parte más superficial de la Tierra es accesible a las investigaciones humanas. Por cálculos astronómicos se ha establecido que la densidad media de la Tierra es, aproximadamente, de 5,5. Pero como la densidad media de las rocas superficiales es de 2,8, hay que concluir que el centro del Globo está ocupado por materiales de densidad superior a 5,5, en particular hierro o níquel.

Estas consideraciones, y la observación superficial de la Tierra, nos permiten distinguir: en el centro, un *núcleo* o *barisfera*; en la superficie, la *litosfera,* región parcialmente cubierta por la *hidrosfera,* y, por último, una envoltura gaseosa, o sea la *atmósfera.*

La naturaleza física exacta de la parte central del Globo nos es prácticamente desconocida. Sólo sabemos que la temperatura aumenta con la profundidad, aproximadamente 1° C por cada 30 a 33 metros. Es lo que llamamos *grado geotérmico.*

Si el grado geotérmico fuera constante, a 30 kilómetros de profundidad deberíamos encontrar una temperatura de unos 1 000° C, es decir, suficiente para mantener en fusión la mayoría de los materiales de la corteza terrestre. La teoría que imaginaba el centro de la Tierra como una masa incandescente de productos en fusión, rodeada de una película sólida, fue admitida durante largo tiempo, pero los últimos descubrimientos de la física del Globo, en particular el estudio de la propagación de las ondas provocadas por los terremotos, nos han permitido obtener los resultados siguientes: la presión en el centro es aproximadamente de tres millones de kilos-fuerza por centímetro cuadrado; la densidad, próxima a 12; la temperatura, aunque determinada con menos precisión, de tres a cuatro mil grados centígrados. Las propiedades elásticas de la parte externa del Globo, hasta unos tres mil kilómetros, son semejantes a las de los sólidos, pero experimentan cambios importantes a partir de esta distancia.

Reseña histórica

De los grandes fenómenos geológicos ocurridos en la Antigüedad, como inundaciones, terremotos, hundimientos de tierra, sólo nos han llegado consideraciones vagas. En cambio, en el trabajo de los primitivos mineros podemos ver indicios de las primeras observaciones verdadera-

mente geológicas; los fenicios fueron probablemente los introductores del arte de las minas en el mundo occidental.

Entre los primeros escritos que atañen a la Geología citaremos el *Capítulo sobre las piedras* de **Plinio el Viejo** (23-79). **Herodoto** (484-425) estableció por observación de conchas marinas que Egipto fue antiguamente un golfo marítimo. **Tales de Mileto** (640-548), **Aristóteles** (384-322), **Eratóstenes** (276-196) y **Estrabón** (58 a. de J. C. 21 d. de J. C.), describen también algunos hechos geológicos.

Hay que esperar después al fin del siglo XV para ver renacer la ciencia de la Tierra, bajo el impulso de **Leonardo de Vinci** (1452-1519) y de **Bernardo de Palissy** (1510-1589), que a partir de hechos bien observados dieron una interpretación razonable de la naturaleza de los fósiles y de la existencia de mares en el emplazamiento de continentes actuales. De esta misma época son las primeras observaciones geológicas del Nuevo Continente, debidas a, entre otros, **Pedro de Alvarado** (1485-1541), **Gonzalo Fernández de Oviedo y Valdés** (1478-1557) y el Padre **José de Acosta** (1540-1599).

Las consecuencias de los descubrimientos precedentes sobre el origen de los terrenos sedimentarios fueron expuestas en 1669 por el danés **Nicolas Stenon** (1638-1687), fundador de la estratigrafía. Y poco más o menos en la misma época **René Descartes** (1596-1650), **Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) lanzan las primeras teorías sobre el origen de la Tierra y su evolución. También en el siglo XVII se distinguieron en mineralogía **Alonso Carrillo** y **Alonso Barba,** y aparece la *Historia Natural del Nuevo Mundo,* debida a la ciencia del Padre **Bernabé Cobo** (1582-1657).

Los trabajos de **Buffon** *(Georges-Louis Leclerc, conde de)* [1707-1788] nos dan una idea bastante exacta del estado de la geología a fines del siglo XVIII. Vemos ya perfilarse varias de las futuras grandes divisiones de la Geología: estratigrafía, tectónica y paleontología.

En los últimos años del siglo XVIII y primeros del XIX, la Geología se desarrolla completamente. Se constituyen entonces dos escuelas opuestas. En Inglaterra, **James Hutton** (1726-1797) defiende el origen volcánico de la corteza terrestre, mientras que en Alemania **Abraham Werner** (1750-1817) sostiene la mayor importancia de la sedimentación provocada por el agua. Las dos escuelas, a pesar de sus errores, hicieron avanzar considerablemente la Geología, no sólo por los grandes reconocimientos de terrenos que hicieron, sino también por la calidad de los discípulos que formaron. Tres alumnos y seguidores de Werner son célebres: el explorador **Alexander von Humboldt** (1769-1859), el profesor de Geología en el Seminario de Minería de México **Manuel del Río** y el vulcanólogo **Leopold von Buch** (1774-1853).

En 1815, **William Smith** establece en dos obras los principios de la cronología geológica y aplica la paleontología a la estratigrafía, trabajo en el que fue secundado por otros investigadores como **Brocchi** (1772-1826) en Italia, **Alcide d'Orbigny** (1802-1857) y **Deshayes** (1795-1875) en Francia, y **Bronn** (1800-1862) en Alemania.

En esta misma época, **Georges Cuvier** (1769-1832) realiza sus mejores descubrimientos paleontológicos y **René-Just Haüy** (1743-1822) trabaja sobre la estructura de los cristales. Los primeros mapas geológicos de todos los países de Europa Occidental empiezan a levantarse en la primera mitad del siglo XIX.

En 1883 aparece *La faz de la Tierra,* obra fundamental del austriaco **Eduard Suess,** que anuncia y precede todas las grandes investigaciones geológicas llevadas a cabo hasta la fecha por la legión de investigadores que en el siglo XX dedican su energía al cultivo de la Geología.

Minerales

Cristalografía: Elementos de simetría de los cristales. Sistema regular o cúbico. Sistema hexagonal. Sistema tetragonal. Sistema romboédrico. Sistema ortorrómbico. Sistema monoclínico o clinorrómbico. Sistema triclínico. *Paso de sólidos característicos a formas complejas:* Truncamiento. Exfoliación. Maclas. Hemiedria. *Constitución interna y propiedades físicas de los cristales:* Propiedades físicas de los cristales. *Propiedades ópticas de los cristales: Identificación de los minerales.* — **Descripción de las especies minerales:** *Silicatos de las rocas:* Familia de la sílice. Familia de los feldespatos. Familia de los feldespatoides. Familia de las micas. Familia de los piróxenos. Familia de los anfíboles. Familia de los peridotos. Silicatos accesorios. Silicatos de alúmina. Silicatos no exclusivamente alumínicos. *Elementos de los depósitos minerales:* óxidos y sales oxigenadas no metalíferas. Fosfatos. Halogenuros. — **Minerales metálicos:** Mineralizadores. Minerales de los metales propiamente dichos: Minerales de hierro. Minerales de cobalto. Minerales de níquel. Minerales de cinc. Minerales de estaño. Minerales de plomo. Minerales de bismuto. Minerales de cobre. Minerales de mercurio. Minerales de plata. Minerales de oro y platino. Minerales de uranio. Tierras raras. *Combustibles minerales*

Las diferentes especies minerales se presentan corrientemente bajo la forma de poliedros más o menos regulares limitados por caras planas; estos poliedros han recibido el nombre de *cristales* y los cuerpos que los constituyen se hallan en *estado cristalino.* Por oposición al estado cristalino se define un *estado amorfo,* que es aquel bajo el cual se presentan los cuerpos de forma exterior indefinida, por ejemplo un vidrio.

El aspecto exterior particular de un cuerpo cristalino o amorfo revela un ordenamiento interno, igualmente particular, de las moléculas que lo constituyen. Antes de describir los principales minerales naturales, examinaremos las leyes que rigen la formación de los cristales, es decir, haremos un breve estudio de la rama de la Mineralogía llamada Cristalografía.

Cristalografía

Las múltiples formas cristalinas, que un observador inexperto puede clasificar como elementales, pueden reducirse a siete fundamentales, de las cuales se derivan todas las demás por simples operaciones geométricas.

Estos siete *sólidos característicos* permiten dividir el conjunto de cristales en otras tantas categorías de sistemas cristalinos. Los sólidos característicos no presentan todos el mismo grado de sencillez geométrica. En otros términos, son más o menos ricos en elementos de simetría.

Elementos de simetría de los cristales. — Existen tres elementos de simetría posibles: *centro de simetría, eje de simetría* y *plano de simetría.*

El *centro de simetría* de un poliedro es un punto en que todos los vértices de este sólido corresponden de dos en dos sobre una línea que pasa por dicho centro, del cual se hallan, de un lado y de otro, a la misma distancia.

Ejes de simetría son líneas rectas imaginarias que atraviesan el cristal, unen elementos equivalentes opuestos del mismo, y se cortan en el centro. Haciendo girar el cristal alrededor de esas líneas cierto número de grados, sus elementos se repiten dos o más veces en igual posición. Si las posiciones idénticas se repiten dos, tres, cuatro o seis veces en una rotación completa (360°), los ejes serán *binarios, ternarios, cuaternarios* y *senarios.* La simetría de orden cinco es desconocida en los cristales.

Plano de simetría es todo aquel según el cual el poliedro puede dividirse en dos partes exactamente iguales y que ambas estén respecto a él como el objeto respecto a la imagen en la superficie de un espejo.

Sistema regular o cúbico. — El sólido característico del que derivan todos los cristales de este sistema es el *cubo.*

El cubo se caracteriza por tener un centro de simetría, tres ejes cuaternarios, cuatro ejes ternarios, seis binarios y nueve planos de simetría.

Sistema tetragonal. — El sólido característico es un *prisma recto cuya base es un hexágono regular.*

Los elementos de simetría son: un centro de simetría, un eje senario, seis ejes binarios y siete planos de simetría.

Sistema tetragonal. — El sólido característico es un *prisma recto de base cuadrada.*

Este prisma tiene un centro de simetría, un eje cuaternario, cuatro ejes binarios y cinco planos de simetría.

Sistema romboédrico. — El sólido característico es un paralelepípedo cuyas caras son todas rombos. Este poliedro se llama *romboedro.*

Los elementos de simetría son: un centro de simetría, un eje ternario, tres ejes binarios y tres planos de simetría.

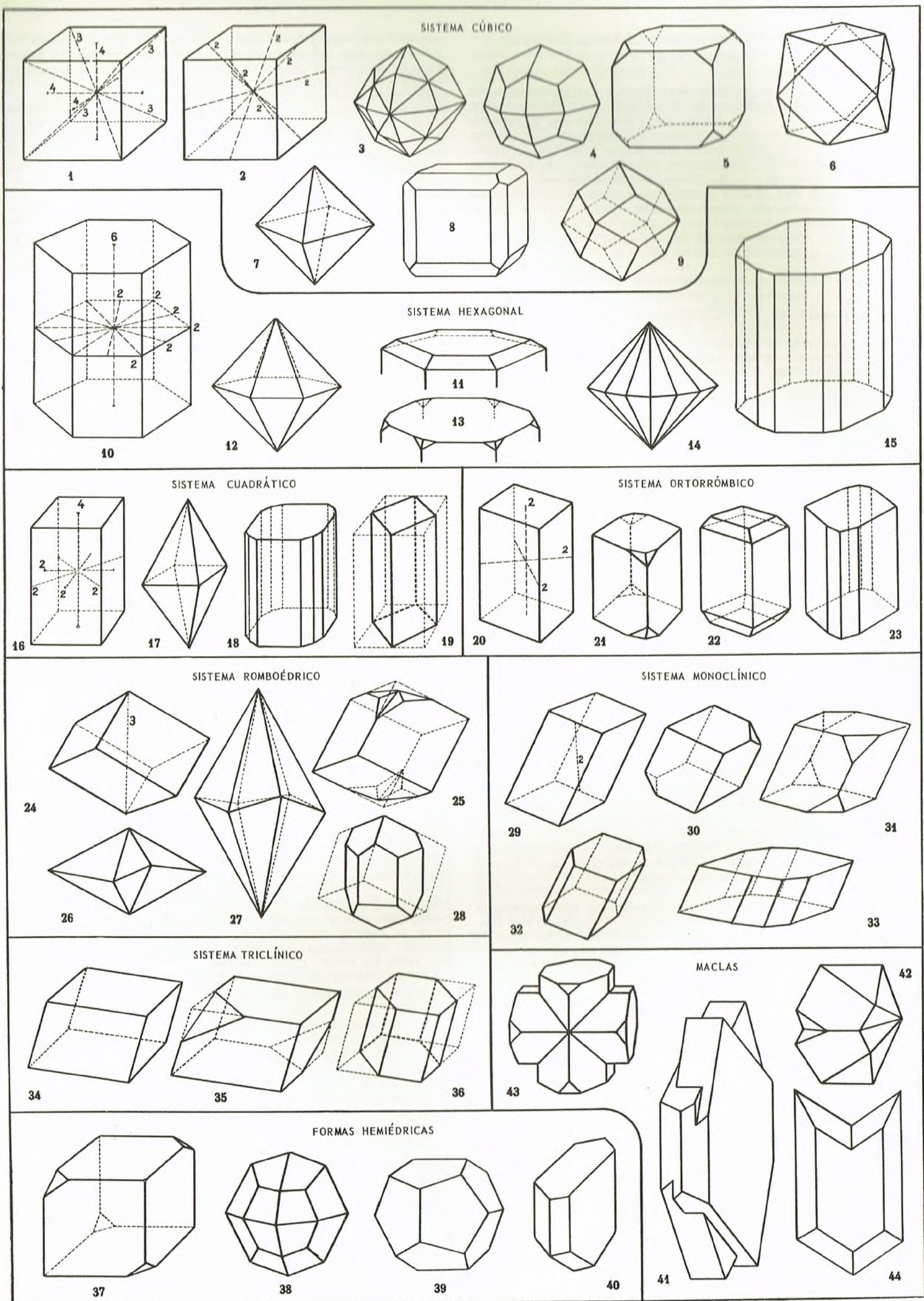
Sistema ortorrómbico. — El sólido característico es un *prisma recto de base rómbica.*

Éste presenta un centro de simetría, tres ejes binarios y tres planos de simetría.

Sistema monoclínico o clinorrómbico. — El sólido característico es un *prisma oblicuo de base rómbica.*

Este prisma no tiene más que un centro de simetría, un eje binario y un plano de simetría.

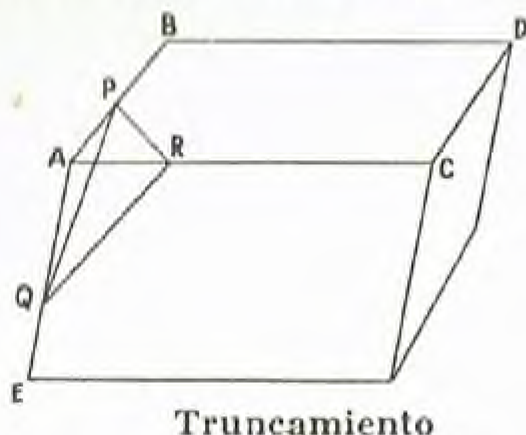
Sistema triclínico. — El sólido característico que lo define es un *paralelepípedo oblicuo cualquiera,* cuyo único elemento de simetría es un centro. Este sistema es el más pobre en elementos de simetría.



Sistema cúbico: 1, 2. Cubo (los números indican la clase de los ejes: 2 binarios, etc.); 3. Forma general de 48 caras; 4. Trapezoedro; 5, 6. Cubo octaedro; 7. Octaedro; 8. Cubo dodecaedro; 9. Rombododecaedro. — *Sistema hexagonal:* 10. Prisma recto de base hexagonal regular; 11, 13, 15. Truncamiento sobre los diferentes ángulos y aristas; 12. Pirámide diehexagonal; 14. Didodecaedro. — *Sistema tetragonal:* 16. Prisma recto de base cuadrada; 17, 18, 19. Truncamiento sobre las aristas. — *Sistema ortorrómbico.* 20. Prisma recto de base rómbica; 21, 22, 23. Truncamiento sobre los ángulos y las aristas. — *Sistema romboédrico:* 24. Romboedro; 25. Truncamiento de los vértices; 26, 27. Escalenoedros; 28. Prisma hexagonal. — *Sistema monoclínico:* 29. Prisma oblicuo de base rómbica; 30, 31, 32, 33. Truncamiento de los angulos y aristas. — *Sistema triclínico:* 34. Prisma oblicuo; 35, 36. Truncamiento sobre los ángulos y las aristas simétricos. — *Formas hemiédricas:* 37. Hemi cubo octaedro (boracita, cúbico); 38. Trapezoedro (cúbico); 39. Dodecaedro pentagonal (pirita, cúbico); 40. Ortorrómbico (calamina). — *Maclas:* 41. Ortosa; 42. Casiterita; 43. Estaurótida; 44. Yeso

Paso de sólidos característicos a formas complejas

Truncamiento. — Los cristales se presentan raramente bajo las formas elementales que acabamos de definir. Están casi siempre limitados por caras múltiples que se obtienen al *truncar* los ángulos de un prisma inicial con planos diversamente orientados. Se dice entonces que los cristales presentan truncamientos.



Truncamiento

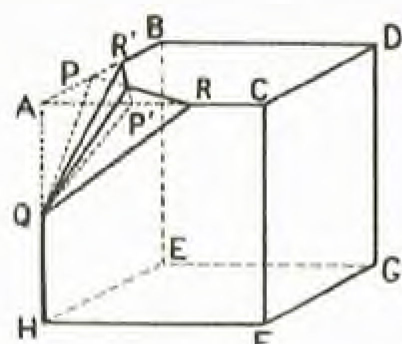
Sean *p*, *q*, *r*, números definidos por las relaciones

$$AP = \frac{1}{p}AB, \quad AQ = \frac{1}{q}AE,$$

$$AR = \frac{1}{r}AC.$$

Las proporciones $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ definen el truncamiento PQR; son racionales y generalmente simples.

El hecho de efectuar un truncamiento sobre un ángulo cualquiera de un cuerpo característico, provoca su repetición automática sobre los otros ángulos y esto en función del número de elementos de simetría que presenta dicho cuerpo.



Efectuemos un truncamiento PQR sobre el ángulo A de un cubo. En razón de la existencia del plano de simetría diagonal ADGH, el truncamiento se repetirá simétricamente en relación a este plano (P'QR') y tendremos un sólido como el representado en la figura adjunta.

Como cada elemento de simetría provocará un nuevo truncamiento, tendremos en definitiva que el solo corte PQR efectuado sobre uno de los ángulos del cubo lo transforma en un sólido de 48 facetas (*fig.* 3 lámina *Cristalografía*, pág. 285).

Las formas obtenidas por truncamiento reciben un nombre particular. La lámina de la pág. 285 muestra las principales.

Ley de Romé de L'Isle: *La forma de un cristal no está determinada por la posición absoluta de las caras que lo limitan, sino por los ángulos diedros que dichas caras forman entre sí.*

Exfoliación. — Cuando de un golpe rompemos un cristal (un romboedro de calcita, por ejemplo), los fragmentos obtenidos están limitados por planos paralelos a las caras del cristal inicial y posee cada uno todas las propiedades del ejemplar fragmentado. Esta curiosa propiedad se llama *exfoliación* y los planos privilegiados de ruptura reciben a su vez el nombre de *planos de exfoliación.*

Maclas. — Se designa con el nombre de *macla* la agrupación de dos cristales de la misma especie orientados diferentemente uno con relación al otro, y asociados sea por simple adosamiento paralelo por una de sus caras o bien por interpenetración.

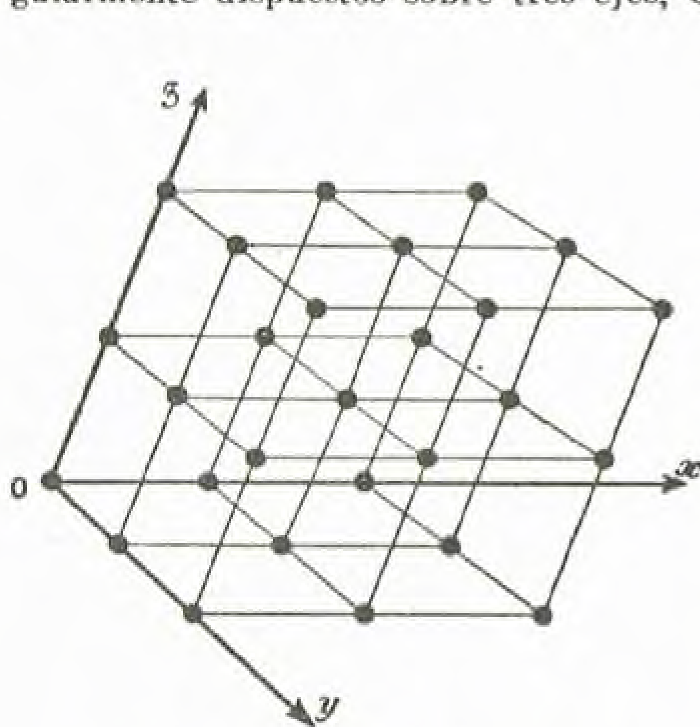
La diferencia de orientación de los dos cristales maclados se debe a una rotación de ángulo variable alrededor de un eje perpendicular a una de las caras denominada *eje de hemitropía.*

Hemiedría. — Los cristales que tienen todas las caras correspondientes al grado de simetría que les es peculiar se llaman *holoédricos.* Otros, por el contrario, no presentan más que la mitad de las caras de la forma completa y han recibido el nombre de *hemiédricos.*

Constitución interna y propiedades físicas de los cristales

Para explicar las diversas propiedades que acabamos de exponer, se han emitido numerosas teorías (Haüy, Bravais). La más comúnmente aceptada es la *reticular* de Bravais.

Según esta teoría, los átomos que constituyen el mineral están regularmente dispuestos sobre tres ejes, O*x*, O*y*, O*z*, y a distancias iguales entre sí sobre un mismo eje, aunque pueden variar de un eje a otro.



Teoría reticular de Bravais

Los átomos están dispuestos en *filas*, y cada plano, *x*O*y*, *x'*O*y'*, en el cual existen varias filas de átomos, se llama *plano reticular.*

En los últimos años, Laue y Bragg, al descubrir la difracción de los rayos X por los cuerpos cristalinos, han aportado una base muy sólida a la teoría reticular. Gracias a los *lauediagramas*, se ha llegado a estudiar el ordenamiento de las diversas moléculas y hasta la distancia entre los átomos y entre los planos reticulares.

Propiedades físicas de los cristales. — Puesto que las leyes que rigen el ordenamiento de las moléculas en un cristal son muy precisas, las propiedades físicas de los cristales guardan una relación íntima con este ordenamiento y la morfología externa que lo revela. Ésta es la primera diferencia que separa un cristal de un cuerpo amorfo formado por moléculas en desorden y en el cual no existe relación alguna entre la forma y la estructura interna.

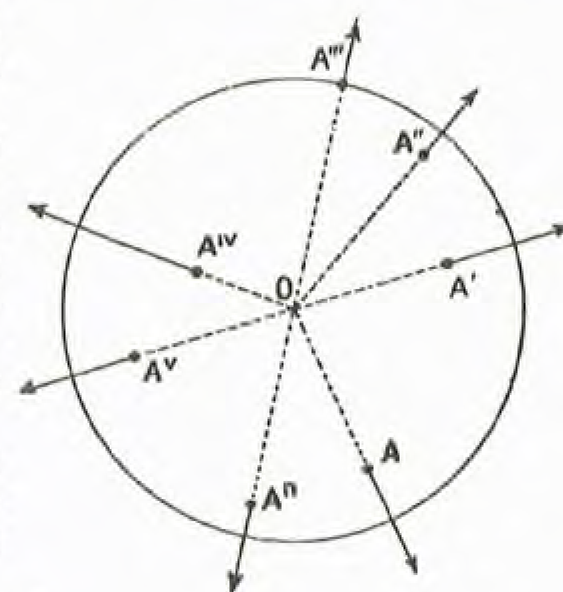

Cristales de calcita

Una experiencia muy sencilla da una idea clara de esta interdependencia. Cubramos una cara plana de un cristal con una capa ligera de parafina y apliquemos en ella la punta de una aguja caliente. La parafina fundida ocupa una superficie elíptica: *el calor no se propaga, pues, en todas las direcciones con la misma velocidad.* Repitiendo la experiencia sobre otras caras, veremos que la elipse *se orienta en relación directa con la simetría cristalina* del cristal considerado.

La conclusión que sacamos es que la conductividad calorífica varía según la dirección y es idéntica en direcciones paralelas. Lo mismo ocurre con todas las propiedades físicas del mineral (coeficiente de dilatación, elasticidad y sobre todo propiedades ópticas).

Propiedades ópticas de los cristales

En un cuerpo transparente no cristalizado, el vidrio, por ejemplo, la luz se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad, según una *superficie de onda* esférica, como indica la presente figura, es decir, la luz emitida en O llega al cabo de un tiempo determinado a los puntos A, A', A'', etc., todos a igual distancia de O.



En un cuerpo cristalizado, la luz no se propaga con igual velocidad en todas las direcciones. La superficie de onda es un *elipsoide.* El vidrio es un cuerpo *isótropo*, mientras que un cristal es *anisótropo.* (Excepto los minerales cúbicos, como veremos más adelante.)

La Física nos enseña que entre la velocidad de la luz en un medio determinado y el índice de refracción existe una relación directa:

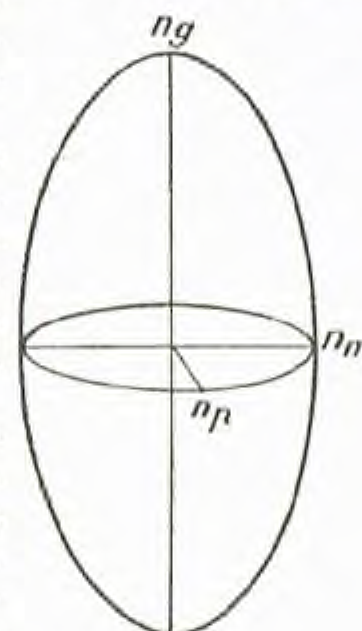
$$\frac{V}{V'} = \frac{r'}{n}.$$

Podemos, pues, reemplazar las superficies de onda que acabamos de definir por *superficies de índice.* En otras palabras, en un medio cristalino, el índice de refracción es variable según la dirección. Esta variación podemos conocerla con precisión si disponemos del elipsoide de índices.

En la práctica, esto se manifiesta en el fenómeno llamado *birrefringencia.* Cuando un rayo luminoso alcanza la superficie de separación entre el aire y un cristal, se divide en dos rayos refractados de dirección diferente. Por oposición a los cuerpos cristalinos, los cuerpos amorfos homogéneos y transparentes se llaman *monorrefringentes.* Este fenómeno se observa fácilmente al colocar un romboedro de espato de Islandia, mineral muy birrefringente, sobre una hoja de papel rayado: todos los trazos aparecen dobles.

La concordancia de la simetría externa del cristal y la del ordenamiento molecular que lo constituye se expresan en óptica de la manera siguiente:

1º *Sistema cúbico.* El elipsoide de índices es una *esfera.* Los cuerpos cristalizados en este sistema son ópticamente *isótropos.* Esto se debe a la gran riqueza en elementos de simetría molecular de los minerales de este sistema.



$np < nm < ng$

2º *Sistemas cristalinos provistos de un eje de simetría de orden superior a 2* (hexagonal, romboédrico, tetragonal). El elipsoide de los índices es de revolución. Todas las secciones perpendiculares al eje de revolución son círculos. Este eje es denominado *eje óptico*, y los minerales, *uniáxicos.*

3º *Sistemas cristalinos no provistos de un eje de simetría de orden superior a 2* (ortorrómbico, monoclínico, triclínico). El elipsoide de los índices es variable; todas las secciones son elípticas, excepto dos circulares llamadas *secciones cíclicas* (v. *fig.* adjunta). Por analogía con los minerales uniáxicos, se llaman *ejes ópticos* las dos direcciones perpendiculares a las secciones cíclicas, y *biáxicos* los minerales de estos tres últimos sistemas.

Identificación de los minerales

Para determinar un mineral, se pueden utilizar ya sus formas externas cuando las caras planas están netamente desarrolladas, ya sus propiedades físicas o químicas cuando los cristales son demasiado peque-

ños o no se han desarrollado en las condiciones necesarias para poder apreciar bien su forma.

El examen de las formas externas se hace midiendo con un *goniómetro* los ángulos que forman entre sí las diferentes caras del mineral.

Las propiedades químicas y la composición exacta del mineral se pueden poner de manifiesto mediante reacciones características (acción de ciertos ácidos, examen por el soplete, etc.).

Las propiedades físicas son la densidad, la dureza y sobre todo las propiedades estrictamente ópticas (color, refringencia, birrefringencia, poder reflector). En un estudio óptico, se mide el índice de refracción con un *refractómetro*, y la polarización de la luz con un *microscopio polarizante*, que utiliza láminas de cristal muy finas (del orden de 2/100 a 3/100 de milímetro), o una cara bien pulimentada si el mineral es opaco (estudio por reflexión).

Técnicas más recientes son el empleo del *microscopio electrónico* y de la *espectografía infrarroja.*

Descripción de las especies minerales

Los minerales naturales se dividen generalmente en:
1º Silicatos de las rocas;
2º Elementos de los depósitos minerales (óxidos y sales no metalíferas, compuestos halogenados);
3º Minerales metálicos;
4º Combustibles minerales.

Silicatos de las rocas

Casi todos los minerales que constituyen las rocas de la corteza terrestre son silicatos. El término antiguamente utilizado, "minerales de las rocas", se ha revelado impropio, ya que un mineral como la *calcita* o carbonito cálcico cristalizado debe figurar en la segunda categoría, aunque sea el constituyente casi exclusivo de todas las rocas calcáreas.

Los silicatos de rocas se dividen en grupos como muestra el cuadro siguiente:

Silicatos de rocas ígneas	Silicatos esenciales	Familia de la sílice	Cuarzo, calcedonia, ópalo, tridimita
		Familia de los feldespatos	Ortosa, microclina, anortosa, albita, oligoclasa, andesina, labrador, bytownita, anortita
		Familia de los feldespatoides	Nefelina, leucita, haüyna
		Familia de las micas	Biotita, moscovita
		Familia de los piroxenos	Enstatita, augita
		Familia de los anfíboles	Tremolita, actinota, hornablenda
		Familia de los perídotos	Olivino
	Silicatos accesorios		Circón, esfena, turmalina, topacio, esmeralda, epídota, ceolitas
Silicatos de metamorfismo	Silicatos de alúmina		Andalucita, sillimanita, cordierita, distena
	Silicatos no exclusivamente alumínicos		Granates

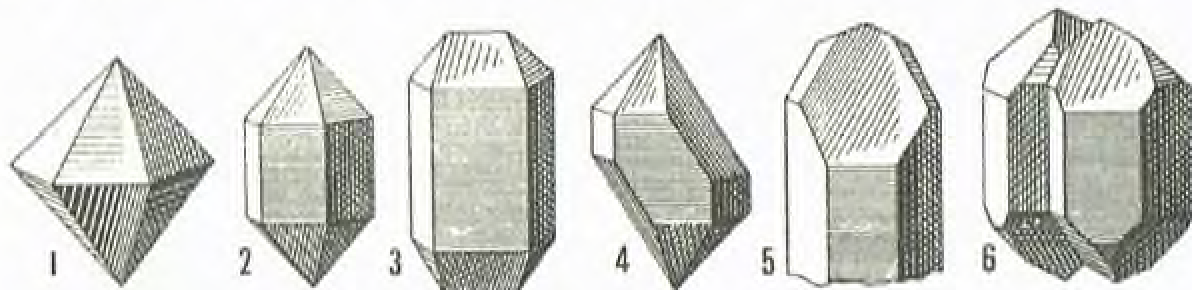
Familia de la sílice. — La *sílice* u *óxido de silicio* se presenta sea anhidra (cuarzo, calcedonia), sea hidratada (ópalo).

El *cuarzo* o *cristal de roca* cristaliza en el sistema romboédrico y su forma más característica es la de un prisma cuyas bases son dos romboedros. El cuarzo puro es incoloro (cuarzo hialino), límpido, duro, puesto que raya el acero y tiene fractura vítrea.

Esta sílice, muy abundante en la naturaleza, es uno de los elementos esenciales del granito. En las rocas eruptivas cristaliza después de que lo han hecho todos los demás minerales, de forma que sus caras cristalinas aparecen raramente.

Algunas variedades coloreadas por trazas de productos extraños son muy apreciadas: *cuarzo ahumado* (negro), *falso topacio* (amarillo), *amatista* (violeta).

El cuarzo funde a 1 685° C, pero antes se transforma en otra variedad de sílice anhidra, la *tridimita*, que es muy rara en la naturaleza, aunque frecuente en ciertas rocas artificiales (ladrillos de sílice).



CRISTALES DE CUARZO: 1. Bipiramidal; 2. Prismático; 3. Comprimido; 4. Oblicuo (esfaloide); 5. Biselado (basoideo); 6. Maclado

La *calcedonia* o *sílice de los sílex* es una forma compacta finamente fibrosa. Su superficie es amarillenta o gris azulada, con fractura concoidal, y aristas vivas y cortantes. Una variedad, el *ágata*, presenta zonas concéntricas de coloración diferente.

El *ópalo*, sílice hidratada, es un mineral coloidal.

Familia de los feldespatos. — Con el cuarzo, los feldespatos son los minerales incoloros más frecuentes. Se dividen en tres grupos:
1º Feldespato monoclínico: ortosa;
2º Feldespatos triclínicos casi monoclínicos: microclina, anortosa;
3º Feldespatos triclínicos o plagioclasas: albita, oligoclasa, andesina, labrador, bytownita, anortita.

En estado puro, estos minerales son blancos, casi opacos, pero debido a impurezas de óxidos metálicos, hierro generalmente, toman coloraciones amarillentas o rosadas. Son fácilmente alterables y presentan muchos tipos de maclas, las más características de las cuales son la de la *ortosa* (macla de Carlsbad) y la de la *albita.*

La *ortosa* es un silicato aluminicopotásico, integrante del granito. La *microclina* y la *anortosa*, muy parecidas a la *ortosa*, de la que sólo se distinguen en el microscopio, presenta una variedad de color verde esmeralda frecuentemente empleada en joyería y que, por encontrarse en la cuenca del Amazonas, recibe el nombre de *amazonita.*

Los *feldespatos plagioclasas* son silicatos aluminicosódicos y aluminicocálcicos. La *albita* no contiene más que sodio, y *la anortita, calcio.* Las especies intermedias contienen estos elementos en proporción variable y son muy difíciles de diferenciar a simple vista.

Cristal de ortosa

La alteración de los feldespatos tiene mucha importancia práctica, ya que provoca la disgregación de las rocas graníticas y conduce a la formación de productos arcillosos, entre los que cabe destacar el *caolín*, silicato de aluminio hidratado muy empleado en la fabricación de porcelana.

Familia de los feldespatoides. — Estos minerales tienen composición química análoga a la de los feldespatos, pero son más pobres en sílice y pertenecen a sistemas cristalinos más ricos en elementos de simetría que los feldespatos.

La *nefelina, silicato aluminicosodicopotásico*, es incolora y cristaliza en el sistema hexagonal.

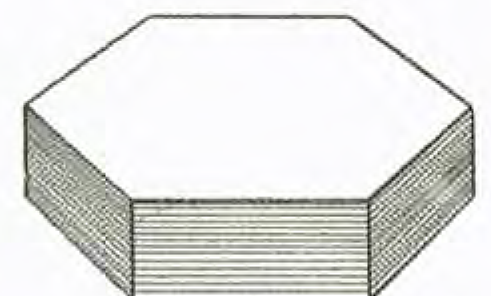
La *haüyna* y la *leucita* son minerales cúbicos que se encuentran en terrenos eruptivos.

Familia de las micas. — Las *micas* son silicatos alumínicos, con una o más bases: potasa, magnesio, litina y, en las variedades más obscuras, hierro. Todas son flexibles y elásticas y fácilmente exfoliables.

La *mica negra* o *biotita* es el mineral negro del granito. La coloración varía del verde obscuro al negro y cristaliza en el sistema hexagonal.

La *mica blanca* o *moscovita* es un silicato rico en potasa que pertenece al sistema monoclínico.

Las micas son utilizadas industrialmente, por su poder refractario, en la construcción de puertas de ciertos elementos de los aparatos de calefacción.



Prisma hexagonal de biotita

Familia de los piroxenos. — Los *piroxenos* son silicatos de hierro, de magnesio y de calcio, característicos de las rocas pobres en sílice (rocas básicas).

La *enstatita* es un piroxeno rómbico de exfoliación laminar muy fácil.

la *augita*, de color verde obscuro casi negro, pertenece al sistema monoclínico.

Familia de los anfíboles. — Los *anfíboles* tienen una composición próxima a la de los piroxenos y son, como ellos, característicos de las rocas básicas y de numerosas rocas metamórficas.

La *tremolita* y la *actinota* son anfíboles en prismas radiantes, aciculares. El *asbesto* o *amianto* es una variedad de tremolita hidratada.

La *hornablenda verde* o *negra* se presenta en prismas de sección hexagonal. Es elemento esencial de muchas rocas eruptivas y metamórficas.

Los anfíboles descritos son monoclínicos.

Familia de los peridotos. — Los *peridotos* son silicatos ferromagnésicos peculiares de las rocas muy pobres en sílice. La principal especie, el *olivino*, es de color verde oliva, como indica su nombre, y cristaliza en el sistema rómbico en forma de prismas algo alargados. Sin embargo, cuando está bien cristalizado, es transparente y límpido, y se emplea en joyería como piedra preciosa denominada *crisolita* y *peridoto.* Los yacimientos más ricos se hallan en el Brasil. Más o menos puro, se encuentra en todas las rocas basálticas, y una de sus variedades, la *dunita*, contiene platino.

Silicatos accesorios. — Estos silicatos, bastante comunes, se llaman así porque no desempeñan más que un papel accesorio en la clasificación de las rocas, ya que se encuentran indiferentemente en las rocas ácidas y en las básicas.

Citaremos el *circón* (silicato de circonio); la *esfena* (silicotitanato de calcio); la *turmalina*, mineral borosilicatado, frecuente en las *pegmatitas*; el *topacio*; la *esmeralda* o *berilo*, piedras preciosas que se extraen principalmente en Colombia, en los Urales y en la región de Salzburgo, y el grupo de las *ceolitas.*

Silicatos de alúmina. — Los principales silicatos de alúmina son: La andalucita, la sillimanita, la cordierita, la distena y la estaurótida.

La *andalucita* cristaliza en prismas ortorrómbicos cuya sección, cuadrada, muestra a veces una cruz muy curiosa, formada por inclusiones carbonosas;

La *sillimanita*, igualmente ortorrómbica, se presenta en masas fibrosas de agujas muy finas;

La *cordierita* o *dicroíta* se ofrece en cristales prismáticos de color azul o azul amarillo, según la incidencia de la luz;

La *distena* es triclínica y coloreada en blanco nácar o azulado;

La *estaurótida*, ortorrómbica, constituye una macla en forma de cruz llamada *crucita*.

Silicatos no exclusivamente alumínicos. — Los principales de estos silicatos son los *granates:* silicatos anhidros de aluminio, calcio, magnesio, hierro, cromo y manganeso, cristalizados en el sistema regular. Sin embargo, algunas variedades, a pesar de su forma externa, son ligeramente birrefringentes. Su color es variable (incoloro, amarillo, verde, rojo, marrón). Se clasifican, de acuerdo con su composición, en *grosularias*, *piropos*, *melanitas* y *uwarowitas*.

Elementos de los depósitos minerales

Las divisiones esenciales de este gran grupo vienen dadas por el cuadro siguiente, establecido según la composición química:

Óxidos y sales oxigenadas no metalíferas	Óxidos		Hielo, rutilo, corindón, bauxita
	Aluminatos		Espinela
	Nitratos		Nitro o salitre
	Boratos		Bórax, boracita
	Carbonatos	romboédricos	Aragonito
		ortorrómbicos	Calcita, dolomita
		hidratados	Natrón
	Sulfatos	anhidros	Anhidrita, baritina, celestina
		hidratados	Yeso, epsomita, alunita
	Fosfatos		Apatito, turquesa
	Arseniatos, antimoniatos		Farmacolita
	Volframatos, Titanatos, Niobatos		Tantalita, Niobita
Halogenuros	Cloruros		Sal gema, carnalita
	Fluoruros		Fluorita, criolita

Óxidos y sales oxigenadas no metalíferas. — El *agua*, en forma de hielo, cristaliza en el sistema hexagonal.

El *rutilo*, óxido de titanio, cristaliza en el sistema tetragonal.

El *corindón*, óxido anhidro de aluminio, es romboédrico y casi tan duro como el diamante. Ciertas piedras preciosas coloreadas son variedades del corindón: el *zafiro* (azul), el *rubí* (rojo), el *topacio oriental* (amarillo), la *esmeralda oriental* (verde), la *amatista oriental* (violeta), etcétera. La *bauxita*, de donde se extrae el aluminio, es un óxido de alúmina hidratado.

La *espinela* es un óxido de aluminio y magnesio cristalizado en el sistema cúbico o regular.

El *nitro* o *salitre* es el nitrato potásico natural, cristalizado en el sistema ortorrómbico. La *nitratina* o *nitro de Chile* es el nitrato sódico, que cristaliza en el sistema hexagonal. Se emplea como abono y como materia prima para la obtención de ácido nítrico. Como contiene una buena proporción de yodo, éste se recupera por extracción de las aguas madres de cristalización.

El *bórax* es borato sódico, y la *boracita* un óxido de magnesio y boro de simetría regular.

Los principales *carbonatos ortorrómbicos* son el *aragonito*, carbonato cálcico incoloro, y la *estroncianita*, carbonato de estroncio incoloro, rosa o verdoso.


Calcita de Belle-Croix

Los *carbonatos romboédricos* son minerales muy importantes, en especial la *calcita*.

La calcita o carbonato cálcico es el mineral que constituye los terrenos calcáreos. Cuando los romboedros son puros, incoloros y bien desarrollados, se la llama *espato de Islandia;* este espato es muy apreciado en la fabricación de ciertos instrumentos ópticos. La calcita es atacable por los ácidos, incluso los más débiles, lo que da lugar a desprendimiento de gas carbónico.

La *dolomita*, carbonato calcicomagnésico, es inatacable en frío por los ácidos.

La *giobertita* es un carbonato magnésico puro.

El *natrón* es carbonato cálcico hidratado.

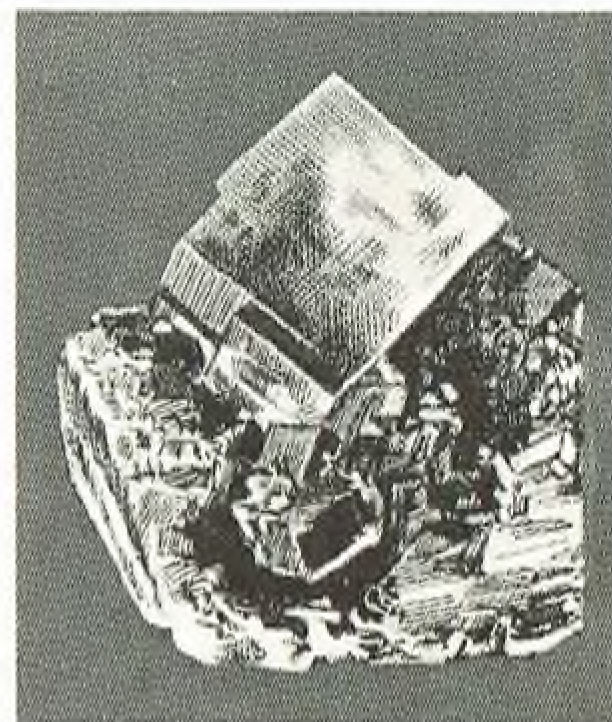
Los *sulfatos anhidros* esenciales son: la *anhidrita* (sulfato cálcico), la *baritina* (sulfato de bario) y la *celestina* (sulfato de estroncio). Por su gran densidad, la baritina es llamada muchas veces *espato pesado*.

El *yeso* es el más importante de los *sulfatos hidratados*. Es sulfato cálcico, incoloro o ligeramente amarillento, fácilmente exfoliable; se presenta a veces en maclas en forma de *punta de flecha* o de *lanza* o semejante a una *cola de golondrina*. Calentado a más de 120° pierde la mayor parte del agua y se transforma en yeso cocido apto para la construcción (estuco, escayola...).

La *epsomita* es sulfato magnésico rómbico que pertenece al grupo de los vitriolos o sulfatos heptahidratados.

Las *alunitas* o *alumbres* son sulfatos dobles de aluminio y de diversas bases, todas ellas cristalizadas en el sistema regular.

Fosfatos. — El grupo de los *fosfatos* está representado principalmente por el *apatito* o fosfato de calcio hexagonal, que existe en pequeña proporción en todas las rocas eruptivas.


Cristal de sal gema

La *turquesa* o *calaíta*, fosfato alumínico amorfo, de color azul o verde manzana, se encuentra en Irán, Estados Unidos y México.

La *farmacolita* es arseniato cálcico; la *tantalita*, óxido de hierro y de tantalo, y la *niobita*, niobotantalato de hierro.

Halogenuros. La *sal gema* es cloruro sódico que cristaliza en el sistema regular, y la *carnalita*, cloruro potásico, ortorrómbico.

La *fluorina* o *espato flúor* es fluoruro cálcico y se presenta en bellos cristales regulares incoloros o ligeramente teñidos de azul o violeta.

La *criolita*, mezcla de fluoruro de aluminio y fluoruro sódico, pertenece al sistema triclínico.

Minerales metálicos

Las divisiones principales de este tercer gran grupo de minerales se establecen en el cuadro siguiente:

Mineralizadores	Mineralizadores propiamente dichos	Elementos mineralizadores	Azufre, arsénico, antimonio
		Combinaciones mutuas de estos elementos	Oropimente, estibina, rejalgar
	Minerales de los metales que dan ácidos o bases	Molibdeno	Molibdenita
		Cromo	Cromita
		Volframio	Volframita
		Manganeso	Pirolusita
Minerales de los metales propiamente dichos	Minerales de	hierro	Pirita, oligisto, siderita
	—	cobalto	Cobaltina, esmaltina
	—	níquel	Niquelina
	—	cinc	Blenda, calamina
	—	estaño	Casiterita
	—	plomo	Galena, cerusita
	—	bismuto	Bismuto nativo, bismutina
	—	cobre	Cobre nativo, calcopirita, cuprita
	—	mercurio	Mercurio nativo, cinabrio
	—	plata	Plata nativa, argentita
	—	oro	Oro nativo
	—	platino	Platino nativo

Mineralizadores. — Los mineralizadores son los cuerpos que se combinan con los metales pesados para dar los *minerales*. Aquí estudiaremos sólo los mineralizadores sólidos.

El *azufre* es un mineral amarillo que cristaliza en el sistema ortorrómbico. Funde a 114° C, se inflama a 270° C y produce gas sulfuroso.

El *arsénico* es romboédrico, de color gris o gris negruzco. El *antimonio* es igualmente romboédrico, pero tiene color blanco de estaño y brillo metálico.

Entre las combinaciones de los mineralizadores entre sí, citaremos el *oropimente* (sulfuro de arsénico ortorrómbico), el *rejalgar* (sulfuro de arsénico monoclínico) y la *estibina* (sulfuro de antimonio ortorrómbico).

La *molibdenita* o *sulfuro de molibdeno* no tiene simetría cristalina neta. Se presenta en láminas flexibles, muy blandas, se raya fácilmente y deja una marca gris sobre el papel.

La *cromita* o *hierro cromado* es un óxido complejo que contiene, además del cromo, aluminio, hierro y magnesio. Cristaliza en el sistema regular en masas pardonegruzcas.

La *volframita*, monoclínica, es un óxido de tungsteno, hierro y manganeso, de color negro.

Los principales minerales de manganeso son la *pirolusita* (bióxido), la *manganita* (hidróxido) —los dos negros y ortorrómbicos— y la *rodonita* (carbonato), de color rosa.

Minerales de los metales propiamente dichos. — **Minerales de hierro.** — Éstos son los óxidos y los sulfuros.

El *oligisto*, romboédrico, es un óxido férrico anhidro, de color gris obscuro.

La *limonita*, amorfa, es también óxido férrico, pero hidratado y de color pardo obscuro.

La *magnetita* cristaliza en el sistema regular, es un óxido ferroso férrico y una de las mejores menas de hierro.

El carbonato de hierro es la *siderita*, romboédrica y de color pardo amarillento más o menos claro.

El sulfuro de hierro corriente es la *pirita*, cuyos cristales cúbicos son de color amarillo oro. Otra variedad es la *marcasita*, ortorrómbica, que presenta maclas características como las llamadas *cresta de gallo* y *pirita en forma de lanza*.

Minerales de cobalto. — Grupo formado por la *cobaltina*, sulfoarseniuro de cobalto, y la *esmaltina*, arseniuro de cobalto. Ambas cristalizan en el sistema regular.

Minerales de níquel. — El sulfuro de níquel es la *millerita*, llamada también *pirita capilar* o *tricopirita*, pero el mineral utilizado industrialmente es la *niquelina*, arseniuro de níquel que cristaliza en pirámides hexagonales.

Minerales de cinc. — La *blenda* es el sulfuro de cinc, regular, con aspecto de cera. La *calamina* es el carbonato de cinc, de aspecto amarillo terroso.

Minerales de estaño. — La *casiterita* es el *óxido de estaño*; es negra, con brillo metálico, y cristaliza en el sistema tetragonal.

Minerales de plomo. — La *galena* es el sulfuro de plomo, que cristaliza en el sistema regular y tiene color gris plomo.

El carbonato de plomo, la *cerusita*, es romboédrico, de color blanco y aspecto resinoso.

Minerales de bismuto. — El *bismuto* es explotado sea en estado nativo, sea en el de sulfuro o *bismutina*.

Minerales de cobre. — El *cobre nativo* cristaliza en el sistema regular, pero aparece frecuentemente en masas informes ramificadas o reticuladas.

La *calcopirita*, dorada y regular, es un sulfuro de cobre y hierro; la *calcosina*, un sulfuro de cobre negro azulado.

Los óxidos son: la *cuprita*, anhidro del sistema regular; la *malaquita*, hidróxido verde, y la *azurita*, hidróxido azul.

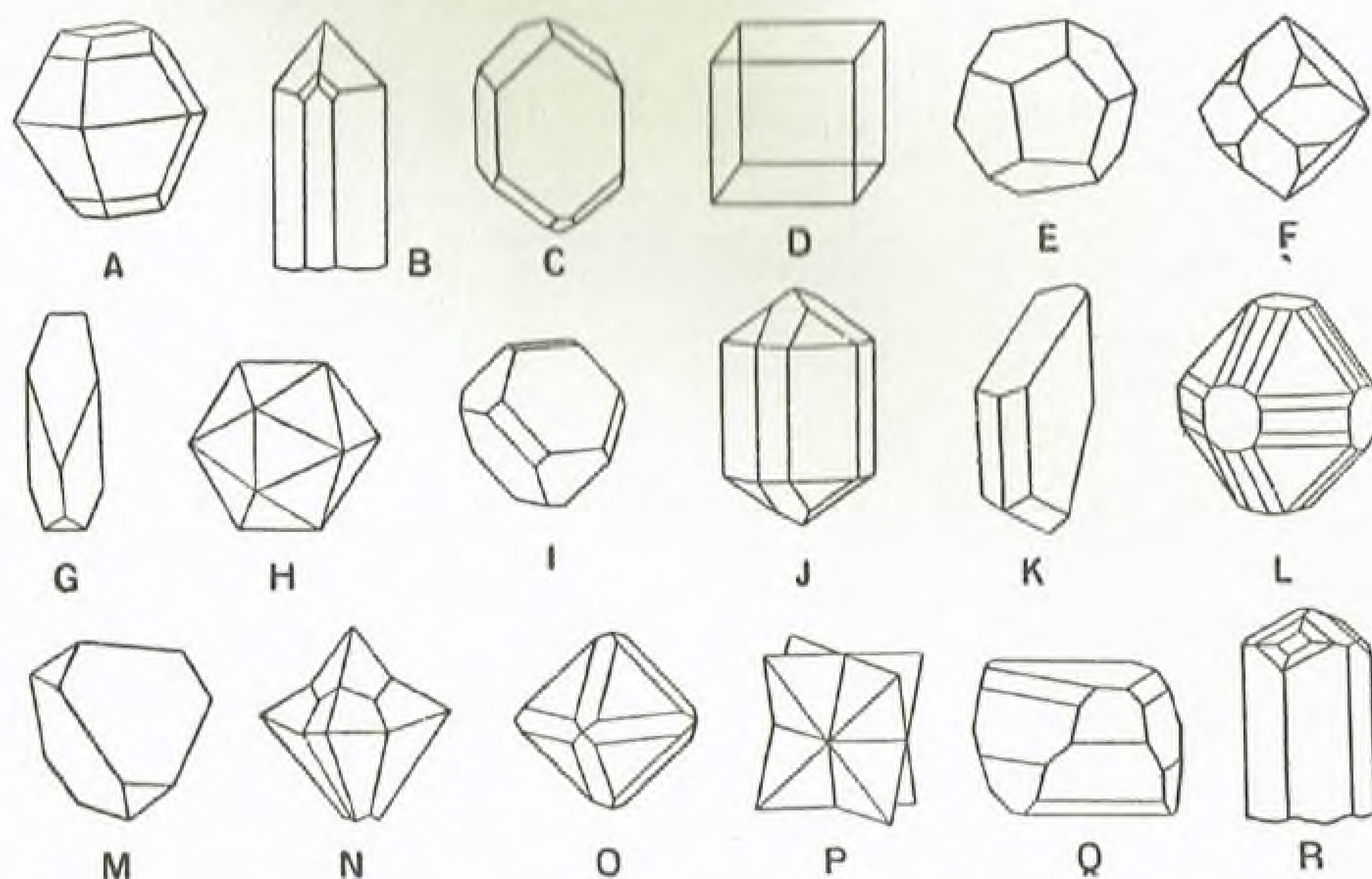
Minerales de mercurio. — El mineral corriente es el *cinabrio*, rojo cochinilla, romboédrico. Existe igualmente *mercurio nativo*, líquido a la temperatura ordinaria.

Minerales de plata. — Como el mercurio, la *plata* se presenta sea bajo forma de sulfuro o *argentita*, regular, de color gris, sea en forma de metal nativo. La *proustita* y la *pirargirita*, sulfoarseniuro y sulfoantimoniuro de plata, respectivamente, se encuentran juntas y se explotan para la extracción de la plata.

Minerales de oro y platino. — Estos dos metales se explotan en estado nativo y se encuentran en ciertas rocas y en los terrenos de aluvión.

Minerales de uranio. Tierras raras. — El principal mineral de uranio es un óxido negro, la *pechblenda*. El uranio existe igualmente en forma de silicatos, fosfatos (calcolita verde, autunita amarillo verdosa) y vanadatos (carnolita), y en combinación con los metales llamados tierras raras (niobotantalatos y niobotitanatos de uranio).

El principal mineral de torio es la *monacita*, combinación de torio con cerio y tierras raras.



MINERALES: *a*, azufre; *b*, estibina; *c*, volframita; *d*, *e*, pirita; *f*, magnetita; *g*, siderita; *h*, cobaltina; *i*, blenda; *j*, casiterita; *k*, calamina; *l*, galena; *m*, *n*, calcopirita; *o*, cuprita; *p*, calcostilita; *q*, cinabrio; *r*, pirargirita.

Combustibles minerales

Los combustibles minerales, principalmente los carbones y petróleos, son verdaderos sedimentos. Como tales los estudiaremos en el capítulo siguiente, junto a las rocas sedimentarias.

Las rocas

Rocas eruptivas: Rocas granosas. Rocas microlíticas o vítreas. Rocas microgranosas. Clasificación de las rocas eruptivas. Edad de las rocas eruptivas. — **Rocas sedimentarias:** Rocas silíceas: Rocas silíceas de origen detrítico. Rocas silíceas de origen químico. Rocas silíceas de origen orgánico. Rocas arcillosas. Rocas calizas: Calizas de origen químico. Calizas de origen orgánico. Mármoles. Calizas dolomíticas o dolomías. Depósitos salinos. Fosfato de calcio. Minerales de hierro. Combustibles minerales: Carbones. Petróleos. — **Rocas metamórficas**

Existen tres categorías generales de rocas: las *eruptivas*, las *sedimentarias* y las *metamórficas*.

Rocas eruptivas

Las *rocas eruptivas* o *ígneas* han sido consideradas durante mucho tiempo como resultado de la consolidación de magmas análogos a las lavas de los volcanes actuales.

Pero hoy, a la luz de recientes estudios fisicoquímicos —en particular el conocimiento del medio sólido y de las posibilidades de cambio de materias, sin fusión—, el problema aparece más complejo. La hipótesis magmática es todavía válida para las rocas microlíticas producto de la consolidación de lavas análogas a las de los volcanes actuales. En cambio, las rocas granosas, como el granito, parecen tener el mismo origen que las metamórficas.

Sea como fuere, estas rocas están constituidas por mezclas de silicatos cristalizados; su composición es variable, y el factor químico que las caracteriza es la proporción de sílice que contienen. Los óxidos metálicos asociados a esta sílice son esencialmente los óxidos alcalinos, alcalinotérreos, férricos o de magnesio y, siempre, aunque en débil proporción, el óxido de titanio. Los silicatos característicos están descritos en el capítulo anterior.

Aunque el estudio de las rocas eruptivas puede hacerse con una lupa, o incluso sin ella, en los laboratorios modernos se utiliza el microscopio polarizante. Al analizar con él láminas muy finas de dos a tres centésimas de milímetro, las propiedades ópticas de las diferentes especies nos permiten un diagnóstico muy seguro.

Rocas granosas. — *Tipo: el granito.* Son rocas completamente cristalizadas, cuyos elementos tienen aproximadamente la misma dimensión.

El granito es una roca muy dura, compacta, de color gris claro, formada por la reunión de tres minerales: el *cuarzo* o *cristal de roca*, el *feldespato ortosa* y la *mica negra* o *biotita*. El tamaño medio de los cristales que lo forman oscila entre uno y cinco milímetros. A simple vista se distingue el cuarzo transparente, la ortosa en secciones blancas opacas y reflejos irisados y la biotita en láminas negras de brillo característico.

Ésta es la roca más esparcida por el Globo. En Europa se encuentra en los Alpes, en los Pirineos, en los sistemas centrales español y francés, etc. En América, a lo largo de la cordillera de los Andes, en Uruguay, Brasil y Argentina (sierras de la Ventura de Córdoba, de Tandil). En México es menos frecuente.

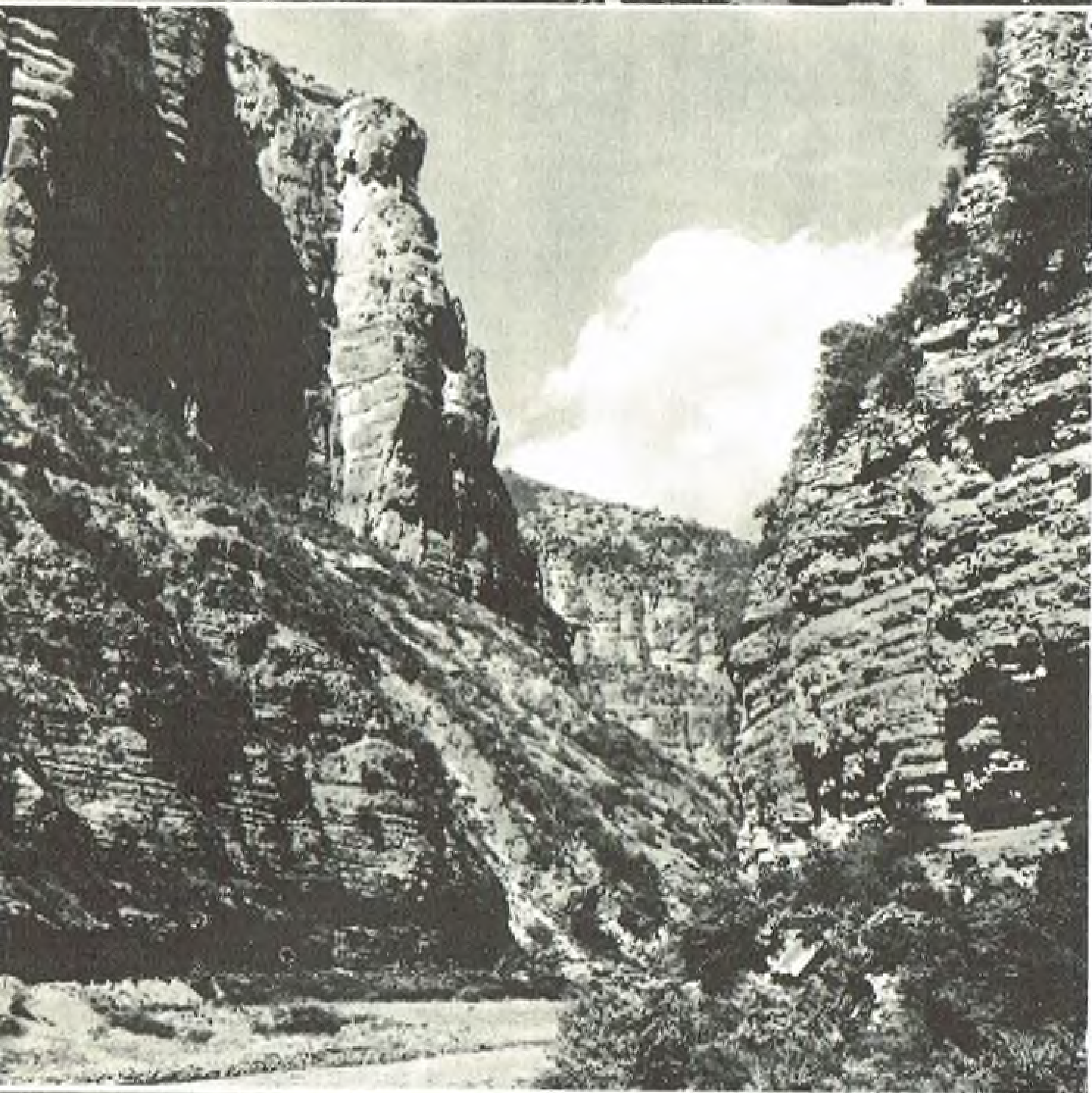
Contrariamente a lo que su dureza pudiera hacer creer, el granito se altera con facilidad; el feldespato, sobre todo, es fácilmente destruido por los agentes atmosféricos y se transforma en caolín. La roca así desagregada recibe el nombre de *arena granítica*.

Rocas microlíticas o vítreas. — *Tipo: el basalto.* Estas rocas están formadas por lavas volcánicas enfriadas, consolidadas y de estructura más o menos cristalina.

Un buen tipo de estas rocas nos lo proporciona el basalto, tan abundante en la cuenca mediterránea (Francia, España, norte de África); en las Canarias; en algunas regiones de Asia (la erupción basáltica del Decán cubre 30 000 km²) y en América: los volcanes de Masaya (Nicaragua), Colima, Jarullo, Drizala y Popocatepetl (México), San Salvador (El Salvador), Fuego (Guatemala), Antuco (Chile), etc.

A simple vista, el basalto es una roca negra compacta, de grano muy fino, que muestra con intermitencias manchas verdes debidas al peridoto. Con el microscopio se ve que los grandes cristales de periroto están separados por una pasta formada por múltiples cristales (microlitos) de feldespato plagioclasa, de peridoto o de piroxeno. Los cristales grandes de olivino se llaman *fenocristales*.







Rocas y relieves

1. Cretáceo senonense: Talud de creta blanca cargada de sílex. Acantilado de Fécamp (Francia) [*Fot. Neurdein*]

2. Esquistos rojos del Pérmico, en los que está excavado el cañón del Cians (Alpes Marítimos, Francia) [*Fot. Jean Roubier*]

3. Rocas eruptivas: Rocas microlíticas (basalto). Columnata o tubos de órgano de Saint-Flour (Cantal, Francia) [*Fot. Feher*]

4. Calcáreo urgonense y otras formaciones del final del Cretáceo. En primer plano, las agujas de Varens (2 689 y 2 548 m) y vista del Monte Blanco, más allá del valle del Arve (Alta Saboya, Francia) [*Fot. Air-Photo*]

La presencia de estos minerales cristalizados, de tamaño diferente, define la *estructura microlítica.* A veces, la pasta de microlitos contiene incluso materiales vítreos. Con ello nos acercamos a las *rocas vítreas*, cuyo ejemplo más típico es la *obsidiana*, verdadero vidrio natural.

El aspecto de las rocas microlíticas, consideradas en grandes masas, revela también su rápido enfriamiento. Así, la disposición prismática de ciertas coladas origina las "columnatas" o "tubos de órgano" característicos de ciertas formaciones basálticas.

Rocas microgranosas. — La estructura de estas rocas es intermedia de la granosa y la microlítica. Como en el caso del basalto, se observan grandes cristales y una pasta que sirve de cemento. Los cristales grandes tienen a veces varios centímetros de longitud, y la pasta, que nunca contiene vidrio, es cristalina.

Las rocas vulgarmente llamadas *pórfidos* tienen estructura microgranosa y son más antiguas que las microlíticas.

Clasificación de las rocas eruptivas. — El problema de la clasificación de las rocas eruptivas es bastante delicado, puesto que existen infinitas clases que sólo se diferencian en la proporción de sus componentes. El criterio más seguro es clasificarlas de acuerdo con la presencia o ausencia de cuarzo y feldespato. La presencia de cuarzo cristalizado subraya la abundancia de sílice en el medio original y caracteriza las rocas *ácidas* o *leucocratas*, de color claro. La ausencia de cuarzo es característica en las rocas *básicas (melanocratas)*, que, en compensación, son más ricas en minerales ferromagnésicos (peridotos, piroxenos, anfíboles) y, por lo tanto, de color más obscuro.

Edad de las rocas eruptivas. — Esta edad se determina por la observación de los sedimentos que han cubierto las rocas (sedimentos más recientes) o que han sido cubiertos y han sufrido el metamorfismo de dichas rocas (sedimentos más antiguos).

La edad de las rocas eruptivas, es decir, la de su génesis, es absolutamente independiente de su naturaleza y estructura (por ejemplo, granitos arcaicos y granitos ternarios, que son idénticos petrográficamente).

Rocas sedimentarias

Las *rocas sedimentarias*, dispuestas en capas paralelas o estratos, pueden tener varios orígenes. Algunas resultan de la aglomeración de fragmentos arrancados a otras rocas preexistentes: *origen detrítico.* Otras son el resultado de una precipitación química en el fondo de aguas marinas, pluviales o lacustres (rocas de *origen químico*), o se han formado a partir de restos animales o vegetales (rocas de *origen orgánico*).

Las rocas sedimentarias se pueden clasificar según su origen o su composición química. Nosotros adoptaremos la segunda clasificación, que es la más general.

Rocas silíceas. — Rocas silíceas de origen detrítico. — Casi todas las rocas de origen detrítico son silíceas; la sílice, representada generalmente por el cuarzo, es, en efecto, uno de los compuestos químicos más estables.

Un buen tipo de roca silícea detrítica es la ***pudinga*** o ***conglomerado***, que resulta de la reunión de cantos rodados (cuarzo, sílex o fragmentos de rocas eruptivas) soldados por un cemento.

Las *brechas* son de composición análoga, pero los elementos soldados entre sí son angulosos.

La *arena* está constituida por pequeños granos de cuarzo sin soldar. La coloración es variable, blanca, amarilla u ocre cuando está impregnada de óxido de hierro.

La *arenisca* no es otra cosa que arena soldada con un cemento silíceo, que puede cristalizar de nuevo en forma de cuarzo y dar la *cuarcita.* Otras variedades son la piedra *molar*, el *asperón* y la *molasa.*

Rocas silíceas de origen químico. — A esta categoría pertenecen los sílex, la lidita y el travertino silíceo.

Los **sílex,** que se encuentran en terrenos cretáceos, son nódulos más o menos grandes de color pardo. Por percusión se rompen y sus aristas son muy vivas y cortantes. Una de las principales especies es el *pedernal* o *piedra de chispa* empleada en épocas prehistóricas para obtener fuego, y siglos más tarde como *piedra de fusil;* otra es la *piedra molar*, tan abundante en la cuenca de París.

La *lidita*, de grano finísimo, muy dura y compacta, es de color negro o rojizo.

El *travertino silíceo* es un agregado de sílice amorfa que contiene cierta proporción de agua.

Rocas silíceas de origen orgánico. — Éstas son bastante raras. Citaremos los *barros de radiolarios*, formados en el fondo de los océanos por depósito de animales microscópicos *(radiolarios)*, y las *tierras de diatomeas*, resultado de la acumulación en el fondo de aguas dulces de restos de estas algas microscópicas de caparazón silíceo. La *harina fósil* formada por estos esqueletos silíceos *(trípoli)* es empleada en la industria para pulir metales, absorber la nitroglicerina y fabricar la dinamita.

Rocas arcillosas. — Las *arcillas* son rocas detríticas que se forman en el fondo del mar o de ciertos lagos de aguas tranquilas por depósito de limos o lodos impapables, y abundan en la Naturaleza.

El aspecto terroso de las arcillas y su suavidad al tacto son característicos. Existen arcillas de todos los colores: blancas, rojas, verdes, azules, negras, etc., y sometidas a la acción del agua dan una pasta plástica.

Las arcillas están constituidas esencialmente por silicato de alúmina hidratado asociado a ciertos productos sedentarios, como el óxido de hierro o el cuarzo, en forma de pequeños granos, y su origen hay que buscarlo en la destrucción de los silicatos alterables de las rocas eruptivas, en particular feldespatos.

El *caolín*, arcilla blanca muy pura, es el resultado de la transformación de rocas eruptivas ricas en *pegmatitas.*

La *bauxita* o *mineral de aluminio* se presenta con aspecto arcilloso. Es blanca, amarilla o roja.

Rocas calizas. — Las *calizas* son, con las *arcillas* y las *margas* (arcillas con caliza o dolomía), las rocas sedimentarias más abundantes. Existen muchas variedades, todas ellas constituidas por diminutos cristales de *calcita.* Su color es variable, generalmente claro; el acero las raya fácilmente, y son atacables incluso por los ácidos más débiles, con desprendimiento de gas carbónico.

El calor descompone las calizas en gas carbónico y cal, por lo que son utilizadas industrialmente para preparar este último producto.

Calizas de origen químico. — El *carbonato cálcico* es insoluble en el agua ordinaria de lagos o ríos, pero soluble en aguas con exceso de gas carbónico, toma entonces la forma el bicarbonato cálcico. Si un agua que contiene bicarbonato cálcico pierde su exceso de gas carbónico, se deposita el carbonato cálcico. Así se han formado en las grutas las estalactitas y estalagmitas.

Las *tobas* o *travertinos calizos*, de origen análogo, contienen a menudo restos de vegetales o de insectos.

Las rocas *oolíticas* son calizas marinas de origen químico, formadas por agregación de pequeños granos *(oolitas)* parecidos a huevos de pescado. Las oolitas son capas concéntricas de caliza alrededor de pequeños fragmentos de cuarzo o de conchas marinas.

	ROCAS CON FELDESPATOS						ROCAS SIN FELDESPATOS, CON FELDESPATOIDES	ROCAS SIN ELEMENTOS BLANCOS
	FELDESPATOS ALCALINOS SOLOS O DOMINANTES			PLAGIOCLASAS SOLAS O DOMINANTES				
	Cuarzo abundante	Cuarzo raro o ausente		Sin feldespatoides		Con feldespatoides		
		Sin feldespatoides	Con feldespatoides	Plagioclasas ácidas con o sin cuarzo	Plagioclasas básicas			
	Familia de los granitos	Familia de las sienitas	Familia de las sienitas nefelínicas	Familia de las dioritas	Familia de los gabros	Familia de los gabros nefelínicos	Familia de la ijolita y la misurita	Familia de las peridotitas
Estructura granosa	Granitos	Sienitas	Sienitas nefelínicas y leucíticas	Dioritas	Gabros	Gabros nefelínicos	Ijolita y misurita	Peridotitas piroxenitas, hornablenditas etc.
Estructura microgranosa	Microgranitos (pórfidos granitoideos)	Microsienitas		Micro-dioritas	Microgabros			
Estructura microlítica	Riolitas (pórfidos cuarcíferos)	Traquitas	Fenolitas y leucofonolitas	Andesitas	Labradoritas y basaltos	Tefritas y leucotefritas	Nefelinitas y leucititas	Limburgitas y augititas
Estructura vítrea	Pechteins	Obsidianas		Taquilitas				

Calizas de origen orgánico. — A esta categoría pertenecen, en primer término, las *calizas secretadas* por organismos marinos, en particular los pólipos y los corales *(calizas coralinas)*.

Otras calizas están formadas por aglomeración de fragmentos de equinodermos *(crinoideos y erizos)*.

La *creta*, por ejemplo, está formada de finísimos restos de equinodermos, moluscos y otros organismos diversos *(microforaminíferos)*.

Del mismo tipo son las calizas de *foraminíferos* gigantes llamados *numulíticos*.

Las *lumaquelas* son calizas constituidas por acumulación de conchas fósiles soldadas entre sí.

La caliza *litográfica* suministra ejemplares interesantísimos de fósiles.

Mármoles. — Se llaman así calizas muy puras susceptibles de pulimento y que son utilizadas en ornamentación.

Los *mármoles* son calizas metamórficas, en las que la calcita ha cristalizado en grandes elementos. Citaremos el *mármol sacaroide* (Carrara, en Italia), blanco, translúcido incluso en espesores de varios centímetros y que es carbonato cálcico puro. Los *jaspes* son mármoles que presentan diferentes coloraciones.

En la industria de la construcción se llama también mármoles a simples calizas compactas no metamórficas.



Caliza tosca con ceritas

Calizas dolomíticas o dolomías. — El mineral llamado *dolomía* está formado por partes iguales de carbonatos de calcio y de magnesio. Las calizas contienen frecuentemente una proporción notable de dolomía. Estas calizas dolomíticas se distinguen de las ordinarias por un ataque más difícil de los ácidos y una pátina negra característica. Sus formas de erosión son curiosas y muy pintorescas.

Depósitos salinos. — El agua de mar contiene en solución, además de cloruro sódico, otras sales; las principales son el sulfato cálcico, el cloruro y el sulfato potásico. En el transcurso de los tiempos geológicos, se produjo la evaporación del agua de las lagunas costeras, análoga a la que se produce artificialmente en las marismas, lo que condujo a la formación de depósitos salinos. En algunos casos, estos depósitos se han visto protegidos contra los agentes disolventes por otras capas de sedimentos y han podido llegar a la época actual. Los principales depósitos de *sal gema* así producidos se encuentran en Wieliczka (Polonia), Lons-le-Saunier (Francia) y Cardona (España).



Microfotografía de una caliza numulítica

Lo mismo ocurre con el *yeso* (sulfato de calcio), que existe en gran cantidad en el subsuelo parisiense, y las *sales potásicas*, explotadas en Alsacia y Stassfurt (Alemania).

Fosfato de calcio. — Los huesos de los vertebrados contienen una importante proporción de calcio. Acumulaciones de osamentas han producido grandes depósitos fosfatados cuyo valor industrial, como abonos, es muy notable. Los principales depósitos son los de los Pirineos y, sobre todo, los de África del Norte.

Minerales de hierro. — Ya hemos descrito los principales minerales en el capítulo anterior (v. p. 288 y 289). Algunos, como la *limonita o hematites parda, y la hematites roja*, constituyen verdaderas rocas sedimentarias. El óxido de hierro, asociado a proporciones variables de caliza o arcilla, es el principal constituyente de estas rocas.

Combustibles minerales. — Carbones. — Entre los diferentes tipos de rocas sedimentarias compuestas esencialmente de carbón y utilizadas como combustible, podemos establecer una clasificación según su contenido en carbono.

En orden decreciente de riqueza, tenemos la *antracita* (de 95 a 90 %); la *hulla* (de 90 a 75), dividida en categorías secundarias (hullas magras o antracitosas, hullas semigrasas, hullas grasas y carbón de gas); el *lignito* o *carbones pardos* (de 75 a 60) y la *turba* (de 60 a 50).

Todos estos combustibles son de origen vegetal, como atestiguan los numerosos restos de plantas que los acompañan.

La turba, combustible pobre en carbono que se forma todavía en los pantanos, resulta de la descomposición, *al abrigo del aire*, de grandes cantidades de materias vegetales. La descomposición se efectúa bajo el agua y es el resultado de acciones microbianas. Los carbones se han producido en condiciones análogas y se han emitido varias teorías para explicar su formación. Algunos autores piensan que los restos vegetales fueron arrancados de su lugar de origen y transportados por corrientes de agua hasta ciertos puntos privilegiados. De la misma forma en que el Misisipí arrastra hasta su delta numerosos troncos de árboles, otras corrientes de agua pudieron acumular en el período carbonífero cantidades enormes de vegetales. Este modo de formación *(alóctona o por transporte)* se aplica bien a la cuenca hullera del Macizo Central francés, donde se han encontrado helechos arborescentes fósiles con la copa hacia abajo y las raíces en lo alto.

Otros autores estiman, al contrario, que la hulla se ha formado generalmente *in situ (formación autóctona)*. Según ellos, es el resultado de la descomposición de grandes selvas, análogas a los bosques tropicales de nuestros días, constantemente inundadas. El cálculo demuestra, sin embargo, que las selvas vírgenes más densas conocidas no darían más que unos centímetros de hulla. Por esta razón, los geólogos modernos se inclinan más hacia la teoría del arrastre y acumulación.

Petróleos. — El **petróleo** o *aceite mineral* se presenta como un líquido muy viscoso, de color obscuro, pardo o negro.

En la corteza terrestre, el petróleo impregna por lo general ciertas rocas porosas, arenas o areniscas cavernosas, y se encuentra en forma de depósitos o cuencas subterráneas. Las rocas que lo contienen se llaman *rocas depósito*, por oposición a las *rocas madres* en que se ha formado. En los estratos plegados, el petróleo se acumula en los pliegues anticlinales junto con el agua salada y los gases que lo acompañan.

Estos pliegues anticlinales regulares proporcionan las mejores condiciones para la prospección y la explotación (yacimientos de los Estados Unidos y de Mesopotamia).

Los geólogos han atribuido al petróleo un origen, ya orgánico (vegetal), ya inorgánico (acción del agua sobre carburos metálicos). La teoría orgánica ha prevalecido y se considera que el petróleo es un producto de transformación de materias vegetales por la acción de bacterias anaerobias. Al producirse una putrefacción particular llamada *bituminización*, la materia orgánica se enriquece en carbono e hidrógeno. Los petróleos, constituidos esencialmente por mezclas de hidrocarburos, se pueden dividir como éstos (v. p. 343, v. VI) en *acíclicos* o *forménicos* (tipo: el petróleo de Pennsylvania) y *nafténicos* o *cíclicos* (tipo: el petróleo del Cáucaso). Algunos petróleos, por ejemplo los de Rumania, tienen un carácter mixto.

Al destilar un petróleo bruto se obtienen, primero, productos ligeros y volátiles (éter de petróleo, gasolina o bencina para automóviles, petróleo de alumbrado); después, al elevar la temperatura, el aceite pesado para motores Diesel; luego, los aceites para engrasar, el aceite de parafina, el alquitrán, y finalmente, el coque de petróleo y la vaselina.

Rocas metamórficas

Las *rocas metamórficas* son cristalinas como las eruptivas, pero sus elementos están dispuestos en estratos como los de las rocas sedimentarias. Los tipos principales de estas rocas son la micacita y el gneis.

La *micacita*, integrada por cuarzo y mica, es una roca que puede desagregarse en láminas muy finas.

El *gneis* es una roca de composición idéntica a la del granito, del que se diferencia por tener orientados los cristales. Las agujas de mica, en particular, están concentradas en capas, lo que da a la roca un aspecto de piel de cebra característico.

Se ha creído durante largo tiempo que las rocas metamórficas representaban los primeros sedimentos formados en la superficie del Globo, y que eran, por lo tanto, inmediatamente posteriores al "granito fundamental". De ahí que se las clasificara automáticamente en el Arcaico, el más antiguo de los terrenos conocidos. Esta teoría ha sido abandonada en favor de la que supone que, igual que hay rocas eruptivas de todos los períodos, las metamórficas no todas son de la misma edad. Además, estas rocas no son sedimentarias, sino resultantes de la transformación de otras sedimentarias o eruptivas bajo la acción de fenómenos químicos, térmicos o mecánicos.

Las que resultan de la transformación de rocas sedimentarias se llaman *parametamórficas*. En las grandes cuencas de sedimentación marina, llamadas *geosinclinales*, se acumulan espesores enormes de materiales, generalmente arcillosos. Estos materiales, sometidos a una fuerte presión y altas temperaturas, se encuentran en condiciones que favorecen o provocan cambios en la composición química.

Prácticamente, encontramos todas las variedades de arcilla no esquistosa y micacita. Los esquistos pizarrosos son sencillamente una forma de arcilla de metamorfismo poco acentuado.

Las rocas sedimentarias pueden transformarse también por contacto con las eruptivas que surgen en su seno *(metamorfismo de contacto)*. Este proceso, muy localizado, no alcanza nunca la amplitud del anterior, llamado *metamorfismo general*.

Las rocas metamórficas originadas por transformación de otras eruptivas se llaman *ortometamórficas*.

Existe todavía otra categoría de rocas metamórficas, es decir, las *comprimidas*, originadas por la acción de presiones considerables en ciertos lugares de la corteza terrestre en el transcurso de formación de cadenas montañosas. Gracias a estos fenómenos de *dinamometamorfismo*, el granito puede tomar un aspecto semejante a simple vista al de un gneis producido por metamorfismo general.

La evolución de la corteza terrestre en el tiempo

La corteza terrestre experimenta continuas transformaciones; está en perpetua evolución. Como ya hemos indicado, esta evolución se realiza por ciclos, cada uno de los cuales presenta una sucesión análoga de fenómenos. La evolución de la corteza terrestre se estudia aparte.

Los períodos geológicos

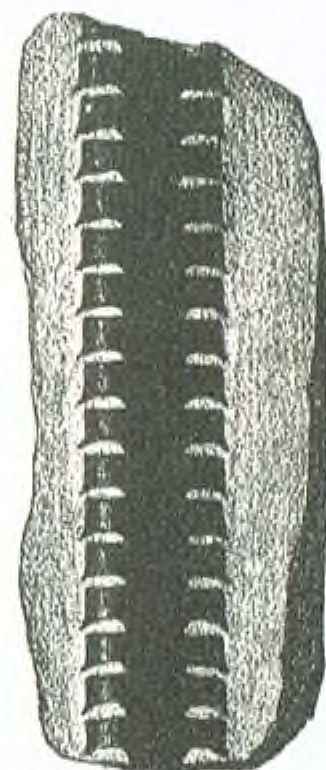
Era primaria: Animales primarios. Vegetales primarios. Cronología de los tiempos primarios. Evolución de las tierras y los mares. — **Era secundaria:** Animales secundarios. Vegetales secundarios. Cronología de los tiempos secundarios. Evolución de las tierras y los mares. — **Era terciaria:** Animales terciarios. Vegetales terciarios. Cronología de los tiempos terciarios. Evolución de las tierras y los mares. — **Era cuaternaria:** Animales y vegetales cuaternarios. El hombre fósil. Cronología de los tiempos cuaternarios. Evolución de las tierras y los mares

Los tiempos geológicos están divididos en cuatro grandes eras, que son, a partir de la más antigua: la *Era primaria*, la *secundaria*, la *terciaria* y la *cuaternaria*. Su duración es muy desigual: la Era primaria tiene ella sola una duración más grande que las otras tres reunidas. La Era secundaria es más larga que la terciaria. Por último, la Era cuaternaria, cuya distinción, ficticia, está ligada a la aparición del hombre, representa en la escala geológica un período muy corto.

Algunos autores hacen preceder la anterior clasificación de una gran época geológica llamada *Era arcaica o azoica*, la primera y más antigua de todas, caracterizada por no haberse encontrado en sus estratos restos de organismos vivientes. Esta era suele ser dividida en dos períodos: el *arcaico* propiamente dicho y el *algonquino*.

Era primaria

La **Era primaria** comienza con los terrenos más antiguos que contienen fósiles. Su límite inferior está, por tanto, mal definido y sujeto a las modificaciones que aportan los nuevos descubrimientos geológicos.



Graptolite *(Climacograptus scalaris)*

Los animales encontrados en los sedimentos primarios son muy primitivos y es característica la ausencia de mamíferos y pájaros.

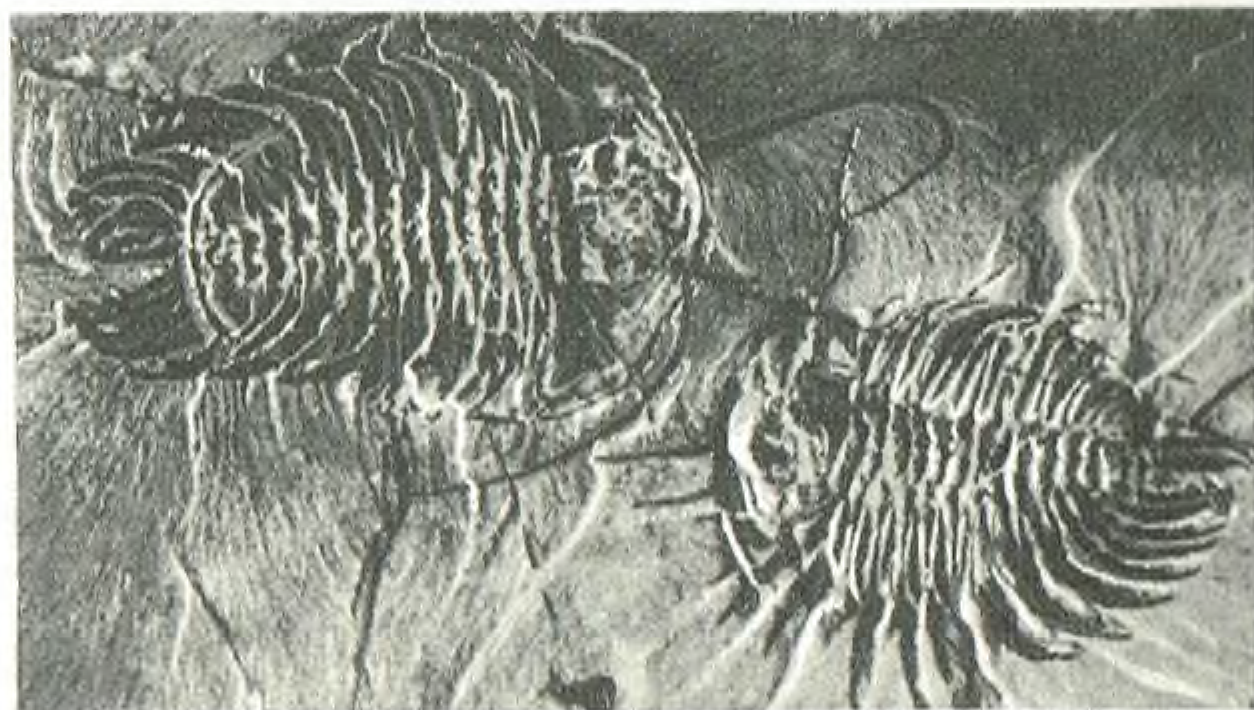
Los vegetales conocidos son plantas criptógamas y gimnospermas. No existían plantas con flores.

Animales primarios. — Los invertebrados característicos eran las fusulinas, los graptolites, los pólipos, los braquiópodos, los moluscos y, sobre todo, los trilobites.

Las *fusulinas*, animales unicelulares con concha caliza, tenían el aspecto exterior de un huso muy pequeño.

Los *graptolites*, animales nadadores, formaban colonias flotantes análogas a los *sifonóforos* actuales, y estaban provistos de una gran vesícula flotadora.

Los *pólipos* o *corales* eran muy abundantes. La acumulación de esqueletos calizos de estos animales forma capas enteras. Por analogía con las condiciones actuales de vida de los corales, se ha pensado que el clima de los lugares donde vivían era cálido y húmedo.



Trilobites vistos por su parte dorsal. El de la derecha, con las antenas y las patas visibles *(Según C. D. Walcott)*

Los *braquiópodos* se parecen exteriormente a los lamelibranquios actuales, pero su organización interna y la naturaleza de su concha son diferentes de las de los moluscos. La concha está formada por dos *valvas*, una ventral y otra dorsal. Los braquiópodos se fijaban al suelo mediante un pedúnculo.

En los mares primarios vivían numerosos *moluscos*. Los más comunes eran los *cefalópodos*, parecidos a los *nautilus* actuales. Según que la concha fuera recta, arqueada o arrollada en espiral, se distinguían los géneros *Orthoceras*, *Cyrthoceras* y *Nautilus*. Moluscos semejantes a las *amonitas* secundarias eran los *goniatites*.

Los *trilobites*, animales articulados característicos de la Era paleozoica, deben ser clasificados en el grupo de los *crustáceos*. Su nombre viene de la forma de su cuerpo, dividido longitudinalmente en tres partes. La cabeza, formada por una glabela central, estaba rodeada de dos mejillas sobre las que se asentaban los ojos.

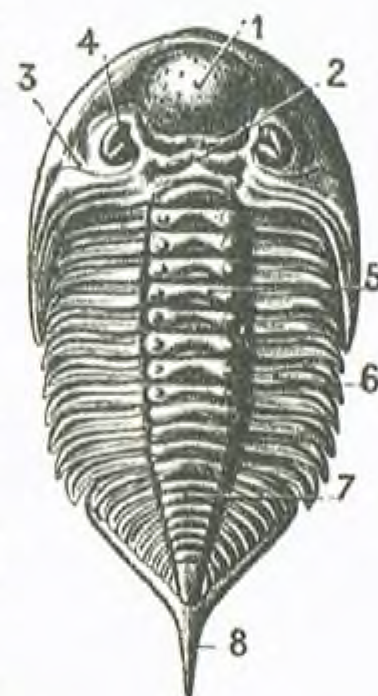
Algunos ejemplares bien conservados muestran la existenca de numerosas patas locomotrices, antenas y mandíbulas.

Entre las especies más conocidas tenemos el *calymnene*, que podía enrollarse como las cochinillas, el *illaenus* y el *paradoxides*.

Se han encontrado otros animales articulados como *arañas*, *escorpiones* e *insectos*. Algunas *libélulas* medían hasta 80 centímetros de envergadura.

Los *vertebrados* son mucho menos abundantes, aunque existieron *peces*, *batracios* y algún *reptil*.

Los *peces* eran por lo general diferentes de las especies actuales y poseían un caparazón óseo que cubría todo o gran parte de su cuerpo *(peces acorazados)*. En cambio, la columna vertebral no estaba completamente osificada. También se han encontrado vestigios de peces cubiertos de escamas semejantes a los actuales.



Trilobite *(Dalmanites caudatus)*: 1. Cabeza; 2. Glabela; 3. Mejilla; 4. Ojo; 5. Tórax; 6. Pigidio; 7. Pleura; 8. Punta maxilar

Los otros vertebrados, batracios y reptiles, sólo se han encontrado en terrenos del final de la Era primaria y son todos de pequeño tamaño.

Vegetales primarios. — Estos vegetales son muy importantes, puesto que su acumulación ha dado origen a las capas de hulla, entre las cuales se encuentran "huellas" de plantas, muy bellas, parecidas a nuestros helechos (criptógamas) o a las coníferas actuales (gimnospermas).

Entre las *criptógamas*, a menudo arborescentes, citaremos, además de los helechos, los licopodios *(Lepidodendros sigillaria)* y los equisetos *(Calamites)*.

Las especies más importantes de *gimnospermas* son las *cordaítes* y las *valchia piniformes*.

Cronología de los tiempos primarios. — La Era primaria se divide en cinco períodos que son, empezando por el más antiguo:

1º Período cámbrico;
2º Período silúrico;
3º Período devoniano;
4º Período carbonífero;
5º Período pérmico.

Los nombres dados a estos períodos tienen su origen en las regiones donde están mejor representados los terrenos correspondientes y donde se han encontrado más fósiles.

El *Cámbrico* está bien desarrollado en Gales (Cambria); el *Silúrico*, también en Gales, donde antiguamente vivían los silures; el *Devoniano*, en el condado inglés de Devon; el *Carbonífero* es el terreno hullero por excelencia, y el *Pérmico* es característico del distrito de Perm, en Rusia.



Lepidoptus, pez fósil del Liásico (Holzmaden, Alemania) [*Fot. Larousse*]

Estos períodos se subdividen en "pisos", según el siguiente cuadro:

CÁMBRICO	Georgiano Acadiense Postdamiano
SILÚRICO	Ordoviciense Gotlandiense
DEVONIANO	Gediniano Coblenziano Eifeliano Givetiano Frasniano Fameniano
CARBONÍFERO	Dinantiano Vestfaliano Estefaniense
PÉRMICO	Autuniense Sajón Turingio

Los *terrenos primarios* se presentan en forma de esquistos duros y compactos (pizarras) o calizos. También existen niveles de areniscas o conglomerados de colores obscuros.

Evolución de las tierras y los mares. — Al principio de la Era primaria, dos continentes emergían en nuestro planeta: el primero, septentrional, se extendía del norte del Canadá a Groenlandia y ocupaba una gran parte del actual mar del Norte; el segundo, meridional, comprendía África Central con el Sáhara y Arabia. Entre estas dos vastas extensiones, un profundo mar cubría la casi totalidad de la Europa actual y sólo en el emplazamiento de lo que son hoy Finlandia, centro de Francia y Bohemia emergían tierras.



Planta de la hulla *(Walchia Schlotheimii)* [*Fot. Larousse*]

En el curso de la Era primaria, en dos grandes etapas sucesivas, los plegamientos disminuyeron considerablemente el dominio marino. Durante el Silúrico, el *plegamiento caledoniano* originó los montes Alleghanys en los Estados Unidos, los Grampianos en Escocia y los del norte de la península escandinava. Más tarde, en el Carbonífero, el *plegamiento herciniano* hizo surgir altas montañas en gran parte de Europa (meseta española, macizos centrales europeos: Harz, Vosgos, Selva Negra...). Hay una correlación estrecha entre las cuencas hulleras europeas y las particularidades de la cadena herciniana.



Valle del Tourmalet (Pirineos) en los esquistos tiernos del Carbonífero (*Fot. Kollar*)

De esta forma, al fin de la Era primaria el profundo mar intercontinental estaba reducido a mares interiores y lagunas poco profundas rodeados de altas cadenas montañosas. La evaporación del agua de estas lagunas produjo depósitos salinos.

La actividad volcánica fue intensa, sobre todo después del plegamiento herciniano.

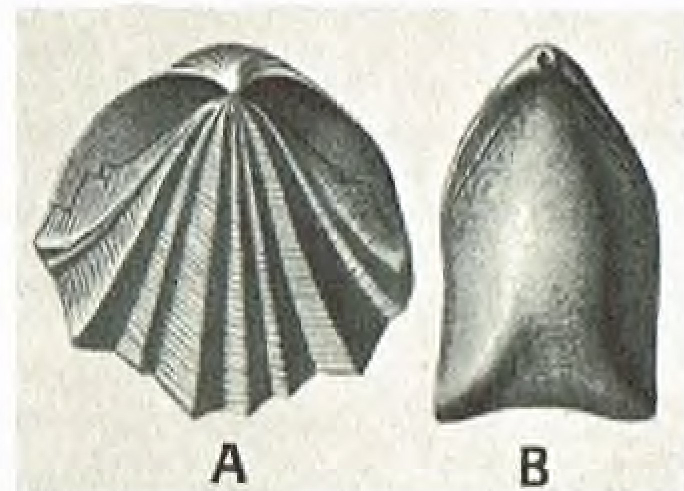
El estudio de la flora y la fauna muestra que el clima de la Era primaria era cálido y húmedo, con estaciones poco marcadas o inexistentes.

Era secundaria

Con la **Era secundaria** entramos en una fase de la vida de la Tierra que pudiéramos llamar tranquila, por lo menos en Europa. Solamente se registran grandes cambios en los mares, pero sin que veamos surgir cadenas de montañas importantes.

Animales secundarios. — Ciertos grupos característicos del Primario, graptolites y trilobites, han desaparecido por completo. Otros, los braquiópodos, por ejemplo, conservan aún algunas especies. Los crinoides, los erizos y los corales abundan, pero la Era secundaria es sobre todo la era de los *moluscos cefalópodos (amonitas y belemnitas)* y de los *reptiles.*

Los *braquiópodos* existen en toda su serie, pero sólo en corto número. Citemos las *terebrátulas* y las *rhynchonellas,* que adquieren su importancia máxima en el Liásico y el Jurásico.



BRAQUIÓPODOS SECUNDARIOS: A, rhynchonella (*Rhynchonella decorata*); B. terebrátulá (*Terebratula digona*) del batonense

El grupo de *erizos* se desarrolla mucho al final de la Era secundaria, en el Cretáceo.

Los *moluscos* existentes son *lamelibranquios* o *cefalópodos.*

Entre los lamelibranquios o bivalvos citemos algunas ostras y los curiosos *hippurites,* que tienen una valva muy desarrollada y la otra muy pequeña.



Bivalvo hippurites *(Fot. Larousse)*

Los cefalópodos, representados en el Primario por algunas especies ya mencionadas, alcanzaron en el Secundario un desarrollo considerable. Las *amonitas* fueron innumerables, tanto por la variedad de especies como por el número de individuos de cada especie. Además, su variación en el tiempo fue muy rápida y cada tipo pertenece a una capa o estrato de edad bien determinada. Gracias a ellas se ha podido establecer con precisión la cronología de los tiempos secundarios. Las amonitas tenían la forma de un cuerno de carnero y se les ha dado ese nombre porque en la Antigüedad la representación de la cabeza de Júpiter Amón se adornaba con los cuernos de ese animal.

La figura adjunta muestra una amonita con sus tabiques internos; la línea de sutura de estos tabiques es a veces muy complicada y ofrece útiles indicaciones para la distinción de los diferentes grupos.



Amonita

Entre los géneros más importantes, citaremos los *ceratites,* muy semejantes a los primarios y con suturas poco complicadas; los *arietites* y los *peltoceras,* que marcan su apogeo, y los *baculites,* de forma recta, que aparecen en las últimas capas sedimentarias.

Las *belemnitas,* igualmente características de los tiempos secundarios, son menos numerosas. Sus restos se presentan como conos macizos negros, de forma de cigarro puro, constituidos por fibras radiadas de calcita. Tenían diez brazos y su manto llevaba dos aletas que les servían para nadar; eran, por lo tanto, muy semejantes a los calamares y sepias actuales.

Los *vertebrados* de los tiempos secundarios están representados esencialmente por los reptiles, que alcanzaron un desarrollo extraordinario y cubrían toda la extensión del Globo. Se han conservado esqueletos enormes intactos.

Los principales reptiles terrestres o *dinosauros* son el *iguanodón,* con aspecto de canguro; el *diplodoco,* que alcanzaba longitudes de 25 metros; el *gigantosauro,* aún más grande (hasta 48 metros); el *triceratops,* con el cráneo acorazado y armado de tres cuernos; el *dimetrodón,* etc. Estos seres eran pesados y torpes; el diámetro de su cerebro era inferior, en algunos casos, al de su medula espinal. Su dentadura era potente, si bien fueron animales herbívoros.

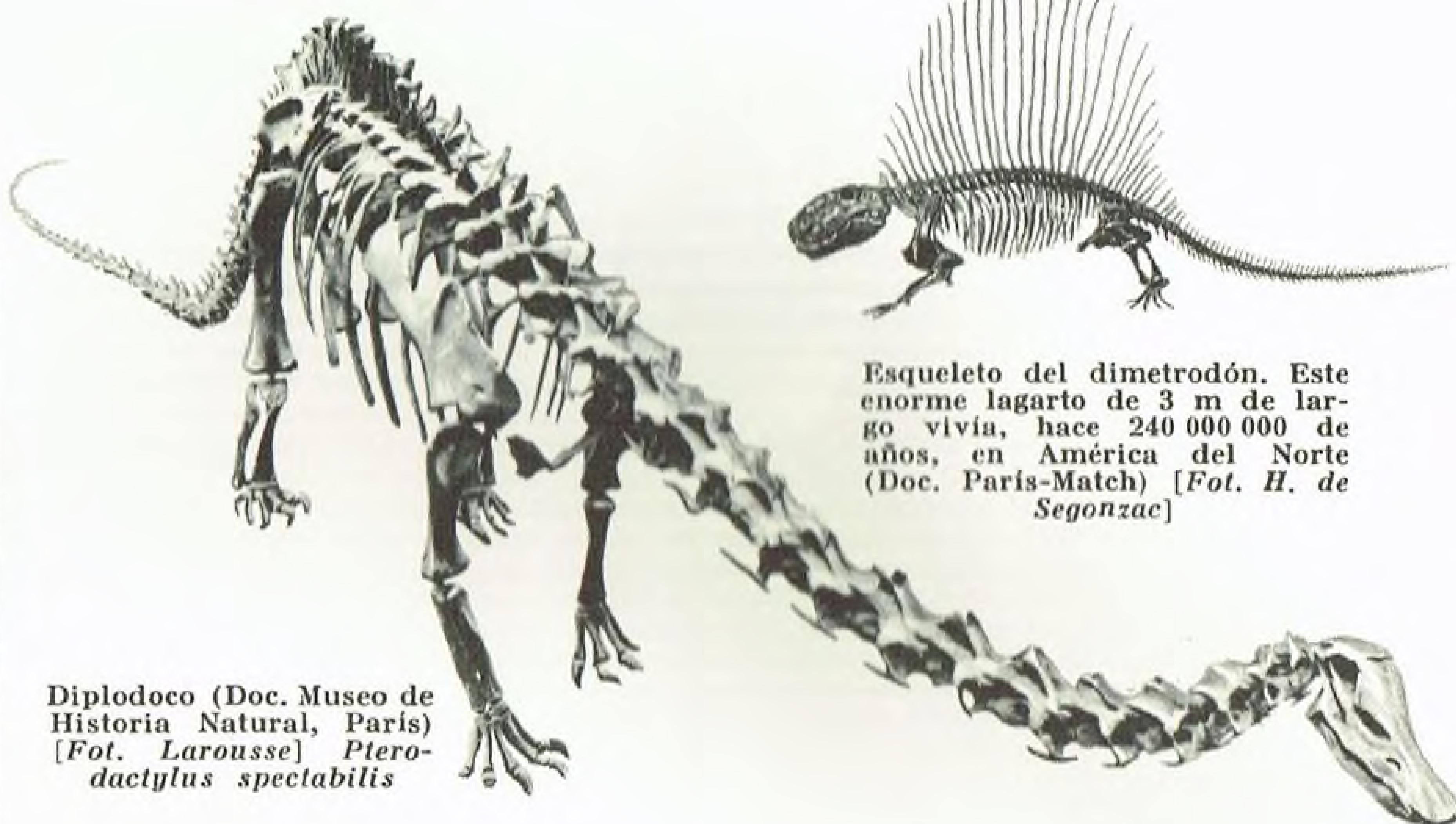
Algunos reptiles eran voladores, como el *pterodáctilo,* de alas membranosas. El *archaeopterix* encontrado en Baviera era más extraño todavía, pues presenta a la vez caracteres de pájaro y de reptil.

Al lado de los reptiles, que desempeñaron en esa época un papel parecido al de los mamíferos actuales, se encuentran pájaros y peces. Los mamíferos aparecen al fin de la Era.



Belemnitas





Esqueleto del dimetrodón. Este enorme lagarto de 3 m de largo vivía, hace 240 000 000 de años, en América del Norte (Doc. París-Match) [*Fot. H. de Segonzac*]

Diplodoco (Doc. Museo de Historia Natural, París) [*Fot. Larousse*] *Pterodactylus spectabilis*

Vegetales secundarios. — Al principio de la Era secundaria predominan las gimnospermas y después aparecen las plantas con flores, primero las monocotiledóneas arborescentes (palmeras) y en seguida las dicotiledóneas pertenecientes a especies actuales (álamos, castaños, hayas).

Cronología de los tiempos secundarios. — La Era secundaria se subdivide en cuatro períodos, que son, comenzando por el más antiguo:

1º Período triásico;
2º Período liásico;
3º Período jurásico;
4º Período cretáceo.

El período *inferior* o *Triásico* debe su nombre a que se distinguen en él tres pisos bien definidos: areniscas, calizas y margas. El nombre del *Liásico* viene de *lias*, palabra inglesa que designa una caliza dura y compacta. El *Jurásico* está bien representado en el Jura, y el *Cretáceo* en el período de la creta. La división completa de estos períodos en pisos es la del siguiente cuadro:

TRIÁSICO	Areniscas abigarradas Calizas conchíferas o Muschelkalk Margas irisadas o Keuper
LIÁSICO	Retense Hettangense Sinemuriense Charmutiense Toarcense
JURÁSICO	Bajocense Batonense. Calovense Oxfordense Secuanense Kimmeridgense Titónico
CRETÁCEO	Berriasense Valanginiense Hauterivense Barsemense Aptense Albiense. Cenomanense Turonense Senonense Danense

Los *terrenos secundarios* están constituidos por *calizas* y *margas*, que alternan de manera bastante regular, debido al aumento (margas) o disminución (caliza) de la profundidad de los mares correspondientes.

Evolución de las tierras y los mares. — Al final de la Era primaria, casi toda Europa estaba emergida u ocupada por lagunas. Al principio de la Secundaria, el mar volvió a ocupar la tierra y durante casi toda la Era estuvo Europa cubierta de agua y sólo subsistieron algunas islas y la península escandinava. También se fragmentó América del Sur, se inundó la cuenca del Amazonas, y en África se extendió el mar sobre toda la actual meseta desértica. Australia quedó definitivamente aislada.

Del estudio de la flora y la fauna se deduce que, al menos en algunas regiones del Globo, el clima variaba según las estaciones, y era en general cálido.

Era terciaria

Durante la **Era terciaria** aparecen animales y plantas muy parecidos o idénticos a las especies actuales.

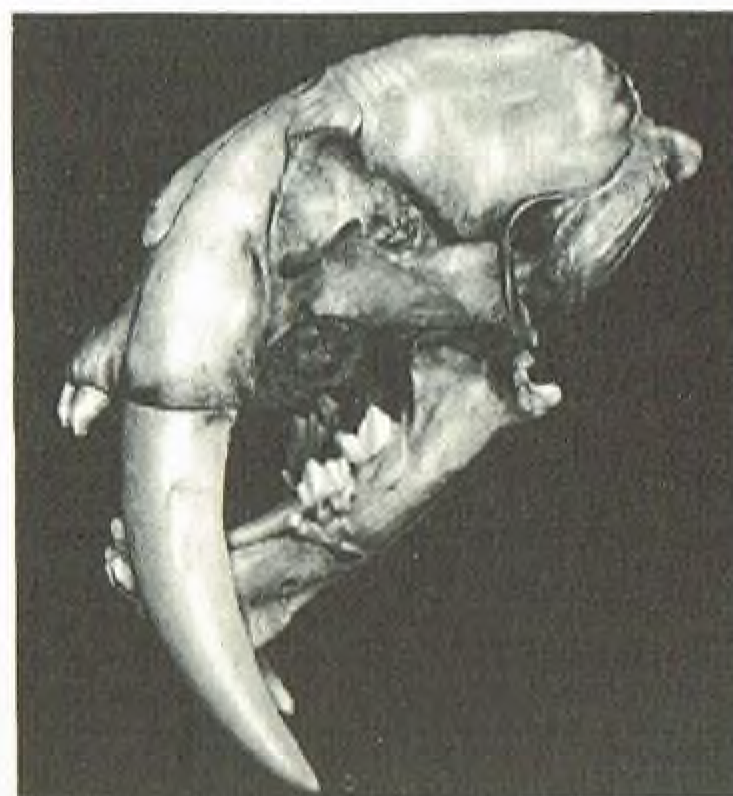
Animales terciarios. — Los *numulites* eran foraminíferos grandes, circulares y aplastados, muy abundantes en los bancos calizos de aquel tiempo.

Los *moluscos*, bivalvos o gasterópodos, eran también muy semejantes a los actuales.

Se han encontrado *insectos* en buen estado de conservación en el ámbar, resina fósil que abunda en los alrededores del mar Báltico.

Entre los *vertebrados*, los *reptiles* estaban en completa regresión y fueron menos voluminosos que en el Secundario. Los *pájaros* y los *peces* no presentaron particularidades especiales y los esqueletos encontrados en numerosos puntos muestran una identidad perfecta con los tipos actuales.

Los *mamíferos* merecen una atención particular, puesto que en el Terciario alcanzaron su desarrollo máximo. La gran extensión de este grupo se manifiesta desde principios de la Era con la proliferación de los marsupiales y, sobre todo, la aparición de paquidermos *(Dinoceras)*. A medida que se avanza en la serie se descubren carnívoros, rumiantes, ungulados y finalmente monos. En la segunda mitad de los tiempos terciarios el grupo de los mamíferos alcanzó su apogeo.



Cráneo de *machairodus*

Entre las especies clásicas citaremos el *hiparión*, antepasado del caballo actual, la sorprendente serie de proboscídeos gigantes *(Dinotherium*, mastodonte) y el *machairodus*, carnívoro de largos y curvados dientes, más potentes que los del tigre.

A finales del Terciario desaparecen los mamíferos gigantes y el grupo de vertebrados tiende hacia su estado actual. Los elefantes, rinocerontes, caballos, etc., son muy semejantes a los que viven hoy día. Osamentas de estas especies acompañan en las grutas y cuevas cuaternarias los restos de hombres fósiles.

Vegetales terciarios. — Los vegetales terciarios son en todo comparables a los de nuestros bosques. Es interesante señalar, sin embargo, que en terrenos de clima actualmente frío vivían, al principio del Terciario, plantas de países cálidos, como las palmeras, y que solamente al fin de esa Era aparecieron los árboles y plantas de hojas caducas.

Cronología de los tiempos terciarios. — La Era terciaria se subdivide en cuatro períodos:

1º Período eoceno;
2º Período oligoceno;
3º Período mioceno;
4º Período plioceno.

Los dos primeros se agrupan bajo el nombre de *Numulítico*, y los dos últimos bajo el de *Neógeno*.

Estos períodos se subdividen en los pisos siguientes:

Terrenos numulíticos o Numulítico	EOCENO	Montense Thanatense Sparnacense Yperense Lutecense Bartonense Ludense
	OLIGOCENO	Sannoisense Stampiense Aquitaniense
Terrenos neógenos o Neógeno	MIOCENO	Burdigaliense Helvetiense Tortonense Sarmatense Pontense
	PLIOCENO	Plaisanciense Astiense Siciliense

Puesto que la Era terciaria corresponde a un espacio de tiempo mucho más corto que la Secundaria, y mucho más corto aún que la Pri-

maria, parece extraño ver tantas subdivisiones. Se explica esto por la mejor conservación de los sedimentos, todavía frescos, con todos sus caracteres iniciales, y también porque los primeros estudios geológicos se han llevado a cabo en terrenos terciarios, representados por calizas, arcillas, margas, areniscas e incluso arenas. A veces contienen depósitos lacustres, como el yeso. Las calizas son tiernas y a menudo conchíferas.

Evolución de las tierras y los mares. — La Era terciaria fue de intensa actividad endógena.

Los movimientos orogénicos se iniciaron ya en el Eoceno *(movimientos pirenaicos)*, pero culminaron en el Mioceno con los *movimientos alpinos*, que provocaron la emergencia de los sedimentos acumulados desde el Carbonífero en el fondo del mar que separaba el continente noratlántico del africano. Estos movimientos originaron las cadenas de montañas que van desde los Pirineos y el Atlas —a través de los Alpes, los Apeninos, los Cárpatos y el Cáucaso— hasta el Himalaya. Se formó el Mediterráneo, y Europa adquirió su configuración actual. Las dos Américas, que estaban separadas al principio de esta Era, se unieron gracias a la formación de los Andes y las cordilleras que bordean el Pacífico Occidental. Estos plegamientos determinaron en la segunda mitad de la Era terciaria un gran recrudecimiento de la actividad volcánica en las regiones recién dislocadas. El volcanismo actual es como un eco de ese intenso período eruptivo.

El clima, parecido al actual, se caracterizó por la existencia de estaciones.

Era cuaternaria

La **Era cuaternaria,** la más corta de todas, se caracteriza por la aparición del hombre. Su duración corresponde como máximo a una pequeña subdivisión de la Era terciaria y, si prescindimos del hombre, no hay razón geológica que permita separarla de los períodos precedentes.

Animales y vegetales cuaternarios. — El mundo vivo cuaternario fue en conjunto prácticamente idéntico al mundo vivo actual. A lo sumo vemos desaparecer algunas especies de mamíferos como el mamut, los osos de las cavernas y el rinoceronte de narices tabicadas. Algunas de estas desapariciones son incluso muy recientes; el *dinornis*, ave gigante de Madagascar, semejante al avestruz, desapareció después del período histórico.

Los vegetales no presentan nada de particular en lo que se refiere a especies y sólo su área de repartición ha sufrido modificaciones debidas a los cambios de climas.

El hombre fósil. — El descubrimiento de los primeros huesos de hombre fósil, verdadera revolución en el mundo científico, es bastante reciente y se debe a Boucher de Perthes (1846). Aunque la existencia del hombre fósil ha sido objeto de muchas discusiones, es hoy día admitida por todo el mundo.

En el orden cronológico, el esqueleto más antiguo conocido es el del *Pithecantropus* de Java, que data del período final del Plioceno. Los restos incompletos de este animal son intermedios entre el mono y el hombre, y la ausencia en los parajes vecinos de indicios de industria humana concuerda con el carácter primitivo de su esqueleto.

No hace muchos años se descubrió en China el esqueleto de un ser parecido al hombre actual, al que se ha llamado *Sinantropus*, y que, a pesar de ciertos caracteres de simio, parece ser un hombre, puesto que en el mismo yacimiento se han encontrado algunos útiles.

Después de estos dos tipos de gran importancia para el estudio de las relaciones del mono y el hombre, encontramos en épocas más recientes esqueletos típicos de hombres.

Tenemos primero el tipo conocido bajo el nombre de *hombre de Neandertal*, coloso de frente retirada, de arcos superciliares muy salientes y de mandíbula inferior fuerte y sin mentón. Vivía al abrigo de las rocas y sobre todo en cavernas. Los útiles que nos ha dejado, de factura muy primitiva, estaban destinados únicamente a su defensa y a la búsqueda de alimentos; están hechos de *piedra tallada*, y tienen formas de hacha grosera o punta de flecha.



Cráneo de la Chapelle-aux-Saints *(Fot. Museé de l'Homme, Paris)*

Del hombre de Neandertal pasamos en seguida a esqueletos de hombre del tipo actual. Los restos encontrados en Europa no son evidentemente iguales a los del europeo de hoy, pero sí son idénticos a los de ciertas tribus primitivas actuales, *negritos* u *hotentotes;* se trata, pues, de simple diferencia de raza.

Estos hombres vivían al principio en cavernas, pero su industria era superior a la del hombre de la piedra tallada. Sus hachas y puntas de flecha eran de *piedra pulimentada*. Las paredes de las grutas que habitaban están cubiertas de dibujos de los animales que los rodeaban.

También en las cavernas se han recogido fragmentos de esculturas en marfil, o cuernos de reno grabados con motivos animales de la época.

Después de la industria de la piedra pulimentada, viene la industria del bronce y la del cobre, y con esta *Edad de los Metales* se abre el período histórico. *La geología deja paso a la historia.*



Figura de hechicero. Lago Onega (U. R. S. S.)

Cronología de los tiempos cuaternarios. — La cronología de los tiempos cuaternarios, fundada en la evolución del hombre, es la siguiente:

ERA CUATERNARIA	Período pleistoceno o Paleolítico	Edad de la Piedra tallada	
	Período actual	Neolítico. Edad de la Piedra pulimentada	
		Edad de los Metales	Cobre Bronce Hierro
		Período histórico	

Conviene notar que esta cronología es relativa y aplicable sobre todo a las regiones civilizadas. En efecto, ciertos pueblos primitivos (centro de Australia) están todavía en la Edad de la Piedra tallada.

Evolución de las tierras y los mares. — En el Cuaternario no hubo grandes fenómenos geológicos. Las variaciones de los mares se limitaron a oscilaciones de nivel, que no pasaron de unas decenas de metros.



Huella de una mano *(Fot. Vertut)*

Sin embargo, el relieve terrestre se modificó mucho y, a la escala humana, la formación de la topografía actual revistió una importancia considerable.

Al final del Terciario se formaron los Alpes, entonces más altos que el Himalaya actual. Bajo las miradas humanas del Cuaternario ocurrieron los grandes períodos glaciares *(glaciaciones);* grandes extensiones de Europa, Asia y América del Norte quedaron cubiertas por una espesa capa de hielo. Las cordilleras meridionales europeas eran también núcleo de glaciación intensa. A los *aluviones fluviales* se unieron los *aluviones glaciares*, morenas frontales o laterales de las que se encuentran indicios en todos los valles bajos.

M. ROUBAULT

BIBLIOGRAFÍA.—A. ROBIN: *la Terre*, 1932. — **Geología:** Charles LYELL: *Principles of Geology*. London, 1835. — A. DE LAPPARENT: *Traité de géologie*. Paris, 1906. — Edouard SUESS: *la Face de la Terre* (trad. E. de Margerie). Paris, 1897-1902. — E. HAUG: *Traité de géologie*. Paris, 1921. — N. GIGNOUX: *Traité de géologie stratigraphique*. Paris, 1936. — KARL A. ZITTEL: *Traité de paléontologie*. Paris, 1923. — M. BOULE Y PIVETEAU: *les Fossiles*. Paris, 1936. — M. ROUBAULT: *la Genèse des montagnes*. Paris, 1949. — **Mineralogía:** WALLERANT: *Traité de cristallographie*. — A. MICHEL-LÉVY: *les Minéraux des roches*. Paris, 1888. — A. DE LAPPARENT: *Précis de minéralogie*. Paris, 1898.



Reproducción sexual: El pistilo de la amapola, fecundado por el polen de los estambres, se yergue entre los ya vacíos próximos a desprenderse *(Fot. Bille)*

Biología

Introducción

Definición de la biología. — Aunque su nombre sea reciente, la **biología** (del griego *bios*, vida, y *logos*, estudio) es una de las ciencias más antiguas. Puede definirse como la *ciencia de la vida* o, si se prefiere, la *ciencia de los seres vivientes*. La medicina es simplemente biología aplicada. La ganadería y la agricultura son otras tantas ramas de la misma disciplina. Por *seres vivientes* debe entenderse, en doble sentido, los vegetales y los animales. Tanto unos como otros tienen una estructura celular y una organización más o menos compleja, que adquieren en el curso de su desarrollo. Los vegetales y los animales nacen, crecen, se reproducen y mueren. Para crecer, unos y otros se nutren de alimentos, que digieren y asimilan. Los fenómenos fisicoquímicos se efectúan en los seres vivos según un modo y un ritmo particulares, que constituyen los caracteres de la vida.

Reseña histórica

Faltos de espacio para poder seguir la evolución particular de cada una de las ciencias biológicas, nos limitaremos a esbozar a grandes rasgos la evolución general de la ciencia de los seres vivientes.

Antigüedad. — Los verdaderos iniciadores de la biología fueron **Hipócrates** (hacia 460-377) y **Aristóteles** 384-322). De Hipócrates y sus discípulos nos ha quedado el *Corpus hippocraticum*, colección de estudios en los que, por primera vez, son discutidos los orígenes seminíferos femenino y masculino, la formación del feto, la herencia, etc. De Aristóteles sólo conocemos la obra zoológica, que es, sin embargo, considerable. Ya se trate de la *Historia de los animales* o del *Tratado de la generación*, este filósofo asombra por la variedad y profundidad de sus puntos de vista.

Aristóteles conocía, por ejemplo, la viparidad del tiburón y de la víbora, la partenogénesis de la abeja, el hermafroditismo del raño... Sabía que el murciélago es un mamífero, a pesar de sus alas, lo mismo que la ballena, no obstante sus aletas. Si es cierto que consideró primero al hombre diferente de los animales, más tarde se inclinó a pensar que no era completamente distinto. Incluso opinó, como precursor del transformismo, que existen, entre los seres, transiciones insensibles. Debió ocuparse también de las plantas.

Su discípulo predilecto, **Teofrasto** (380-287), era muy versado en botánica. Fue el primero que estudió la clasificación y reproducción de los vegetales, y estableció la diferencia entre las monocotiledóneas y las dicotiledóneas. Entre las primeras citó principalmente la datilera, a causa del reparto de sus flores machos y hembras en árboles diferentes.

Con **Galeno** (hacia 131-hacia 201), la anatomía hizo grandes progresos, aunque disecó sólo monos en vez de hombres. Más afortunados que los sabios griegos, los médicos de Alejandría obtuvieron permiso para operar sobre cadáveres de criminales. Uno de estos médicos descubrió la retina y la aracnoides, así como los ovarios de la mujer.

Renacimiento. — Después de los siglos casi sin ciencia de la Edad Media —durante los cuales en España descollaron sin embargo **San Isidoro** de Sevilla, quien en *De Rebus rusticis* (Libro XVII de *Etimologías)* menciona diversas plantas; **Aben Golgol,** que estudió

en el siglo X las virtudes de las plantas; el sevillano **Ibn al-Awam,** autor de una obra sobre agricultura en el siglo XII, e **Ibn al-Baytar,** recopilador del XIII—, la biología llegó al esplendor de los siglos XV y XVI. La mayor parte de los grandes artistas de esta época se interesaron por la obra de la Naturaleza. Citemos, entre otros, a **Miguel Ángel, Leonardo de Vinci** y **Bernard Palissy.** Tras ellos evolucionaron simultáneamente la anatomía y la fisiología humanas, la zoología, la botánica e incluso la paleontología.

En la primera de estas disciplinas sobresalieron **Andrea Vesalio** (1514-1564), que residió en España, fue médico de Carlos I, y revisó y corrigió las obras de Galeno; **Fabricio d'Acquapendente** (1537-1619), uno de los más famosos maestros de la Universidad de Padua, y **Eustaquio,** muerto en 1574, cuyo nombre llevan varios órganos.

En fisiología domina el gran **William Harvey** (1578-1657), que descubrió la circulación de la sangre y sostuvo que el pollo no preexiste en miniatura en el interior del huevo. Médico del rey de Inglaterra, a cuyas cacerías asistió con frecuencia, disecó ciervas y en sus matrices descubrió verdaderos huevos, por lo que resumió su saber de esta forma lapidaria: *Omne vivum ex ove.*

No obstante, el médico español **Michel Servet** (hacia 1511-1553) fue el primero en dar una descripción exacta de la circulación sanguínea, en el verdadero sentido de la palabra, es decir, del corazón a los pulmones y de los pulmones al corazón, en su obra *Christianismi restitutio* (1553). Otro español que trató de la circulación sanguínea fue el salmantino **Francisco de la Reyna** en su *Libro de Albeytería,* publicado en Burgos en 1564.

En zoología, **Pierre Belon** (1517-1564) y **Guillaume Rondelet** (1507-1566) se especializaron en el estudio de los peces. El suizo **Conrad Gesner** (1516-1565) extendió sus investigaciones a los cuadrúpedos, las aves y las serpientes. Como botánico, se le atribuye el establecimiento del *género,* división superior a la especie, que el francés **Joseph Pitton de Tournefort** (1656-1708) definió después con más exactitud.

Botánicos célebres de la misma época fueron el italiano **Andrea Cesalpini** (1519-1603), el primero en intentar la clasificación de las plantas por sus flores y sus frutos, y el suizo **Gaspard Bauhin** (1550-1624), que descubrió una seis mil plantas.

La empresa de América ofreció un nuevo e inmenso campo de estudio e investigación a los hombres de ciencia hispanolusitanos. Entre los primeros en dar a conocer plantas americanas figura **Diego Álvarez de Chanca,** compañero de Cristóbal Colón en su segundo viaje y autor de *Carta a la ciudad de Sevilla,* donde se establece una lista bastante extensa. Pero el naturalista por excelencia fue **Gonzalo Fernández de Oviedo y Valdés** (1478-1557), dedicado no sólo al estudio de los minerales, plantas y animales de América, sino también al del hombre y sus costumbres. Su *Relación sumaria de la Historia natural de las Indias,* publicada en 1526, es el más antiguo trabajo de esta clase relacionado con el Nuevo Mundo.

A Oviedo siguieron el médico sevillano **Nicolás Monardes** (1493-1588), cuya *Historia medicinal de las cosas que se traen de nuestras Indias Occidentales, que sirven en Medicina* (1565-1574) se tradujo al latín, inglés, italiano y francés; **Juan Caro,** que compuso un tratado *De las aves del Nuevo Mundo*; Fray **Bernardino de Sahagún** (¿1499?-1590), autor de *Historia de las cosas de Nueva España,* que no vio la luz hasta 1829; **Francisco Hernández** (1517-1587), médico y naturalista, quien, encargado por Felipe II de una expedición científica a México, dejó 17 tomos con dibujos y estampas, destruidos en su mayor parte en 1617 durante el incendio que devastó el monasterio de El Escorial, y el jesuita Padre **José de Acosta** (1540-1599), que exploró el Perú y trató de ordenar científicamente los seres vivos americanos en su *Historia natural y moral de las Indias* (1590).

Época moderna. — La botánica española conoció en el siglo XVIII su período más brillante. Durante este siglo se adoptaron la doctrina y nomenclatura de Linneo. Con Carlos III se creó el Real Jardín Botánico de Madrid y se organizaron por el Estado importantes exploraciones científicas en América: en 1777, la del peruano **Hipólito Ruiz** (1754-1816) y su compañero el español **José Pavón;** en 1783, la de **José Celestino Mutis** (1732-1808), gran botanista, médico, astrónomo y matemático, en cuyo honor Linneo dio su nombre a una planta americana, la *Mutisia;* en 1787, la de **Martín Sessé** (m. en 1809), quien con el botánico mexicano **José Mariano Mociño** (1758-1819), exploró el virreinato de Nueva España y de cuya colaboración ha quedado *Flora mexicana* y *Flora guatemalteca,* etc. En el Jardín Botánico de Madrid se experimentaron muchas plantas americanas, dadas a conocer en varias de sus obras por **Mariano de Lagasca** (1776-1839) y **Antonio José Cavanilles** (1745-1804).

Hacia 1600, con la invención del *microscopio,* se había abierto un nuevo campo a la biología. Gracias a este instrumento se descubrió la existencia, en casi todas las materias examinadas, de una gran pululación de aradores de la sarna y de animálculos, que impresionó enormemente a los naturalistas y filósofos de todos los países. El italiano **Marcello Malpighi** (1628-1694) descubrió los vasos capilares; el holandés **Anton van Leeuwenhoek** (1632-1723) describió cierto número de microbios e infusorios y su compatriota **Jan Swammerdam** (1637-1680) presentó, en su *Biblia de la Naturaleza,* uno de los más notables conjuntos de observaciones microscópicas. En esta misma época, los ingleses **Robert Hooke** (1635-1703) y **Nehemiah Grew** (1641-1712) descubrieron las células que constituyen los organismos.

Dos grandes controversias agitaron el mundo. Primero, la de la generación espontánea. Sus adversarios, además del ya citado Swammerdam, fueron el italiano **Francesco Redi** (1626-1698), que demostró que las moscas no nacen nunca de la carne; **Reaumur** *(René-Antoine Ferchault de)* [1683-1757], célebre sobre todo como entomólogo, y **Lazzaro Spallanzani** (1729-1799), incomparable experimentador e ilustre fisiólogo que sostuvo contra **John Turburville Needham** (1713-1781) que ningún ser puede nacer de materia inerte. Pero los argumentos en favor o en contra de esta teoría no resolvieron la cuestión. Sólo en 1864, después de la famosa polémica entre Pouchet y Pasteur, la generación espontánea fue clasificada definitivamente como una leyenda.

Segundo, la de los preformacionistas contra los epigenesistas. Los primeros opinaban que el ser futuro está completamente constituido en miniatura dentro del huevo y que sólo tiene que desarrollarse para llegar a adulto. Entre los partidarios de esta teoría figuraron los ya aludidos Leeuwenhoek y Spallanzani, éste convencido de que el semen tiene únicamente como efecto excitar el desarrollo de las células sexuales femeninas, y el suizo **Charles Bonnet** (1720-1793), descubridor de la partenogénesis del pulgón. Entre los epigenesistas, partidarios de la teoría de la evolución progresiva del ser a partir del germen, el más grande fue el alemán **Kaspar Friedrich Wolff** (1733-1794). Uno de los más notorios preformacionistas, el suizo **Albert de Haller** (1718-1777), llamado el *Papa de la fisiología,* trató de esta cuestión en una extensa obra en varios volúmenes.

La clasificación hizo también sus progresos. **Buffon** *(Georges-Louis Leclerc, conde de)* [1707-1788] fue sobre todo un descriptor de gran talento. Su *Historia natural,* con todo, no supera el trabajo sistemático de Aristóteles. En cambio, su contemporáneo el sueco **Carl von Linné** *(Linneo)* [1707-1778] llevó la clasificación a su más alto grado de perfeccionamiento en su *Sistema de la Naturaleza,* que abarca los dos reinos. Se le atribuye la invención de la nomenclatura binominal, aunque el francés Tournefort había ya definido el género antes que el botánico sueco. **Bernard de Jussieu** (1699-1777), el genial jardinero del Trianón en Versalles, y, principalmente, su sobrino **Antoine-Laurent de Jussieu** (1744-1836), definieron las familias vegetales, para dejar a sus sucesores **Augustin-Pyrame de Candolle** (1778-1841) y **Adolphe Brongniart** (1801-1876) la tarea de definir los grupos del orden superior. **Louis Daubenton** (1716-1800), colaborador de Buffon, dividió el reino animal en órdenes y clases, aunque sin llegar al dominio de Cuvier.

Período contemporáneo. — A partir del siglo XIX, los descubrimientos biológicos se multiplicaron con los progresos de la técnica. He aquí una sucinta enumeración:

1º *Citología e histología.* Hooke y Grew no veían en las células más que una especie de pequeña caja. Otro inglés, **Robert Brown** (1773-1858), descubrió el núcleo, y el francés **Félix Dujardin** (1801-1872), una substancia gelatinosa que lo rodea, a la cual dio el nombre de *sarcoda,* que es, en realidad, el protoplasma. A los alemanes **Mathias Jakob Schleiden** (1804-1881), **Theodor Schwann** (1810-1882) y **Hugo von Mohl** (1805-1872) correspondió el honor de demostrar que todo órgano se compone de células y que toda célula proviene de otra por división: *omnis cellula ex cellula.* Éste fue el fundamento de la *doctrina celular* y el punto de partida de dos ciencias nuevas: la *citología* y la *histología.*

En citología, **Edouard van Beneden** (1846-1910) demostró, con sus estudios sobre las ascárides, el papel de los cromosomas en la fecundación. Sus investigaciones reforzaron la idea de que esas partes del núcleo son las transmisoras de la herencia. Sobre esta hipótesis tuvieron gran importancia los descubrimientos del austriaco **Johann Gregor Mendel** (1822-1884) sobre la hibridación de los guisantes y los del norteamericano **Thomas Hunt Morgan** (1866-1945) sobre la hibridación de la mosca del vinagre. Al mismo tiempo **Wilson** mostró la función de ciertos cromosomas en la determinación del sexo.

Entre los primeros histólogos figura **Xavier Bichat** (1771-1802), cuya *Anatomía general* constituye históricamente el primer tratado sobre los tejidos. Entre sus continuadores cabe señalar a **Rudolf von Koelliker** (1817-1905), **Louis Ranvier** (1835-1922), **Camillo Golgi** (1844-1926), **Félix Henneguy** (1850-1928) y **Prenant** (1866-1927).

Pero las teorías de Koelliker, Ranvier, Golgi, Henneguy, etc., sólo fueron confirmadas después de los descubrimientos del sabio español **Santiago Ramón y Cajal** (1851-1934) sobre las leyes que rigen la morfología y las conexiones de las células nerviosas en la substancia gris (1888), primero halladas en el cerebelo y más tarde en todos los demás órganos, por lo que en 1906 se le concedió el premio Nóbel de Medicina. Sus investigaciones abarcaron los temas histológicos más diversos, no sólo sobre los vertebrados, sino también sobre algunos invertebrados, como el estudio de la retina de los cefalópodos. Entre sus obras más destacadas figuran: *Histología del sistema nervioso del hombre y los vertebrados, Estructura del cono terminal de la médula espinal, Histología y técnica micrográfica, Red superficial de las células nerviosas centrales,* etc.

2º *Embriología.* La doctrina celular tuvo su repercusión en el estudio de la formación del ser. **Charles-Ernest de Baer** (1792-1876) estudió el desarrollo del pollo, **Francis Maitland Balfour** (1851-1882) el de los peces elasmobranquios y **Richard Hertwig** (1849-1922) el del erizo de mar. Otros, como **Yves Delage** (1854-1920) y **Leo Loeb** (1859-1924), hicieron experiencias de partenogénesis.

3º *Anatomía y zoología.* Dos sabios crearon simultáneamente la anatomía comparada: en Francia, **Georges Cuvier** (1769-1832) y en Inglaterra, **Richard Owen** (1804-1892). Al primero se deben los grandes principios de la subordinación de los caracteres y de la correlación de los órganos. En su obra *Reino animal* los aplica a la clasificación de los animales actuales, y en las *Investigaciones sobre huesos fósiles,* a la reconstitución de los animales desaparecidos.

Cuvier creyó en la estabilidad de las especies, mientras que, por el contrario, sus colegas **Lamarck** *(Jean-Baptiste de Monet, caballero de)* [1744-1829] y **Etienne Geoffroy Saint-Hilaire** (1772-1844), del Museo de París, fueron los fundadores del transformismo. Esta doctrina dio nueva vida a las investigaciones anatómicas, zoológicas y paleontológicas, que adquirieron gran auge con **Charles Darwin** (1809-1882), **Thomas Huxley** (1825-1895) y **Ernst Haeckel** (1834-1919).

En paleontología descollaron **Alcide d'Orbigny** (1802-1857) en los invertebrados y **Albert Gaudry** (1827-1908) en los vertebrados. **Marsh** (1831-1899), **Edward Drinker Cope** (1840-1897), **Charles Osborn** (1857-1935), etc., aplicaron también a los fósiles los principios de la evolución.

4º *Etología, ecología y bionomía.* El estudio de las costumbres de los animales, sobre todo las de los insectos, ha apasionado a naturalistas como **Henri Fabre** (1823-1915), cuyos *Recuerdos entomológicos* gozan de fama universal. En Roscoff y Banyuls (Francia), **Henri de Lacaze-Duthiers** (1821-1901) fundó los primeros laboratorios para el estudio de los animales marinos. La oceanografía tomó cuerpo con la expedición inglesa del *Challenger* y las del príncipe **Alberto I de Mónaco** (1889-1929). El doctor **Jean-Baptiste Charcot** (1867-1936), con su *Pourquoi-Pas?*, contribuyó también a esos estudios, y uno de los más grandes oceanógrafos, el danés **Schmidt** (1877-1933), se debe el descubrimiento del lugar de postura de las anguilas.

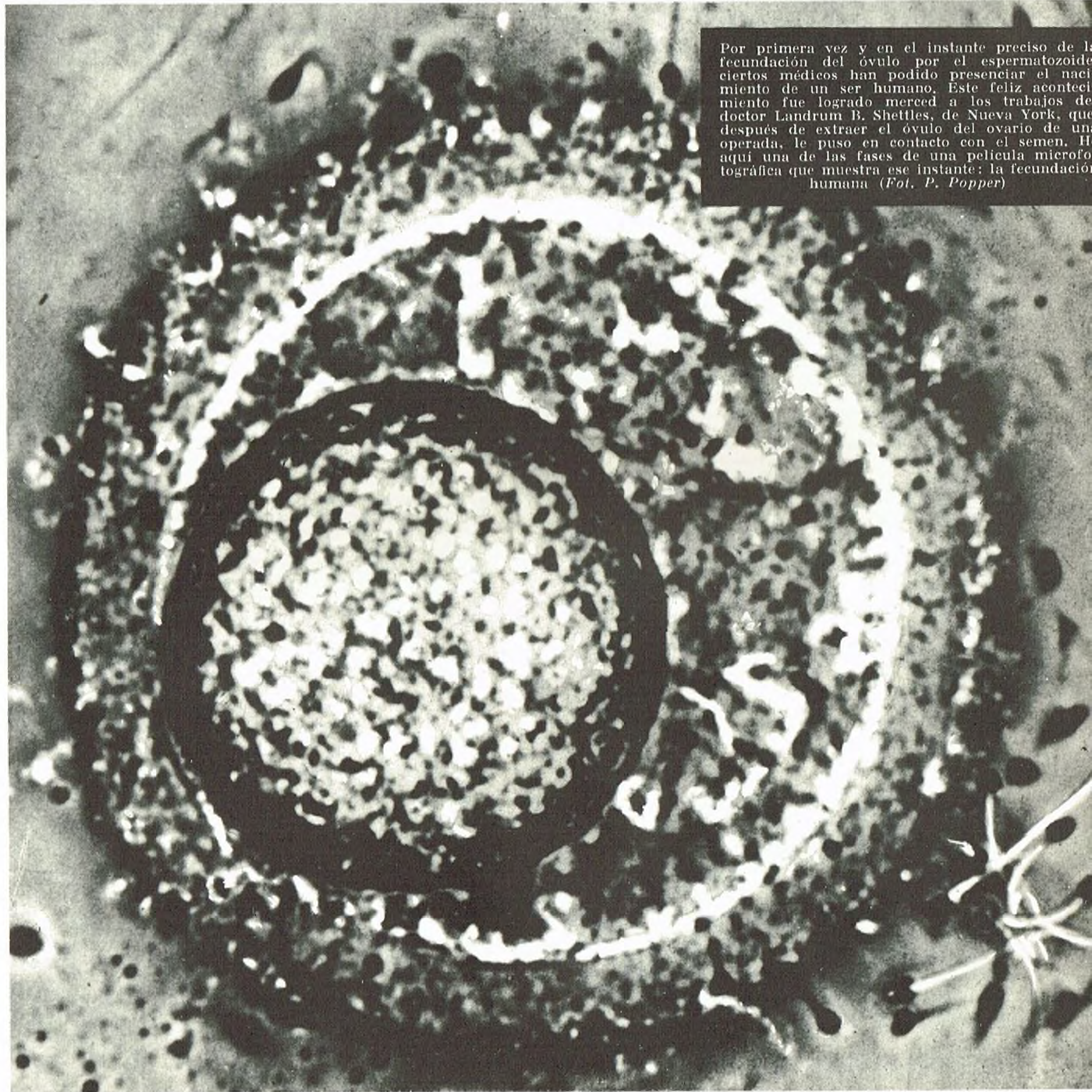
5º *Botánica.* El francés **Van Tieghem** (1839-1914), con su gran *Tratado de botánica* llevó a su más alto grado la clasificación del reino vegetal. **Alexis Jordan** (1814-1897) y **Hugo de Vries** (1848-1935) descubrieron las variaciones bruscas o mutaciones, con lo cual dieron nuevo impulso a las teorías transformistas.

6º *Fisiología.* Con **Antoine-Laurent de Lavoisier** (1743-1794) se reanudó la tradición de la fisiología experimental. Su memoria sobre la respiración dio un impulso definitivo a esta ciencia. El ya nombrado doctor Bichat demostró que la vida es una propiedad general de todos los tejidos. **François Magendie** (1783-1855) adquirió celebridad con sus experiencias sobre las raíces de los nervios raquídeos. **Claude Bernard** (1813-1878), además de sus descubrimientos sobre los nervios vasomotores y la función glucogénica del hígado, estableció en su *Introducción al estudio de la Medicina experimental* la codificación de las reglas de la experiencia científica.

7º *Bacteriología.* El siglo XIX vio nacer la nueva ciencia de los microbios, cuyo padre indiscutible fue **Louis Pasteur** (1822-1895). Harto conocidos son sus descubrimientos sobre los fermentos y las enfermedades contagiosas, a las que encontró remedio con las vacunas. Su mayor mérito consistió en haber disipado el misterio que envolvía muchos de los fenómenos naturales. La escuela de Pasteur comprende muchos investigadores y médicos, pero sólo citaremos a **Elías Metchnikov** (1845-1916), **Emile Roux** (1853-1933), **Alphonse Laveran** (1845-1922), y **Albert Calmette** (1863-1933).

8º *Biología general.* Puede considerarse a Claude Bernard como el verdadero fundador, por sus *Lecciones sobre los fenómenos de la vida comunes a los animales y los vegetales.* Podríamos citar numerosos citólogos y genetistas (investigadores que se ocupan de las leyes de la herencia), todos los transformistas, etc., pero bastará recordar, entre éstos, a **Alfred Giard** (1846-1908) y **Félix Le Dantec** (1869-1917).

Léon Bertin



Por primera vez y en el instante preciso de la fecundación del óvulo por el espermatozoide ciertos médicos han podido presenciar el nacimiento de un ser humano. Este feliz acontecimiento fue logrado merced a los trabajos del doctor Landrum B. Shettles, de Nueva York, que después de extraer el óvulo del ovario de una operada, le puso en contacto con el semen. He aquí una de las fases de una película microfotográfica que muestra ese instante: la fecundación humana (*Fot. P. Popper*)

Biología general

Caracteres generales de los seres vivientes. Poder de proliferación de los seres vivientes. Morfología de la célula. Membranas. Fisiología de la célula. Cultivo de las células. Microdisección. Cinematografía microscópica. Función del núcleo. Función del condrioma. Función del vacuoma. Reacciones de la célula. División de la célula. Cultivo de los tejidos

La **biología** es el estudio de los seres vivientes considerados desde un punto de vista general. Como la *fisiología*, la biología estudia los mecanismos que condicionan los fenómenos de la vida; pero mientras el fisiólogo, con un propósito de análisis, aísla el animal de su medio y estudia sucesivamente todas sus funciones, el biólogo estudia el ser vivo en su medio: lo estudia en sí mismo y en relación con su medio.

No intentaremos definir la *vida*, ya que, según Claude Bernard, "no es sino una palabra que revela nuestra ignorancia; es un estado que no comprendemos sino por oposición a la muerte: podemos *caracterizarla*, pero no definirla". La única manera de comprender la vida es estudiarla, según sus manifestaciones, en una serie de ejemplos concretos.

Oponemos los *vegetales* y los *animales*, bajo el nombre de *seres vivientes*, a los *seres inertes* o *minerales*. Los vegetales tienen, por consiguiente, caracteres comunes con los animales.

Caracteres generales de los seres vivientes. — Estos caracteres son:

1° *Composición química.* Todos los seres vivientes se componen de substancias orgánicas, cuyo estudio constituye la química orgánica. Estas substancias se componen sólo de elementos usuales (C, H, O, N, S, P, etc.), pero combinados entre sí de una manera compleja;

2° *Estructura celular.* Todos los seres vivientes, comprendidos los vegetales, se componen de una o de varias células: son unicelulares o pluricelulares. La célula es la unidad anatómica de los seres vivientes. Sus tres partes esenciales son: el protoplasma, el núcleo y la membrana;

3° *Origen celular.* Animales y vegetales provienen siempre de una célula generadora (espora, gameto, huevo) que se ha dividido por cariocinesis;

4° *Desarrollo.* Todo ser viviente se desarrolla, es decir, pasa en el curso de su vida por una serie de fases: nacimiento, crecimiento, madurez, reproducción, senectud, muerte. Las células generadoras, al transmitirse de un ser a otro, son las únicas que escapan a la muerte y gozan de una especie de inmortalidad virtual;

5° *Evolución.* Igual que los individuos, las especies han evolucionado en el curso de los tiempos geológicos. Nacen, crecen, alcanzan su apogeo, luego envejecen y mueren después de haber o no engendrado otras especies;

6° *Nutrición y asimilación.* El crecimiento y el desgaste de los organismos exigen su nutrición. Para los organismos, la nutrición consiste en procurarse materia y energía en el medio ambiente. La nutrición implica un gran número de fenómenos, tales como los de la digestión, absorción, circulación, respiración, secreción, excreción, etc. Los vegetales verdes tienen además una función clorofílica. El resultado total de la nutrición es la *asimilación*, gracias a la cual un ser viviente transforma en substancias semejantes a la suya *(ad similis)* los alimentos que ha ingerido;

7° *Irritabilidad y movilidad.* A pesar de su estabilidad aparente, los vegetales participan, igual que los animales, de la doble propiedad de ser irritables (excitables) y de responder por un movimiento a las excitaciones. Su protoplasma, especialmente, posee ambos caracteres. Ciertos vegetales tienen incluso movimientos más amplios, que les permiten trasladarse en su totalidad o poner en movimiento tal o cual de sus órganos.

Poder de proliferación de los seres vivientes. — Colocados en condiciones favorables, los seres vivientes se multiplican; uno de los caracteres más sorprendentes de la vida es el de ser invasora.

El agricultor y el horticultor deben luchar sin descanso contra la vegetación salvaje que tiende a sumergir sus cultivos.

Las plantas seleccionadas que constituyen nuestros alimentos o el de los animales que hemos domesticado son delicadas y el hombre debe protegerlas contra las plantas salvajes, "la mala hierba", o contra los parásitos, que tienen un poder de expansión aún más considerable. El biólogo que en su laboratorio cultiva bacterias, seres unicelulares, o incluso tejidos, puede, a través de medidas muy precisas, hacerse una idea exacta de ese poder de proliferación y llega a resultados que asombran.

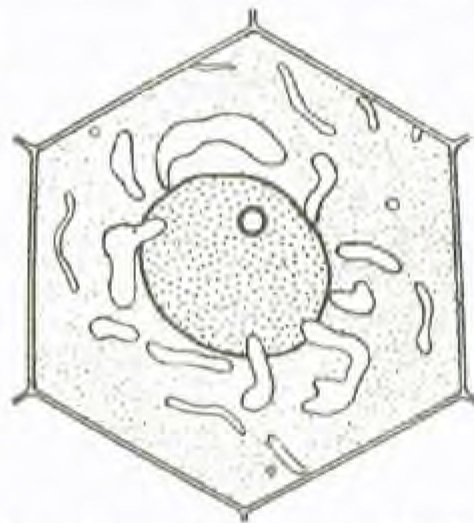
Así, un microbio como el *Bacilus coli*, el famoso colibacilo que vive en nuestro intestino, se divide, por término medio, cada veinte minutos. Los nuevos bacilos se dividen a su vez al cabo del mismo tiempo, de forma que su número aumenta en progresión geométrica, lo que da por resultado que en treinta y seis horas estos bacilos podrían formar una capa capaz de extenderse sobre toda la superficie del globo terrestre.

Una sola alga unicelular (diatomea) podría dar en ocho días, por divisiones sucesivas, una masa viviente mucho más considerable que la de la Tierra.

Lo mismo ocurre con los cultivos de tejidos de animales superiores, de que volveremos a hablar. Así, el carácter que más sorprende en el ser viviente es la proliferación y el desarrollo. *La vida es invasora*, expansiva. Veamos cuáles son los mecanismos que la mantienen en los límites en que la vemos.

Morfología de la célula. — La *célula* es la unidad fundamental de todo ser viviente.

Hay seres compuestos de una sola célula: protozoarios, algas unicelulares, bacterias. Todos los demás seres vivientes están constituidos por gran número de células que, según los órganos, varían considerablemente de forma y dimensión. Esta maleabilidad morfológica, combinada con las complicadas relaciones que existen entre las células, mantuvo durante largo tiempo en la ignorancia a los anatomistas sobre la estructura celular de los órganos. Fue necesario el uso del microscopio y de técnicas apropiadas para fundar la teoría celular sobre bases sólidas. Por esta razón sólo fue universalmente admitida hace apenas algo más de un siglo (Schleiden, 1838; Schwann, 1839).



Sección de una célula que muestra la membrana celular, el núcleo y su nucléolo, vacúolos y mitocondrios

La célula se compone esencialmente de una pequeña masa de gelatina transparente, más o menos fluida y no mezclable con el agua: el *protoplasma*.

En el centro de esa gota diminuta, que tiene generalmente un diámetro de unas milésimas de milímetro, se observa un cuerpo redondeado, de una refringencia diferente de la del protoplasma que lo rodea: el *núcleo*. Este cuerpo encierra en su interior un corpúsculo frecuentemente brillante: el *nucléolo*.

He aquí poco más o menos lo que revela el examen de la célula en *estado viviente*, ya se examine un protozoario, un pequeño animal transparente, una membrana o un órgano translúcido. Pero los histólogos, gracias a *fijaciones* y *coloraciones* apropiadas, han mostrado que, en realidad, la célula tiene una estructura mucho más complicada.

Ante todo, la célula está rodeada de una fina *membrana* que limita exteriormente el protoplasma.

El *protoplasma* no es homogéneo. En su interior presenta *inclusiones*, que son:

a) Materias de reserva: esférulas de grasa y glucógeno;

b) Gránulos de secreción, en las células glandulares;

c) Filamentos o gránulos aislados llamados *mitocondrios* y cuyo conjunto constituye el *condrioma*. En muchas células vegetales, el condrioma es visible en estado vivo. Pero en las células animales no se puede descubrir sino por medio de técnicas apropiadas. El condrioma se conoce sólo desde hace unos cuarenta años;

d) Un sistema de canalillos o *vacúolos* difíciles de ver, que varía según el papel de la célula: este sistema es el *vacúoma* o *sistema vacuolar* (Guilliermond).

Membranas. — Aparte de la membrana propia de la célula, que es extremamente delgada, ciertas células poseen una membrana independiente en forma de celda en la cual están contenidas: por ejemplo, la envoltura quitinosa en los insectos y la envoltura celulósica en los vegetales.

El *núcleo*, limitado por una membrana, encierra el jugo nuclear recorrido por una fina red de filamentos *(linina)*. En puntos diversos del saco nuclear se observa la masa de una substancia que se tiñe intensamente con los colores básicos, por lo que se le ha dado el nombre de *cromatina*.

Fisiología de la célula. — La fisiología de la célula ha realizado grandes progresos desde hace unos treinta años, gracias a dos nuevas técnicas: el cultivo y la microdisección.

Cultivo de las células. — Sabemos que colocando bacterias en un medio apropiado (caldo de cultivo) veremos cómo se multiplican. Si se siembra una sola especie se obtiene lo que se llama *un cultivo puro*. Este método, introducido por Pasteur en la ciencia, ha prestado a la bacteriología muy importantes servicios y ha permitido estudiar la evolución de microorganismos y determinar la influencia de los agentes físicos y químicos sobre estos seres: temperatura, luz, substancias favorables y desfavorables (antisépticos).

Gracias a ese método se han podido aislar las toxinas producidas por los microorganismos y atenuar su virulencia. Por consiguiente, constituye la base de las investigaciones sobre la inmunización y las vacunas.

Se sabía desde hace tiempo que ciertas células podían vivir algún tiempo fuera del organismo (leucocitos de la sangre conservados en el suero); pero solamente hacia 1910, **Burrows** y **Alexis Carrel** demostraron que, colocadas en condiciones de nutrición favorables, las células de los tejidos, y particularmente las de los tejidos embrionarios, pueden multiplicarse *in vitro*. Cuando, por operaciones sucesivas, los residuos resultantes de la vida de las células son eliminados mediante lavados apropiados, cuando se estimula después la división gracias a las *trefonas* de los tejidos embrionarios y, por último, se preserva el cultivo de toda contaminación por bacterias del medio exterior, estos cultivos de tejidos pueden conservarse indefinidamente. De este modo, un cultivo de miocardio embrionario, aislado por Carrel en enero de 1912, pudo subsistir por espacio de *treinta años* en perfecto estado. Su muerte fue

debida únicamente a un accidente. Tras haber sufrido varios millares de trasplantes, su vitalidad era la misma del primer día.

Rodeado de los mayores cuidados, el pollo que dio origen a ese cultivo habría muerto mucho antes (sin duda hacia el año 1922). Además, e insistimos en ello, el cultivo no dio signo alguno de senectud, lo que induce a creer que la célula "criada en libertad", o sea que no tiene que sufrir el contacto de las células de los tejidos vecinos, es inmortal. Si el cultivo celular hubiera sido conocido en la época de los faraones, habría podido llegar hasta nosotros un fragmento *perfectamente* vivo del cuerpo de Sesostris.

Pero esa técnica extraordinaria, por otra parte, no nos suministra solamente este conocimiento nuevo, sino que nos permite seguir la evolución de las células y, por tanto, resolver cuestiones sobre las cuales los biólogos discutían sin resultado desde hacía muchos años, por ejemplo, la del parentesco entre las diversas especies de leucocitos: mononucleares, plurinucleares, etc.

Esa técnica permite el cultivo de los *ultravirus*, es decir, el de microbios demasiado pequeños para ser vistos incluso con los microscopios de mayor aumento y que, refractarios a los medios de cultivo habituales, sólo prosperan en contacto con las células vivas. Permite también estudiar la acción de las diversas substancias farmacológicas y terapéuticas sobre las diferentes especies de células y, si es necesario, sobre células *humanas*. Se realiza, pues, una verdadera microvivisección.

Por último, se ha revelado como uno de los métodos más fecundos para el estudio de la célula cancerosa.

Microdisección. — El anatomista que desea conocer ciertas estructuras finas se ve obligado a realizar operaciones que están "fuera de su alcance". Ciertas estructuras son demasiado exiguas para que el ojo humano pueda percibirlas o para que la mano del anatomista, armada de la aguja de dirección, pueda disecarlas. ¿Qué hace ésta entonces? Hace lo que el relojero que tropieza con las mismas dificultades: se arma de una lupa.

Mas los elementos de los tejidos y de las células, y también los microorganismos, son incomparablemente más pequeños que los engranajes de los más minúsculos relojes: miden sólo unas milésimas de milímetro.

La lupa no es suficiente: es necesario el uso del microscopio y emplear los mayores aumentos que ese admirable instrumento pueda dar. Pero cuando se ve la célula en todos sus detalles, entonces es la mano la que resulta insuficiente. La más fina aguja de disección aparece como una estaca enorme cuyos torpes movimientos lo aplastan todo. Semejante situación es como la de un hombre que quisiera disecar una alondra con un mástil de gran navío.

Estirando el vidrio, se han llegado a obtener agujas extremamente finas, que se fijan en soportes metálicos movidos por tornillos micrométricos, de forma que sus agudas puntas puedan moverse bajo el objetivo del microscopio con una precisión admirable. (Chambers.)

He aquí, pues, un instrumento que pone la célula, el protozoario y los microorganismos a nuestro alcance, que los eleva a *nuestra escala*. Con algo de práctica podemos extraer el núcleo o bien operar donde estaba. Por medio de micropipetas podemos inyectar en el interior de la célula un líquido que nos permite conocer la reacción operada en ella, así como estudiar la influencia de diversos compuestos químicos, es decir, hacer *farmacología celular*.

Cinematografía microscópica. — Se olvida con frecuencia que el cinematógrafo es un aparato que nació en un laboratorio. Lo construyó un gran fisiólogo francés, **Jules Marey** (1830-1904), para estudiar la locomoción del hombre y de diversos animales, así como el vuelo de las aves. Muchos de esos movimientos no están a nuestro alcance *en el tiempo*. Son muy rápidos o muy lentos para que el ojo humano pueda seguirlos. El cinematógrafo registra esos movimientos, y el operador, haciendo pasar la cinta ante nuestros ojos a la *velocidad conveniente* (disminuida o aumentada), nos permite un estudio que sería imposible realizar directamente.

La cinematografía microscópica, es decir, de elementos aumentados varios centenares de veces, presenta considerables dificultades técnicas. Esas dificultades fueron resueltas en gran parte hace unos veinte años, especialmente por un francés, **Commandon,** que tomó vistas admirables. En la célula, las modificaciones morfológicas se desarrollan con una lentitud tal que son casi imperceptibles para nosotros. Tomando una fotografía microscópica cada diez segundos, por ejemplo, y proyectándo luego a una velocidad acelerada la serie de esas imágenes, se reproduce en cierto modo una síntesis de esas deformaciones o de esos movimientos. Se obtienen así no sólo películas de demostración de un efecto cautivador, sino que se obtiene —hay que insistir en ello— un método de investigación de primer orden, que ha permitido el descubrimiento de hechos nuevos e importantes.

Función del núcleo. — No existe célula desprovista de núcleo. Las excepciones de esta regla sólo son aparentes. Las bacterias y las cianofíceas (algas) no poseen núcleo morfológicamente definido, pero hay en el citoplasma una especie de polvo nuclear, es decir, el núcleo se ha fragmentado.

Además, una célula desprovista de núcleo no puede vivir. Ciertas células son, en efecto, suficientemente voluminosas para que, bajo el microscopio, se puedan dividir en dos partes, una de ellas desprovista de núcleo. La parte nucleada sigue viviendo y regenera incluso la parte suprimida. La parte desprovista de núcleo, después de haber subsistido algún tiempo, termina por degenerar y desaparecer. (Las experiencias de *merotomía* se realizan en Francia desde 1888, en que Balbiani utilizaba infusorios de gran tamaño.)

Existen relaciones fisiológicas evidentes entre citoplasma y núcleo. Basta hendir la periferia de una célula por medio de un aparato de microdisección para que se observen lesiones en el núcleo.

Cuando una célula "trabaja", el núcleo modifica su estructura; cuando ciertas células glandulares entran en la fase de secreción, el núcleo se acerca a la parte que secreta. En las células jóvenes, muy activas, el núcleo tiene un volumen mayor que en las adultas.

Existe, pues, una verdadera simbiosis entre el protoplasma y el núcleo; protoplasma y núcleo deben coexistir para asegurar la vida de la célula.

Parece ser que una de las funciones principales del núcleo es la de presidir los fenómenos de síntesis.

Por su cromatina, el núcleo, como se verá, desempeña un papel de decisiva importancia en los fenómenos de la herencia.

Función del condrioma. — En contacto con los mitocondrios, tanto en las células vegetales como en las animales, es como se ven aparecer las materias de reserva elaboradas por la célula (almidón, grasas, etc.). Parece, pues, que estas formaciones intervienen de una manera activa en la *elaboración* de las substancias que nacen en el seno del protoplasma.

Función del vacuoma. — El *vacuoma*, aún mal conocido, parece sobre todo acumular los productos elaborados por la célula y que no son inmediatamente utilizados. En una misma célula pueden coexistir dos vacúolos que no tengan la misma constitución química (vacúolos con tanino o sin tanino de las células vegetales). El vacúoma está más desarrollado en las células vegetales que en las animales y se encuentra situado generalmente entre el núcleo y la parte secretoria de la célula, con lo cual materializa la polaridad de ésta.

Reacciones de la célula. — La antigua citología estudiaba sobre todo la célula muerta o la célula aislada de corta supervivencia: las nociones así adquiridas tenían un carácter muy artificial. El cultivo y la cinematografía microscópica han renovado nuestras concepciones.

En los cultivos puros se permite a las células aisladas manifestar propiedades que permanecían latentes en el tejido; por otra parte, se les permite asociarse con otras especies de células y poner de manifiesto las fuerzas de sus mutuas reacciones.

La morfología de la célula está sometida a dos factores principales: la *herencia* y el *medio*. Existe una especialización celular, y cada tipo de célula responde a su manera a un mismo ambiente. "Una célula depende de su medio tan rigurosamente como el núcleo del citoplasma." (Carrel.)

Entre los más recientes y extraordinarios conocimientos adquiridos figuran los movimientos y los desplazamientos de las células. Hasta hace muy poco tiempo teníamos unas nociones completamente erróneas sobre este asunto. "En la película aparecen células fijas tan móviles como una llama. En ciertos puntos de su superficie se producen burbujas como en el agua hirviente. Las colonias de células epiteliales se asocian de un modo ordenado; pueden compararse a un regimiento, en el que cada cual tiene su sitio asignado. Las células amiboideas, por el contrario, no tienen ninguna tendencia a asociarse; parecen grupos de chiquillos que huyen en todas direcciones. Los leucocitos polifor-monucleares son amibas pequeñas y muy ágiles; los linfocitos se arrastran lentamente; los macrofagocitos progresan a la manera de un pulpo y están rodeados de una membrana ondulante casi invisible, cuyas hojuelas tienen la apariencia de seudópodos flagelados." (Carrel.)

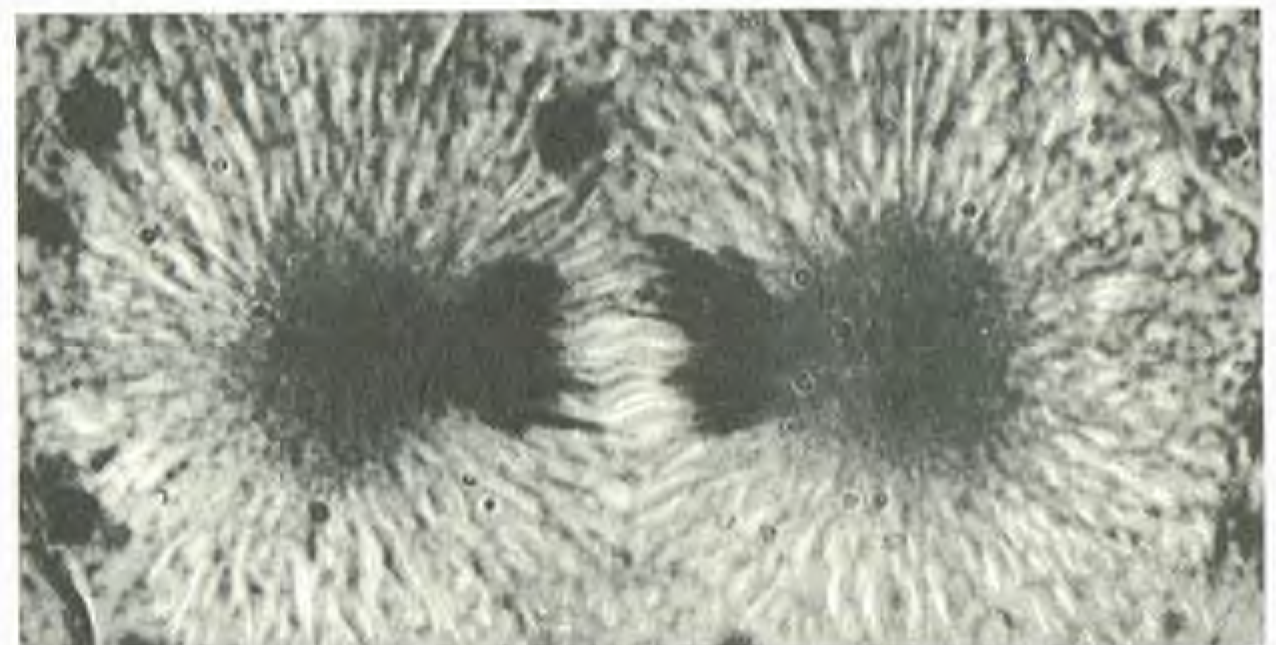
En resumen, el rasgo más destacado que nos revela esta nueva citología es la extraordinaria intensidad de vida presentada por tejidos que en otros tiempos parecían en estado casi estático.

División de la célula. — La multiplicación de las células se efectúa por la división del núcleo, seguida de la división del cuerpo celular.

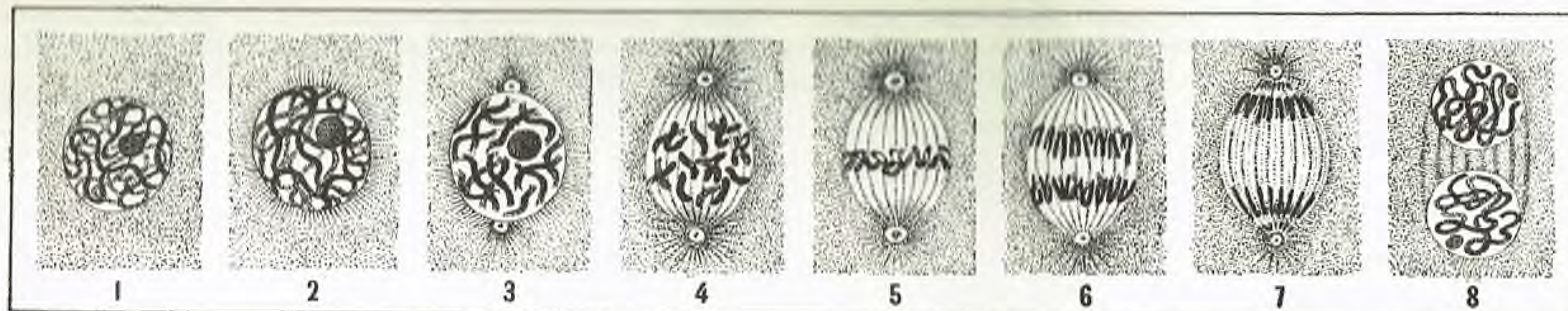
Cuando una célula de los organismos pluricelulares ha alcanzado su volumen específico y se encuentra en buenas condiciones, se divide, sea por vía directa —en cuyo caso el núcleo se alarga, sufre una estrangulación y termina separándose en dos partes para formar dos núcleos—, sea por vía indirecta, que es el caso mucho más frecuente. Se ha dado a este último modo de división los nombres de *mitosis* o *cariocinesis*.

En la cariocinesis se distinguen tres fases principales: la fase preparatoria o *profase*, la *metafase* y la *anafase*.

Profase. El primer fenómeno que llama la atención al comienzo de una división de la célula es la hinchazón del núcleo: su contenido se hace más heterogéneo y se forma una red que alcanza la periferia.



Microfotografía que muestra la última fase de la cariocinesis: Ascensión de los cromosomas en dirección de cada polo del huso *(Fot. Larousse)*



Cariocinesis: 1. Núcleo normal; 2. Formación de la red; 3. Formación de los cromosomas y aparición de los centrosomas; 4. Reunión de los cromosomas y transformación del núcleo en ovoide; 5. Los cromosomas forman la placa ecuatorial; 6 y 7. Atracción de los cromosomas por los centrosomas; 8. Los dos núcleos de las células hijas se separan, el filamento se reforma y se convierte en red. Desaparición de los centrosomas

Los filamentos de esa red se hacen cada vez más espesos y sus fragmentos no tardan en formar un grueso filamento hecho un ovillo sobre sí mismo, al cual se da el nombre de *espirema* o *filamento cromático.*

La división de esa especie de ovillo en cierto número de fragmentos nos da los *cromosomas* o *asas cromáticas.* El número de cromosomas es característico de cada especie. Durante estas operaciones, la membrana nuclear se ha disuelto y el núcleo se ha hecho ovoide. Cerca de sus extremidades aparecen, en la substancia protoplástica, finos filamentos radiales alrededor de cada uno de los polos del núcleo, que toman entonces el aspecto de estrellas. En este lugar se ha comprobado la existencia de una partícula más refringente, a la que se ha dado el nombre de *centrosoma* o *áster.* Los finos filamentos que parten de estos centrosomas se reúnen entre sí y forman una especie de huso.

Los cromosomas se disponen en círculo en medio del núcleo y forman la *placa ecuatorial.*

Metafase. Los cromosomas se cortan en dos partes iguales en el sentido longitudinal y forman dos placas ecuatoriales. Tienen formas curvas y la parte convexa está siempre vuelta hacia el interior. Bajo la influencia de los centrosomas, las dos partes de los cromosomas se separan. En las proximidades de cada centrosoma se reúne un número de mitades de cromosomas igual al número de cromosomas específicos del núcleo.

Anafase. Los cromosomas que acaban de reunirse alrededor del centrosoma se arrollan y se sueldan para formar un nuevo espirema. Los ásteres y los filamentos del huso desaparecen, el espirema se convierte en red y las membranas nucleares se reforman. El protoplasma de la célula se divide por aparición de una membrana que deja adherentes las dos células hijas.

La complicación de la división celular indirecta parece deberse a que en los seres poliplastidios ésta asegura la perpetuación de una organización que viene condicionada por la transmisión a las células hijas de la mitad exactamente de todas las partes contenidas en la célula madre y, por consiguiente, de las propiedades y caracteres inherentes a esas partes, especialmente a los cromosomas.

Más adelante se verá la función del cromosoma en la reproducción sexuada.

Cultivo de los tejidos. — Es sabido que, desde los estudios de Pasteur y sus colaboradores, el cultivo de las bacterias se ha convertido en una de las operaciones fundamentales de la bacteriología.

La considerable utilidad de esos cultivos incitó a los biólogos a investigar si no sería posible el cultivo de las células que componen el cuerpo de un animal igual que se cultivan los microorganismos.

En 1884, **Roux** extrajo del huevo de gallina un fragmento de embrión que sumergió en una solución de cloruro de sodio al cinco por ciento con una temperatura conveniente. Así pudo estudiar con el microscopio la evolución y la edificación de una parte del sistema nervioso y del tubo digestivo.

Leo Loeb, hacia 1901, mostró cómo las células epiteliales podían proliferar en la superficie de un coágulo de sangre. **Jolly** observó en 1903 que los glóbulos rojos de la sangre de batracio, conservada en una pipeta a la temperatura del laboratorio, se dividen aún al cabo de quince días. Los leucocitos de la sangre pueden ser conservados durante un mes e incluso más de un año si la sangre es mantenida a baja temperatura. Los leucocitos manifiestan su vitalidad con movimientos amiboideos.

Pero estas experiencias de tanteo demostraron solamente que ciertos elementos anatómicos podían conservarse en vida más o menos tiempo fuera del organismo e incluso sufrir alguna que otra división, lo que quiere decir que no se realizó entonces un *verdadero cultivo,* es decir, una proliferación abundante y de larga duración o aun prácticamente indefinida.

En 1907, **Ross Granville Harrison** logró elaborar la verdadera técnica del cultivo de los tejidos por el empleo, como medio de cultivo, de la linfa coagulada. Por este procedimiento obtuvo el desarrollo de las células nerviosas, el de las fibras musculares, su multiplicación y la aparición de contracciones en los mioblastos de nueva formación.

Con las investigaciones y nuevos *métodos de impregnación* de **Ramón y Cajal,** la histología pudo realizar grandes progresos en el conocimiento de la estructura del sistema nervioso. Como se dijo antes, el gran histólogo español vino a confirmar las teorías esbozadas por Ranvier, Golgi, etc. Basándose en las investigaciones de Ramón y Cajal, el profesor **Waldayer** dio a la célula nerviosa el nombre del *neurona.*

En 1910, Burrows y Alexis Carrel, al perfeccionar el método de Harrison en los laboratorios del Instituto Rockefeller, de Nueva York, mostraron que estos procedimientos de cultivo son de aplicación general.

Actualmente, el cultivo de los tejidos ha dado lugar a un número de trabajos considerables, y ha permitido, en muchos aspectos, renovar nuestras concepciones referentes a la morfología, la fisiología y la patología de los elementos anatómicos.

La *técnica* del cultivo de los tejidos exige mucho cuidado y un instrumental especial, pero tiene una reputación de complejidad inmerecida.

Se han propuesto diversos *medios de cultivo.* Uno de los mejores es el de Carrel, formado de plasma sanguíneo coagulado y de una solución salina que lo diluye y produce un coágulo de densidad apropiada. A este plasma se adiciona después extracto de tejidos de embrión (o de leucocitos) que aportan las *trefonas.*

Esas substancias, descubiertas por Carrel, son de primordial importancia, pues son las que estimulan la nutrición de los tejidos y provocan la proliferación de las células.

Los tejidos de los embriones son los más apropiados para realizar cultivos, ya que poseen un considerable poder de proliferación y la condición esencial de ser asépticos.

Pueden utilizarse embriones de ave (huevo de gallina incubado y abierto asépticamente) o embriones de mamíferos, extraídos asépticamente del útero. Para esa operación se utilizan unos fragmentos muy pequeños de embrión, de uno a dos milímetros de lado, puestos sobre una laminilla aséptica impregnada de plasma. A esos fragmentos se añade un poco de extracto embrionario que provoca la coagulación del plasma y la formación de la fibrina, extracto que suministra asimismo las *trefonas* indispensables. Las laminillas son entonces colocadas en un recinto aséptico y húmedo.

Cuando el cultivo prospera, se observa que las células de la periferia permanecen bien vivientes, mientras las del centro degeneran y mueren. Esta *zona fértil* de la periferia prolifera y da nuevos elementos anatómicos que invaden el medio de cultivo, es decir, la *zona de invasión,* verdadera colonia celular.

Esta última zona del cultivo es la más interesante de todas, por ser la que constituye el verdadero cultivo, la que se compone de elementos anatómicos creados a expensas de los materiales suministrados por el medio de cultivo.

Actualmente, debido a la gran vitalidad de esos elementos anatómicos, los conjuntivos (fibroblastos) son los que predominan en los cultivos de tejidos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, se obtiene un cultivo mixto. Por esta razón, una partícula de hígado embrionario puesta en cultivo da primero células amiboideas aisladas: linfocitos y macrófagos. Unos días después se ven aparecer elementos anatómicos con tendencia a asociarse y a formar tejidos: epitelio y endotelio vascular.

El cambio de técnicas ha permitido obtener cultivos puros de tejidos especiales: epitelio del cristalino, célula tiroidea, célula cartilaginosa, mioblasco cardiaco, así como elementos procedentes de tumores, como el fibroblasto de sarcoma de Roux.

Los nuevos progresos debidos al método del cultivo de tejidos son numerosos e importantes.

Se ha logrado, gracias a ese método, la *vida en libertad* de la célula, que se encuentra así liberada de las acciones vasculares, nerviosas e incluso humorales.

Podrá objetarse que tales condiciones son algo anormales. Pero, sin embargo, ha quedado bien establecido que las propiedades fundamentales de la célula persisten en el cultivo. El epitelio conserva su morfología y sus reacciones estructurales en presencia de un tejido antagónico; el tejido muscular conserva su contractibilidad; las células de los tumores no dejan de presentar sus caracteres de nocividad.

El cultivo de los tejidos permite dar una solución definitiva a ciertas cuestiones aún pendientes, a pesar de la infinidad de estudios realizados para resolverlas. Se sabe, por ejemplo, que existen en la sangre de los vertebrados diversas variedades de leucocitos: linfocitos, mononucleares, polinucleares, eosinófilos... Para ciertos histólogos, estas variedades no eran sino formas particulares de una misma especie de células que habían evolucionado en diferentes direcciones. Para otros no existía transición posible entre esas diversas células blancas, que constituían verdaderamente especies distintas desde el punto de vista del origen, la morfología y la fisiología.

Gracias al método de los cultivos se ha podido obtener la prueba formal de la transformación de los mononucleares en polinucleares, en macrófagos y hasta en fibroblastos.

Ese método significa, pues, el triunfo de la teoría *unicista.* Gracias a la cinematografía microscópica, realizada sobre todo por Commandon, se puede asistir a esas transformaciones y mostrarlas incluso a un vasto público. La película cinematográfica reemplaza ventajosamente la serie de preparaciones que inmovilizaban los diversos estados del fenómeno. La preparación *viviente* substituye las preparaciones fijas y coloreadas, es decir, las preparaciones muertas.

Esos cultivos pueden ser sometidos a la acción de substancias muy variadas y realizarse así investigaciones de farmacología o de toxicología celulares.

De este modo la vivisección ordinaria es substituida por la microvivisección, que permite realizar experiencias directas sobre los tejidos humanos.

Este método de cultivo de los tejidos ayuda además, de una manera eficaz, a la bacteriología, y ha permitido el cultivo de los ultravirus *in vitro*, lo que era antes imposible. También ha permitido estudiar el papel desempeñado por diferentes células en los fenómenos de inmunidad; por ejemplo, la producción de los anticuerpos o la génesis del tubérculo en la infección por el bacilo de Koch.

Las consecuencias de estos nuevos procedimientos de investigación rebasan incluso los límites del campo de la biología. Sabemos que se ha podido hablar de inmortalidad en los protozoarios: la célula única que compone su cuerpo da nacimiento por división a otros seres que, dividiéndose a su vez, aseguran la perpetuidad de la descendencia.

En los cultivos de tejidos por *injertos* sucesivos sobre medios nuevos, su continuidad parece poder propagarse indefinidamente en el tiempo y en el espacio.

Funciones de reproducción

Introducción. — **Multiplicación asexual:** Multiplicación asexual en los vegetales. Multiplicación asexual en los animales. — **Multiplicación sexual:** Definición. Dimorfismo sexual y hermafroditismo. Fenómenos que preparan la fecundación. Fenómenos generales resultantes de la fecundación. Segmentación del huevo. Fenómenos histológicos y citológicos. Fenómenos nucleares (cromáticos) concernientes a la multiplicación asexual y a la reproducción sexual. — Hipótesis sobre la acción del elemento macho

Introducción. — Un cristal tiene una forma determinada; un pedazo de roca, una estructura definida. En el seno de su medio habitual, uno y otro subsisten indefinidamente o bien mucho tiempo; el primero en su forma original, el segundo con la estructura que le ha conferido el conjunto de sus elementos. Existe, pues, al menos en principio, una *conservación pasiva* de los seres inanimados o hechos de materia inerte.

No ocurre lo mismo con los seres cuyo cuerpo está formado de materia viviente: un ser unicelular (un infusorio, por ejemplo, o una bacteria) realiza, por el contrario, en su medio habitual, *intercambios activos continuos* con el exterior y no podría subsistir bajo su forma sin ellos. Del mismo modo, un organismo pluricelular, como una encina o un hombre, conserva su estructura anatómica gracias a una lucha y a una colaboración de todos los instantes con el agua, el aire, el sol, los alimentos y las demás plantas o animales. En los seres vivientes no se observa una conservación pasiva, sino una perpetua reedificación de su cuerpo, cuya composición, fiel a sí misma, es sin embargo inestable.

Además, al cabo de unas horas o de muchos años, y a la inversa de lo que ocurre con un diamante o un bloque de granito, sucede fatalmente que, por una forma de degradación de la energía fisiológica, todo ser viviente pierde su individualidad: unas veces —como es el caso de la mayor parte de los infinitamente pequeños— porque su cuerpo se fracciona en dos o varias porciones y el individuo desaparece para convertirse en "dos o varios individuos". Otras veces —es el caso de la mayoría de los organismos superiores —, el cuerpo se descompone, se destruye en cuanto a su forma y estructura, pero antes de este fenómeno —que es la muerte—, el individuo se desprende, en varias veces, de una porción viviente y más joven que la de sí mismo, es decir, de un *germen* que, al desarrollarse y aumentar su masa, podrá, en ciertas condiciones, volver a dar un cuerpo idéntico o muy parecido al que ya no existe.

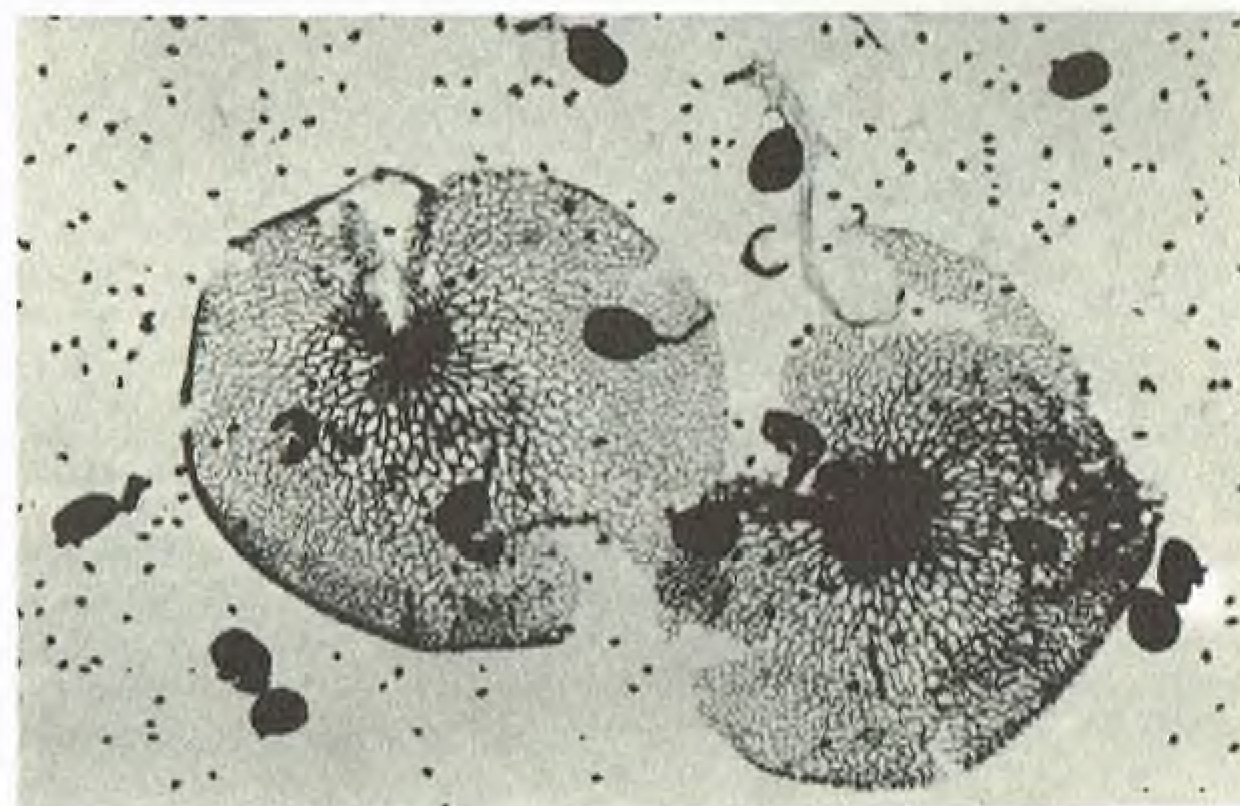
Hay, por consiguiente, si no conservación, por lo menos perennidad o continuidad dinámica de la materia viviente, debido a dos fenómenos fundamentales: de una parte, la fragmentación del *individuo*, gracias a lo cual *se multiplica*; por otra, la extracción de una fracción del individuo, que, por medio de este germen, *se reproduce*. Por ello, la muerte fisicoquímica, excepcional en los seres capaces de multiplicarse, es una regla común en los que se reproducen.

La continuidad de la vida queda así asegurada entre los *ascendientes* o genitores y los *descendientes*, de dos modos principales (también los hay intermedios); la *multiplicación*, que es *asexual*, y la *reproducción*, que, en general, es *sexual*.

Multiplicación asexual

Multiplicación asexual en los vegetales. — Esta multiplicación es muy común entre los vegetales, que tienen una individualidad menos destacada que los animales y soportan, sin morir, el ser artificialmente cortados, podados y desyemados. Muy frecuentemente, la planta madre y el trozo que se le ha sacado viven igualmente bien (aplicaciones hortícolas o agrícolas: acodadura, reproducción por medio de estacas o desqueje, injerto, acolladura o aporcadura). Pero numerosas plantas se multiplican también espontáneamente al desprenderse de partes más o menos voluminosas de sí mismas constituidas por tejido joven o rejuvenecido con relación al tronco.

Según **Chouard,** "todos esos brotes" (o formaciones nuevas), que "provienen habitualmente de tejidos jóvenes, meristemos, células del cámbium, etc., pueden también provenir, algunas veces, de cualquier otro tejido diferenciado y aún viviente, incluso de la epidermis. La producción de brotes ha sido objeto de numerosas hipótesis. Parece ser que la modificación del medio interno, sobre todo la acumulación de materiales nutritivos, es uno de los principales factores que provocan divisiones celulares, así como el sentido de las corrientes de agua y de savia parece desempeñar un papel importante en la polaridad que toman desde el primer momento los tejidos en brote".



Microfotografía de un esporangio que, al romperse, esparce sus esporas (*Fot. Presse moderne*)

Si nos servimos del microscopio, encontraremos análogos fenómenos en los *vegetales inferiores:* musgos, algas, hongos, líquenes, e igual en los protófitos.

Así, la extensión de una capa de musgo es el resultado de una multiplicación de los tallos que constituyen su espesor. Por otra parte, el musgo se perpetúa por dos medios alternantes: el de los órganos sexuados y el de las *esporas vegetativas*. Éstas son las que vemos desprenderse, en forma de fino polvo, de las *cápsulas* sostenidas por finos pedúnculos que existen en lo alto de ciertos tallos revestidos de hojas.

Las algas marinas se desquejan fácilmente. El mar de los Sargazos debe en parte su nombre a la facultad que tienen los sargazos de multiplicarse rápidamente por desqueje, pero su medio nutritivo de recuperación es el agua del mar en lugar de la tierra...

Los hongos superiores fragmentan su talo o lo alargan indefinidamente para producir sombreretes (que son sexuados) a gran distancia del tronco. Ocurre lo mismo con los hongos inferiores, pero éstos poseen además órganos asexuados en forma de pera, o *esporangios*, que emiten *esporas* propagadoras... De este modo, los líquenes diseminan a lo lejos pequeñas masas formadas de alga y de hongo o sea *propágulos* que no tienen más que desarrollarse para dar origen a líquenes semejantes a sus progenitores.

Multiplicación asexual en los animales. — Aunque estamos acostumbrados a ver multiplicarse las plantas sin ayuda de semillas, nos asombra por el contrario ver un animal cortarse en trozos que no sólo siguen viviendo, sino que se completan y regeneran individuos semejantes al primero, o bien echar brotes que se separan de su cuerpo. Este animal puede todavía formar reservas (limitadas en volumen) de tejido joven, que tienen cierta analogía con las esporas de los vegetales inferiores y de los protistas. He aquí algunos ejemplos que ilustrarán estas tres clases de multiplicación "vegetativa":

1° Un infusorio ciliado, como el estentor o el paramécido, sufre una división previa de su núcleo y después una estrangulación transversal de su cuerpo celular, que se corta al fin en dos y cada una de sus porciones hijas se lleva el núcleo hijo. Un flagelado como el tripanosoma se divide también en dos, pero según un plano longitudinal.

Los espongiarios, los celentéreos (pólipos y medusas), los anélidos, formados sin embargo de un gran número de células distribuidas en tejidos diferentes, sufren la *división* con mucha frecuencia. ¿Quién no ha visto dividirse a una hidra de agua dulce, o a dos trozos de una lombriz de tierra regenerar otras dos lombrices?

2° La *gemación*, muy extendida en las especies que forman colonias de individuos ligados entre sí, fisiológica o anatómicamente, existe tam-

bién en las formas que permanecen individuales durante toda su existencia (por ejemplo, entre los protozoarios: la podofria; entre los metazoarios: la ascidia compuesta o ascidia social).

3º La *esporulación* consiste en que de un organismo que va a morir sobrevivirán gérmenes —pluricelulares cuando se trata de un metazoario— que se desarrollarán en nuevos seres (hibernáculos o estatoblastos de los briozoarios; sorites y gémulas de los espongiarios; yemas cargadas de reservas de ciertas ascidias).

Hay que preguntarse, igual que en el reino vegetal, cuáles son, si no las causas directas de todos estos casos de la reproducción asexual, sí al menos las condiciones generales que las provocan. **Brachet** las presenta de esta forma: "Parece ser que un organismo capaz de reproducción asexual entra en propagación cuando, por una parte, las condiciones ofrecidas por el medio ambiente son muy favorables a su vida y permiten, por consiguiente, de forma "durable", una nutrición abundante, un rápido crecimiento y una vida larga; por otra, cuando esas condiciones son desfavorables (temperaturas excesivas, alimentación insuficiente o tóxica, etc.)". Sabemos, además, que, gracias a los mandos del sistema nervioso y a la difusión de las secreciones internas, las diferentes partes del organismo funcionan armoniosamente ligadas unas con otras, es decir, las "correlaciones funcionales" de **Claude Bernard.** Pero los centros de influjo nervioso o las glándulas de secreción interna ejercen una acción a distancia que depende, precisamente, de la misma: así, el metabolismo de la cola de un animal es menos intensa que el de su cabeza y, a todo lo largo de su cuerpo, el metabolismo varía según una escala en la que cada grado es un "gradiente metabólico" (nociones establecidas por C. M. Child).

Planteado lo que antecede, podemos concluir con Brachet: "Puede suceder que en un animal de estructura simple, o incluso altamente organizado, la estrechez de las correlaciones se relaje, o que la intensidad de una función dominante se debilite: en tales condiciones, una o varias partes del cuerpo cesarán de ser dominadas total o parcialmente por las demás. Podrán éstas recuperar una fuerte autonomía en sus manifestaciones si el metabolismo especial al que estaban sometidas no las ha marcado con rasgos indelebles. En el caso en que la autonomía sea completa, las partes aisladas podrán recuperar la perdida aptitud para el metabolismo total y, por consiguiente, sus potencialidades volverán también a ser totales. Les bastará vivir y alimentarse para desarrollar esas potencialidades y sufrir las diferenciaciones necesarias para la edificación de un organismo nuevo."

Tal es la interpretación general actual sobre los dos puntos de vista extrínseco e intrínseco del organismo, de los actos de multiplicación asexual en los animales y, por conexión, de los actos de cicatrización después del corte y de regeneración.

Reproducción sexual

Definición. — Esta forma de generación se distingue netamente de la multiplicación asexual o vegetativa. Se ha comprobado con ejemplos que ésta varía hasta el infinito en sus medios y en sus manifestaciones. Su eficacia es limitada. En efecto, los productos de una multiplicación asexual repetida terminan por ser diferentes de los primeros ascendientes, hasta el punto de que debe intervenir la reproducción sexuada para dar nuevo vigor a la descendencia (ejemplo: las diatomeas, cuya disminución de tamaño es detenida por la formación de "auxoesporas"; los productos hortícolas, cuyo valor disminuye a medida que se fuerza la multiplicación vegetativa).

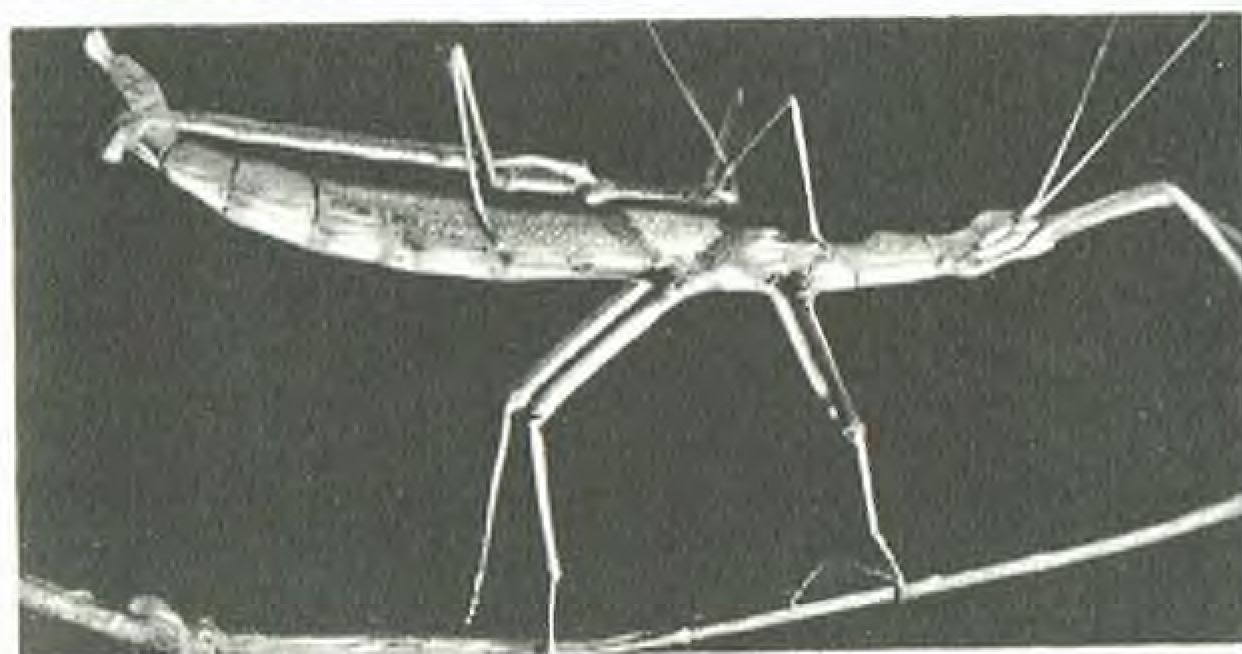
La reproducción sexual tiene, por el contrario, caracteres precisos y constantes en todos los seres: animales, vegetales y protistas. Esa reproducción consiste esencialmente en la formación de un nuevo ser a partir de una sola célula de caracteres especiales, llamada *oosfera*, más brevemente *óvulo*, o más generalmente *gameto hembra*. Este huevo tiene el poder sorprendente (desde luego, en un medio adecuado) de dar nacimiento a millones de células que resultan generalmente tan diferentes unas de otras como puedan serlo una célula nerviosa y una célula glandular. Es lógico calificar de sorprendente ese poder *embriogénico*, cuando se le compara al de una espora vegetativa de vegetal inferior o incluso de helecho, al cual podemos intentar comparar una célula huevo. Una espora asexual sería, al "germinar", incapaz de dar una hierba, un árbol o un vertebrado.

Por regla general, el huevo no manifiesta ese poder de *reproducción* si no ha sido *fecundado* por una segunda célula de caracteres especiales y muy diferentes de los del huevo, llamada *anterozoide* en el reino vegetal, *espermatozoide* en el reino animal y más generalmente *gameto macho*.

¿En qué consiste la *fecundación*? Esta cuestión encierra una serie de problemas, capitales o accesorios, que van a ser aquí estudiados en un orden que no es el de la Naturaleza, sino el orden de dificultad creciente de la observación de los fenómenos. Mas el fenómeno central (invisible por los medios habituales) hacia el cual van a convergir todos los demás es la fusión del núcleo del huevo virgen o gameto hembra con el núcleo del gameto macho tras haber sufrido ambos núcleos una reducción cuantitativa de sus materiales cromáticos respectivos que los ha preparado para la unión: esa fusión se opera siempre en beneficio del huevo.

Sin perder de vista ese centro natural —y lógico— de la reproducción sexual, suelen examinarse los principales fenómenos de conjunto que concluyen en la fecundación para examinar después los que siguen. Pero lo que debe retener antes la atención es la *disyunción de los organismos en machos y hembras*, diferenciados los primeros, en un estado precoz, del desarrollo de sus células sexuales machos, diferenciadas también muy pronto las segundas de las células sexuales que se convertirán en huevos.

Dimorfismo sexual y hermafroditismo. — Esta disyunción es muy acentuada en el reino animal. Pero en ciertos casos se muestra tan acusada, que los naturalistas han clasificado en especies y a veces en géneros diferentes a animales hijos de la misma madre. Nadie discutirá que el hombre y la mujer son morfológica, fisiológica y psíquicamente muy diferentes y que de esa disparidad resulta un armonioso conjunto. Conocido es el extraordinario dimorfismo sexual del ave del paraíso: el macho tiene enormes y magníficas plumas, mientras que la hembra sólo posee un modesto plumaje; la mariposa *Orgya antiqua* tiene alas si es macho y no las posee si es hembra; el ruiseñor canta si es macho y la hembra se limita a escucharle. Por el contrario, cuando se trata de cuidar de la progenie, las hembras poseen para ello casi siempre, y en alto grado, dispositivos anatómicos y disposiciones psíquicas de las que los machos están desprovistos, salvo raras excepciones. Esta desemejanza de aspectos y de instintos está en evidente relación con los respectivos papeles de los cónyuges, con los volúmenes y caracteres respectivos de sus órganos reproductores y con las diferentes hormonas sexuales que incitan en ellos tales o cuales caracteres sexuales secundarios. (Ver párrafo sobre las hormonas sexuales, en el capítulo ANATOMÍA HUMANA, p. 428.)



Acoplamiento de cifocráneos. El macho (arriba) es de tamaño mucho más reducido que la hembra *(Fot. Foneter)*

Las excepciones de esta ley de distinción de los organismos animales en machos y hembras no son muy numerosas: los primeros poseen testículos, y las segundas ovarios. Los animales *hermafroditas*, es decir, que poseen a la vez testículos y ovarios, se encuentran normalmente entre los briozoarios; algunos poliquetos (lombrices marinas); los oligoquetos (lombrices de tierra); hirudíneos (sanguijuelas); turbelarios (planarias); trematodos (duela, saguaipe); cestodos (lombrices solitarias); cirrípedos (balanos); pulmonados (caracoles); opistobranquios (aplisias); algunos lamelibranquios (ostras, pechinas), y ciertos protocordados (ascidias, salpas). Todos los demás animales, es decir, la mayoría, tienen un solo sexo por individuo.

En el *reino vegetal* ocurre a la inversa: el *hermafroditismo* es la regla, la diferenciación sexual la excepción. Todo el mundo sabe que una flor es, típica y esencialmente, el receptáculo de los órganos hembra, que son los *pistilos*, y de los órganos machos, que son los *estambres*. A veces faltan los pistilos o los estambres: las flores así disminuidas sexualmente son llamadas *diclinas;* si esos órganos están en un mismo individuo (como en la calabaza), la planta, cuyas flores tienen un mismo pie, se llama *monoica;* si están en dos individuos diferentes (como en el clavel coronado dioico), la planta es *dioica*. Esta sola cualidad representa una verdadera separación de sexos, pero separación de sexos no implica en los vegetales caracteres morfológicos diferentes, o por lo menos visiblemente muy diferentes. La laxitud misma de las relaciones metabólicas que nos explica la facultad de los vegetales para multiplicarse por fragmentación puede aún justificar la débil influencia de los órganos sexuales sobre el aparato vegetativo. Según nuestros conocimientos, las hojas y las ramas de un sauce hembra (con amentos de pistilos verde ceniza) no son discernibles de las de un sauce macho (con amentos de estambres amarillos). El hecho de producir *óvulos* (el óvulo de una planta comprende varias células, una de las cuales es la oosfera o huevo, por lo que el término de óvulo no tiene pues el mismo sentido que en biología animal), o el de producir granos de polen, sólo están ligados a modificaciones de las piezas anexas de la flor o a las transformaciones de la inflorescencia. Esto en lo que se refiere a los *vegetales superiores*.

En los *vegetales inferiores pluricelulares*, la separación de los sexos no acarrea tampoco un dimorfismo sexual muy acusado; los talos de los fucos con conceptáculos machos son semejantes a los de las hembras. Más aún, el isomorfismo que se aplica a los individuos machos y hembras cuando los sexos están separados puede, en ciertos casos, ser aplicado a los órganos sexuales mismos, anteridios (órganos machos) y oogonios (órganos hembras) [hongos inferiores]. La identidad de aspecto de los dos sexos puede incluso ir hasta hacer indiscernibles los gametos: hay *isogamia;* el vegetal es en este caso isógamo. La isogamia se da en los vegetales inferiores pluricelulares (por ejemplo: algas conjugadas), pero también frecuentemente en las *unicelulares* de los dos reinos (protozoarios y protófitos). Se trata aún de una propiedad biológica en la que se encuentran, en la base de la escala de los seres, animales y plantas. Planteada así la cuestión, es posible emprender el estudio de los fenómenos externos de la fecundación, distinguidos ya antes en dos grupos.

Fenómenos que preparan la fecundación. — Si los antifinalistas, por temor a la armonía, se oponen *a priori* a la finalidad de las grandes funciones biológicas invocada a cada instante por los finalistas en su terror de las imperfecciones y desarmonías naturales, esos dos grupos adversarios deberían por lo menos reconciliarse a la vista de las múltiples precauciones que toma la Naturaleza para asegurar, de una parte la madurez y la conservación en cada individuo reproductor de un número inmenso de gérmenes, y por otra el encuentro de gérmenes hembras y de gérmenes machos, condición de la perpetuación de la vida. Sin embargo, existe una multitud de plantas (y algunos animales) que no parecen estar favorecidas con dispositivos perfeccionados o con funcionamientos precisos para lograr con seguridad el acto generador primordial que es la fecundación, sino que son ayudadas por lo que llamamos el azar. Por ejemplo, los fucos ya citados dejan escapar de sus conceptáculos machos y hembras, como por "casualidad", hilos de agua de mar, las oosferas y los anterozoides. Éstos son muy pequeños en relación con las oosferas, pero, a la inversa de éstas, los anterozoides están dotados de un aparato locomotor formado de dos flagelos vibrantes gracias a los cuales pueden dirigir sus movimientos hacia el objeto de su atracción cuando la distancia se lo permite.

En cuanto a las *plantas florales*, la fuerza de gravedad o el aire son los encargados de aproximar los sexos: en mayo, los bosques de pinos se doran de nubes de polen en cuanto la brisa agita las ramas: los conos de las flores hembras, al recibir ese polvo fertilizador, quedan necesariamente fecundadas (en África del Norte, los árabes substituyen la acción del aire con el polen recogido de los datileros machos y lo sacuden después sobre las flores de los pies hembras). Todas las gramíneas, a pesar de ser hermafroditas, son fertilizadas gracias a los granos de polen transportados por el aire y que la gran superficie de plumosos estigmas detiene a su paso.

Esta *polinización*, llamada *indirecta*, dejada así al azar, no es menos segura, sin embargo, que la llamada *directa:* ésta, que es específica de las plantas cuyas flores poseen a la vez estambres y pistilos, tiene lugar cuando los estambres de una flor llegan a la madurez al mismo tiempo que su pistilo. Como sucede que los estambres abren sus anteras en la proximidad inmediata del estigma, ocurre que, ya sea el contacto directo, ya el menor estremecimiento, asegura la aproximación y la adhesión de los granos de polen a las papilas glutinosas que constituyen los medios de captura del estigma. Por otra parte, hay ciertas flores que están dotadas de mecanismos verdaderamente extraordinarios, destinados a proyectar o a aplicar el polvo fecundador sobre el estigma: su funcionamiento, basado en la distensión de los tejidos elásticos (estambres "sensibles" y móviles del agracejo, lóbulos estigmáticos que se cierran sobre el polen en el mímulo), es una prueba de que el mundo vegetal, a pesar de la rigidez que le imponen sus cuadros de celulosa y pese a la simplicidad de sus estructuras, puede, como el mundo animal, realizar movimientos de precisión.

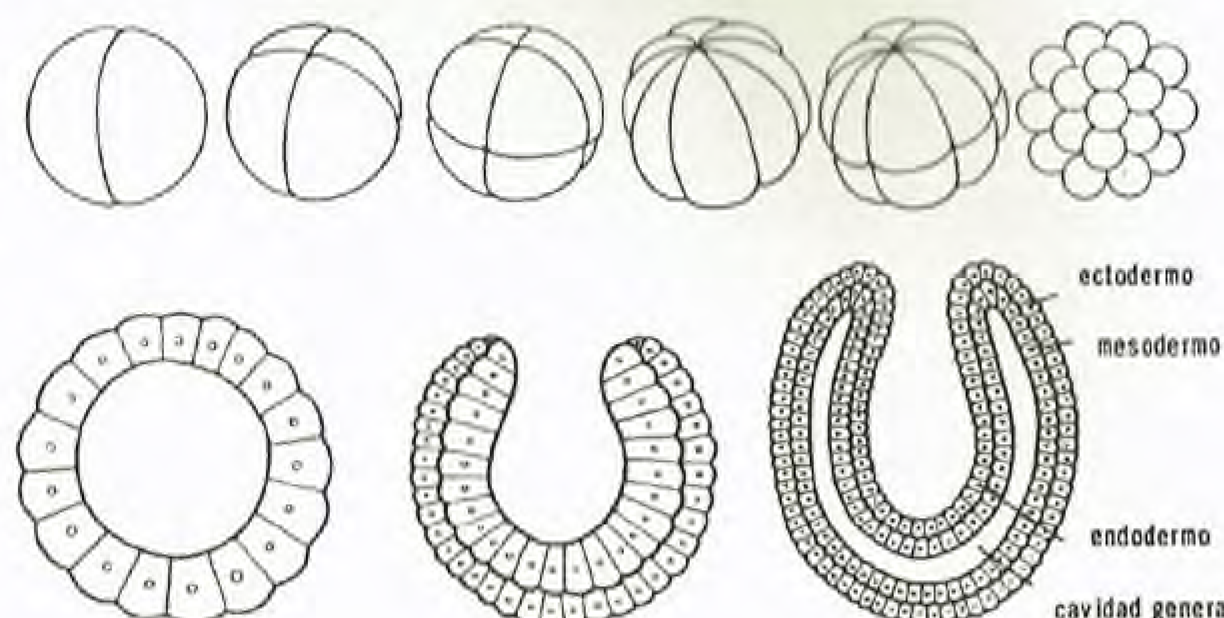
No discutiremos aquí la realidad o la apariencia de una coaptación de los *insectos* con las flores cuando éstas son fecundadas gracias a ellos. Sólo podemos asegurar que las abejas, los abejorros y otros himenópteros aseguran, en gran número de casos, la polinización indirecta o cruzada que se produce forzosamente cuando las plantas tienen flores diclinas o cuando los estambres de un mismo individuo hermafrodita maduran antes o después que su pistilo. También aseguran la polinización de flor en flor en el caso en que la *autofecundación*, aunque difícil, es posible sin ellos (orquídeas). Según **Bonnier,** el papel de los insectos en sus relaciones egoístas con las flores (la busca del néctar) parece ser que es el de aumentar, en beneficio de ciertas especies, el número de fructificaciones que, con el solo concurso del aire y la fuerza de gravedad, serían moderadas e incluso se harían insuficientes para conservar las descendencias correspondientes... O sea *adaptación* que podríamos calificar, de acuerdo con varios autores modernos, de *estadística,* pero que no es cualitativa en absoluto.

Se ha dejado de lado la parte estática y morfoanatómica de la cuestión, pero es probable (los estudios en este sentido están poco avanzados) que el sistema de escamas, de hojas modificadas, brácteas, sépalos, pétalos, nectarios o glándulas de néctar, de pelos, etc., que se observan alrededor de los órganos reproductores de la inmensa mayoría de las plantas, no son inútiles para la preparación del acto generador. El calor que reina en el interior de las corolas es tal vez un simple residuo energético, pero quizás también favorezca la maduración de los gérmenes. Sin llegar, como hizo **Bernardin de Saint-Pierre,** a ver en los colores y el brillo de las corolas otros tantos espejos capaces de recibir los rayos solares que el hombre podría utilizar, cabe preguntarse si, aparte su belleza, las envolturas florales, los sombreretes de los hongos y las criptas de las algas tienen o no un valor fisiológico.

En el *reino animal* son relativamente raros los ejemplos de procesos pregeneradores que se desarrollan a "lo que salga", por capricho del medio ambiente. Tales procesos sólo se encuentran en el medio acuático, que puede contentar a lo sumo un momento los espermatozoides, que son buenos nadadores. Los espongiarios y los celentéreos no conocen el acoplamiento; los peces, salvo los seláceos y las especies vivíparas, tampoco. En general, "los huevos, después de ser puestos por la hembra, son fecundados por el macho, que los riega con su líquido seminal." (R. Perrier). Pero la mayor parte de los animales están provistos de *órganos de acoplamiento*, cuya perfección iguala con frecuencia a su complejidad: obras enteras han sido dedicadas a los dispositivos, aparatos y accesorios asombrosos de que están dotadas las glándulas sexuales de los más variados animales. Tal vez es entre los insectos —cuya quitina superficial puede adoptar todas las formas al obedecer a las inflexiones y a los pliegues de la hipodermis que la secreta— donde se realiza más exactamente el acoplamiento en el doble aspecto anatómico, morfológico y funcional. Las piezas de la armadura del macho se adaptan sin solución de continuidad a la extremidad (o al anexo) vaginal del oviducto, que recibe íntegramente el licor espermático.

Fenómenos generales resultantes de la fecundación. — Estos fenómenos son el objeto de una de las ciencias más difíciles y especializadas, la *embriología*, de la que sólo podremos dar aquí una breve idea, principalmente en lo que se refiere a las formaciones y fenómenos de conjunto.

Segmentación del huevo. — Inmediatamente después de la fecundación, el huevo se segmenta un gran número de veces y, tras una serie de etapas que son siempre semejantes, los elementos del embrión, dotados de una gran fuerza vital, se diferenciarán para dar los seres más elevados en la clasificación botánica o zoológica.



Arriba: Segmentación del huevo hasta la mórula. *Abajo,* de izquierda a derecha: blástula, gástrula, gástrula con sus tejidos diferenciados

El huevo, obtenido por la fecundación del gameto hembra por el gameto macho, se divide por cariocinesis, forma primero dos células, luego cuatro, ocho, etc. Este conjunto de células no diferenciadas se llama *mórula.*

La segmentación de las células continúa, pero en lugar de seguir formando un pequeño conjunto que tiene el aspecto de una mora, las células se colocan periféricamente para dejar entre sí una cavidad interior. El cuerpo adopta entonces la forma de una pequeña esfera que se llama *blástula.*

Aunque la blástula no cesa de segmentarse, se invagina como cuando se hunde un dedo en un balón poco hinchado. Entonces se distinguen en esta etapa *(gástrula)* dos tejidos: uno exterior, que dará origen a los tejidos de protección, *exodermo* o *ectodermo,* y un tejido interior, el *endodermo.* El orificio así producido en la gástrula, que tiene la forma de una boca primaria, lleva el nombre de *blastoporo.*

Los tejidos continúan diferenciándose todavía más y crean una tercera capa, o sea el *mesodermo.*

Las diferenciaciones siguen sucediéndose, pero desemejantes, según los diversos seres que deben reproducir.

El embrión, que en su evolución pasa por las etapas en las que los antiguos evolucionistas querían ver los recuerdos materiales de las especies que le precedieron, es, como dice **Wintrebert,** un embrión "de su tiempo". Alimentado por el medio interior de su madre (cuando se trata de un *mamífero*), en unión con los tejidos maternos, su interdependencia anatómica es tan estrecha que ambos tienen en comunicación los vasos sanguíneos. El embrión lleva una vida casi parasitaria y de condiciones tan singulares que no puede dar ni siquiera la imagen reducida del futuro adulto. Hay, por consiguiente, funciones fisiológicas que merecen el nombre de embrionarias: sin dejar de evolucionar hacia los mecanismos de intercambios normales en la medida de las diferenciaciones, desplegaduras, plegaduras y gemaciones de las *hojas* primitivas, dichas funciones están perfectamente adaptadas a la permanencia del pequeño ser en el obscuro calor del vientre materno.

Si de los animales superiores vivíparos pasamos a los ovíparos, vemos que los *anexos embrionarios* destinados a asegurar la protección del ser en el interior de la madre son reemplazados por las envolturas del huevo mismo, que se multiplican bajo diferentes formas protectoras y nutritivas y se preparan a entreabrirse para que pueda salir la larva (glándulas embrionarias de jugo corrosivo destinado a romper la cáscara).

Las *plantas* llevan también a sus pequeños, los alimentan y los protegen. El óvulo que dará el grano comprende no sólo el embrión, sino también los *anexos embrionarios,* que son, en los casos más generales, la *albúmina,* el *perispermo* y los *cotiledones.* Los materiales de estos anexos son llevados al óvulo por los vasos de su funículo de unión con la placenta del ovario materno. (La palabra *placenta* tiene un sentido análogo al que se le da en embriología animal, o sea: los órganos mediante los cuales el huevo se adhiere a la mucosa de los oviductos o del útero para nutrirse a sus expensas.)

En los vegetales puede observarse cuán grande es en la fecundación el número de formaciones de tejidos accesorios fuera del embrión



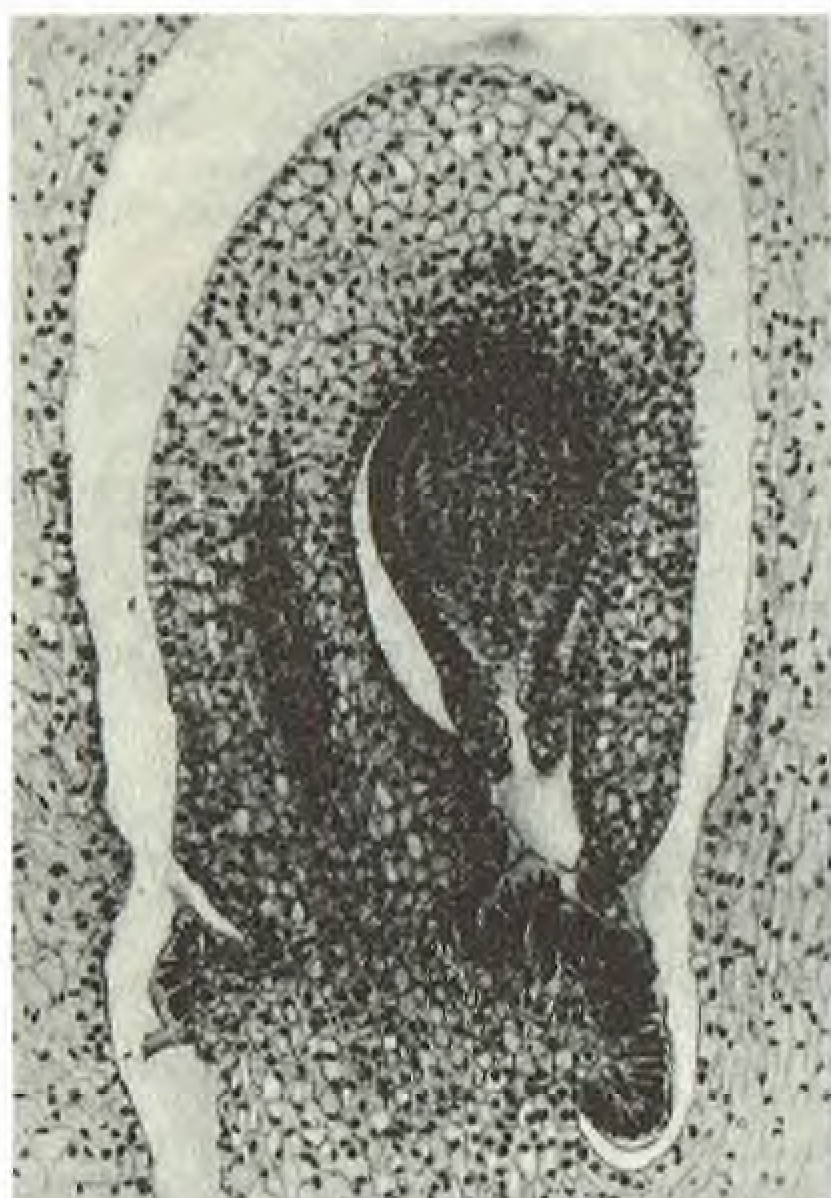
Semilla del olmo y el aparato que facilita su diseminación (*Fot. Claire*)

propiamente dicho: el ovario aumenta a menudo de volumen como un fruto hasta ser mil y a menudo diez mil veces mayor que el embrión; los sépalos suelen persistir y crecen a su alrededor (níspero); el receptáculo puede hacerse carnoso y substituir los ovarios deficientes (fresas); los tegumentos de numerosos frutos (aquenios de los cardos) y de algunos granos (arce, clemátide, vencetósigo) echan alas o penachos cuyo efecto diseminador se añade o suple a la dehiscencia de los frutos.

En resumen, podemos retener como rasgo común de las embriogenias vegetal y animal: la *diferenciación inmediata*, a partir de la célula huevo fecundada, de las células que darán los diversos tejidos y órganos. Una espora de musgo no da, al germinar, más que un filamento homogéneo (protonema), y una espora de helecho sólo una lámina homogénea (protalo): ni una ni otra podrían dar jamás, sin la fusión sexual de dos de sus células, un musgo o un helecho. Por la misma razón, una sola célula vegetativa de un animal pluricelular no tendrá nunca el poder de diferenciar directamente un embrión. Es necesaria la fecundación de un huevo, o por lo menos la colaboración de *varias* células no sexuales, para que nazca un metafito o un metazoario.

Fenómenos histológicos y citológicos. — Estudiaremos estos fenómenos sobre un ejemplo vegetal y otro animal:

a) Los procesos íntimos de la fecundación son más complicados en las *plantas* que en los animales, y he aquí la razón:



Microfotografía de un óvulo (*Fot. Duval Eymonnet*)

El **óvulo** está formado por una masa celular, la nucela o nuececilla, unida a la placenta por un pedículo vascularizado, o funículo, rodeado por dos tegumentos, salvo en un punto en el que éstos dejan una pequeña abertura llamada *miocrópilo*. La nucela lleva en su región distal el *saco embrionario*, especie de gran célula compuesta, que encierra: hacia el centro, el "núcleo secundario del saco embrionario"; del lado del micrópilo, la *oosfera* y dos células compañeras (las tres de membranas no celulósicas), y del lado del funículo, otras tres células pequeñas.

Lo mismo que el óvulo (como ya se ha dicho) es un sistema complejo que está lejos de ser el gameto hembra, el grano de polen no es el gameto macho. El gameto macho tendrá, pues, que franquear numerosos obstáculos para llegar hasta el gameto hembra. El **grano de polen,** cuya envoltura, provista de estrías regulares, protege los puntos débiles por los cuales su protoplasma pugnará por salir, encierra dos células, una dentro de la otra: vegetativa una (centrada en el *núcleo vegetativo*), sexual la otra (centrada en el *núcleo reproductor*). Dicho esto, he aquí cómo se realiza, según **G. Bonnier,** la "doble fecundación" de una planta angiosperma:

"Cuando el grano de polen ha llegado al estigma, germina como una espora de criptógama y, al encontrar un punto débil, produce un *tubo polínico* que al penetrar en el tubo recién formado asciende a la superficie de una papila estigmática, la perfora y se desarrolla en el *tejido conductor* del pistilo como un filamento de hongo parásito. El grano de polen alcanza así el micrópilo de un óvulo y llega a establecer contacto con la oosfera. El núcleo vegetativo se encuentra en general en la extremidad del tubo y parece desempeñar un papel activo en el aumento terminal del mismo. El núcleo se reabsorbe y desaparece cuando el tubo polínico ha casi terminado su desarrollo. En cuanto al núcleo reproductor, que sigue la marcha del otro, se divide en cierto momento en dos y cada uno de ellos se transforma en un cuerpo más o menos encorvado sobre sí mismo. Estos dos cuerpos reproductores son los *anterozoides*...

"El huevo fecundo propiamente dicho constituye su núcleo por la fusión del núcleo de la oosfera con uno de esos dos anterozoides. Al mismo tiempo, el protoplasma de la oosfera se hace granuloso y se rodea de una membrana de celulosa. Al desarrollarse, el huevo fecundo forma el embrión (la plántula).

"Mas hay un *huevo accesorio* formado por toda la parte del saco embrionario que no es la oosfera ni procede de las pequeñas células antes señaladas. El núcleo secundario del saco embrionario se fusiona con el segundo anterozoide y es, pues, fecundado como la oosfera, aunque no dará un segundo embrión, sino un tejido que se llenará de reservas y nutrirá al embrión (albumen)." [Se ha hablado antes del perispermo, otro tejido nutricio, que no es sino la nucela o nuececilla del óvulo, hipertrofiado en forma de anexo embrionario bajo la repercusión vegetativa de ese fenómeno sexual que es la fecundación.]

b) Los gérmenes machos y hembras de un *mamífero* deben ser caracterizados, como lo explica **Jean Rostand** en las siguientes líneas:

"Los espermatozoides son muy pequeños y dotados de una gran movilidad, gracias a la presencia de un flagelo vibrátil que les permite progresar en el medio líquido en que se efectúa la fecundación. Los óvulos son voluminosos, de forma más o menos redondeada, provistos de abundantes reservas nutritivas, e inmóviles.

"El espermatozoide, con su especie de cabeza, cuello y cola, tiene el aspecto de un renacuajo. La cabeza comprende una especie de punta afilada o perforador. El espermatozoide progresa en el líquido derramado por el macho después de la unión sexual a una velocidad de dos a tres milímetros por minuto, lo que requiere varias horas para ascender a lo largo de las vías genitales de la hembra hasta el óvulo que, en general, es fecundado a la salida de la glándula ovárica, al nivel del tercio superior de la trompa uterina." Dicho lo que antecede, he aquí cómo se opera la fecundación, según el mismo autor:

"Varios espermatozoides se introducen en la envoltura del óvulo. El primero que llega a tocar su superficie, en un punto cualquiera, lo perfora y entra su cabeza en la masa protoplasmática. Entonces la cola del espermatozoide se desprende de su cuerpo (por inútil ya) y el núcleo del que está formada esencialmente su cabeza aumenta de volumen por absorción de agua. El óvulo, en el preciso momento en que ha sido violado por el espermatozoide, reacciona a su contacto como recorrido por una especie de onda contractiva, se encoge y arroja un poco del líquido que se interpone entre su superficie y su envoltura. Helo ahí transformado en huevo. Alrededor del huevo se forma una membrana muy fina que opondrá, a pesar de su delgadez, una barrera infranqueable a los demás elementos machos. Después del primer espermatozoide, ningún otro elemento logrará en lo sucesivo introducirse en el huevo: protección indispensable, ya que la penetración de varios espermatozoides sería no sólo superflua, sino funesta, y perturbaría gravemente el desarrollo embrionario. Sin embargo, el núcleo espermático y el núcleo ovular marchan uno hacia el otro a una velocidad creciente. También aquí el macho desempeña un papel activo; el núcleo espermático efectúa la mayor parte del trayecto. No lejos del centro del huevo se realiza la fusión de los dos núcleos. Unas horas después empieza el desarrollo y el huevo opera su primera división. En ese momento, después de unos días de descenso a lo largo de la trompa, el huevo se fijará en la mucosa del útero, donde el embrión se desarrollará como parásito del organismo materno.

"El punto de partida de todo individuo es, pues, la formación de una célula única, portadora de un núcleo de doble origen."

Para penetrar aún más en la intimidad de los fenómenos es necesario precisar ahora el comportamiento de esos famosos núcleos celulares, que tan importante papel desempeñan en la reproducción sexual, así como, por otra parte, en la multiplicación asexual.

Fenómenos nucleares (cromáticos) concernientes a la multiplicación asexual y a la reproducción sexual. — Hemos estudiado ya la división de la célula (cariocinesis o mitosis).

Si se trata de reproducción sexual, cuando el huevo es fecundado se divide de la forma precedentemente descrita, con la diferencia de que la cromatina de su núcleo lleva consigo un conjunto de cromatina suministrada por la hembra y otro proporcionado por el macho. Como el número de cromosomas es el mismo en el huevo dividido que en una célula vegetativa cualquiera de cada uno de los cónyuges, ¿qué es lo que ocurre? Si el número característico de los cromosomas paternos se hubiese añadido, en el momento de la fusión de los dos núcleos sexuales, al número característico de los maternos, el número de los cromosomas del descendiente hubiera sido doble: cualitativamente, el material cromático hubiese permanecido invariable, pero cuantitativamente habría sido modificado, y ese hecho habría provocado un aspecto inédito de la progenitura.

Por una feliz compensación, los gametos o gérmenes sólo se han provisto cada uno de ellos de la mitad del número normal de cromosomas: en el curso de las divisiones que han formado, a partir de células germinales primordiales, las células sexuales, ha habido para cada una de ellas una *división reductora*, que difiere de la mitosis normal en los siguientes puntos:

1º La división reductora propiamente dicha es precedida de una división normal (en el caso de los organismos superiores, la célula del futuro *huevo* no fragmenta en dos porciones iguales su citoplasma, sino que expulsa con uno de los núcleos hijos una pequeña masa de proto-

plasma, lo que es la expulsión del primer glóbulo *polar*, así llamado porque el citado glóbulo es expulsado en un punto privilegiado, que será un polo de referencia para la estructura del embrión);

2º Los cromosomas de las células resultantes de esa división normal preliminar, "en vez de unirse por las puntas para constituir un nuevo núcleo, permanecen separados; aparece una nueva división, en forma de huso, y los cromosomas, sin sufrir una nueva bipartición, se reparten en dos grupos que constituirán los núcleos de dos células sexuales, machos o hembras (en el caso del huevo de los organismos superiores, uno de estos núcleos sale del futuro óvulo bajo la forma de un segundo glóbulo polar; simple variante como en el apartado 1º). Resulta del conjunto de estos fenómenos que el núcleo de cada producto de esta división sólo encierra la mitad del número normal de cromosomas." (R. Perrier.)

De este modo, la fecundación puede operarse sin que el material nuclear del descendiente sea modificado cuantitativamente; sólo será compuesto, con lo que hará participar a su portador de los caracteres de sus dos progenitores.

Hipótesis sobre la acción del elemento macho. — Hemos visto ciertos efectos de la fecundación, como por ejemplo: la aportación de un *medio* núcleo, es decir, de la cantidad de cromatina que le falta al núcleo hembra para ser completo; la aportación, por este medio, de los caracteres paternos. Veremos, a propósito de la herencia, otro efecto vecino de los anteriores efectos de la fecundación: el de la determinación del sexo.

Pero las manifestaciones dinámicas y morfogenéticas de la fecundación son las más interesantes y las que mayor número de problemas plantean. Su explicación requiere, en efecto, un conocimiento minucioso de la estructura del huevo virgen, puesto que esas manifestaciones, al modificar muchos materiales protoplasmáticos y deutoplasmáticos, modifican a su vez esa estructura (el deutoplasma es el conjunto de las reservas nutritivas inertes que precisamente prestan al huevo virgen una parte de su inercia).

Sintetizando los resultados de los trabajos de Driesch, Conklin, Van Beneden, Hertwig, etc., **Brachet** se expresa así:

"Las manifestaciones dinámicas son los cambios gracias a los cuales el sistema estático, que es el huevo maduro, da progresivamente paso al sistema dinámico, que es el huevo fecundado... El huevo fecundado no es una masa de protoplasma y de deutoplasma (vitelo) mezclados de cualquier manera y sometidos a la sola acción de la fuerza de gravedad. En esa masa se distinguen ya regiones o parcelas en los que las potencialidades efectivas no son idénticas a pesar de estar estrechamente coordinadas. En esa masa hay "localizaciones germinales". La fijación definitiva de las localizaciones germinales, en su orden y lugar, es precisamente uno de los actos de la fecundación, y entra en el marco de sus manifestaciones dinámicas..."

Por otra parte, el huevo virgen presenta frecuentemente un esbozo de simetría bilateral y un sentido de orientación que están en ínfima relación con las simetrías y sentido de orientación respectivos del embrión... Pues bien, como ha dicho Brachet, "la fecundación reparte y estabiliza, a veces en un sentido determinado por el meridiano de entrada del espermatozoide, materiales y energías formadoras preexistentes en el huevo maduro, pero diferentemente distribuidas y localizadas en una forma más vaga y débil."

Todas esas afirmaciones, cuya exactitud es completamente cierta en la hora actual, dejan sin embargo en el misterio los determinismos de todos los fenómenos mecánicos y fisicoquímicos (de los que la variación de tensión superficial es uno de los más notorios) que dan por resultado que el huevo maduro, inerte, renazca a la vida y comience una evolución larga y compleja, condición de un ser nuevo.

La herencia

Introducción. — Leyes de Mendel. — Los factores hereditarios o genes y su localización en los cromosomas. — **La herencia y el sexo. — La partenogénesis**

Introducción. — La *herencia* es, a primera vista, la propiedad de los seres vivientes de parecerse a otros seres de los cuales descienden. Pero parecerse no quiere decir ser idénticos: la herencia es así inseparable de la *variación*, es decir, de la propiedad que tienen los seres vivientes de adquirir caracteres nuevos, o de resucitar en ellos ciertos caracteres de ascendientes más alejados que sus padres y que éstos no habían manifestado en absoluto.

Cuando se piensa que una sola célula de un organismo, la célula huevo, una vez fecundada, es capaz de dar, por divisiones sucesivas de su protoplama y de su núcleo, un organismo completo de un tipo bien determinado, se puede creer que el protoplasma y el núcleo de todas sus células tienen propiedades biológicas de orden hereditario características de ese tipo de organismo, idénticas de una célula a otra, o por lo menos lo más semejantes posible, cualesquiera que sean las diferencias que el lugar de los elementos anatómicos y su propio funcionamiento les han impuesto. Con mayor motivo debe existir similitud de caracteres transmisibles a la descendencia entre la célula huevo, origen del organismo de que se trata, y las células germinales que forma ese organismo en los primeros estadios de su desarrollo.

Las substancias que entran en la composición de la célula en todas sus partes, substancias fisicoquímicamente características de la especie o de la variedad, es probable que sean las que constituyen, soportan o provocan las propiedades hereditarias. Las hormonas que estas substancias difunden a través del citoplasma son al parecer las responsables de ciertos caracteres sexuales secundarios e influyen en ciertos caracteres hereditarios importantes.

No es menos cierto que la *cromatina del núcleo*, capaz, como hemos visto, de reunirse para formar los *cromosomas*, es la responsable de la mayor parte de los aspectos que distinguen un tipo de organismo de otro. Los trabajos de **T. H. Morgan** han establecido este hecho fundamental.

Mas para continuar el orden de exposición seguido hasta ahora, es necesario hablar de los fenómenos más visibles, puestos en evidencia por **Mendel, Naudin, Vilmorin** y otros, que han permitido descubrir después la intimidad de los mecanismos de la herencia y hasta la esencia misma de esta propiedad fundamental de los seres vivientes.

Leyes de Mendel. — Gracias a la acción y a la reacción de unos objetos o de unos cuerpos sobre otros se llega en toda ciencia a descubrir las estructuras de estos objetos o cuerpos. Dos compuestos químicos mal conocidos, puestos en presencia uno de otro, se combinan o se destruyen parcialmente, pero esa combinación o destrucción parcial puede liberar uno o varios elementos simples muy conocidos. Éste es uno de los principios del análisis químico.

De la misma manera, si se llega a mezclar los caracteres de dos seres vivientes de tipos diferentes, al efectuar, por ejemplo, un *cruzamiento*, es posible que la descendencia manifieste aspectos que permitan el análisis elemental de los caracteres de los prognitores. Ésta es una experiencia indirecta realizada sobre algunos aspectos, pero que conduce, mediante simples leyes aritméticas, al conocimiento directo de los fenómenos más íntimos. Experiencia que, en todo caso, sólo es posible entre tipos de organismos bastante próximos, *especies vecinas* o *variedades* de una misma especie. Una variedad de guisante tiene semillas redondas y lisas, otra irregulares con tegumentos rugosos. Cojamos un pie de la segunda variedad y efectuemos sobre él las operaciones siguientes: se suprimen los estambres a todas las flores antes de que hayan podido realizar la autofecundación; luego se recoge el polen de un pie de la primera variedad de semilla lisa y se echa sobre el estigma de las flores amputadas. El cruzamiento es fructuoso: las flores fecundadas de ese modo producen vainas con el resultado, de capital importancia, de que éstas contienen únicamente semillas redondas y lisas.

El carácter "liso" disimula y *domina*, pues, el carácter "rugoso" en la descendencia de esas dos variedades de guisantes que han mezclado y combinado sus caracteres hereditarios. Esta experiencia, muchas veces repetida sobre el mismo material y sobre otros muy diversos, sirve para enunciar, con **L. Plantefol**, la primera ley de Mendel:

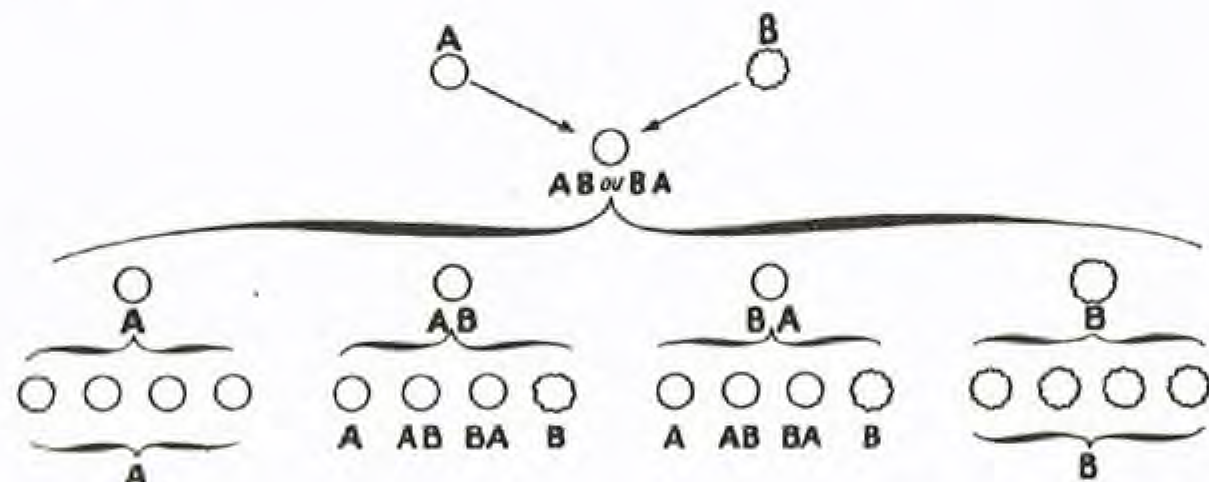
Hay uniformidad en los productos de la primera generación (estos productos son ora semejantes a uno de los progenitores, ora intermedios entre ellos).

Profundizando más el estudio, podemos sembrar los guisantes así obtenidos: las plantas crecen, florecen. Si las dejamos autofecundarse, veremos que las nuevas vainas obtenidas encierran a la vez semillas lisas y rugosas en la proporción de 3 a 1. "A pesar de todo, los guisantes redondos eran efectivamente seres *híbridos* que conservaban en ellos los dos caracteres afrontados, dispuestos a mantenerlos en sus descendientes. Las semillas nuevas pertenecen, en realidad, a tres tipos: las rugosas ya no son híbridas, puesto que su descendencia (pura, por autofecundación) permanece fiel al tipo rugoso. Del mismo modo, un tercio de las semillas lisas vuelve a su tipo puro y no nos mostrará sino tegumentos sin pliegues. Las otras, que sólo la experiencia (una nueva experiencia de cruzamiento) puede discernir, son todavía híbridas, ya que, al igual que en la primera generación, nos darán, mezcladas, semillas semejantes a las dos formas que han sido cruzadas." La segunda ley de Mendel puede, por tanto, enunciarse así:

Hay polimorfismo en la segunda generación, cuya mitad vuelve a los tipos puros.

Podemos esquematizar los resultados de estas experiencias: Sea A el carácter liso y B el carácter rugoso. Si cruzamos la variedad lisa con la rugosa (sea llevando el polen de una variedad rugosa sobre los pistilos de una lisa, sea procediendo inversamente), el resultado es el mismo: los caracteres A y B se reunirán en cada una de las células huevos formadas y en todas las células de cada uno de los híbridos correspondientes. Puede representarse esta reunión por la combinación AB (o BA, que es equivalente); como A domina a B (se dice entonces que B es *recesiva* respecto a A), estos híbridos de primera generación tendrán el aspecto que les da A, o sea aspecto liso.

Veamos ahora uno de esos híbridos: el guisante forma a su vez, en sus anteras y en sus óvulos (órganos de estructura y embriogenia comparables), células sexuales por sucesivas divisiones de células germinales primitivas, y una de esas divisiones (ver más arriba) es *reductora*, es decir, reduce a la mitad el número de cromosomas y los separa en dos grupos, cada uno de los cuales pasa a cada célula sexual definitiva. Si se supone, como se ha dejado ya entrever a propósito de los fenómenos cromáticos de la fecundación, que a cada cromosoma va invariablemente ligado un aspecto y un carácter del organismo, se puede también imaginar que en la disyunción cromática de la división reductora el carácter A de uno de los dos progenitores se va por un lado con un cromosoma, mientras que el carácter B se va por el lado opuesto con otro.



Verificación de la ley de Mendel mediante el cruzamiento de un guisante liso A con otro rugoso B

Precisamente es lo que la experiencia confirma: las células sexuales del híbrido de primera generación, al fusionarse en *gran número* y al *azar*, dan productos en los cuales A y B se combinan de cuatro maneras diferentes:



En un examen superficial no se observan más que dos aspectos, dos *fenotipos* (para emplear este término genético): el fenotipo liso (de cada cuatro individuos, tres) y el fenotipo rugoso (un individuo cada cuatro), puesto que A oculta B. Pero el fenotipo liso oculta un genotipo liso puro (AA) y dos genotipos equivalentes impuros (AB) y (BA).

Eso puede verificarse si se dejan florecer los guisantes (AA), (AB), (BA), que son los híbridos de primera generación. Al formarse sus células sexuales, sólo conservan cada una de ellas uno de los caracteres de los dos antecesores considerados al principio, sea A, sea B. Si esos ascendientes son cruzados cada uno de ellos con un guisante (BB) cuya disyunción de caracteres ha tenido ya lugar, los cruzamientos podrán ser representados como sigue:



y los productos de los cruzamientos serán representados por:



Habrá, pues, cuatro híbridos de aspecto liso y dos rugosos puros, lo cual se comprueba experimentalmente.

Estas dos leyes de Mendel: la primera de *dominio* de unos caracteres con relación a otros, la segunda de *disyunción* en la descendencia, han encontrado su verificación en el hombre. He aquí algunos ejemplos: el carácter o factor "ojos negros" domina el factor "ojos azules"; "si una persona de ojos negros puros, es decir, de doble factor ojos negros, se une con una de ojos azules, todos los hijos tendrán forzosamente los ojos negros y formarán la mitad de células reproductoras portadoras del factor ojos negros y la otra mitad lo será del factor ojos azules. Si dos personas de ojos negros híbridos, es decir, que transmiten el factor ojos negros y el de ojos azules, se unen, producirán tres individuos de ojos negros por cada uno de ojos azules. Si una persona de ojos negros híbridos se une con una persona de ojos azules, ambos producirán la mitad de individuos con ojos negros y la otra mitad con ojos azules". (J. Rostand.)

Desde el punto de vista de los caracteres patológicos se ha podido determinar que la resistencia a la tuberculosis domina la no resistencia; que la calvicie es dominante en el hombre y recesiva en la mujer; que la fragilidad hereditaria de los huesos y la catarata hereditaria dominan los caracteres normales, etc.

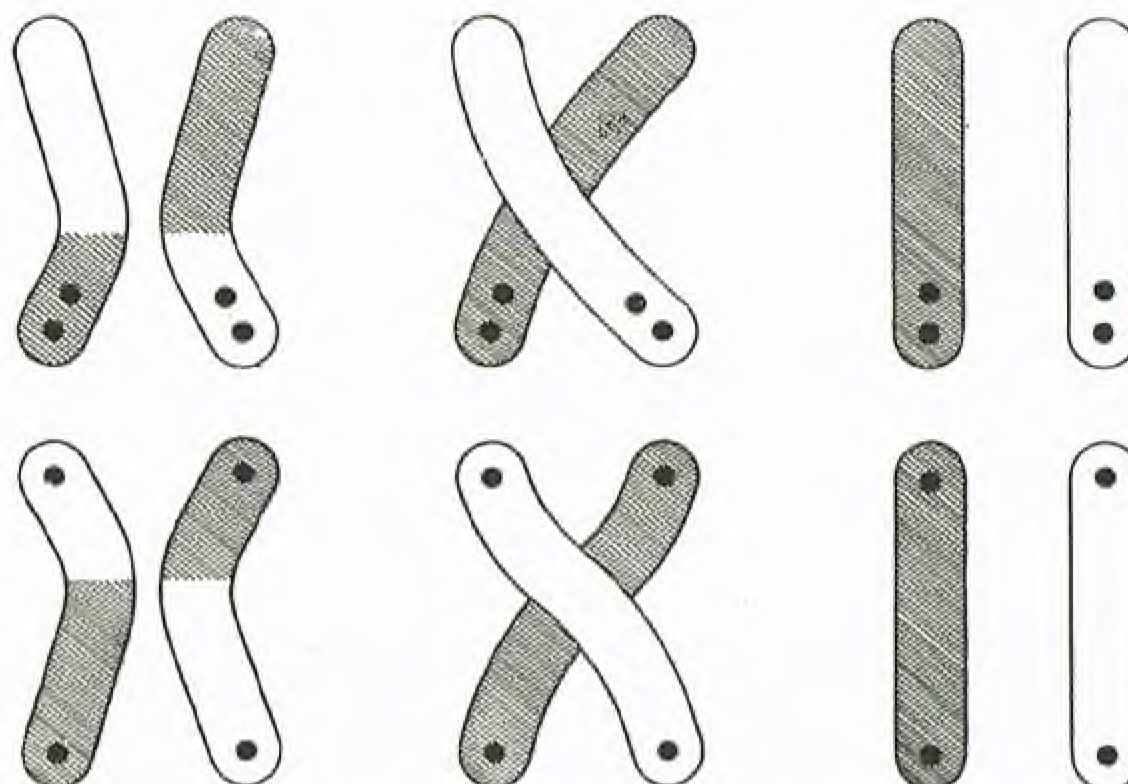
De todos modos, esas observaciones son superficiales, por lo que es necesario ahora volver al estudio de la célula, de su núcleo y de sus cromosomas, así como verificar la realidad de sus hasta ahora supuestas relaciones con las manifestaciones de la herencia.

Los factores hereditarios o genes y su localización en los cromosomas. — "Morgan ha imaginado, escribe **L. Plantefol,** que un ser viviente manifiesta un carácter hereditario determinado porque presenta una cromatina especializada para ese carácter, una partícula del cual se encuentra en cada una de sus innumerables células. Estas partículas materiales hipotéticas, llamadas *genes*, permiten explicar más fácilmente las leyes mendelianas de la herencia. Repitamos la experiencia de Mendel: al polinizar la flor privada de estambres, Mendel yuxtapone dos genes diferentes, uno de los cuales es aportado por el polen; el otro está ya presente en el óvulo. La semilla que se desarrolla, híbrida y lisa por la madurez, queda, a pesar de los dos genes presentes en todas sus células, marcada por el único genes dominante. Una vez plantada, la semilla germina, crece y florece. Los gametos de sus flores, formados en los estambres y en los óvulos, sufren la reducción cromática, por lo cual sólo cuentan con uno de sus dos genes; entre sus gametos se encuentran en igual número las dos formas "semilla lisa" y "semilla rugosa". Entre esos gametos diferentes, *asociados al azar*, es donde se deciden las fecundaciones. Si el gameto polínico lleva el mismo genes que el óvulo que fecunda, se forma un tipo puro de semilla lisa o rugosa. Un gameto macho y uno hembra, con un genes diferente cada uno, producen un híbrido idéntico al de nuestro primer cruzamiento; el guisante es liso y revelará su hibridación por el polimorfismo de su descendencia. La reducción cromática nos explica, pues, por qué los gametos producidos por el híbrido son puros, al igual que los de los tipos puros. En fin, las proporciones numéricas de los diversos grupos dependen sólo de la aplicación de las leyes de probabilidades y del azar. Así, la hipótesis de los genes da perfectamente cuenta de los resultados experimentales y confirma los más minuciosos detalles, lo que es suficiente para que Morgan vea cada cromosoma como una serie de genes yuxtapuestos. En la masa alargada de esta serie —en la que no existe una diferenciación aparente—, Morgan supone que existen territorios distintos. Hay que encontrar un procedimiento que permita conocerlos, que diga a qué cromosoma pertenece tal gene, en qué punto se encuentra de ese cromosoma, cuáles son los genes vecinos, qué distancia separa dos genes estudiados."

Morgan encontró ese procedimiento al examinar los cruzamientos de las múltiples formas de la drosófila, cuyos gametos presentan para el genetista la gran ventaja de no poseer más que cuatro cromosomas que pueden ser reconocidos perfectamente: uno puntiforme, otro en forma de bantoncillo alargado y dos en forma de bumerang que no se distinguen fácilmente. Un vez más, las diferentes combinaciones que van a realizar los cromosomas, sistemas de genes, son las que permitirán el análisis hereditario de sus elementos. "El número de caracteres de la drosófila es considerable, seguramente muy superior a 2 000. Los cromosomas poseen, pues, un gran número de genes cada uno. Podemos prever que los genes de un mismo cromosoma y, por consiguiente, los caracteres que representan, van a permanecer asociados al patrimonio hereditario que será transmitido por ese cromosoma. Por ejemplo, los genes correspondientes al tono leonado o a las largas alas de la drosófila normal se encuentran en un mismo cromosoma, pero son reemplazados por genes diferentes cuando se trata de la mosca negra y de alas rudimentarias. El cruzamiento de estas dos moscas no nos da, en segunda generación, las cuatro combinaciones de caracteres que las reglas numéricas de Mendel dejaban prever y sólo se obtienen formas idénticas a las que se han cruzado: ni moscas leonadas de alas rudimentarias, ni moscas negras de alas largas. Las células sexuales de los híbridos de primera generación han recibido, en efecto, sea el cromosama de la mosca normal que les da a la vez el tono leonado y el ala larga —dominantes ambos caracteres—, sea el de la mutación que implica el cuerpo negro y el ala rudimentaria. Ningún cambio parece posible entre estos dos grupos. La investigación de tales excepciones de las leyes de Mendel, que indica uniones o "linkages" entre los genes, es el medio de determinar cuáles son los genes que constituyen un mismo cromosoma." (L. Plantefol.)



Los cromosomas de los dos sexos de la drosófila (según Morgan)



Entrecruzamiento (crossing-over) que muestra arriba, una reducción cromática con intercambio de genes (puntos negros), y, abajo, sin intercambio

No obstante, pueden producirse accidentalmente ciertos cambios que son aprovechados por el genetista: si se supone que en el primer tiempo de la reducción cromática (ya indicado), dos cromosomas alargados que se enlazan se enroscan ligeramente uno alrededor del otro y no se fusionan verdaderamente más que en algunos puntos, puede preverse que se separarán de tal suerte que los dos cromosomas que se alejan estén constituidos de dos partes dispares. "Imaginemos que las dos serpientes

de un caduceo, después de haberse confundido en un punto, se separan y cruzan la parte baja de sus cuerpos. Un tal entrecruzamiento o "crossing-over" no tiene siempre lugar en el mismo punto y esta diversidad del modo de cruzarse se señala por tal o cual combinación o disyunción anormales de caracteres muy visibles en la mosca. Entonces se concibe, por ejemplo, por qué el entrecruzamiento se ha producido más acá o más allá de un gene que corresponde a un carácter bien definido. El lugar de ese gene se encuentra, pues, determinado a lo largo del cromosoma, al menos en relación con otros genes ya topográficamente situados..."

Tales son los principios experimentales de la genética o ciencia causal de la herencia.

Los hechos de orden citológico, que son responsables de las manifestaciones hereditarias, también lo son, como vemos, de las manifestaciones de la variabilidad de los seres. Sin necesidad de recurrir a modificaciones profundas —químicas y estructurales— del material de la célula, que producirían alteraciones de la fisonomía de una especie *(mutaciones bruscas)*, basta considerar la variedad de tipos físicos y mentales de los hijos de una misma pareja y la desemejanza que pueden acusar respecto a sus padres. He aquí cómo podemos explicárnoslo: consideremos los hijos de una misma pareja; hay que determinar las razones de sus diferencias y para ello estudiar lo que sucede en uno de los progenitores, el padre, por ejemplo: en el momento de la formación de sus células reproductoras, todos los genes maternos que ha heredado de su madre no se han separado en masa de los genes paternos heredados de su padre, sino que cada grupo (cromosoma) de genes paternos se ha separado por su cuenta del materno que le correspondía; por el capricho del azar, la mayor parte de las células reproductoras recogen una mezcla de unos y de otros. "Por pura que sea la herencia en el detalle, no deja de ser mixta en el conjunto." (J. Rostand.) Si recordamos que se han producido análogos fenómenos en la madre, comprenderemos el inmenso número de combinaciones diferentes y nuevas a que darán lugar la unión del padre y la madre. "El número de diferentes clases de gérmenes es, en realidad, todavía mucho más elevado que el que indica un cálculo basado en el número de pares de cromosomas del hombre, que es de 24, a causa del cambio de factores que se efectúa entre cromosomas de una misma pareja." "De dos seres humanos... podrían nacer, teóricamente, 225 trillones de hijos." (J. Rostand.)

La herencia y el sexo

Sobre la *determinación del sexo* y desde el doble punto de vista de la época de su aparición y de la causa que lo determina han sido emitidas las más contradictorias y, con frecuencia, las más inverosímiles hipótesis.

En el párrafo dedicado a las hormonas, el lector encontrará consideraciones sobre las substancias formativas secretadas por los órganos genitales de los seres que caminan hacia el estado adulto y conocerá que "su campo de acción se limita a las últimas diferenciaciones de la morfología y de la fisiología sexuales". (R. Goldschmidt.) Pero el mecanismo especial encargado del reparto precoz de los dos sexos en la descendencia ha sido descubierto y analizado por los métodos de la genética. La cromatina nuclear es una vez más la responsable de la determinación del sexo macho o hembra. He aquí los resultados fundamentales de los recientes trabajos (ejecutados sobre todo con los insectos) de **Paul Marchal, Safir** y **R. Goldschmidt:**

1º El sexo está fijado desde la fecundación del huevo.

Prueba de ello es que los verdaderos *gemelos*, es decir, los que provienen de un mismo huevo fecundado por un solo espermatozoide, pero que se dividió inmediatamente en dos partes equivalentes, son siempre del mismo sexo; y que, inversamente, los falsos gemelos, resultantes de una doble fecundación por dos espermatozoides diferentes, son, con frecuencia, de diferente sexo;

2º Se han observado en la drosófila los hechos siguientes: entre la mosca macho y la hembra existe una cierta diferencia cromosómica. En la hembra, la pareja de cromosomas en forma de bastoncitos está formada de dos bastoncitos semejantes y rectilíneos. En cambio, en el macho es disimétrica y formada de dos cromosomas desiguales, uno rectilíneo y otro doblado en forma de codo. Los dos cromosomas rectilíneos de la hembra y el único rectilíneo del macho se designan con una X; los cromosomas en forma de gancho del macho con una Y.

En el momento de su formación, las células reproductoras sólo reciben un cromosoma de cada par. Todos los óvulos de la mosca hembra reciben, entre sus cromosomas, un cromosoma X. Pero, en el macho, la mitad de los espermatozoides recibe un cromosoma X, mientras la otra mitad recibe un cromosoma Y.

Después, los huevos fecundados por los espermatozoides de cromosoma X tendrán dos cromosomas de este signo y darán moscas provistas de dos cromosomas X en todas sus células: estas moscas serán hembras. Los huevos fecundados por espermatozoides de cromosoma Y tendrán un cromosoma X y otro Y: estos huevos darán moscas provistas en todas sus células de un cromosoma X y de otro Y y serán machos.

Admitiendo variaciones sobre este modo casi esquemático de la determinación del sexo, se tendrá una idea general de los mecanismos iniciales que dividen la descendencia en machos y hembras, en proporciones, a menudo tan diversas, que a veces llegan a faltar los machos.

La partenogénesis

No pocas veces se da el caso de que los huevos puedan desarrollarse directamente sin fecundación previa. Este proceso de reproducción se llama *partenogénesis.*

La partenogénesis puede ser accidental (estrellas de mar, gusanos de seda, ranas, etc.), pero es normal en ciertas especies, por lo cual se ven sucederse generaciones partenogenésicas formadas exclusivamente de hembras, cuyos huevos se desarrollan sin fecundación, hasta que aparece una nueva generación sexuada.

"En los pulgones, por ejemplo, los huevos que han pasado el invierno y que se abren en primavera dan sólo hembras ápteras: estas hembras son vivíparas y evidentemente partenogenésicas, puesto que no hay machos. Poco más tarde nace una segunda generación, formada también exclusivamente de hembras. De esta forma pueden sucederse una decena de generaciones partenogenésicas, entre las cuales puede haber hembras aladas, que van a fundar nuevas colonias sobre otras plantas. Pero al final del verano aparece una última generación que comprende machos alados y hembras. Estas hembras son las que, una vez fecundadas, ponen los huevos de invierno, con lo cual nos hacen volver al punto de partida. La partenogénesis es, en este caso, función de las estaciones, y de ahí su nombre de *partenogénesis de estación.*" (R. Perrier.)

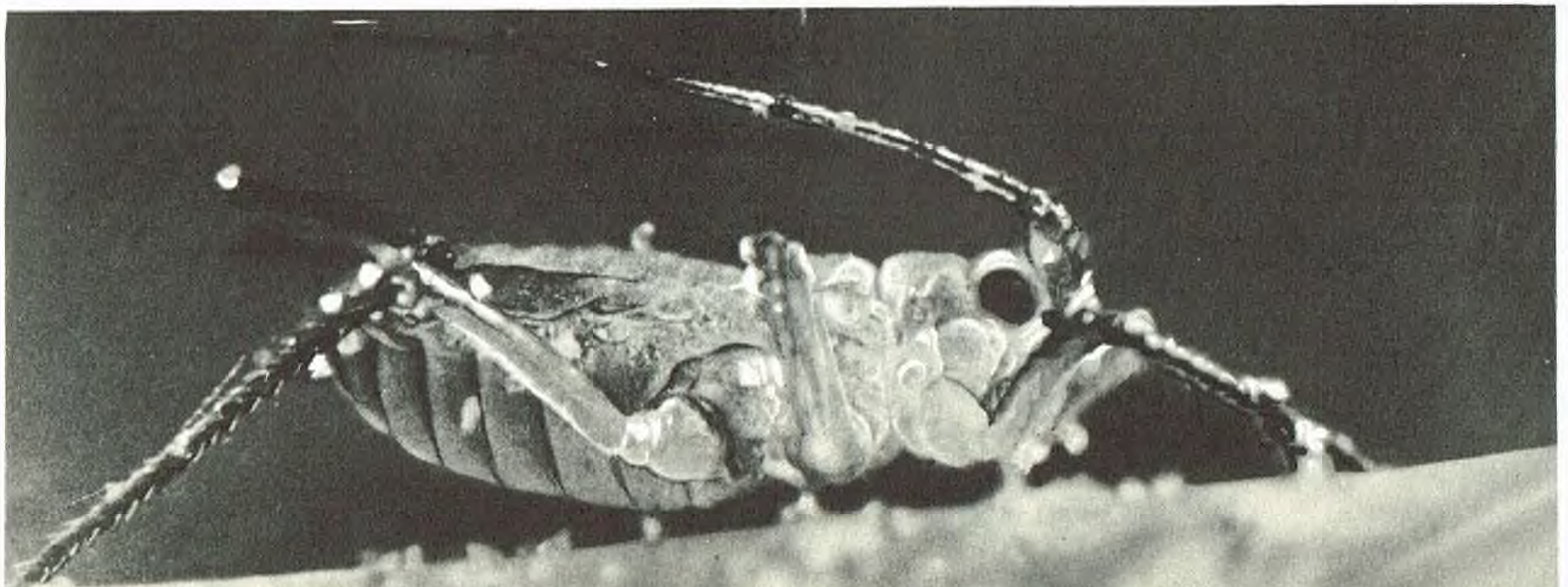
La partenogénesis no depende únicamente del tipo del organismo considerado, de la estación o, más generalmente, de las condiciones meteorológicas (temperatura, etc.). Puede realizarse bajo la acción de los centros nerviosos, por medio de dispositivos orgánicos. Así, la abeja reina de una colmena puede, en el momento de su puesta, abrir o dejar cerrada su bolsa copuladora, que encierra una reserva de licor seminal. Los óvulos que pasan cerca del orificio reciben o no la impregnación del líquido fecundante. Los óvulos fecundados y los no fecundados o partenogenésicos se desarrollan igualmente bien, pero los primeros dan hembras, mientras los segundos dan machos.

¿Como explicar la predominancia del sexo femenino en la descendencia partenogenésica? ¿A causa de que el cromosoma Y, característico del sexo masculino, no desempeña su papel? Tal vez, pero ¿cómo explicar entonces la partenogénesis arrenotócica que produce machos? No se podrá responder a estas preguntas hasta que no esté más adelantado el estudio citológico y cromosómico de los organismos que las plantean.

Hemos hablado anteriormente de la acción o más bien de las diversas acciones sobre el huevo fecundado por el espermatozoide. Esas acciones, gracias a experiencias memorables de **Jacques Loeb, Delage, Bataillon,** etc., han podido ser reemplazadas artificialmente por medio de inyecciones, tratamientos químicos, agitaciones mecánicas, con lo cual se ha realizado una partenogénesis experimental. Pero esta partenogénesis experimental, ¿nos informa sobre la intimidad de los trastornos estructurales del huevo virgen o, en una palabra, de la fecundación? ¿Es que nos informa sobre las causas citológicas de la partenogénesis natural, considerada generalmente como una derivación de la reproducción sexual? Gracias a la prosecución de esas investigaciones, podemos esperar de sus futuros resultados un poco de luz para esclarecer los grandes enigmas de la reproducción de los seres vivientes.

P. Portier

Pulgón verde (*Fot. R.-H. Noailles*)



Clasificación de los seres vivientes

Nomenclaturas zoológica y botánica. — En presencia del inmenso número de los animales y de los vegetales, los naturalistas sintieron desde el primer momento la necesidad de clasificarlos. Instintivamente, el hombre comenzó por llamar a todos los caballos con el mismo nombre, a todos los perros con otro, y así sucesivamente. Existía una noción intuitiva de la *especie*. La misión de los primeros zoólogos, como **Aristóteles** (384-322), y de los primeros botánicos, como su alumno **Teofrasto** (372-287), fue la de precisar la noción y extenderla a un número cada vez mayor de seres vivientes. Pero el problema de la especie tenía múltiples dificultades.

Además, era necesario reunir las especies según su grado de semejanza, en grupos superiores y jerarquizados, de forma que abarcaran el conjunto de los reinos animal y vegetal. Los cuadros universalmente admitidos para la clasificación llevan los nombres de *especies, géneros, familias, órdenes, clases* y *tipos*. En caso necesario se intercalan subgéneros, subfamilias o tribus, subórdenes, subclases o subtipos. A veces se añaden series, divisiones, etc.

Desde **Linneo** (1707-1778), la especie ha sido designada por un doble nombre latino: el del género de que forma parte y el suyo propio. Esta es la *nomenclatura binominal*. Así, la especie perro es denominada *Canis familiaris*; la especie zorra, *Canis vulpes*; la especie lobo, *Canis lupus*. En el género *cucúrbita* hay el melón (*Cucumis melo*), la calabaza *(Cucurbita pepo)*, la sandía *(Citrullus vulgaris)*, etc. Los nombres de las familias se terminan en *idos* cuando se trata de animales y en *áceas* para las plantas. Ejemplos: cánidos, cucurbitáceas. Los nombres de los grupos superiores no tienen desinencias particulares.

Clasificaciones artificial y natural. — Una clasificación es artificial cuando se basa en unos caracteres cualesquiera y elegidos arbitrariamente. Éste es el *Sistema de la naturaleza* de Linneo. Para este naturalista, la clasificación no era sino un cómodo catálogo, basado, por ejemplo, en lo que concierne a los vegetales, sobre el número de sus estambres y de sus carpelos. Tales sistemas se utilizan aún en las Floras y en las Faunas, obras que tienen por objeto permitir la rápida determinación de las especies.

En cambio, la clasificación natural pretende agrupar las especies según sus afinidades reales. **Cuvier** fue el iniciador de esta clasificación. En su obra *Reino animal* estableció la distinción entre *caracteres dominantes* y *caracteres subordinados*. El sistema nervioso, por ejemplo, domina tanto anatómica como fisiológicamente los demás sistemas conjuntos de los órganos. En los insectos, la presencia de un caparazón quitinoso implica carácter dominante. En resumen, existe una *subordinación de caracteres* que hay que tener en cuenta si se quiere llegar a una clasificación natural. Otro principio, puesto en evidencia por **Etienne Geoffroy Saint-Hilaire,** fue el de la *unidad del plan de composición*. Cada grupo zoológico o botánico tiene una arquitectura determinada que se trata de poner en evidencia. Finalmente, la doctrina de la *evolución* de **Lamarck** y **Darwin** arrojó una nueva luz sobre el problema de la clasificación de las especies. Si éstas derivan unas de otras, la labor de clasificación equivale a expresar su encadenamiento.

Definición de la especie. — Una de las mejores definiciones de la especie es la de Cuvier: "La especie es el conjunto de individuos nacidos unos de otros o descendientes de padres comunes, así como todos los que se parecen a esos individuos tanto como ellos se parecen entre sí." De este modo entran en la especie humana *(Homo sapiens)* no sólo nuestros ascendientes y descendientes, sino también nuestros hermanos y hermanas, nuestros primos y primas, y todos los seres que se nos parecen en el mismo grado.

Pero, ¿quién no ve la insuficiencia de esta definición? En primer lugar, nos conduce a la eliminación de las razas negra y amarilla de la especie humana, razas que difieren de nosotros más que nosotros de nuestros primos. Esa definición no tiene en cuenta las *razas* y las *variedades*, y con tanto mayor motivo ha sido refutada por el descubrimiento de las *subespecies* en un gran número de especies vegetales. Concebida sobre la hipótesis de la fijación de las especies, esa definición no concuerda con la más reciente del transformismo. La de Gaudry es mejor: "La especie es el conjunto de individuos que no se han diferenciado aún bastante para cesar de tener productos comunes".

Para definir bien la especie, haría falta recurrir a una multitud de caracteres:

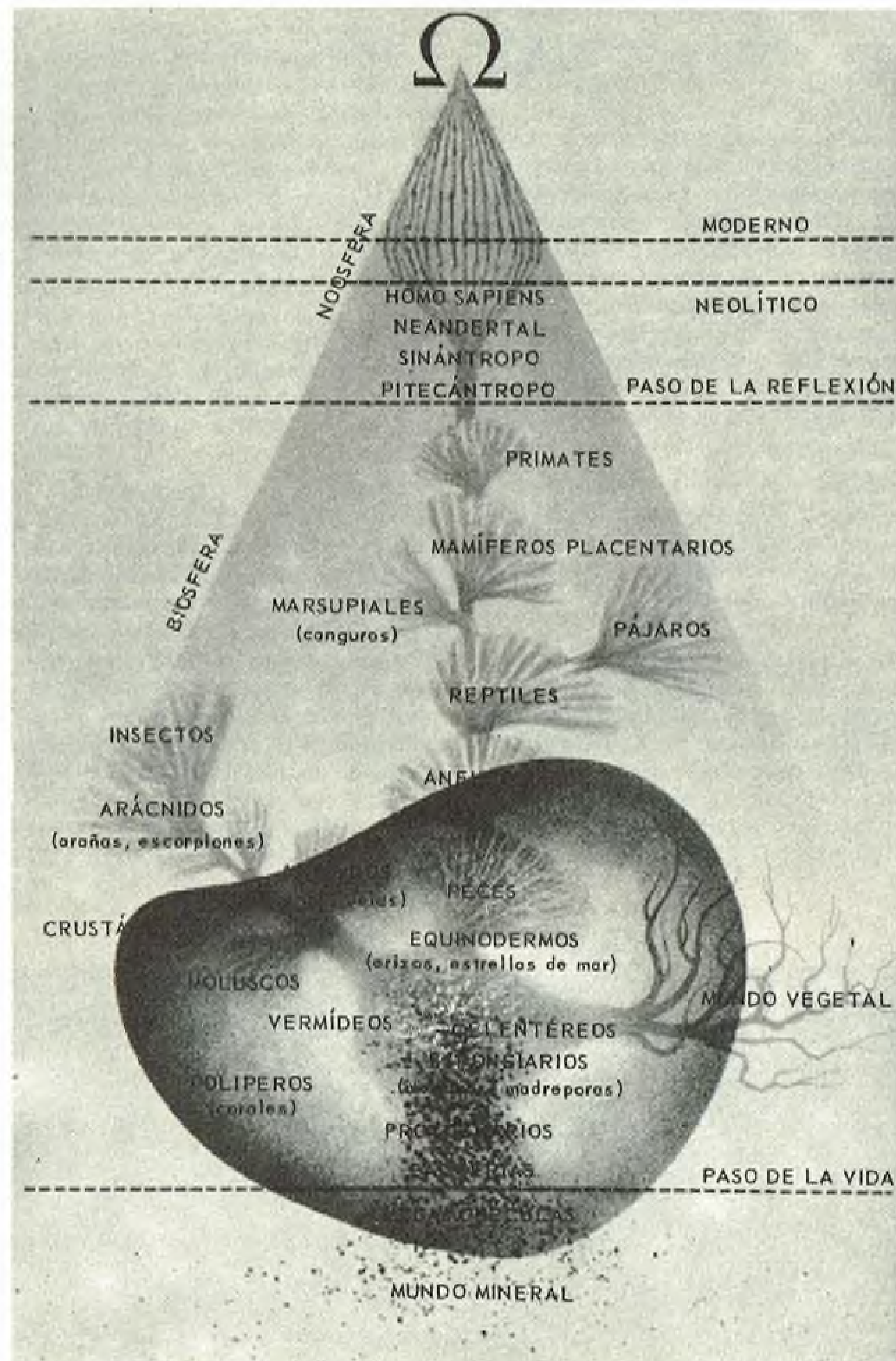
1º *Caracteres morfológicos*. Éstos son los más accesibles y, en general, los más empleados;

2º *Caracteres citológicos*. Los seres de una misma especie tienen en sus células el mismo número de cromosomas. La longitud, el aspecto y la repartición de los cromosomas son característicos. Así, pues, el hombre tiene 48 cromosomas, el conejo 44 y el caballo 60. Pero especies muy diferentes (como el hombre, el erizo y el murciélago) pueden tener el mismo número de cromosomas. Inversamente, especies de próximo parentesco (como la zarigüeya y el canguro), difieren mucho en el número de cromosomas. Clasificar, pues, según el número de cromosomas sería completamente artificial;

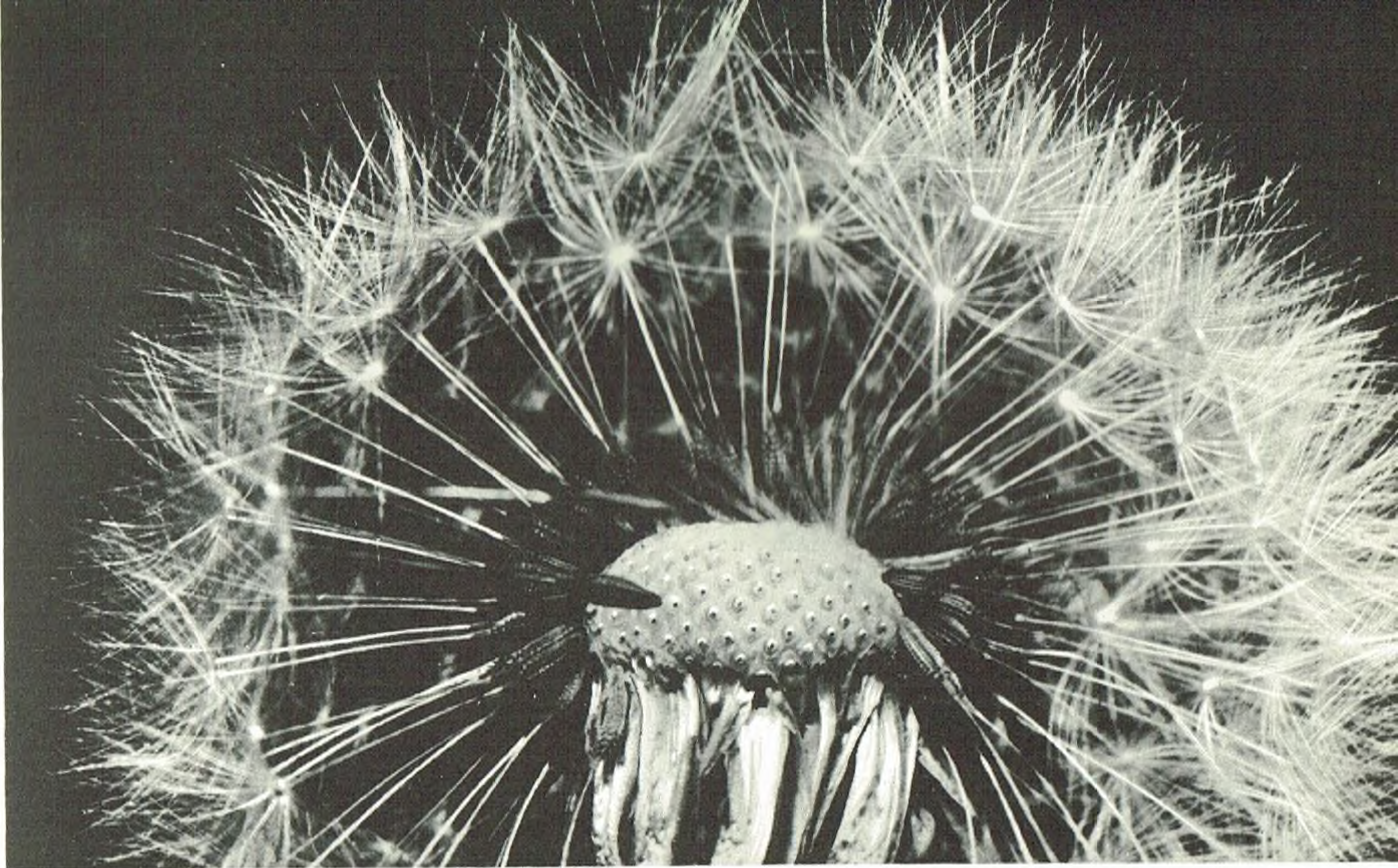
3º *Caracteres fisiológicos*. Los cruzamientos no son en general fecundos sino entre individuos de la misma especie. Dicho de otro modo: los *híbridos*, productos de dos especies, son infecundos, mientras que los *mestizos*, productos de dos razas de la misma especie, son fecundos. Pero existen excepciones. Si es cierto que el mulo (asno × yegua) y el burdégano (caballo × burra) son infecundos, los híbridos perro × chacal, perro × lobo y conejo × liebre tienen una fecundidad que dura varias generaciones. Inversamente, el gato del Paraguay no puede ser cruzado ya con su antepasado, nuestro gato doméstico;

4º *Caracteres químicos*. Cada especie tiene su protoplasma, cuya composición acarrea la de todos sus humores y todas sus secreciones. Por esta causa *existen* hemoglobinas, clorofilas, taninos, etcétera. He ahí, por ejemplo, el cardo corredor, con el riesgo de ser clasificado en la familia de las compuestas, por parecer un cardo, pero del que basta mascar su tallo para encontrarle un sabor de zanahoria: en efecto, el cardo corredor es una umbelífera. Otro ejemplo: se cuentan dos especies de álamos. Ahora bien, el muérdago vive sólo en el álamo negro, porque su composición química particular conviene a esa planta parásita. En el mismo orden de ideas, la carne del caballo es mucho más sana que la del buey. Jamás se encuentran larvas de tenia en el caballo.

La característica química de las especies ha vuelto a la actualidad desde la aplicación de los *métodos serológicos*. Veamos un ejemplo. El suero de un conejo al que se han dado varias inyecciones de suero humano da un precipitado: 1º con el suero del hombre; 2º con el suero de los monos antropoides, pero no con el de los monos inferiores. Eso prueba el parentesco específico entre el hombre y los antropoides. Se ha llegado incluso a inyectar a un conejo extracto de carne de mamut que se halló congelado en los hielos siberianos. El suero antimamut de ese conejo dio un precipitado con el elefante de África, del cual el mamut está, en efecto, más alejado morfológicamente.



Árbol genealógico del reino animal según Teilhard du Chardin (*Doc. Realités*)



Frutos de la colleja *(Fot. R.-H. Noailles)*

Botánica

Generalidades

Los principales caracteres distintivos de los vegetales son los siguientes:

1° *La función clorofílica.* Los vegetales teñidos de verde por la clorofila tienen la facultad de absorber ciertas radiaciones luminosas y de utilizar esa energía para efectuar síntesis de materias orgánicas (fotosíntesis). En particular, toman el carbono del gas carbónico y lo combinan con el agua para dar hidratos de carbono. Pero muchos vegetales están privados de clorofila (bacterias y hongos) y, desde este punto de vista, se parecen a los animales;

2° La *posesión de celulosa.* La membrana externa de las células vegetales está formada de celulosa, hidrato de carbono vecino del almidón, cuerpo que no se encuentra en los animales. Sin embargo, hay que añadir que muchos vegetales no tienen celulosa más que en una época de su existencia y están desprovistos de ella el resto de su vida. Especialmente carecen de celulosa las células reproductoras móviles de esos vegetales (zooesporas y anterozoides).

3° *La posesión de plastos y de vacuolas.* Generalmente, aunque no siempre (bacterias), las células vegetales contienen corpúsculos o plastos y cavidades o *vacuolas* cuyo papel es muy importante en su nutrición. Estas inclusiones del protoplasma no existen de una manera constante en los animales.

Membrana celulósica. — La mayor parte de las células vegetales tienen dos membranas sobrepuestas:

1° *Una membrana albuminoide interna,* que no es otra cosa que la parte superficial y coagulada del protoplasma;

2° *Una membrana celulósica externa.*

Una y otra membrana pueden ser separadas por la experiencia de la *plasmolisis,* que consiste en colocar una célula o grupo de células en una solución concentrada de azúcar. El protoplasma pierde agua por el fenómeno de ósmosis y se contrae hacia el interior de la célula al arrastrar consigo la membrana albuminoide. La experiencia es sumamente clara en una fina sección de remolacha colorada examinada con el microscopio: el protoplasma, teñido de rojo, se contrae en forma de bola en cada una de las células poligonales.

La *celulosa* es un hidrato de carbono, cuya fórmula es análoga a la del almidón y el glucógeno: $C_6H_{10}O_5$. En realidad hay que escribir $(C_6H_{10}O_5)_n$. El valor del exponente *n* es el que distingue esos diferentes cuerpos unos de otros.

La celulosa sólo es soluble en el *líquido de Schweitzer* o azul celeste, que se obtiene vertiendo amoniaco sobre virutas de cobre. En este líquido puede disolverse algodón en rama, papel filtro, medula de saúco y otros objetos constituidos por celulosa pura.

Los colorantes más empleados para poner en evidencia la celulosa sobre las preparaciones microscópicas son el *carmín,* que tiñe la celulosa de rosa, y el *cloroyoduro de cinc,* que la tiñe de azul. Este reactivo actúa de la manera siguiente: el cloro, en presencia del cinc, que hace de catalizador, transforma la celulosa en almidón; después, el yodo tiñe de azul el almidón.

Bajo la acción del ácido nítrico, la celulosa da varios productos llamados *nitrocelulosas* (colodión, algodón pólvora, etc.).

La membrana celulósica puede sufrir un cierto número de modificaciones:

1° La *cutinización* o transformación de su capa externa en *cutina,* substancia grasa y protectora vecina de la cera;

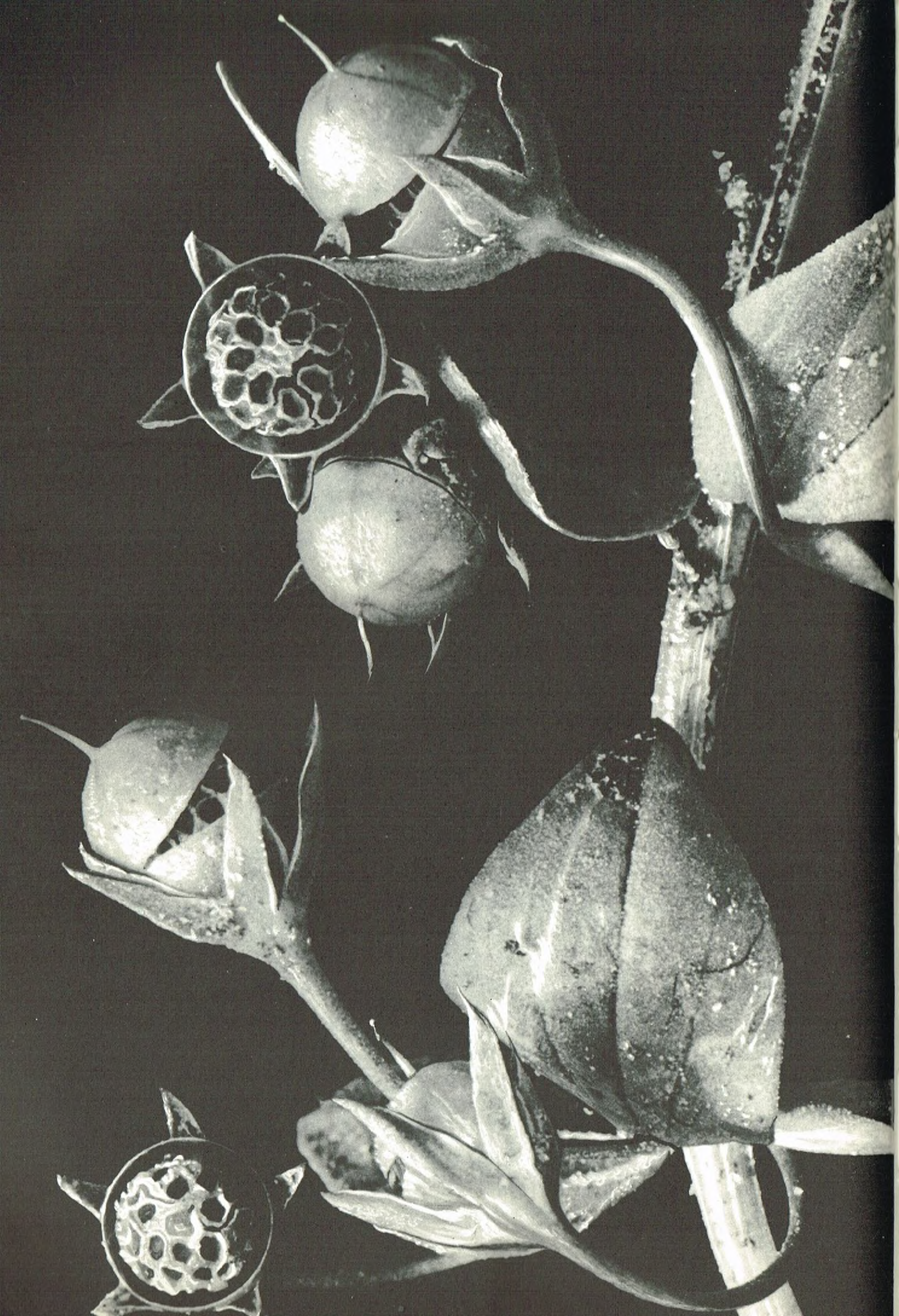
2° La *suberización* o transformación en *suberina,* substancia muy próxima de la cutina y que puede ser teñida con el empleo de la fucsina amoniacal;

3° La *lignificación* o impregnación de *lignina.* Esta substancia, que forma la madera, tiene por fórmula $O_{19}H_{24}O_{11}$. La lignina es dura, resistente y se tiñe con el verde de yodo;

4° La *gelatinización* o transformación en *gelatina,* por inflación en el agua, como, por ejemplo, la goma derramada por los árboles frutales y el *mucilago* viscoso, que se obtiene bañando granos de lino en el agua. Las cataplasmas utilizan esta propiedad;

5° La *mineralización* o impregnación de *carbonato de cal* CO_3Ca, *sílice* SiO_2, etc.

Plastos o leucitos. — Todas las células contienen en su protoplasma partículas o *mitocondrias,* cuyo conjunto se llama *condrioma.* Estas mitocondrias son granos o filamentos que se transmiten de célula a célula, las cuales pueden ponerse sólo en evidencia por medios espe-



ciales de coloración. Agentes de síntesis, dichas partículas son encargadas de elaborar las diferentes substancias de reserva.

Junto a esas mitocondrias comunes, las células vegetales añaden otras más voluminosas, a las que se da el nombre de *plastos* o *leucitos*. Su conjunto se llama *plasmodio*. Más aún que las mitocondrias, los plastos son agentes de síntesis a los que las plantas deben su extraordinaria actividad química. Los plastos se dividen en diversas categorías, según la substancia que elaboran:

1° Los *leucoplastos*, leucitos incoloros, destinados a producir las categorías siguientes;

2° Los *amiloplastos*, mediante los cuales se forma el almidón;

3° Los *oleoplastos*, con los cuales se forma la grasa;

4° Los *proteoplastos*, que elaboran albuminoides o proteínas;

5° Los *cromoplastos*, de color amarillo o rojo anaranjado;

6° Los *cloroplastos*, teñidos de verde por la clorofila y que son los agentes de la función clorofílica.

En ciertas algas, en vez de numerosos cloroplastos, en cada célula sólo se encuentra un pequeño número de esos corpúsculos, a veces uno solo, pero mucho más voluminoso y diferenciado que los cloroplastos ordinarios. En las espirogiras, por ejemplo, existe un solo cloroplasto en forma de cinta espiral, pero que contiene pequeños granos o *pirenoides*, cuya función se desconoce.

Vacuolas. — En el protoplasma de las células de los vegetales hay un cierto número de *vacuolas* cuyo conjunto constituye el *vacuoma*. Esas vacuolas son, al principio, muy pequeñas, luego cada vez mayores a medida que la célula aumenta de volumen. Por último, toda la extensión de la célula queda ocupada por una sola vacuola, con lo cual el protoplasma y el núcleo son empujados hacia la periferia y terminan por desaparecer. Pero la célula, aunque muerta, sigue desempeñando un papel más o menos importante.

Fases diploide y haploide. — La mayor parte de las células se multiplican por *mitosis*, *cariocinesis* o *división indirecta*. Este modo de división implica varias fases, en el curso de las cuales la red nuclear se convierte en filamento nuclear (espirema) y éste en *cromosomas*. El número de cromosomas es constante en cada especie: cuatro en el hongo de estiércol, 24 en una especie de lirio, etc. Llamemos $2n$ a este número de cromosomas. Dos casos pueden producirse.

1er caso. *Cariocinesis normal o ecuacional*. Cada uno de los $2n$ cromosomas se divide en el sentido longitudinal y cada uno de los núcleos hijos recibe $2n$ cromosomas que lo identifican con el núcleo generador. Se dice que se trata de *núcleos completos* o *núcleos diploides* (del griego *diplos*, doble). Todas las células de núcleo diploide que provienen unas de otras por cariocinesis constituyen una *fase diploide*;

2° caso. *Cariocinesis reductora*. Los cromosomas no se dividen y cada uno de los núcleos hijos recibe sólo n cromosomas. Se trata de núcleos incompletos o *núcleos haploides* (del griego *haplos*, simple), llamados también seminúcleos. Dos casos pueden presentarse entonces:

a) Las células de núcleo aploide son células sexuales o *gametos* que se unen de dos en dos (fecundación) y reproducen así una célula (huevo) de $2n$ cromosomas;

b) Las células de núcleo haploide engendran por cariocinesis sucesivas otras células de n cromosomas cuyo conjunto constituye una *fase haploide*. La vuelta a la fase diploide por fecundación sólo tiene lugar secundariamente. El ciclo evolutivo completo del individuo comprende entonces una diplofase seguida de una haplofase o, como también se dice, un *esporofito* seguido de un *gametofito*. Los vegetales van a ofrecernos muchos casos de semejante *alternancia esporogametofítica*.

Clasificación de los vegetales

Quizá sería lógico dividir los vegetales, como los animales, en dos grandes grupos según estén formados de una o de varias células. Podríamos decir vegetales *protofitos* y *metafitos*, como decimos animales protozoarios y metazoarios.

No obstante, ha parecido mejor no tener en cuenta el número de células y conceder, por el contrario, una gran importancia a la diferenciación del aparato vegetativo, a la presencia o ausencia de la clorofila y a la naturaleza de los órganos reproductores. De esta forma se ha llegado a dividir las plantas en cuatro tipos, de acuerdo con el español **Lázaro e Ibiza.**

Tipo de las talofitas. — Las plantas de este grupo están desprovistas de raíz, tallo, hojas y flores. El aparato vegetativo de estas plantas es un talo no diferenciado que puede ser unicelular o pluricelular. Las talofitas comprenden cuatro clases:

1° Las **bacterias,** unicelulares, de núcleo difuso, desprovistas de clorofila;

2° Los **hongos,** unicelulares o pluricelulares, sin clorofila;

3° Las **algas,** unicelulares o pluricelulares, provistas de clorofila;

4° Los **líquenes,** pluricelulares, formados de una asociación de algas y hongos.

Tipo de las briofitas o muscíneas. — Las plantas de este grupo tienen tallo y hojas, pero están desprovistas de raíces y flores. Desde ciertos puntos de vista, el aparato vegetativo de estas plantas se aproxima al de un talo y es siempre pluricelular y clorofílico.

Las briofitas comprenden dos clases:

1° Las **hepáticas,** que tienen todavía un verdadero talo;

2° Los **musgos,** con un talo y tallos foliados.

Tipo de las pteridofitas o criptógamas fibrosovasculares. — Estas plantas tienen raíz, tallo y hojas, pero no flores, y se distinguen de las precedentes, sobre todo, porque sus órganos están formados de tejidos diferenciados, entre los cuales se encuentran los vasos que conducen la savia. Las pteridofitas se dividen en tres clases:

1° Las **filicíneas** o helechos, de tallo no ramificado y de grandes hojas;

2° Las **equisetíneas** o colas de caballo, de tallo de ramificación verticilada y de hojas rudimentarias;

3° Las **licopodiáceas,** de tallo de ramificación dicótoma y de hojas rudimentarias.

Tipo de las espermatofitas o fanerógamas. — Estas plantas tienen raíz, tallo, hojas y flores. Los órganos de las espermatofitas están formados por tejidos y contienen particularmente vasos. Las plantas de este tipo, que se reproducen por semillas, se dividen en dos subtipos:

1° Las **gimnospermas,** de semillas desnudas;

2° Las **angiospermas,** de semillas dentro de un fruto.

Cada uno de esos subtipos comprende a su vez dos clases. Las gimnospermas se dividen en *natrices*, que no tienen tubos polínicos, y en *vectrices*, que los poseen. Las angiospermas, todas vectrices, se dividen en *monocotiledóneas* y *dicotiledóneas*, según tengan uno o dos cotiledones en el interior de sus semillas.

Bajo el nombre de **criptógamas** (del griego *kruptos*, oculto, y *gamos*, unión) se reúne con frecuencia las talofitas, las briofitas y las pteridofitas, debido a que estos tres tipos carecen de flores y, por consiguiente, su reproducción es menos aparente que la de las **fanerógamas** (del griego *phaneros*, aparente, y *gamos*, unión) o plantas con flores. En realidad, ésta es una distinción imprecisa, puesto que la flor se forma progresivamente a partir de las pterofitas.

La verdadera diferencia entre criptógamas y fanerógamas está en que en las fanerógamas el embrión se desarrolla en dos tiempos, separados por una pausa. En el estado de reposo, el embrión está rodeado de reservas nutritivas y constituye la semilla.

También con frecuencia, y bajo el nombre de **plantas celulares,** se oponen las talofitas y briofitas al conjunto de pteridofitas y espermatofitas, que son **plantas vasculares.** Esta distinción es mejor, pues reúne, como debe ser, las pteridofitas con las espermatofitas, de las cuales éstas derivan muy seguramente.

El cuadro siguiente resume la clasificación del reino vegetal:

Clasificación	
Plantas celulares	Criptógamas
I. Tipo de las TALOFITAS	Criptógamas
1° Clase de las **bacterias**	Criptógamas
2° Clase de los **hongos**	Criptógamas
3° Clase de las **algas**	Criptógamas
4° Clase de los **líquenes**	Criptógamas
II. Tipo de las BRIOFITAS	Criptógamas
1° Clase de las **hepáticas**	Criptógamas
2° Clase de los **musgos**	Criptógamas
Plantas vasculares	
III. Tipo de las PTERIDOFITAS	Criptógamas
1° Clase de las **filicíneas**	Criptógamas
2° Clase de las **equisetíneas**	Criptógamas
3° Clase de las **licopodiáceas**	Criptógamas
IV. Tipo de las ESPERMATOFITAS	Fanerógamas
A. Subtipo de las GIMNOSPERMAS	Fanerógamas
1° Clase de las **natrices**	Fanerógamas
2° Clase de las **vectrices**	Fanerógamas
B. Subtipo de las ANGIOSPERMAS	Fanerógamas
1° Clase de las **monocotiledóneas**	Fanerógamas
2° Clase de las **dicotiledóneas**	Fanerógamas

◀ Frutos del murajes rojo (*Fot. R. H. Noailles*)

Plantas celulares

Todas las plantas están formadas de células y son, pues, propiamente hablando, *celulares*. No obstante, este calificativo se reserva a las plantas cuyas células no están diferenciadas y que, por consiguiente, *no tienen tejidos*. Por estar estas plantas privadas de vasos, su savia circula gradualmente de célula en célula, por simple fenómeno de ósmosis. Sin embargo, esto no impide a las citadas plantas adquirir grandes dimensiones (algas gigantes de los mares árticos), o hasta una diferenciación externa harto acentuada (musgos).

Las *plantas celulares* constituyen, en suma, el primer subreino del reino vegetal y se dividen en dos tipos: las *talofitas* y las *briofitas*.

Tipo de las talofitas

Clase de las bacterias: Dimensiones de las bacterias. Ubicuidad de las bacterias. Forma de las bacterias: Bacterias globulares o cocos. Bacterias alargadas y rectilíneas. Bacterias curvas o espirales. Bacterias filamentosas. Bacterias invisibles. Estructura de las bacterias. Reproducción de las bacterias. División. Esporulación. Cultivo de bacterias: medios de cultivo. Recipientes de cultivo. Esterilización del medio. Siembra del medio. Cultivos impuros y cultivos puros. Estudio de las bacterias. Nutrición de las bacterias. Acción del medio sobre las bacterias: Acción del calor. Acción de la luz. Acción del oxígeno. Acción de las substancias químicas. Manifestaciones vitales de las bacterias: Producción de pigmentos. Producción de diastasas. Producción de toxinas o virus. Producción de calor. Producción de luz. — **Clase de los hongos:** Clasificación de los hongos. *Orden de los ficomicetos:* Mucor. Mildeu o mildiu. *Orden de los ascomicetos:* Levadura de cerveza. Moho verde. Peziza. Morilla. Trufa. Cornezuelo de centeno. *Orden de los basidiomicetos:* Roya del trigo. Carbón o tizón de los cereales. Hongo de mantillo. Boleto y políforo. Hongos comestibles. Hongos venenosos. — **Clase de las algas:** Clasificación de las algas. *Orden de las cianofíceas. Orden de las clorofíceas.* Protococo. Vaucheria. Oedogonia. Mesocarpio. Espirogira. *Orden de las feofíceas:* Diatomeas. Fucos. Laminarias. *Orden de las rodofíceas:* Nemalión. Empleo de las algas. — **Clase de los líquenes:** Caracteres generales. Reproducción de los líquenes. Análisis y síntesis de los líquenes

Las talofitas (del griego *thallos*, retoño, y *phyton*, planta) se componen esencialmente de un *talo* que constituye su aparato vegetativo. Este talo puede ser unicelular o pluricelular. Cuando es pluricelular, está formado de *filamentos* entrelazados. A veces, ese entrelazamiento da lugar a *láminas* o a *macizos* que pueden simular hojas y tallos, pero que no tienen ninguna diferenciación interna. Las talofitas son, pues, las más inferiores de todas las plantas.

Desde el punto de vista de la nutrición, ciertas plantas tienen clorofila y viven exclusivamente de materias minerales (plantas *autotrofas*), mientras que otras no tienen clorofila y se alimentan de materias orgánicas (plantas *heterotrofas*).

El tipo se divide en cuatro clases: *bacterias, hongos, algas* y *líquenes*.

Clase de las bacterias

Durante largo tiempo se creyó que las bacterias nacían por generación espontánea en las materias en putrefacción. Pero **Pasteur,** al demostrar la *imposibilidad de la generación espontánea* e instituir los métodos bacteriológicos, permitió su estudio. También se debe a los trabajos de Pasteur el conocimiento del papel considerable desempeñado por las bacterias en las fermentaciones y en las enfermedades infecciosas.

Dimensiones de las bacterias. — Las bacterias son siempre unicelulares, aunque sus células puedan asociarse temporalmente. Sus dimensiones son del orden de una *micra* (μ) o milésima de milímetro. Algunas bacterias (virus filtrantes) son invisibles incluso con el microscopio y no se relevan más que por sus propiedades fisiológicas. Otras, por el contrario, son llamadas *gigantes* porque alcanzan siete u ocho micras de ancho por cien de largo. En todos los casos, las bacterias son *microbios* (del griego *micros*, pequeño, y *bios*, vida). Pero hay que saber que si bien todas las bacterias son microbios no todos los microbios son bacterias. Éstas pueden ser también hongos, algas o protozoarios.

Ubicuidad de las bacterias. — Las bacterias son seguramente los seres más difundidos. Las hay en profusión en el aire, en el agua, en el suelo, en las materias en descomposición, etc. Los mismos seres vivientes no están exentos de bacterias y viven generalmente, incluso cuando gozan de buena salud, en asociación o simbiosis con miríadas de estos microorganismos (flora intestinal, bacterias del vientre de los rumiantes).

Pasteur demostró con sus experiencias de 1860 que los microbios del aire son menos numerosos conforme nos alejamos de las ciudades o subimos a la montaña. No pocos factores influyen en la existencia de los microbios: temperatura, humedad, viento, etc. En un cuarto habitado o en una calle de tránsito se han podido contar hasta 6 000 bacterias *por metro cúbico de aire*. En los grandes parques de las ciudades el número de microbios es de unos centenares, y en lo alto de los grandes monumentos sólo de unas decenas.

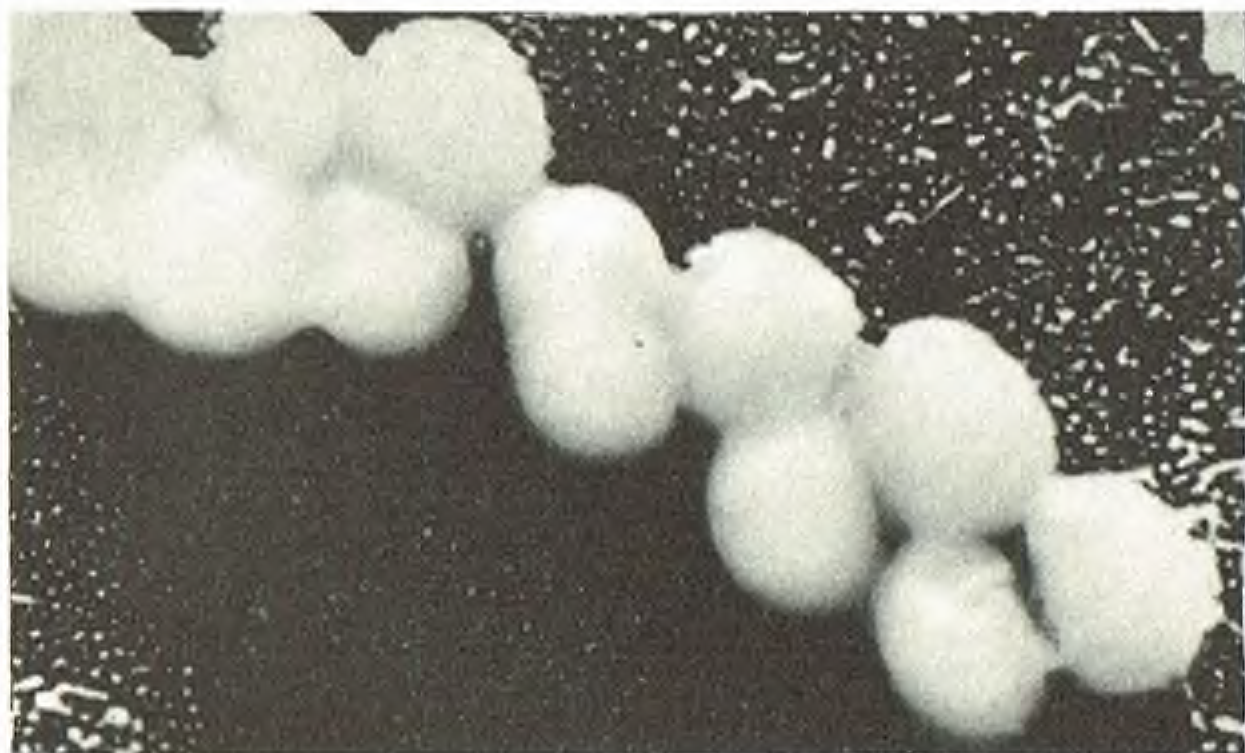
El agua de los ríos, después de pasar por las ciudades, es la más contaminada debido a las innumerables causas de corrupción (alcantarillas, lavaderos, etc.). En verano, el agua del Sena contiene, antes de llegar a París, 30 000 bacterias por *centímetro cúbico* y 400 000 después. Este ejemplo demuestra la prodigiosa cantidad de microbios engendrada por una gran ciudad. El agua de los pozos y de las fuentes puede ser contaminada por infiltraciones de los pozos negros y depósitos de estiércol. Incluso el hielo puede contener bacterias.

En el suelo, principalmente en las tierras cultivadas, se pueden encontrar millones de bacterias por *centímetro cúbico*. Estas bacterias desempeñan un papel considerable en la agricultura, bien sea empobreciendo de nitratos el suelo (bacterias desnitrificadoras) o, por el contrario, enriqueciéndolo en nitrógeno (bacterias nitrificadoras y bacterias asimiladoras de nitrógeno).

Forma de las bacterias. — Aparte las bacterias invisibles, todas las que pueden ser estudiadas al microscopio se clasifican bastante fácilmente en cuatro grupos:

1º **Bacterias globulares o cocos.** — Estas células tienen de una a dos micras de diámetro y son inmóviles. Aisladas, esas bacterias son *micrococos*; reunidas de dos en dos, *diplococos*; dispuestas como las cuentas de un rosario, *estreptococos*. Agrupadas de cuatro en cuatro en un mismo plano son *tetracocos*. Reunidas en masa cúbica toman el nombre de *sarcinas*. En fin, presentes en masas irregulares más o menos semejantes a racimos de uva, se da a esas bacterias el nombre de *estafilococos*.

2º **Bacterias alargadas y rectilíneas.** — Estas células son generalmente de media micra de ancho por algunas micras de largo, son móviles o inmóviles, y son llamadas comúnmente *bacilos* (del latín *bacillus*, bastoncillo). Por ejemplo, el bacilo de Koch o de la tuberculosis, el



Estafilococos, aumentados 40 000 veces por el microscopio electrónico (*Doc. Instituto Pasteur*)



Vibriones del cólera vistos mediante el microscopio electrónico (*Doc. Instituto de microscopia electrónica de Delft*)

bacilo de Eberth o de la fiebre tifoidea, el bacilo de Klebs-Loeffer o de la difteria, etc.;

3° **Bacterias curvas o espirales.** — Estas células son alargadas, como los bacilos, pero toman la forma de una media luna *(vibriones)* y otras veces la de una espiral *(espirilos)*. Las espirales muy alargadas y onduladas son llamadas más especialmente *espiroquetas*;

4° **Bacterias filamentosas.** — Estas bacterias, generalmente acuáticas, están formadas de filamentos simples o ramificados, rodeados o no de una vaina mucilaginosa (especie de gelatina), y se dividen en numerosos géneros: *Leptotrix, Cladotrix, Streptotrix, Beggiatoa*, etc.

La mayor parte de las bacterias son *polimorfas*, es decir, capaces de cambiar de forma según las condiciones de temperatura y de medio. Así, el bacilo de la tuberculosis puede alargarse y ramificarse o pasar momentáneamente bajo una forma invisible. El bacilo del pus azul, común en ciertos abcesos, puede tomar la forma de bastoncillos cortos o alargados o de espirales, según sea cultivado en presencia de tal o cual antiséptico. En fin, todos los viejos cultivos de bacterias presentan formas extrañas (hinchadas, ahusadas, ramificadas), llamadas *formas de involución*.

No es necesario decir que el polimorfismo obstaculiza considerablemente la determinación de las bacterias. Hay que estar seguros antes de pronunciarse sobre su identidad de que éstas se encuentran en condiciones normales y prósperas. Además es siempre indispensable completar la determinación morfológica por una determinación fisiológica. Ciertas bacterias derriten la gelatina de los medios de cultivo; otras sólo pueden ser cultivadas al abrigo del aire y mueren al contacto del oxígeno; otras, por último, se tiñen de tal o cual forma, etc.

Bacterias invisibles. — Estas bacterias no son visibles ni con los más potentes microscopios y atraviesan además los filtros más finos. Dichas bacterias son *ultramicrobios*, llamados también *virus filtrantes*, reconocidos por los *virus* o *toxinas* que segregan y que pueden ser causa de enfermedades contagiosas. Tales son las bacterias de la rabia, de la viruela, de las paperas, de la gripe, de la encefalitis letárgica, de la glosopeda y de la perineumonia bovina. En cuanto a esta última especie, se ha llegado a observarla con el *ultramicroscopio*. Las dimensiones de esta especie parecen ser de una décima de micra.

Estructura de las bacterias. — Desde luego no se sabe nada de la estructura de las bacterias invisibles. En cuanto a las demás, hay que reconocer que su estructura es sumamente simple.

En la periferia de la célula se encuentra una *membrana* seudocelulósica capaz de transformarse, al contacto del agua, en una gelatina o *mucílago* que, a veces, envuelve varias células.

En el interior de la célula está el *protoplasma*, que es más o menos homogéneo. No obstante, se observan en él pequeñas *vacuolas, glóbulos de grasa* y de *glucógeno*, así como unos granos bastante enigmáticos que vuelven rojos los colorantes azules.

Hasta el presente no se ha encontrado ningún indicio aparente de núcleo, por lo que durante largo tiempo se ha dicho que las bacterias estaban desprovistas de él. En realidad, el núcleo es en ellas *difuso*. En todo el protoplasma existen *granos de cromatina* que pueden ser teñidos por los métodos habituales.

A esas partes esenciales de toda bacteria se añaden con frecuencia *cilios vibrátiles* dispuestos sobre toda la superficie o localizados en los dos extremos de la célula. Estos cilios vibrátiles son los órganos locomotores de las bacterias, que les permiten nadar y recorrer algunos decímetros por hora. Algunas bacterias, como las espiroquetas, no tienen cilios o flagelos, pero ondulan como las anguilas.

Reproducción de las bacterias. — Las bacterias tienen dos modos de reproducción, que alternan según sean buenas o malas sus condiciones de existencia:

1° **División.** — Este procedimiento de reproducción corresponde a la vida activa de las bacterias. Bien alimentadas y colocadas en condiciones favorables de temperatura, humedad, etc, vemos crecer las células y cortarse luego en dos, previa formación de una membrana transversal. Las dos células hijas se dividen a su vez, y así sucesivamente. Una división completa exige alrededor de media hora. De seguir este ritmo, una bacteria podría tener un millar de descendientes al cabo de cinco horas, un millón a las diez y mil millones en quince horas, etc. En realidad, las divisiones se moderan y cesan al cabo de un cierto tiempo, a causa de la saturación del medio de cultivo. Por otra parte, un número enorme de células sucumbe antes de reproducirse. La *pululación* de las bacterias se ve de ese modo limitada, aunque conservan una fuerza capaz de asombrar la imaginación y que es suficiente para explicar la rapidez de propagación de las enfermedades contagiosas;

2° **Esporulación.** — Cuando las condiciones del ambiente son desfavorables (pobreza alimenticia, elevación o descenso de la temperatura, sequía, etc.), las bacterias cesan de dividirse y no tardan en esporular. El protoplasma de cada célula se condensa en uno de los polos y se rodea de una doble membrana. El resultado es una *espora*, pequeño corpúsculo esférico y brillante, que no tiene más de una a dos μ de diámetro. Puesta en libertad por ruptura de la membrana celular, la espora pasa al estado de *vida lenta*. Esta espora es muy resistente a los agentes físicos. Mientras que una bacteria muere a los pocos minutos de ser sometida a una temperatura de 80° C, una espora resiste los 100° C de calor húmedo y soporta durante horas una temperatura de 120° C de calor seco. Cuando una espora vuelve a encontrar condiciones favorables, se hincha; su membrana externa estalla y da nacimiento a un tubo germinativo que se divide en nuevas bacterias.

Cultivo de bacterias. — Dada su pequeñez, la bacteria no puede estudiarse fisiológicamente por separado. Por consiguiente, es necesario cultivar o criar las bacterias para estudiarlas en *colonias*. El cultivo de las bacterias es una de las operaciones esenciales de la bacteriología y comprende varias fases sucesivas, comparables a las de la agricultura: preparación del terreno (medio de cultivo), extirpación de la mala hierba (esterilización), siembra y cultivo propiamente dicho.

Medios de cultivo. — El medio de cultivo es el terreno sobre el cual se van a cultivar las bacterias. Ahora bien, no todos los medios son indistintamente favorables a todas las bacterias: las hay más difíciles que otras y que exigen un medio especial, y algunas incluso no han podido ser nunca cultivadas. Por regla general, las bacterias exigen un *medio alcalino*. Unas viven en un *medio líquido* y otras en un *medio sólido*. Algunas no pueden privarse del contacto del aire, por cuyo motivo reciben el nombre de *aerobias*, mientras que otras, a las cuales, por el contrario, el oxígeno libre mata, son llamadas *anaerobias*.

1° *Medios líquidos*. El más utilizado es el *caldo de buey* o *caldo ordinario*, que se tiene el cuidado de desgrasar, salar, neutralizar si es ácido y adicionar de peptona. También se puede utilizar, en ciertos casos, caldos de legumbres o de frutas, orina, leche, suero sanguíneo, etcétera. Estos medios naturales encierran todos los elementos necesarios al desarrollo de ciertas especies;

2° *Medios sólidos*. Pueden utilizarse rebanadas de patata y de zanahoria, pero también puede solidificarse un medio líquido cualquiera con el empleo de *gelatina* (substancia extraída de huesos) o de *gelosa* (substancia extraída de algas). Con este fin se somete ese medio líquido a la temperatura que requiere la disolución de la gelatina o de la gelosa, para enfriarlo a continuación y dejarlo cuajar en una especie de jalea transparente. Los medios gelatinosos deben ser conservados a menos de 25° C (lo cual limita mucho su empleo) y los medios gelosos a menos de 70° C. Éstos son los mejores medios sólidos.

Recipientes de cultivo. — Los medios de cultivo son colocados en tubos o en frascos, simplemente cerrados con algodón si se trata de aerobios, y herméticamente tapados, por el contrario, después de hacerse cuidadosamente el vacío de aire, si se trata de anaerobios. Entre las diversas clases de recipientes hay que distinguir los simples *tubos* de ensayo, análogos a los de los químicos; los *matraces* de cristal; los *frascos* cónicos de Erlenmayer; las *botellitas* cuadrangulares de Roux; los grandes *frascos planos* que permiten obtener colonias más extendidas; las *cajas de Petri* con fondo y tapadera de cristal, etc. Para los pedazos de zanahoria o de patata se emplean de preferencia *tubos estrangulados* que contienen en el fondo una pequeña cantidad de agua a fin de mantener húmedo el medio de cultivo.

Esterilización del medio. — La esterilización consiste en matar todos los microbios y otros organismos vivientes que puedan existir en el medio de cultivo. Esta operación se logra, según los casos, por filtración o por calor seco o húmedo:

1° *Esterilización por filtración*. El *filtro de Chamberland* se compone de un tubo o *bujía* de porcelana porosa abierto por su parte inferior y encastrado en una funda metálica en la cual se encuentra el líquido que hay que filtrar. Una presión ejercida sobre el líquido por medio de una bomba le obliga a atravesar los poros de la porcelana y a depositarse en la parte inferior de la bujía. Los microbios demasiado voluminosos son contenidos por el filtro, y sólo pueden pasar los microbios invisibles, llamados precisamente por esta razón *virus filtrantes*. El inconveniente de los filtros es el de engrasarse muy rápidamente y de ser muy inseguros. Los hay cuya porcelana no es suficientemente espesa para retener todos los gérmenes;

2° *Esterilización por el calor*. La temperatura de 120° C húmeda, necesaria para matar las esporas, no puede ser obtenida, bajo la presión atmosférica, sin que el agua de los medios de cultivo se evapore. Por tanto, debe operarse por presión con la ayuda de un aparato llamado *autoclave*. La autoclave de Chamberland es una especie de marmita de Papin, de pared muy espesa y herméticamente cerrada. En el fondo hay un poco de agua, y en el centro, en un cesto metálico, se suspenden los tubos y frascos que se quieren esterilizar. La marmita se calienta en un aparato de gas. El vapor de agua que se desprende no puede escapar a la atmósfera y ejerce una presión sobre el agua, que, al no poder hervir, se calienta cada vez más hasta llegar a los 120° e incluso a los 130° C. Inútil decir, pues, que un *manómetro* y una *válvula de escape*, colocados en la tapadera de la autoclave, permiten regular la presión interior y evitar todo peligro de explosión. La experiencia demuestra que basta calentar un medio de cultivo durante treinta minutos a 120° C para esterilizarlo. Desde ese momento se conserva indefinidamente sin sufrir alteraciones. El tapón de algodón basta para impedir a los microbios del aire penetrar en el recipiente.

Siembra del medio. — Lo mismo que el agricultor echa las semillas en la tierra que acaba de labrar, el bacteriólogo siembra su medio de cultivo. A tal fin, se procura el microbio objeto del cultivo (bacilo de Koch en un esputo de tuberculoso, vibrión del cólera en los excrementos del enfermo, etc.) y lo introduce en el tubo o en el frasco. El instrumento empleado para esa operación es una *aguja de platino* cuyo mango es una varilla de cristal.

En ciertos casos se puede utilizar una *pipeta de cristal*. He aquí las operaciones sucesivas de una siembra: esterilizar la aguja o la pipeta en la llama azul de un mechero Bunsen; dejarla enfriar; tomar con ese instrumento algunos microbios objeto del cultivo; abrir el tubo o el frasco; introducir los microbios y depositarlos en el medio de cultivo; esterilizar el tapón de algodón y colocarlo en el orificio del tubo o del frasco. Todas esas operaciones deben ser hechas con destreza y, de preferencia, en la zona estéril que rodea la llama del mechero de gas. De esta forma se tiene la posibilidad de no introducir más que el microbio que se ha elegido para la siembra.

Cultivos impuros y cultivos puros. — Los medios sembrados se conservan de ordinario en una *estufa* a temperatura constante de unos 30° C. Este aparato, utilizado en bacteriología, es un armario de vidrio cuyo

interior, calentado por gas o eléctricamente, se mantiene a temperatura constante por medio de un regulador. Al cabo de unos días se ven aparecer en los medios de cultivo *colonias microbianas*, cada una de las cuales procede de la multiplicación de una bacteria inicial que ha dado millones de individuos. Entonces pueden producirse dos casos: todas las colonias se parecen por su forma, consistencia, coloración y todas las demás propiedades, en cuyo caso el cultivo es puro y no contiene más que una sola especie microbiana, o las colonias se diferencian entre sí: unas son brillantes, otras mates, algunas tienen un pigmento del que las otras carecen, etc. Esta heterogeneidad es propia de un *cultivo impuro*. Varias especies de bacterias se han introducido en el curso de la siembra y se han desarrollado unas junto a otras, por lo que es necesario, pues, hacer un nuevo cultivo, tomando como punto de partida la colonia que entre las precedentes presenta precisamente los caracteres de la que se quiere cultivar. Con frecuencia son necesarios varios cultivos sucesivos para obtener al fin un *cultivo puro*, o sea el único que podrá ser útil para los diferentes usos bacteriológicos.

Estudio de las bacterias. — Las bacterias pueden ser estudiadas vivas o muertas. Los dos métodos tienen sus ventajas e inconvenientes:

1° *Estudio en estado vivo.* Se observa directamente con el microscopio una gota del caldo de cultivo. Un buen dispositivo es el de la *cámara húmeda*, consistente en un pequeño anillo de vidrio, pegado a una lámina del mismo material, a la que se sobrepone una laminilla, igualmente de vidrio, llamada portaobjetos. Después de haber pasado por la llama estas tres piezas, se introduce en el anillo una gota de agua esterilizada que tiene por objeto mantener una humedad conveniente, y se deposita en la cara inferior de la laminilla portaobjetos una gota del medio de cultivo (gota suspendida). La ventaja de esta técnica es la de operar en medio esterilizado y sin temor a la desecación del cultivo;

2° *Estudio en estado muerto.* Los detalles de la estructura de las bacterias no pueden observarse *in vivo*. Antes es necesario matar las bacterias y teñirlas para ver bien su membrana, su protoplasma, sus cilios vibrátiles, si ha lugar, así como otras partes de las cuales se componen estos microorganismos. Después de depositar una gota de cultivo sobre la lámina de vidrio, se extiende con el borde de una laminilla y se deja secar. A continuación se pasa rápidamente la lámina por encima de una llama que fija los microbios en el cristal por coagulación de su protoplasma. Falta aún la operación de teñir los microbios: operación que varía según la especie microbiana o según el resultado que se desea obtener. Se puede teñir simplemente por empapamiento en una solución de color de anilina (azul de metileno, violeta de genciana, etc.). También pueden emplearse métodos más complejos, el más clásico de los cuales es el de Gram.

Nutrición de las bacterias. — Mientras que las plantas verdes son *autotrofas*, es decir, que viven únicamente de materias minerales, las plantas sin clorofila (bacterias y hongos) son *heterotrofas*, puesto que se nutren de materias orgánicas tomadas a otros seres vivos. Las primeras son *saprofitas* y las segundas *parásitas:*

1° *Bacterias saprofitas.* Éstas son las que viven en las materias orgánicas muertas y que determinan su *fermentación*. Dichas bacterias funcionan como un animal que digiere sus alimentos. En ambos casos hay intervención de diastasas. Por ser bastante considerable el número de fermentaciones, las más típicas serán estudiadas ulteriormente a propósito del ciclo del carbono y del ciclo del nitrógeno;

2° *Bacterias parásitas.* Éstas son las que viven a expensas de los animales o de los vegetales y que determinan *enfermedades contagiosas* o *infecciosas*. Así, el bacilo de la tuberculosis es un parásito que vive en el cuerpo del hombre. Como se ha comprobado que son agentes de enfermedades, las bacterias parásitas suelen ser llamadas *bacterias patógenas*.

Acción del medio sobre las bacterias. — Las bacterias son particularmente sensibles a ciertos factores físicos y químicos, como el calor, la luz, el oxígeno, etc., cuyo papel microbicida puede ser aprovechado para la destrucción de las especies patógenas.

Acción del calor. — Esta acción no es la misma sobre las bacterias en actividad que sobre sus esporas. Mientras que una bacteria muere generalmente a 70° C, la temperatura mortal para las esporas es de 120° C en aire húmedo y de 180° C en aire seco. La resistencia al frío es mucho mayor. Una bacteria puede vivir a 50° C bajo cero. En cambio, una espora es capaz de resistir durante unos minutos la temperatura fantástica de 200° C bajo cero.

La noción de temperatura óptima es particularmente importante para la profilaxis de las enfermedades contagiosas. El bacilo de la tuberculosis sólo puede multiplicarse, por ejemplo, a una temperatura de 37 a 40° C. El cuerpo humano ofrece a este bacilo un campo de actividad que responde precisamente a esas condiciones térmicas. El bacilo del carbunco, enfermedad del ganado, sólo prospera entre los 30 y 41° C. Pasteur no logró inocular ese bacilo a las gallinas (cuya temperatura normal es de 42° C) sino manteniéndolas en baños fríos. Inversamente, ha podido ser inoculado a las ranas teniéndolas en agua templada.

Acción de la luz. — La luz solar es un antiséptico de primer orden. Se ha comprobado, por ejemplo, que los bacilos de la tuberculosis y del carbunco pierden su virulencia y se hacen inofensivos después de un día de exposición al sol. Las radiaciones violeta y ultravioleta son las más enérgicas. Ésta es una de las razones por la cual se emplean hoy día los rayos ultravioleta de lámparas de vapor de mercurio para esterilizar los medios de cultivo e incluso el agua destinada al consumo. Un alojamiento bañado por el sol es más sano que una casa oscura.

Acción del oxígeno. — Para el examen microscópico, coloquemos entre la lámina y la laminilla de cristal una gota de cultivo de bacilo láctico o de bacilo carbuncoso. Al poco tiempo veremos los bacilos reunirse al borde de la laminilla, o sea allí donde llega el oxígeno del aire. En ese caso se tratará de microbios *aerobios* (del griego *aer*, aire, y *bios*, vida). La misma observación efectuada sobre bacilos amilobácteros dará un resultado inverso: los bacilos se reunirán en el centro de la preparación y huirán del oxígeno. Aquí se tratará de microbios *anaerobios*. En su tiempo, Pasteur dio también a conocer microbios que son ora aerobios, ora anaerobios. Huelga decir que los anaerobios tienen que ser cultivados al abrigo del oxígeno (en el vacío o en una atmósfera de nitrógeno).

Acción de las substancias químicas. — Se llaman antisépticas las substancias capaces de destruir las bacterias. Los antisépticos más empleados en medicina y cirugía son los siguientes: el *bicloruro de mercurio* o *sublimado corrosivo*, en solución muy rebajada, para el lavado de la piel; el *formol* o *aldehido fórmico*, utilizado sea en vapores en las cámaras de esterilización, sea en soluciones, para la limpieza; la *lechada de cal*, para la desinfección de retretes y enjalbegado de cuadras; el *permanganato potásico*, del que bastan unos gramos para esterilizar 100 litros de agua en pocos minutos; el *ácido fénico*; el *ácido bórico*; el *tanino*; la *tintura de yodo* y el *agua yodada*; el *agua oxigenada*; la *lejía*, empleada corrientemente para la esterilización de aguas sospechosas; el *ozono*, utilizado con el mismo fin; el *alcohol*; el *éter*, etc.

Manifestaciones vitales de las bacterias. — Las bacterias manifiestan su existencia, según el caso, por la producción de pigmentos en el interior de sus cuerpos, la secreción de diastasas o de toxinas, la emisión de luz, etc.

Producción de pigmentos. — Las bacterias llamadas *cromógenas* (del griego *chroma*, color, y *genos*, nacimiento) tienen un color propio, lo que permite distinguirlas inmediatamente. Ya hemos hablado antes de las bacterias que contienen *bacteriopurpurina*, pigmento sin duda vecino de la clorofila. Otras bacterias están teñidas de rojo sangre, como el *Chromobacterium prodigiosum*, que se desarrolla a veces en el pan húmedo; de azul celeste, como el bacilo del pus azul y como el que se desarrolla algunas veces en la leche durante los calores del verano.

Producción de diastasas. — Todas las reacciones químicas que se producen en los seres vivos son originadas y dirigidas por substancias imponderables, pero muy activas, llamadas *diastasas*. Nuestro tubo digestivo y todas nuestras células producen esta clase de fermentos. Así, no es extraño que las bacterias produzcan también diastasas. Todas las fermentaciones son debidas, en particular, a diastasas que oxidan, hidratan, desdoblan y coagulan las diversas substancias puestas a su alcance.

Producción de toxinas o virus. — Las bacterias *patógenas* (del griego *pathos*, enfermedad, y *genos*, nacimiento) ejercen sus principales estragos, en los organismos de los cuales son parásitos, por medio de *venenos* llamados *toxinas* o *virus*, de los que se podrían dar muchos ejemplos en las enfermedades contagiosas. La *toxicidad* o *virulencia* es, por otra parte, muy variable y puede ser modificada por artificios de cultivo (técnica de las vacunas y sueros).

Producción de calor. — Las más notables de las bacterias *termógenas* (del griego *thermos*, calor) son las que se desarrollan en el estiércol o en el heno amontonado y húmedo. Estas bacterias llegan a elevar la temperatura hasta 90° C y pueden incluso originar incendios.

Producción de luz. — Existen bacterias *fotógenas* (del griego *photos*, luz) que deben su nombre a su luminosidad. Algunas de estas especies viven como parásitos de peces y crustáceos marinos, que ellas convierten en luminosos. Dichas bacterias pueden ser cultivadas en globos de vidrio, verdaderas lámparas vivientes, a cuya luz se puede leer y hasta fotografiar.

Clase de los hongos

Los *hongos* constituyen la segunda clase de las talofitas. Los hongos son *talofitas sin clorofila*. Como las bacterias, son siempre *saprofitos* o *parásitos*. A falta de almidón, propio de las plantas verdes, los hongos contienen *glucógeno*, punto, éste, común con los animales. Otra característica: además de la celulosa, los hongos tienen *calosa* en sus membranas celulares, soluble en el reactivo de Schweitzer y que no se colora con el cloroyoduro de cinc.

Clasificación de los hongos. — Aparte de los *mixomicetos*, que tienen afinidad con los animales, la clase de los hongos se divide en tres órdenes:

1° Orden de los *ficomicetos* u *oomicetos*, de talo filamentoso sin tabiques, que se reproducen por esporas o por óvulos (*zigotos*);

2° Orden de los *ascomicetos*, de talo unicelular (levaduras) o pluricelular, y en este caso formado de filamentos tabicados, que se reproducen por esporas que nacen en número constante en el interior de células llamadas *ascas;*

3° Orden de los *basidiomicetos*, de talo formado de filamentos tabicados, que se reproducen por esporas que nacen en número constante en la superficie de células llamadas *basidios*.

Orden de los ficomicetos

El *talo* o *micelio* (del griego *mykes*, hongo) de los *ficomicetos* es un entrecruzamiento de filamentos ramificados, pero sin *tabiques*, a los cuales se da el nombre de *hifas*.

Según las condiciones del ambiente, los ficomicetos se reproducen por *esporas* o por *óvulos*. Los primeros son *saprofitos* (múcor) y los segundos *parásitos* (mildeu o mildiu).

Múcor. — El *múcor o moho blanco* desarrolla su *micelio* en el pan húmedo o en los excrementos de caballo.

Para que un cultivo artificial prospere, debe colocarse el pan bajo una campana de vidrio para que se conserve húmedo y mantenga su temperatura alrededor de los 20° C. En estas condiciones, no se tarda en ver ciertos filamentos que crecen verticalmente y luego se dilatan en su extremo superior en forma de bola, que se separa después de su pedículo por un tabique abombado o *columela*. El aparato así constituido es un *esporangio* cuya membrana se eriza de pequeños cristales de oxalato de calcio. El protoplasma se condensa, en el interior de esa bolsa, en forma de pequeñas bolas o *esporas*, cada una de las cuales encierra varios núcleos y envoltorios de una membrana celulósica. A su madurez, el esporangio se disuelve en el agua y deja libres las esporas. Éstas, al caer sobre el pan húmedo, germinan y dan otros tantos filamentos que, al entrecruzarse, reconstituyen un micelio.

Mucor vulgaris formado sobre materia vegetal en descomposición (*Fot. Boyer*)

La reproducción que acaba de ser descrita es la *esporulación* o *reproducción asexual*, que tiene sólo lugar en condiciones favorables de humedad, alimentación y temperatura.

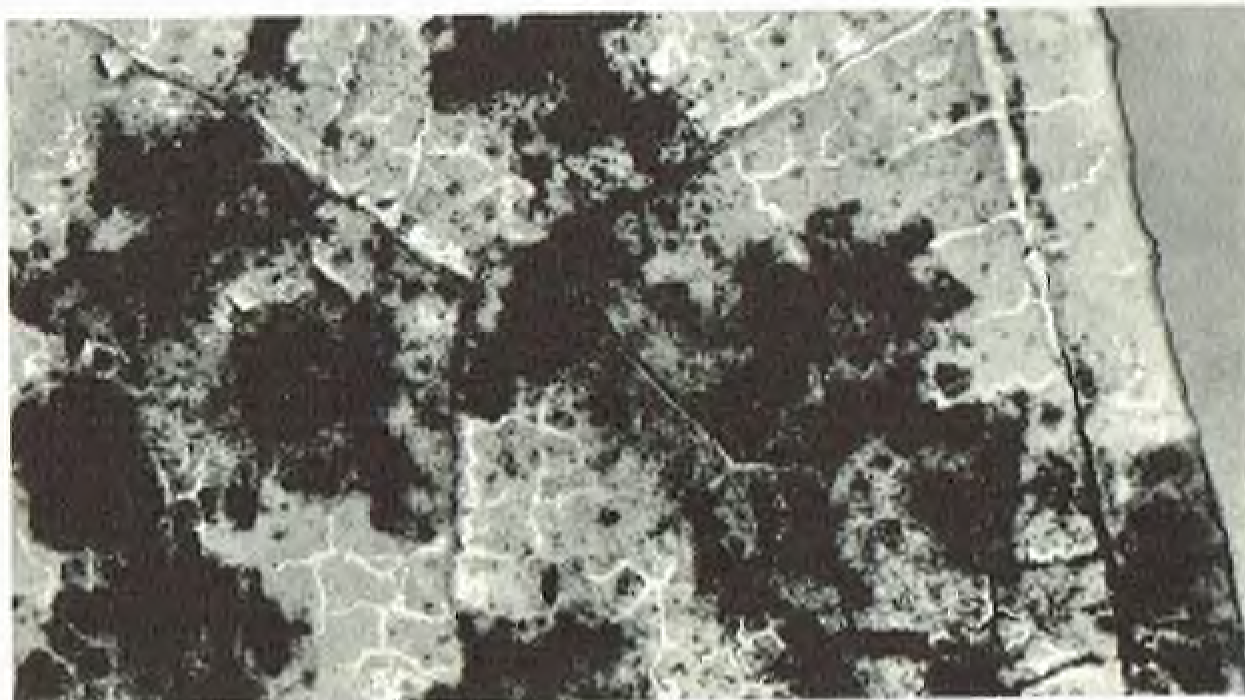
Cuando, por el contrario, las condiciones son desfavorables, se ven dos filamentos vecinos cada uno de los cuales produce una protuberancia cuyo extremo se aisla con un tabique y constituye un *gameto*. En cada gameto hay varios núcleos. Los dos gametos se aproximan entre sí y fusionan protoplasma con protoplasma y núcleo con núcleo. El resultado de esta fecundación *isógama* es un *huevo* plurinucleado, capaz de subsistir en estado de vida lenta hasta que vuelvan a presentarse las condiciones favorables.

En resumen, hay: *reproducción asexual (esporulación) en condiciones favorables y reproducción sexual (fecundación) en condiciones desfavorables.*

El método de los cultivos puros ha permitido descubrir el hecho siguiente. Todas las esporas de un múcor, en apariencia idénticas, difieren unas de otras fisiológicamente. Al desarrollarse, unas dan talos + y otras talos —, por cuyo motivo es necesario, pues, poner un talo + en presencia de otro — para que se produzca la fecundación. Por este hecho se dice que el múcor es *heterotálico*. Otros ficomicetos son, por el contrario, *homotálicas*, puesto que sólo tienen una clase de esporas y de talos.

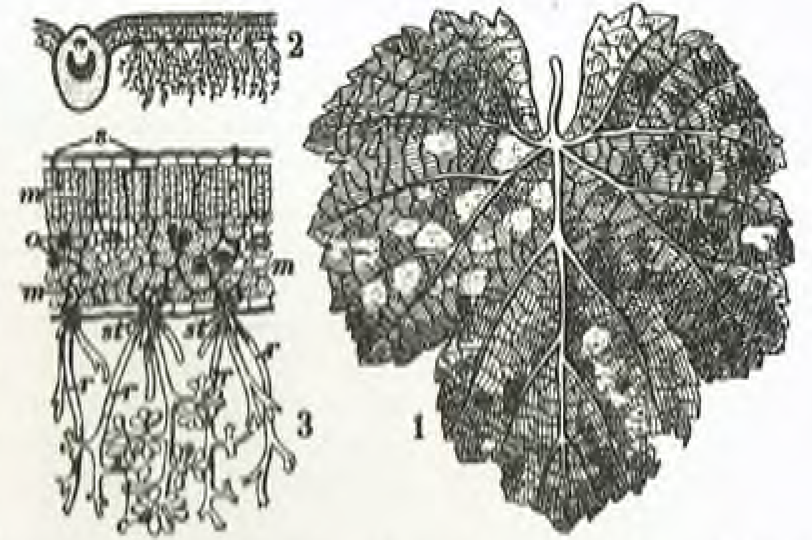
Mildeu o mildiu. — Vecino del múcor, este hongo *(Plasmopora)* es el que determina el mildeu. El micelio del mildeu vive en las hojas de la vid, cuyas células aparta para aspirar el jugo celular por medio de *haustorios* o *chupadores*.

Durante el verano, algunos filamentos micelianos se enderezan y salen por los estomas de la cara inferior de las hojas. Provistos de ramificación dicotómica (bifurcaciones sucesivas), esos filamentos producen finalmente en su extremidad *esporas* o *conidios*. La presencia del mildeu se descubre gracias a la pelusa cubierta de un polvo farináceo de que están dotadas las hojas de la vid. Las esporas transportadas por el aire germinan sobre otras hojas y propagan la mortífera enfermedad.



Mildeu de la vid (*Fot. Bille*)

En otoño, en la extremidad de las hojas, aislada por un tabique, se produce una dilatación de dos filamentos internos. Una de las bolsas u *oogonio* condensa su contenido protoplasmático en una *oosfera* (gameto hembra) plurinuclear. La otra o *anteridio* condensa igualmente su contenido en un *anterozoide* (gameto macho) plurinuclear. Ambas bolsas se sueldan y destruyen el tabique común. El anterozoide fecunda la oosfera y el resultado de esta *fecundación heterógama* es un *óvulo* de varios núcleos que se rodea al poco tiempo de una doble membrana.



1. Hoja de vid atacada por el mildeu (*Plasmopora viticola*); 2. Sección de la hoja que muestra la masa de esporas; 3. Sección que presenta: *e*, esporas; *m*, micelio; *est*, estomas de la hoja; *r*, racimos de conidioforos; *h*, huevos; *c*, conidios o esporas

Hay que señalar que las esporas tienen un desarrollo **indirecto**. Antes de dar un nuevo micelio, éstas se transforman en *zoosporas* o esporas ciliadas, capaces de nadar en el agua de lluvia, cuya velocidad de desplazamiento es, aproximadamente, de dos metros por hora. Estas zoosporas son las que hay que destruir con sulfato de cobre para combatir esa terrible plaga de la vid.

Orden de los ascomicetos

Los *ascomicetos* u hongos con ascas son unicelulares (levaduras) o pluricelulares. En este caso, el talo o micelio de los ascomicetos es formado por un entrecruzamiento de filamentos ramificados y separados por *tabiques*.

Todos esos hongos se reproducen por *ascosporas* y nacen en pequeño número (4 u 8) en el interior de esporangios llamados *ascas*.

Recientemente se ha demostrado que las ascas son en realidad huevos. Así los ascomicetos se reproducen alternativamente por óvulos (ascas) y por esporas. Los hongos con ascas tienen, pues, una *alternancia esporogametofítica*.

Levadura de cerveza. — Esta levadura, llamada científicamente *Saccharomyces*, es estudiada a propósito de la *fermentación alcohólica*, que es su reacción a la asfixia que le produce la glucosa. Esta levadura es una célula ovoide que no excede de diez micras de longitud y que se reproduce por gemación, por óvulos y por esporas.

1° Cuando las condiciones de vida son favorables, se ve formarse sobre las células brotes o *yemas* que aumentan progresivamente de volumen hasta desprenderse llevándose la mitad del núcleo. No es raro que varias células permanezcan temporalmente unidas como los anillos de una cadena. En los cultivos viejos se observa hasta tendencia al estado filamentoso, que recuerda el micelio de los demás hongos;

Brotes de levadura

2° Cuando las condiciones del ambiente son desfavorables, ciertas células se portan como gametos y se unen de dos en dos para formar *zigotos*. La fecundación es entonces isógama;

3° El óvulo no da inmediatamente una nueva levadura, sino que se transforma en un esporangio o *asca* en la que se individualizan cuatro *ascosporas*. Hay, como vemos, *alternancia esporogametofítica*. Las ascosporas tienen sólo *n* cromosomas y representan, con las células de levadura procedentes de gemación, la fase simple o *haploide*, llamada también *gametofita*, puesto que va a engendrar los gametos. Éstos, simples células de levadura de *n* cromosomas, se unen para formar un huevo de 2*n* cromosomas que, con el asca a la cual da nacimiento, representa la fase doble o *diploide*, llamada también *esporofita*, puesto que engendra las esporas. Éstas nacen de cuatro en cuatro, gracias a una doble cariocinesis, la primera de las cuales, llamada *reductora*, se produce sin división longitudinal de los cromosomas.

En resumen:

Gametofito o fase haploide (células de *n* cromosomas)	*Esporofito o fase diploide* (células de 2*n* cromosomas)



Moho verde. — En el pan húmedo, en compañía del múcor, así como también en las mermeladas, los cueros viejos, el queso, etc., se desarrolla un moho verde *(penicilio)*. Este moho se compone de un *micelio* formado de filamentos tabicados y ramificados en la superficie de la materia orgánica de la cual se nutre. Los modos de reproducción del moho verde son tres:

1° Normalmente, en la superficie del micelio crecen filamentos pluribifurcados *(conidioforos)* cuyas extremidades terminan en forma de

rosarios de esporas externas o *conidios*. Estas esporas propagan el moho durante todo su período de vida activa;

2º En ciertas circunstancias se produce una fecundación entre células vecinas del micelio. La fecundación es, en realidad, incompleta. Hay solamente fusión de protoplasmas *(plasmogamia)* sin fusión de núcleos. *El óvulo es binuclear;*



Conidios, aumentados, de *Penicillium glaucum* (*Fot. Boyer*)

3º Ese óvulo no da inmediatamente un nuevo micelio, sino que germina y produce en su contorno un gran número de filamentos cuyas células son todas binucleares. Estos filamentos se ramifican y entrecruzan en un cuerpo fructífero esférico *(peritecio)* en el interior del cual ciertas células se transforman en *ascas*, previa soldadura de las dos partes del doble núcleo. Esta *cariogamia* o fusión nuclear debe ser considerada como la segunda fase de una fecundación que sigue a la fase llamada *plasmogamia* o fusión protoplástica. A continuación de esa segunda fase, el asca produce, por triple cariocinesis, una de las cuales es reductora, ocho *ascosporas* de *n* cromosomas.

Ese desarrollo recuerda el de las levaduras, con la diferencia de que la fecundación se hace en dos tiempos separados por una fase de multiplicación celular que da nacimiento al peritecio.

En resumen:

Gametofito o fase haploide *Esporofito o fase diploide*



Además del moho verde existen un gran número de otros mohos que se distinguen principalmente por la forma de sus conidios. En los *aspergilos*, por ejemplo, los conidióforos se terminan en una abultada cabeza a cuyo alrededor nacen hileras de conidios.

La importancia de los mohos, en la economía rural, rivaliza con la de las levaduras. El moho verde se cultiva especialmente sobre la miga de pan y se emplea en la fabricación de quesos, como el de Roquefort, con el fin de precipitar su madurez. En el Japón, ciertas bebidas alcohólicas, como el *sake* y el *koji*, se obtienen con un *aspergilo*. El oídio de la vid es otro moho *(Uncinula necator)* que se desarrolla en las hojas y los granos.

Peziza. — Este hongo es muy común en la madera muerta, en cuyo interior introduce su *micelio*, y se reconoce por sus órganos reproductores o peritecios en forma de copas.

La peziza no tiene conidios o esporas externas, sino sólo óvulos y ascosporas o esporas internas:



Peziza llamada oreja de asno

1º Los óvulos son el resultado de una fecundación heterógama entre células vecinas y diferenciadas. La gran célula inmóvil es el gameto hembra; la pequeña célula que se vierte en la primera es el gameto macho. Por lo demás, la fecundación se reduce a una fusión de protoplasmas *(plasmogamia)* sin fusión nuclear. El zigoto conserva un doble núcleo;

2º Este zigoto germina al emitir por toda su periferia numerosos filamentos ramificados y entrelazados que constituyen un *peritecio* en forma de copa. Todas las células de este peritecio son unicelulares. En su cara interna se diferencia una membrana particular, llamada *himenio*, compuesta de células estériles o *paráfisis* y de células fértiles o *ascas*. En cada una de las ascas se sueldan los núcleos macho y hembra, o sea, que se produce una *cariogamia* que completa la *plasmogamia* de que se ha tratado anteriormente. El asca produce a continuación ocho *ascosporas* de *n* cromosomas que podrán reproducir nuevos micelios.

El ciclo evolutivo es el mismo que el de los mohos, pero con dos diferencias: primero, la fecundación heterógama; después, la forma de copa del peritecio y las ascas, que se disponen de modo regular en su cara interna.

Morilla comestible

Morilla. — La *morilla* comestible es muy semejante a las pezizas, de las que sólo difiere por la forma de su peritecio, globuloso y poblado de alvéolos, cada uno de los cuales corresponde a un peritecio simple.

Trufa. — Este hongo tiene una existencia enteramente subterránea al pie de ciertos árboles, como la encina y el olivo. El peritecio de la trufa es una masa negra, irregular, formada por numerosos filamentos entrecruzados en forma de red, en cuyo interior se distinguen cavidades tapizadas por un *himenio* con *ascas* y *paráfisis*. Las ascas encierran cada una cuatro esporas que no quedan libres hasta la destrucción de la trufa.

Sección de trufa en que se ven los esporangios y las esporas (*Fot. L. Poilpot*)

Cornezuelo de centeno. — Al orden de los ascomicetos hay que añadir un hongo *(cornezuelo)* parásito de las gramíneas, sobre todo del centeno. El talo o *micelio* de este hongo invade poco a poco el ovario de las flores, que digiere y, a la larga, absorbe completamente. El ovario es reemplazado entonces por un montón de filamentos, algunos de los cuales se yerguen en la periferia y producen en su extremidad una hilera de *conidios* o esporas externas. Estos conidios propagan la enfermedad de flor en flor e invaden en el curso del verano todo el campo de centeno.

Llegado el otoño, el micelio de cada ovario se comprime y se endurece hasta constituir un *esclerocio* (del griego *sklêros*, duro) que tiene la forma y el color de un espolón de gallo. En el momento de la cosecha, el esclerocio o espolón cae al suelo y permanece en él hasta la primavera siguiente.

Terminado el invierno, el esclerocio germina y produce en su superficie pequeñas columnas violáceas que se hinchan en su parte superior. Cada una de las bolsas está llena de minúsculos agujeros que dan acceso a otros tantos peritecios en forma de botella. Las *ascas* son alargadas y producen cada una ocho *ascosporas* filiformes.

El cornezuelo de centeno se desarrolla sobre todo en los años húmedos. Antes de llevar el centeno al molino es necesario tener cuidado de eliminar los esclerocios, pues contienen un principio tóxico, la *ergotina*, que ejerce una acción violenta sobre los nervios vasoconstrictores y disminuye la circulación. Molido con el grano y tomado por descuido mezclado con la harina, el polvo del cornezuelo produjo en la Edad Media la gravísima enfermedad convulsiva llamada *fuego sacro o de San Antón*. La ergotina se emplea hoy en medicina para detener las hemorragias pulmonares.

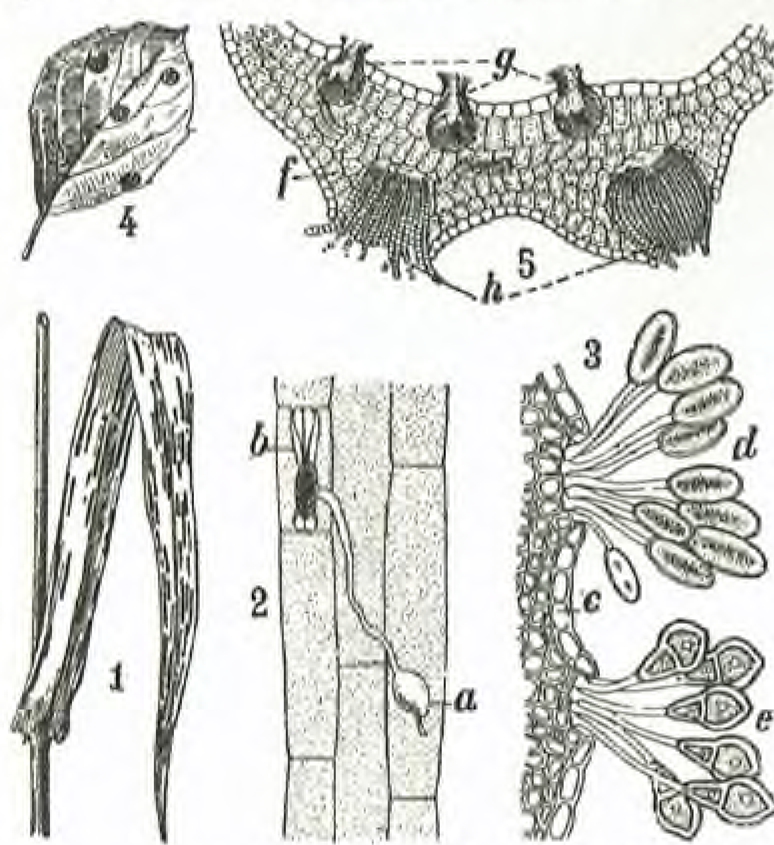
Cornezuelo del centeno (*Fot. Boyer*)

Orden de los basidiomicetos

El orden de los *basidiomicetos* comprende todo lo que se ha convenido en llamar vulgarmente *hongos*. Pero, al lado de estos basidiomicetos superiores, existen probasidiomicetos, de los que la mayor parte *(royas, tizones, carbones)* son hongos parásitos. En todos los casos, su aparato vegetativo es un *talo* o *micelio* formado por filamentos ramificados, entrelazados y, sobre todo, tabicados, es decir, pluricelulares como los de los ascomicetos superiores. Por otra parte, los basidiomicetos se reproducen por *basidiosporas* producidas en pequeño número (dos o cuatro) en la superficie de células llamadas *basidios*. Hay que añadir que el basidio es un huevo producido por fecundación isógama o hete-

rógama. Los basidiomicetos tienen, por consiguiente, una *alternancia esporogametofítica*, comparable en todo a la de los ascomicetos.

Roya del trigo. — El interés de este parásito *(Puccinia graminis)* estriba en la complejidad de su reproducción, que le permite vivir sobre el *trigo* y sobre otra planta, como el *agracejo*, de la misma forma que la tenia o lombriz solitaria vive, sucesivamente, en el cuerpo del cerdo y en el del hombre. La roya es un parásito de dos *huéspedes*, que además cambia de aspecto y no se reproduce de la misma manera en las diferentes estaciones, lo que demuestra hasta qué punto el parasitismo puede transformar a un ser viviente. Estudiaremos la roya del trigo en las diferentes estaciones:



Roya del trigo: 1. Hoja de trigo atacada por la roya; 2. Germinación de una uredospora *a* sobre el estoma *b*; 3. Sección que muestra la epidermis *c* de la hoja, las uredosporas *d* y las telentosporas *e*; 4. Hoja de agracejo; 5. Sección de la hoja de agracejo: *f*, tejido de la hoja; *g*, ecidiolos; *h*, ecidios

1° En **primavera**, sobre la cara superior de las hojas del agracejo —planta corriente en los taludes de las vías férreas— aparecen manchas amarillentas, circulares, que son órganos reproductores o *ecidiolos*. El micelio, que vive en el interior de la hoja, emite en esos puntos particulares unos filamentos muy apretados entre sí, cada uno de los cuales produce una hilera de *ecidiosporas*. Estas esporas se parecen a los conidios del mildeu y del oídio y sirven para propagar la enfermedad en el agracejo.

En la cara inferior de las hojas del agracejo aparecen unas manchas bastante parecidas a las precedentes, pero más grandes. Estas manchas son *ecidios*, grupos de filamentos verticales y paralelos unos a otros, que no tardan en acoplarse de dos en dos y fusionar sus células terminales. De esta fecundación, que afecta sólo los protoplasmas de las células, resulta un *óvulo* impropiamente llamado *ecidiospora*, que posee doble núcleo. Pero se ha producido solamente *plasmogamia*, en vez de cariogamia;

2° En **verano**, aparecen sobre las hojas del trigo unas huellas de color anaranjado que han dado a la enfermedad el nombre de *roya*. Si se hace un corte en la hoja enferma, se comprueba que estas manchas rojizas están formadas por filamentos que se yerguen y perforan la epidermis de la hoja. En la extremidad de estos filamentos se forma una *uredospora* de doble núcleo, como cada una de las células del micelio del cual procede. Las uredosporas sirven para propagar la enfermedad en el trigo;

3° En **otoño**, las manchas anaranjadas se ennegrecen y constituyen la llamada *roya negra*. Estas manchas son producidas por filamentos que salen al exterior y dan nacimiento en su extremidad a una cuarta clase de espora llamada *teleutospora* o *probasidio*. Al principio, la teleutospora tiene dos núcleos como la uredospora, pero éstos se unen a continuación. La *cariogamia* sucede, pues, a la plasmogamia de que se ha tratado antes. Como en los ascomicetos, la fecundación tiene lugar en dos tiempos: *a*) fusión protoplástica o plasmogamia; *b*) fusión nuclear o cariogamia. El micelio binuclear que se encuentra en las hojas del trigo equivale al peritecio de una peziza.

4° En **invierno**, las teleutosporas caídas al suelo en el momento de la cosecha subsisten en estado latente gracias a su espesa membrana.

5° En la **primavera siguiente**, las teleutosporas germinan. De cada una de ellas sale, por un poro germinativo, un corto filamento micélico que recibe el nombre de *promicelio*. El núcleo se divide en dos, por una cariocinesis reductora primero, y luego en cuatro, por una cariocinesis normal. Cada uno de los cuatro núcleos hijos con *n* cromosomas se transforman en el centro de cuatro células o *basidios*. Cada una de éstas emite a continuación un pequeño brote en el cual se introduce el núcleo. Así se forman cuatro *basidiosporas* que son externas con relación a sus basidios respectivos.

Las basidiosporas propagan la enfermedad del agracejo. Partiendo de esta consideración, los propietarios de trigales situados al borde de taludes de vías férreas en los que crece el agracejo han llevado más de una vez a las compañías ferroviarias ante los tribunales para obligarlas a suprimir ese *huésped*, considerado fatal propagador de la roya. En realidad, se ha demostrado que las basidiosporas pueden también germinar directamente en el trigo y que el agracejo es un huésped accesorio.

El ciclo evolutivo de la roya, prescindiendo de las ecidiosporas y las uredosporas especiales de este parásito, puede ser comparado con la *alternancia esporogametofítica* de un moho o de una peziza.

Gametofito o fase haploide



Esporofito o fase diploide

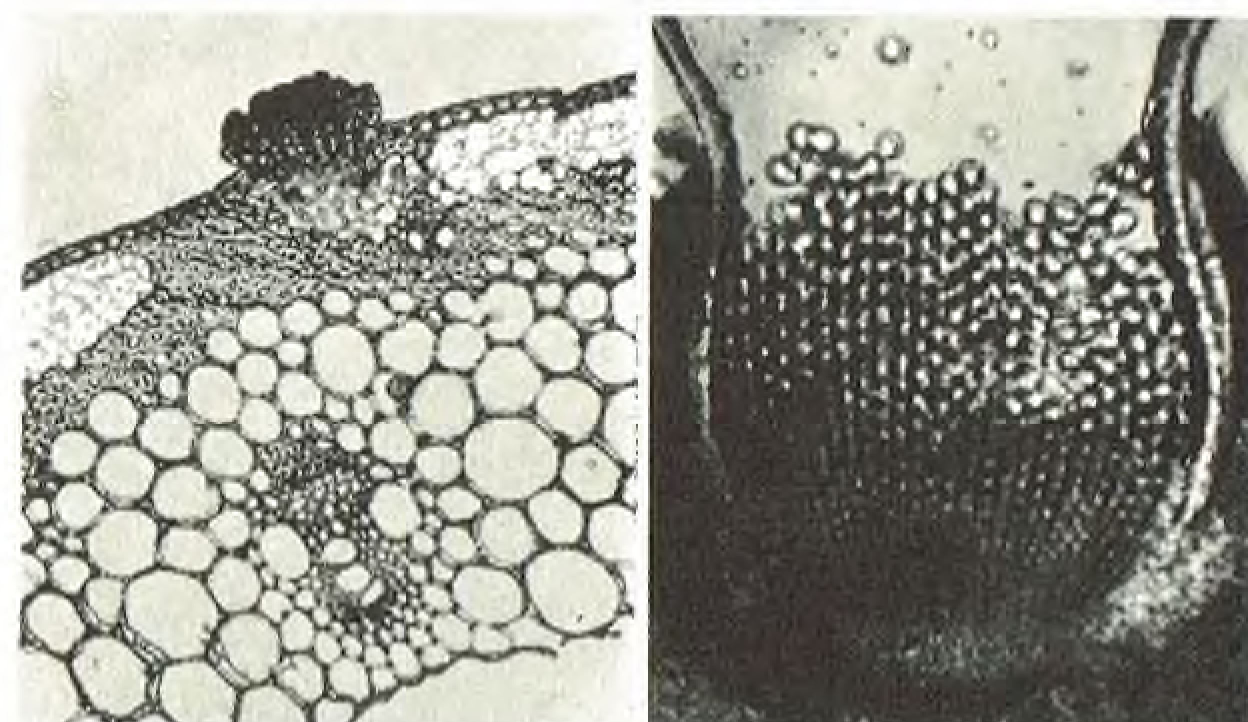
Carbón o tizón de los cereales. — Los cereales como el trigo, el centeno, la avena y el maíz están expuestos a otras dos enfermedades parasitarias debidas a hongos pertenecientes a los géneros *Ustilago* y *Tilletia*. El micelio invade toda la planta, pero no es visible hasta que invade y ennegrece los órganos reproductores (ovarios, estambres), a los cuales da además, en ciertas especies, un olor de pescado fresco. La reproducción es aquí un poco más sencilla que la de la roya, ya que sólo existe *un huésped*. La teleutospora o probasidio pasa el invierno en el suelo y germina durante la primavera siguiente en un *promicelio* que produce cuatro *basidios*, seguidos de cuatro *basidiosporas*. Las *basidiosporas* sólo tienen un núcleo de *n* cromosomas. En la roya, las basidiosporas dan nacimiento al micelio contenido en las hojas del agracejo. En el caso del carbón y del tizón, las basidiosporas se acoplan, por el contrario, de dos en dos, con lo que existe plasmogamia sin cariogamia. El huevo inacabado, de doble núcleo, que resulta de esta fecundación incompleta, germina directamente sobre el cereal en un micelio binuclear. En otros términos, el gametofito o fase de *n* cromosomas se reduce a la basidiospora. Volveremos a encontrar este curioso fenómeno en el hongo de mantillo.

Hongo de mantillo. — El *hongo de mantillo*, que se cultiva en antiguas canteras, existe también en estado silvestre después de las primeras lluvias de otoño. Este hongo era llamado antaño *agárico* y su nombre científico es el de *Psalliota campestris*. Sucesivamente pueden ser estudiados su aparato vegetativo o micelio y los órganos reproductores o sombreretes.


«Corro de brujas» formado por agáricos de primavera

El *micelio*, llamado aún *pie blanco*, es una masa de filamentos cuyas células son todas binucleares y se extiende en los campos en el interior del suelo en forma de anillo cada vez más amplio, al nivel del cual la hierba crece más que en otros sitios. De este anillo micélico nacen los sombreretes, únicas partes que emergen, y debido a su disposición circular la leyenda les ha dado el nombre de *corro de brujas*. El pie blanco se propaga por esquejes y en esta forma es como lo plantan los cultivadores de setas en las capas de estiércol.

Los órganos reproductores son los *sombreretes pediculados* que se venden en el comercio. Si se observa bajo el sombrerete o píleo, se ven numerosas *laminillas radiales*, cada una de las cuales está cubierta por


Corte de un tallo de gramínea atacado por la roya; 2. Ecidio que contiene las ecidiosporas *(Microfot. G. Druffaut)*

las dos caras de grandes células o *basidios* y de otras más finas y estériles llamadas *paráfisis*. El conjunto es una membrana reproductora, un *himenio*, comparable con el que tapiza el interior del peritecio de una peziza.

Examinemos un basidio con el microscopio. Como todas las células del hongo, el basidio posee primero un núcleo doble, cuyas dos partes (macho y hembra) no tardan en unirse. En ello reconocemos una *cariogamia* o fusión nuclear, pero, muy pronto, el núcleo de fusión sufre una doble cariocinesis, una de las cuales es reductora. Por último, hay cuatro núcleos hijos de *n* cromosomas, reduciéndose a esto la fase simple o *haploide* de esta clase de hongos. Inmediatamente después, el basidio emite, en efecto, en su parte superior, dos brotes en los que los núcleos se dan a pares, o sea una *plasmogamia*. Los brotes se transforman en *basidiosporas* binucleares, capaces de reproducir un nuevo micelio. Estas basidioesporas, que son de color rosa en el hongo de mantillo, pueden ser recogidas como un fino polvillo si se coloca durante unos días un hongo sobre una hoja de papel, en la cual se depositarán esos corpúsculos.

Comparado con el del carbón y el de la caries de los cereales, el ciclo evolutivo del *Psalliota campestris* presenta una reducción aún más acentuada del gametofito o fase haploide. En este caso no existe alternancia esporogametofítica propiamente dicha, sino solamente un esporofito cuyas células son todas binucleares.

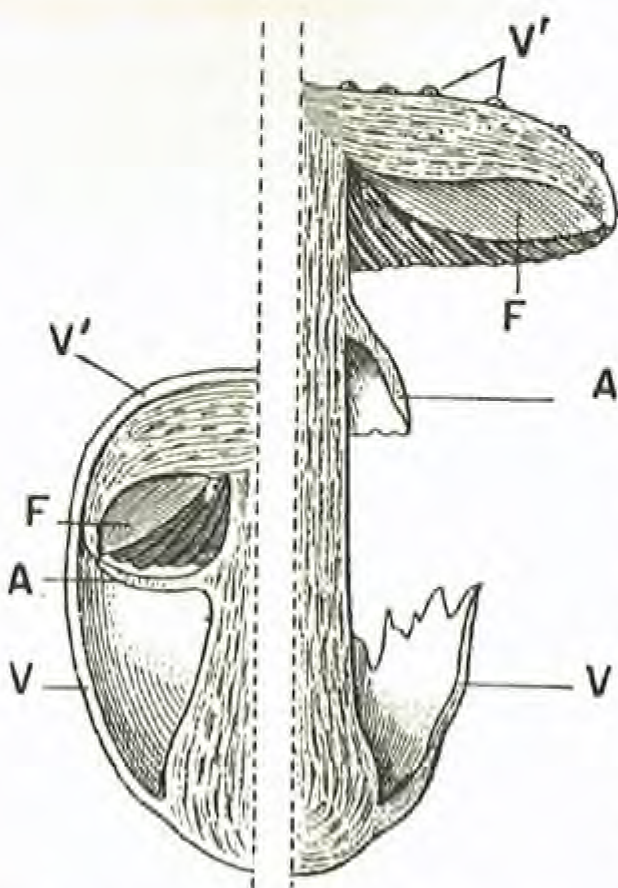


Políporo versicolor

Boleto o políporo. — Estos hongos, muy próximos del precedente en cuanto a su modo de reproducción, se diferencian por la ausencia de laminillas en la parte inferior del sombrerete. En vez de laminillas presentan innumerables *tubos* semejantes a los de un órgano. La pared que forman esos tubos corresponde al himenio y encierra los basidios.

El *boleto* o *seta (Boletus)* crece en la tierra de los bosques. Ciertas especies son comestibles *(Boletus edulis)* y otras venenosas *(Boletus luridus)*. El *polípero* u *hongo yesquero*, con el cual se fabrica la yesca, tiene un sombrerete sésil que se fija al tronco de los árboles y puede alcanzar grandes dimensiones.

Hongos comestibles. — Los principales son ascomicetos *(trufas* y *cagarrias)* y basidiomicetos *(hongos de mantillo* o *setas de prado, boletos* o *setas, agáricos* y *cantarelas*, etc.). La trufa es objeto de una recolección y comercio regulares en el sur y sudoeste de Francia. El hongo de estiércol o seta de prado se cultiva en las antiguas canteras subterráneas de los alrededores de París.



Estructura de un hongo nuevo (a la izquierda) y desarrollado (a la derecha): V, volva; V', sombrerete; A, velo; F, láminas

¿Es que el consumo de setas está justificado por su valor alimenticio? El análisis químico da un 90 % de agua. El resto está constituido por sales minerales (1%), celulosa (3%), glucógeno y azúcares (5%), materias grasas y proteicas (1%). Teniendo en cuenta esta composición media, se puede afirmar que las setas son un *alimento completo* e infinitamente más nutritivas que la mayor parte de las legumbres frescas.

Hongos venenosos. — Hay que combatir ciertos prejuicios. Se dice que para reconocer un hongo venenoso basta cocerlo en un recipiente de plata. Si la plata se ennegrece, el hongo es venenoso. Pero no es cierto, pues la plata puede ennegrecerse con cualquier hongo un poco descompuesto que desprenda ácido sulfhídrico. También se dice que si un hongo presenta mordeduras de babosa es bueno. Tampoco es cierto: un hongo venenoso para el hombre puede no serlo para los animales.

No existe receta alguna, ni procedimiento infalible, para saber si un hongo es comestible o venenoso. Si se desea comerlos sin peligro, es necesario aprender a conocer perfectamente los caracteres y las propiedades de las especies más comunes y abundantes de la región que se habita.

Pueden distinguirse cuatro categorías de hongos venenosos:

1° Hongos portadores de *hemolisina*. Esta substancia tiene la propiedad de destruir los glóbulos rojos de la sangre. No obstante, la hemolisina es destruida a su vez por el calor, y, por consiguiente, es poco peligrosa si los hongos se consumen guisados;

2° Hongos que llevan *ergotinina*, como el cornezuelo de centeno. Este alcaloide produce la contracción de las fibras musculares lisas y provoca convulsiones. Mezclado con la harina, el polvo del cornezuelo puede ser sumamente tóxico;

3° Hongos productores de *muscarina*, tales como la falsa oronja *(Amanita muscaria)*. Estos hongos provocan vómitos, diarreas, perturbaciones nerviosas con paralización cardiaca y síncopes. El envenenamiento, tratado a tiempo, no tiene, en general, consecuencias graves;

4° Hongos poseedores de *falina*, cuyo tipo es la *Amanita phalloides*, el más temible. La falina es un veneno violento que provoca la degeneración de las células del organismo (hígado, riñones, sistema nervioso). La muerte por este envenenamiento es casi fatal en el 90 ó 95 por 100 de los casos.

Los hongos provistos de falina son en suma los verdaderos hongos mortales. Hay que señalar que las amanitas, que son casi todas muy peligrosas y mortales —a excepción de la oronja verdadera *(Amanita caeserea)*—, poseen una *volva* en la base del pie y un collarcito o gorguera en lo alto del talo que son muy característicos. La volva o calceta es el resto de la membrana que envuelve completamente el hongo a su nacimiento y que se desgarra en el momento de abrirse el píleo. Lo mejor es abstenerse de comer cualquier hongo provisto de volva, pues si bien ello puede privarnos de algunas especies comestibles, nos preserva en cambio del peligro de un envenenamiento indefectiblemente mortal.

Clase de las algas

La tercera clase del tipo de las talofitas es el de las *algas*, que poseen clorofila y son siempre *autotrofas*. Igual que los vegetales superiores, las algas pueden vivir, gracias al CO_2 atmosférico y a las radiaciones solares, en un medio puramente mineral. Las algas contienen *almidón*.

Clasificación de las algas. — Estas plantas acuáticas son muy numerosas y diversas, y se encuentran en tierra y en el mar. A excepción de las zosteras y posidonias, las algas son casi los únicos vegetales marinos. El *talo* de estas plantas puede presentar todas las dimensiones, desde sólo unas micras hasta varios centenares de metros. Las algas son, con frecuencia, muy simples e incluso unicelulares, pero otras veces presentan una complejidad que las asemeja a los organismos superiores. En todo caso, carecen de verdaderos tejidos.

Las algas se dividen, según su pigmentación y su reproducción, en cuatro órdenes principales:

1° Orden de las *cianofíceas* o *algas azules*, que tienen además de clorofila un pigmento azul o *ficocianina*. Estas algas inferiores, próximas de las bacterias, se reproducen por simple división;

2° Orden de las *clorofíceas* o *algas verdes*, que poseen sólo clorofila y se reproducen por esporas o por óvulos, según las condiciones del ambiente;

3° Orden de las *feofíceas* o *algas pardas*, que contienen, añadido a la clorofila, un pigmento pardo, la *ficofeína*, y que se reproducen sólo por huevos o por una alternancia regular de óvulos y esporas;

4° Orden de las *rodofíceas* o *algas rojas*, coloreadas, además de por la clorofila, por la *ficoeritrina*. En estas algas, la regla es la alternancia esporogametofítica.

Orden de las cianofíceas

Las cianofíceas (del griego *kyaneos*, azul, y *phycos*, alga) son vulgarmente llamadas *algas azules* a causa de su coloración, debida a un pigmento soluble en el agua, la *ficocianina*, que se agrega a su poco abundante clorofila, la cual incluso puede faltar. Por esta razón, muchos botánicos colocan las cianofíceas entre las bacterias. Además, las cianofíceas, igual que las bacterias, poseen un núcleo *difuso* cuya cromatina se dispersa en el interior del protoplasma. Citaremos, sin describirlos, los géneros de los *Nostoc* y de las *Oscillatoria*.

Orden de las clorofíceas

Las *clorofíceas* (del griego *chloros*, verde, y *Phycos*, alga) son las *algas verdes*, cuya clorofila no se cubre con ningún otro pigmento y es mantenida en el interior de sus células por *cloroplastos*. Las clorofíceas son unas unicelulares y otras filamentosas. Los filamentos mismos pueden no estar tabicados o divididos en varias células por tabiques transversales. En las algas verdes, la reproducción se efectúa por esporas o por óvulos. El interés de las algas verdes radica, precisamente, en la variedad de sus modos de reproducción.

Estudiaremos primero un tipo unicelular, el *protococo*, y después tipos filamentosos: *vaucheria*, *oedegonia*, *mesocarpio* y *espirogira*.

Protococo. — El *protococo* forma ese polvo que vemos sobre el tronco de los árboles. El protococo es un alga unicelular, de un solo núcleo y un solo cloroplasto, que se reproduce por esporas que nacen en número de cuatro a ocho en el interior de ciertas células. En medio







CICLO DE REPRODUCCIÓN DE UNA FLOR LA AMAPOLA

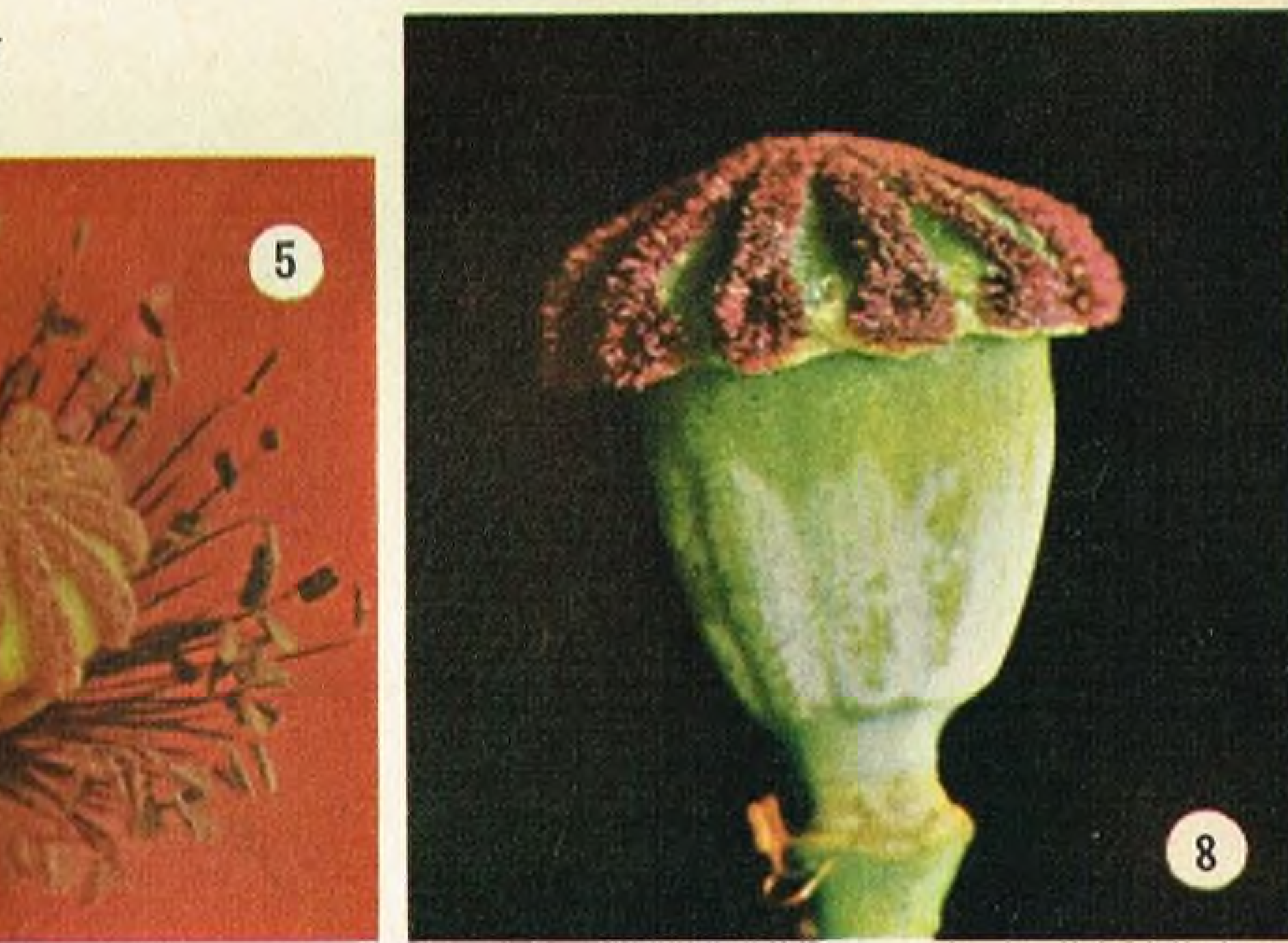
1. Campo de amapolas; 2. Capullo; 3. Corte de un capullo poco antes de abrirse, que muestra el principio del pistilo y los pétalos encerrados en el cáliz de pelos grandes; 4. Los dos sépalos que forman el cáliz aparecen casi expulsados por la flor; en seguida se desprenderán y la flor se desarrollará (como en la fig. 9); 5. En el centro de la flor abierta, los órganos de reproducción : el pistilo, órgano femenino, rodeado de los estambres u órganos masculinos (el polen se escapa de las antenas terminales de los estambres y se deposita sobre los estigmas, en la parte superior del pistilo); 6 y 8. Vistas de la parte superior y de perfil del pistilo fecundado, el cual persiste después de la caída de los estambres y pétalos; 7. Corte del pistilo en el que se ven los óvulos que se transformarán en semillas (el ovario se abrirá entonces y las semillas diseminadas germinarán en el suelo la primavera siguiente); 9. En esta fotografía pueden verse un capullo, una flor abierta y un pistilo que, después de la fecundación, ha quedado solo sobre su tallo

(Fot. R. H. Noailles)



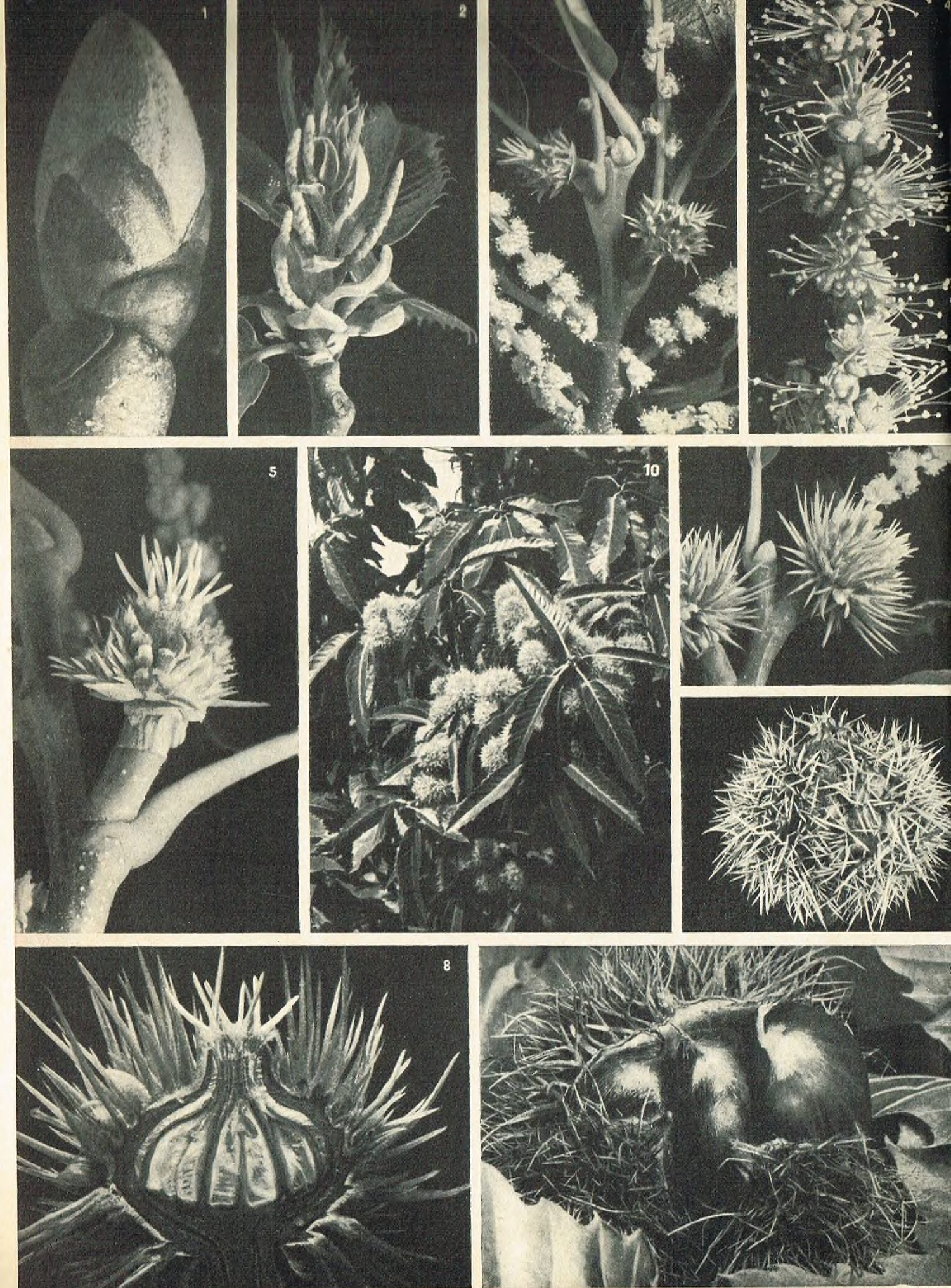












CICLO DEL CASTAÑO

1. Yema en el momento de abrirse en primavera; 2. De la yema abierta salen hojas, amentos masculinos e incluso flores femeninas, invisibles en la fotografía; 3. Ramo en flor; 4. Detalle de flores masculinas; 5. Detalle de flores femeninas; 6. Frutos en la primera fase (se distinguen tres grupos de pistilos); 7. Frutos maduros envueltos por una cubierta erizada; 8. Corte longitudinal de frutos en la primera fase; 9. Frutos maduros que han roto la cubierta erizada (pueden observarse los restos de los pistilos); 10. Rama de castaño cargada de frutos (castañas) [*Fot. R. H. Noailles*]

seco, las esporas son simples. En medio húmedo, por el contrario, son *zoosporas* provistas de cilios vibrátiles. En ciertas condiciones, dos zoosporas desempeñan el papel de gametos y se acoplan para dar un óvulo que pasa al estado de vida latente.

Vecinas del protococo son: 1º las *zooclorelas*, que viven en las células de ciertos animales como la hidra verde; 2º las *mónadas* o algas ciliadas, que constituyen la transición entre los animales y los vegetales.

Vaucheria. — Este alga toma su nombre del botánico Vaucher y se la encuentra en agua dulce o en las tierras arcillosas húmedas. El talo de la *vaucheria* es formado de filamentos ramificados, pero sin tabiques, a los cuales se da el nombre de *hifas*. Desde este punto de vista existe una gran analogía entre la vaucheria y el moho blanco. Sin embargo, los filamentos del alga contienen, además de un gran número de núcleos, *cloroplastos* que contienen la clorofila y que naturalmente faltan en el hongo.

La vaucheria se reproduce de dos modos:

1º Cuando las condiciones de vida son favorables, se ve que ciertos filamentos se hinchan en su extremidad y forman un *esporangio* delimitado por un tabique. El contenido de estos filamentos se retracta y escapa por destrucción del esporangio, que es una bola rodeada de un gran número de cilios vibrátiles dispuestos por parejas frente a otros tantos núcleos. En el centro de esa *zoospora* están reunidos los cloroplastos. Después de un cierto recorrido en el agua o en tierra húmeda, la zoospora se detiene, se fija y, al alargarse, produce un nuevo filamento de alga;

2º Cuando las condiciones son desfavorables, interviene la reproducción sexual. Sobre un filamento aparecen dos clases de órganos delimitados por tabiques basilares; unos son redondos y voluminosos, es decir, *oogonios* que contienen las *oosferas* o gametos hembras; otros, más pequeños y en forma de cuerno, son *anteridios* que contienen un gran número de *anterozoides* o gametos machos, provistos de dos cilios vibrátiles. El oogonio tiene un pequeño pico cuya pared se agrieta, mientras que, por su parte, el extremo superior del anteridio se disuelve en el agua y los anterozoides quedan en libertad. Uno de estos anterozoides penetra en el oogonio y fecunda la oosfera. En este caso, el óvulo es el resultado de una *fecundación heterógama*.

Reproducción de la vaucheria: A, liberación de la zoospora; B, zoospora libre; C, zoospora fija; D, zoospora germinando; E, oogonio y anteridio

En el mar existen no pocas algas afines de la vaucheria. Una de las más interesantes es la *caulerpa*, cuyo talo, sin tabiques y simplemente sostenido interiormente por fibras celulósicas, puede alcanzar un metro de longitud y parece un tallo con hojas y raíces.

Oedogonia. — Los filamentos de este alga dulce están tabicados transversalmente y constituidos, en suma, por una hilera de células de un solo núcleo.

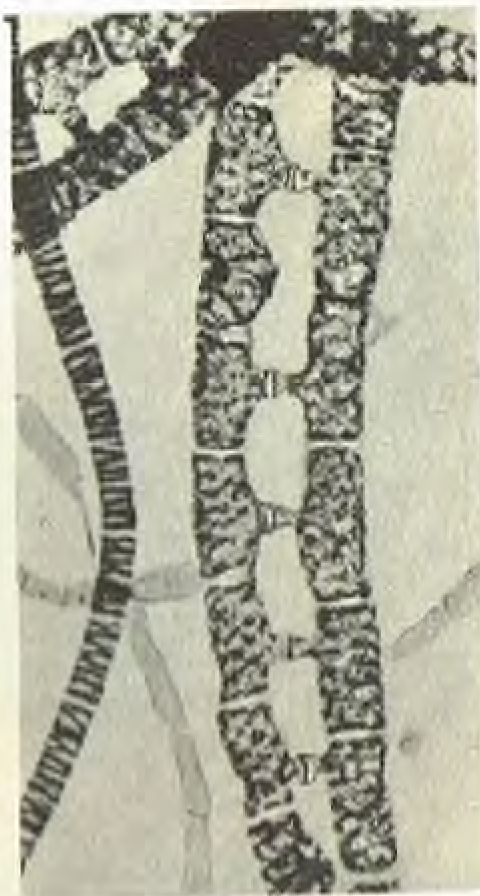
1º La reproducción sexual o *esporulación* se efectúa de la forma siguiente: en ciertas células de un filamento, en apariencia corrientes, el protoplasma se desprende de la pared y se contrae en forma de bola, sobre la cual se forma una corona de pestañas vibrátiles. A continuación, la *zoospora* así formada escapa por ruptura de la célula o esporangio que la contenía;

2º La reproducción sexual o *fecundación* es la primera que se ha observado en las algas. En el filamento en que están situadas, ciertas células se diferencian en *oogonios* y otras en *anteridios*. En los oogonios hinchados, el contenido se contrae y redondea para dar una *oosfera* o gameto hembra. En los anteridios se forma un *anterozoide* de corona ciliada muy parecida, aunque de menor tamaño, a las zoosporas precedentes. Después de la liberación de los anterozoides y el agrietamiento del pico del oogonio se produce la fecundación, que es abiertamente *heterógama*, como la de la vaucheria.

Mesocarpio. — Los filamentos del *mesocarpio*, alga de agua dulce, están tabicados, pero jamás ramificados. La reproducción es siempre sexual e *isógama*. Dos células pertenecientes a dos filamentos vecinos se envían mutuamente dos pequeñas prolongaciones mediante las cuales terminan por unirse y comunicar. Entonces, los dos contenidos celulares se dirigen uno hacia el otro y se unen aproximadamente en la mitad del puente intercelular. Ahí se constituye el óvulo, que se dilata y se rodea de una membrana. El nombre de *mesocarpio* viene de dos palabras griegas que significan fructificación media. Los gametos son, en efecto, idénticos, y efectúan el mismo trayecto para encontrarse.

Espirogira. — No es ese el caso de esta nueva alga que, además, es bastante semejante al mesocarpio. Aquí, el puente intercelular sirve de paso a un solo gameto móvil, que va a reunirse con el que permanece inmóvil. El gameto móvil es llamado *macho* y el inmóvil *hembra*. La fecundación es *heterógama*. Señalemos, también, que los gametos, como en el caso precedente, no pasan jamás al medio exterior. En las espirogiras no hay anterozoides libres como en las vaucherias o en las oedogonias.

La espirogira debe su nombre a la forma tan particular de su cloroplasto, semejante a una cinta enrollada contra la pared interna de las células, a la manera de un serpentín.



Espirogiras en conjugación: Fusión de dos células semejantes con germinación de las células y óvulo formado

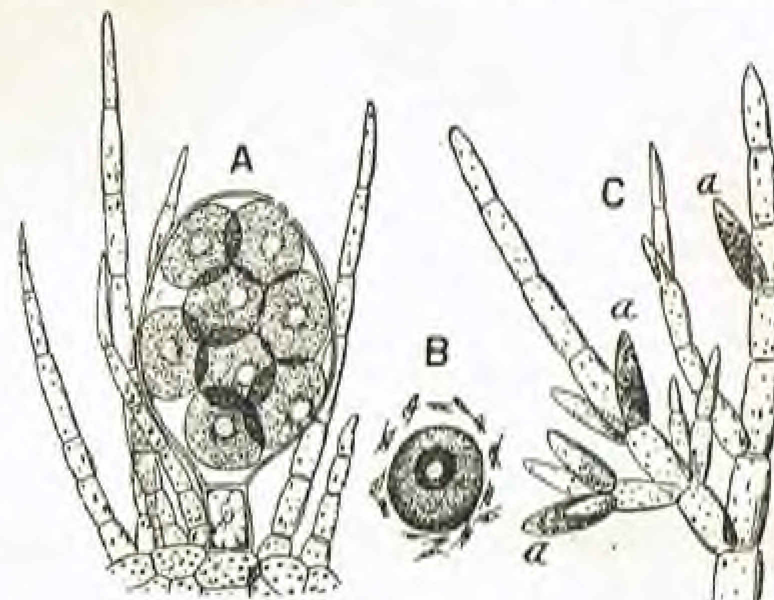
Orden de las feofíceas

Las *feofíceas* (del griego *phaios*, pardo, y *phycos*, alga) son las *algas pardas*, cuya clorofila está más o menos cubierta por un pigmento pardo soluble en el agua, llamado *ficofeína*. Así como este pigmento está disuelto en el jugo celular, la clorofila está contenida en los cloroplastos. El talo es un conjunto de filamentos siempre tabicados y ramificados, muy ligados entre sí, hasta el punto de constituir láminas u órganos macizos que pueden parecer raíces, tallos y hojas. Sin embargo, no hay tejidos diferenciados ni, con mayor motivo, vasos conductores de la savia.

La reproducción tiene lugar por esporas o por óvulos que a veces alternan regularmente.

Bajo el nombre de *diatomeas* es necesario considerar aparte ciertas algas pardas, microscópicas y unicelulares. Entre las demás, estudiaremos los *fucos* y las *laminarias*.

Diatomeas. — Las *diatomeas* viven en el agua dulce y en el mar, en el que forman una gran parte de los microorganismos flotantes, cuyo conjunto ha recibido el nombre de *plancton*. Su célula única posee un caparazón o *frústulo* silíceo que tiene la forma de una caja con tapa. Si tratamos las diatomeas con un ácido, observaremos que se disuelve todo su cuerpo, salvo el caparazón, cuya forma y ornamentación distinguiremos mejor. Hay millares de especies de diatomeas sumamente bellas y dignas de inspirar a los artistas. Después de su muerte, estas algas microscópicas caen al fondo del agua, en donde los caparazones acumulados originan los barros silícicos (barro de diatomeas de los mares fríos, trípoli lacustre o sílice pulverulenta, llamada *harina fósil*).

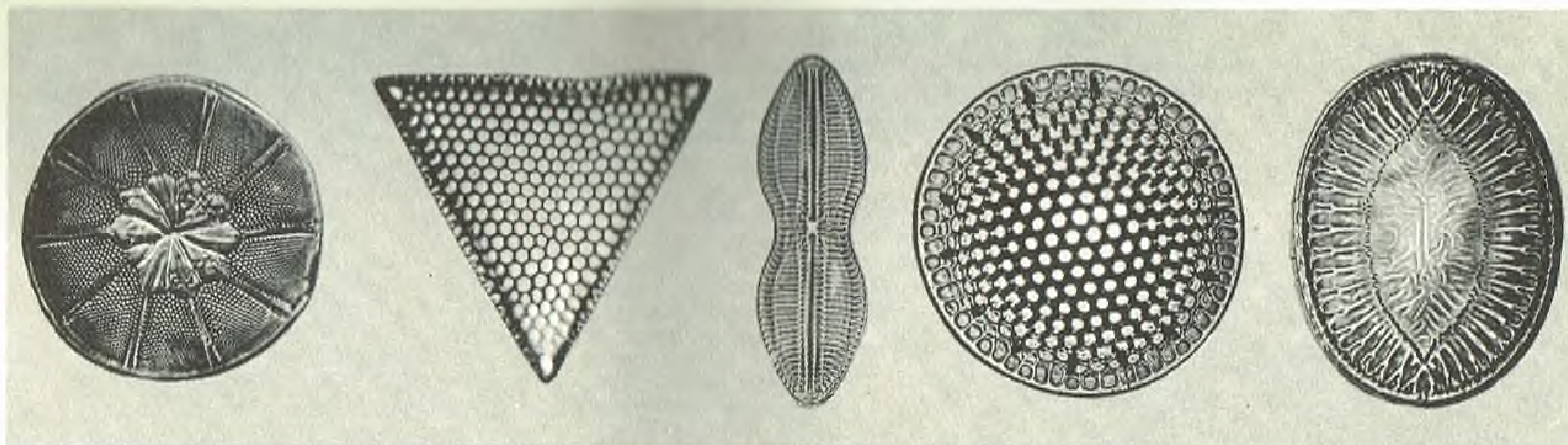


Reproducción del fuco: A, oosferas en su envoltorio; B, oosfera libre, rodeada de anterozoides; C, pelos con anteridios *a*

Las diatomeas se reproducen por *división* de su núcleo y de su protoplasma. Cada una de las células hijas se lleva la mitad del caparazón, la cual le sirve de tapa mientras reconstruye la nueva caja. Pero se comprueba que el tamaño de las diatomeas disminuye así de generación en generación, por lo que es necesario que de vez en cuando se produzca un retorno al tamaño inicial. Esto lo logra la *auxospora*. Una auxospora es todo el contenido de una diatomea que escapa de su caparazón y que se agranda antes de reconstituirse otra. Las auxosporas pueden también fusionarse y dar huevos por isogamia.

Fucos. — El *fuco*, también llamado *ova* o *varec*, abunda en las costas rocosas, donde cubre las rocas que la bajamar deja descubiertas cada día. Está formado de láminas de un amarillo verdoso, divididas por bifurcaciones sucesivas (dicotomía), y posee una especie de *nervadura* central con *flotadores* llenos de nitrógeno que le permiten mantenerse enhiesto en el agua. El fuco se fija a las rocas por medio de filamentos llamados *rizoides*.

Esta planta se reproduce únicamente por óvulos resultantes de una fecundación heterógama. Pero hay que distinguir, ante todo, las especies monoicas, *Fucus platycarpus*, de talo a la vez macho y hembra de



Diferentes clases de diatomeas marinas *(Microfot. C. Bille)*

las especies dioicas, como el *Fucus vesiculosus*, o sargazo vejigoso, cuyo talo es también macho y hembra, pero no al mismo tiempo. Monoico significa "de una sola morada", mientras que dioico quiere decir "de dos moradas", lo que en este caso significa "de dos talos".

Además, cualquiera que sea la especie de fucos considerada, los órganos reproductores son los mismos y se encuentran contenidos en el interior de *vejigas fértiles* que en primavera terminan las últimas ramas. En la superficie de la vejiga se muestran diminutas verrugas del tamaño de la cabeza de un alfiler, llamadas *conceptáculos*. Los hay machos y hembras, que contienen, unos, masas de *anteridios* machos entrelazados con pelos estériles, y otros, *oogonios*, macizos igualmente, mezclados con pelos estériles que los protegen. Por analogía con lo que ocurre con las algas verdes, podemos deducir que los anteridios producen gametos machos o *anterozoides* provistos de dos pestañas vibrátiles. Del mismo modo, los oogonios engendran ocho gametos hembras u oosferas redondeadas e inmóviles.

Conceptáculo del fuco (*Fot. Duval-Eymonnet*)

A su madurez, las oosferas y los anterozoides quedan en libertad y la fecundación tiene lugar en el agua del mar. Puede también observarse fácilmente *in vitro* mediante las siguientes operaciones:

a) Se recoge el contenido de los receptáculos machos y se mezcla en un cristal de reloj con un poco de agua de mar. El líquido así obtenido es de color anaranjado y contiene millares de anterozoides;

b) Se recoge de la misma forma, en otro cristal de reloj, el contenido de los receptáculos hembras. El segundo líquido obtenido es verdoso y contiene centenares de oosferas;

c) Se ponen en presencia una gota del primer líquido y otra del segundo y se observan al microscopio.

Entonces puede verse los anterozoides reunirse alrededor de las oosferas y girar muy deprisa: ésta es la que se llama "danza de los gametos". Después, un elemento macho privilegiado penetra en la oosfera y la fecunda. De esta acción resulta un *óvulo* que se rodea de una espesa cáscara protectora.

Laminarias. — Los fucos habitan la zona litoral que la marea baja deja descubierta dos veces al día. Un poco más profundamente, fuera de la zona de las mareas, existen otras algas pardas, las *laminarias*, que alcanzan varios metros de longitud. En los mares fríos, las algas pardas *(Macrocystis, Nereocystis)* tienen 100 ó 200 metros de desarrollo total. Estas plantas están sujetas al fondo y se alzan en el agua gracias a una serie de flotadores. No obstante, hay que señalar que algunas de estas algas, los *sargazos*, pueden también formar espesuras en pleno mar (mar de los Sargazos), sin fijarse jamás.

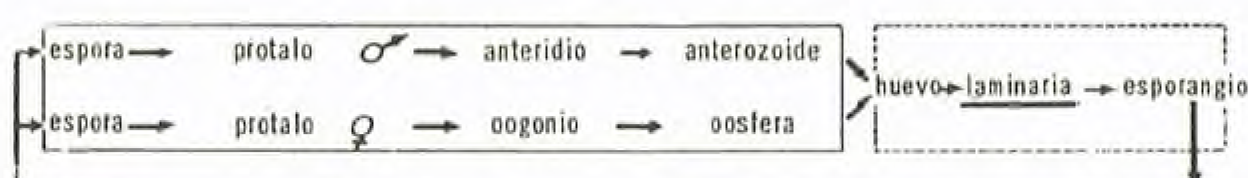
La reproducción de los sargazos es conocida desde hace relativamente pocos años y ofrece el curioso fenómeno de una *alternancia esporogametofítica con extrema reducción del gametofito*.

Sobre las láminas de las laminarias se forman en primavera manchas obscuras que son otros tantos grupos de *esporangios* machos mezclados de pelos estériles. Cada esporangio produce un gran número de *zoosporas* de dos cilios vibrátiles. Ahora bien, estas zoosporas, en lugar de volver a dar inmediatamente una nueva laminaria, dan unas un pequeño talo o *protalo macho*, y otras un *protalo hembra*. Cada protalo es microscópico y se reduce a varias células, de las cuales algunas son fértiles. Sobre los protalos machos aparecen *anteridios* que producen un solo *anterozoide;* sobre los protalos hembras se constituye un solo *oogonio* con una sola *oosfera*. La fecundación heterógama engendra un *óvulo*, del que procederá ulteriormente una nueva laminaria.

El desarrollo completo se resume de la forma siguiente:

Gametofito o *fase haploide* (Células de *n* cromosomas)

Esporofito o *fase diploide* (células de 2 *n* cromosomas)



Como se ve, el esporofito supera infinitamente en tamaño al gametofito. El paso de uno a otro, de la fase diploide a la haploide, necesita, como de ordinario, una *reducción cromática*, que se cumple aquí en el momento de la formación de las esporas.

Orden de las rodofíceas

Las *rodofíceas* (del griego *rhodeos*, rosa, y *phycus*, alga) son también llamadas *florídeas* y *algas rojas*. Estas algas viven casi exclusivamente en el mar, hasta una profundidad de 200 metros, y su talo presenta los más diversos aspectos: filamentoso, laminar o macizo, y en las calíceas está impregnado frecuentemente de carbonato de calcio (CO_3Ca).

La reproducción de las rodofíceas da lugar a una *alternancia esporogametofítica* con predominio del *gametofito*.

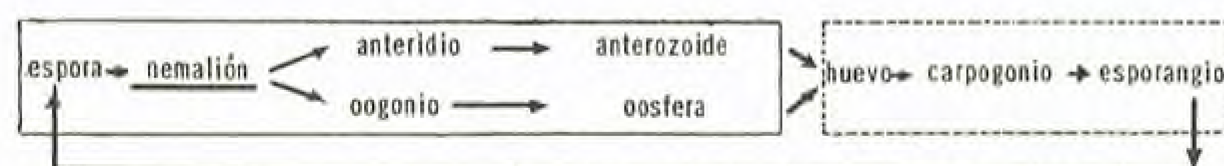
Nemalión. — El tipo de las algas rojas es el *nemalión*, así llamado (del griego *nema*, filamento) a causa de su forma filamentosa. Los órganos machos o *anteridios* están agrupados en ramos en las extremidades de ciertas ramificaciones y producen cada uno un solo *anterozoide*, que, desprovisto de todo órgano locomotor, se deja arrastrar pasivamente por el agua. Puede así llegar a un órgano femenino u *oogonio* que se encuentra en la extremidad de otra ramificación. El oogonio no es un órgano esférico como en las algas precedentes, sino una célula alargada en forma de botella, con *vientre* y *cuello*, llamado éste *tricógina*. En el interior de esta célula se encuentra una *oosfera* que, fecundada en el vientre mismo por un anterozoide, se convierte en zigoto.

Después de esta *fecundación heterógama*, la tricógina se marchita y desaparece. Al mismo tiempo, el huevo germina por toda su superficie y produce una especie de matorral filamentoso que no deja de tener una analogía, por su origen y modo de formación, con un peritecio de peziza. En este caso se le da el nombre de *carpogonio*. Las células externas de este aparato reproductor funcionan como *esporangios* y cada una produce una *espora* capaz de reproducir un nuevo nemalión.

Así, el desarrollo completo de este alga comprende las fases siguientes:

Gametofito o *fase haploide* (células de *n* cromosomas)

Esporofito o *fase diploide* (células de 2 *n* cromosomas)



Este desarrollo permite hacer las observaciones siguientes:

1º El gametofito, que es el nemalión, supera ampliamente por su tamaño al esporofito;

2º El esporofito o carpogonio se desarrolla y vive parasitariamente sobre el gametofito.

Debido a esos dos caracteres esenciales, las *algas rojas tienen parentesco con los musgos*, que estudiaremos más adelante. Por el contrario, se diferencian profundamente de las laminarias, en las que el microscópico es el gametofito.

Empleo de las algas. — 1º *Algas alimenticias.* Los pueblos de Oriente condimentan platos a base de algas. Las algas rojas, en particular, proporcionan la *gelosa* o *agar-agar*, que sirve para cuajar las confituras y las cremas. En bacteriología, los caldos gelosos concurren con los gelatinosos. Para el ganado, se ha preconizado el empleo de extractos de algas, en substitución de la avena;

2º *Algas industriales.* De las algas pardas (varec o fuco vejigoso y laminarias) se extraen el *yodo* y el *bromo*. La gelosa de las algas rojas se utiliza para el apresto de tejidos y papeles;

3º *Algas empleadas en la agricultura.* El varec se recoge en las costas bretonas (Francia) y se emplea como abono. Estas algas se utilizan asimismo para el abono de terrenos silíceos.

Clase de los líquenes

Caracteres generales. — Para terminar el estudio de las talofitas, nos quedan por decir unas palabras sobre los *líquenes*, que son asociaciones o *simbiosis* (del griego *sun*, juntos, y *bios*, vida) de algas y hongos.

Los líquenes tienen una resistencia especial y son los vegetales más rústicos. Estas criptógamas crecen en todas partes, incluso en las regiones polares, donde constituyen la sola alimentación vegetal de los indígenas y su ganado (renos). Los líquenes son las primeras plantas que aparecen, transportadas por el aire, sobre una tierra virgen. Los hay en el suelo, en las rocas, en los muros viejos, en los troncos, etc. Algunos líquenes se desarrollan sobre el cristal y destruyen, por ejemplo, vidrieras de las iglesias.

El talo de los líquenes puede ser foliáceo, ramificado, incrustado o gelatinoso, pero se compone en todo caso de dos partes:

1º las *hifas* o filamentos micélicos entrelazados del hongo, que es de ordinario un ascomiceto;

2º Los *gonidios* o células verdes del alga, generalmente vecinas de los protococos.

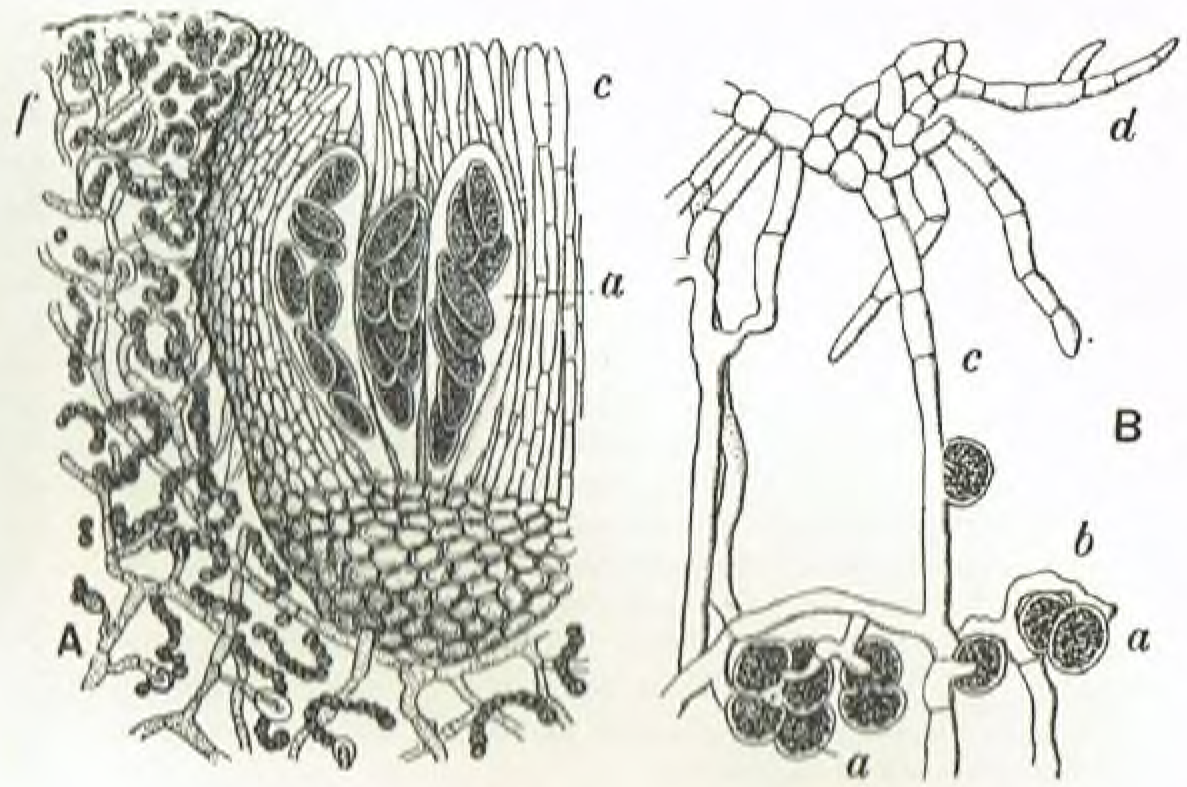
No hay ninguna relación de continuidad entre los filamentos y las células verdes. Éstas se hallan simplemente presas en la red micelial y abundan más en la cara superior expuesta a la luz que sobre la otra, generalmente falta de sol.

Reproducción de los líquenes. — Hay que distinguir la reproducción del alga, la del hongo y la de la asociación alga-hongo.

El alga verde se reproduce por división de sus células.

El hongo se reproduce por *peritecios* en forma de copas fijados por su cara convexa al talo y con la cóncava vuelta hacia el exterior, que reciben el nombre de *apotecios*. El *himenio* de estos peritecios está formado de *ascas* y de paráfisis. A continuación veremos en qué se convierten las *ascosporas*.

El líquen se reproduce en totalidad por esquejes o *soredios*, corpúsculos redondos y verdes, que forman una especie de depósito pulverulento en la superficie del talo. Estos soredios están constituidos por una red de filamentos enlazados con ciertos gonidios.



Organización de los líquenes: A. Sección de un líquen: *a*, asca y ascosporas; *c*, paráfisis; *f*, filamentos del hongo rodeados por las células de algas; B. Síntesis de un líquen: *a*, células del alga; *b*, filamentos prensiles; *c*, *d*, filamentos buscadores de los cultivos de Bonnier

Análisis y síntesis de los líquenes. — Desde 1866, varios botánicos han intentado hacer vivir separadamente las algas de los hongos de que se compone el líquen y reunirlos nuevamente después, lo cual equivale a un análisis seguido de una síntesis del líquen. G. Bonnier lo logró completamente en 1889, gracias a:

1º Un cultivo puro, en un medio puramente mineral, de *Protococcus viridis* recogidos en una estación del año en la que jamás crecen líquenes;

2º En un medio mineral y glucoso, obtención de un cultivo puro de hongo, a partir de ascosporas recogidas en un peritecio de líquen, después de verificar con el microscopio la pureza de esas esporas;

3º Siembra simultánea de un trozo de corteza de árbol, debidamente esterilizada, en el cultivo puro de alga y el cultivo puro de hongo.

En esas condiciones, se ve los filamentos micélicos dirigirse hacia las células de las algas, a las que rodean con sus ramificaciones, gracias a lo cual se reconstituye el líquen.

Antes de terminar, preguntémonos en qué puede ser útil la simbiosis a uno y otro de los asociados. El hongo protege el alga y retiene a su alrededor la humedad que le es necesaria. La función del hongo es mecánica y física. El alga, por su función clorofílica, elabora hidratos de carbono, de los que se alimenta el hongo: la acción del alga es química.

Tipo de las briofitas

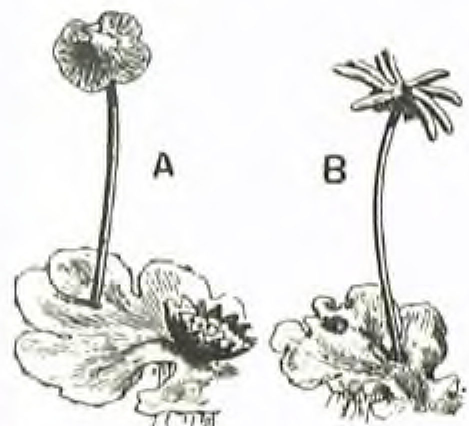
Clase de las hepáticas. — Clase de los musgos: Aparato vegetativo. Órganos machos. Órganos hembras. Órganos esporíferos. Alternancia de generaciones

Las *briofitas* (del griego *bryon*, musgo, y *phyton*, planta) son también llamadas *muscíneas* y constituyen el segundo tipo de las plantas celulares, es decir, no tienen verdaderos tejidos y les faltan, en particular, los vasos conductores de la savia.

Las briofitas poseen, sin embargo, una organización algo más elevada que la de las talofitas y su aparato vegetativo ofrece todos los grados de la evolución entre un *talo* tan rudimentario como el de las algas y los *tallos foliáceos* de las plantas superiores.

Desde el punto de vista de la nutrición, las briofitas son todas plantas con *clorofila* y, por consiguiente, *autotrofas*, cuya reproducción es una *alternancia esporogametofítica con predominio del gametofito*, como en las algas rojas.

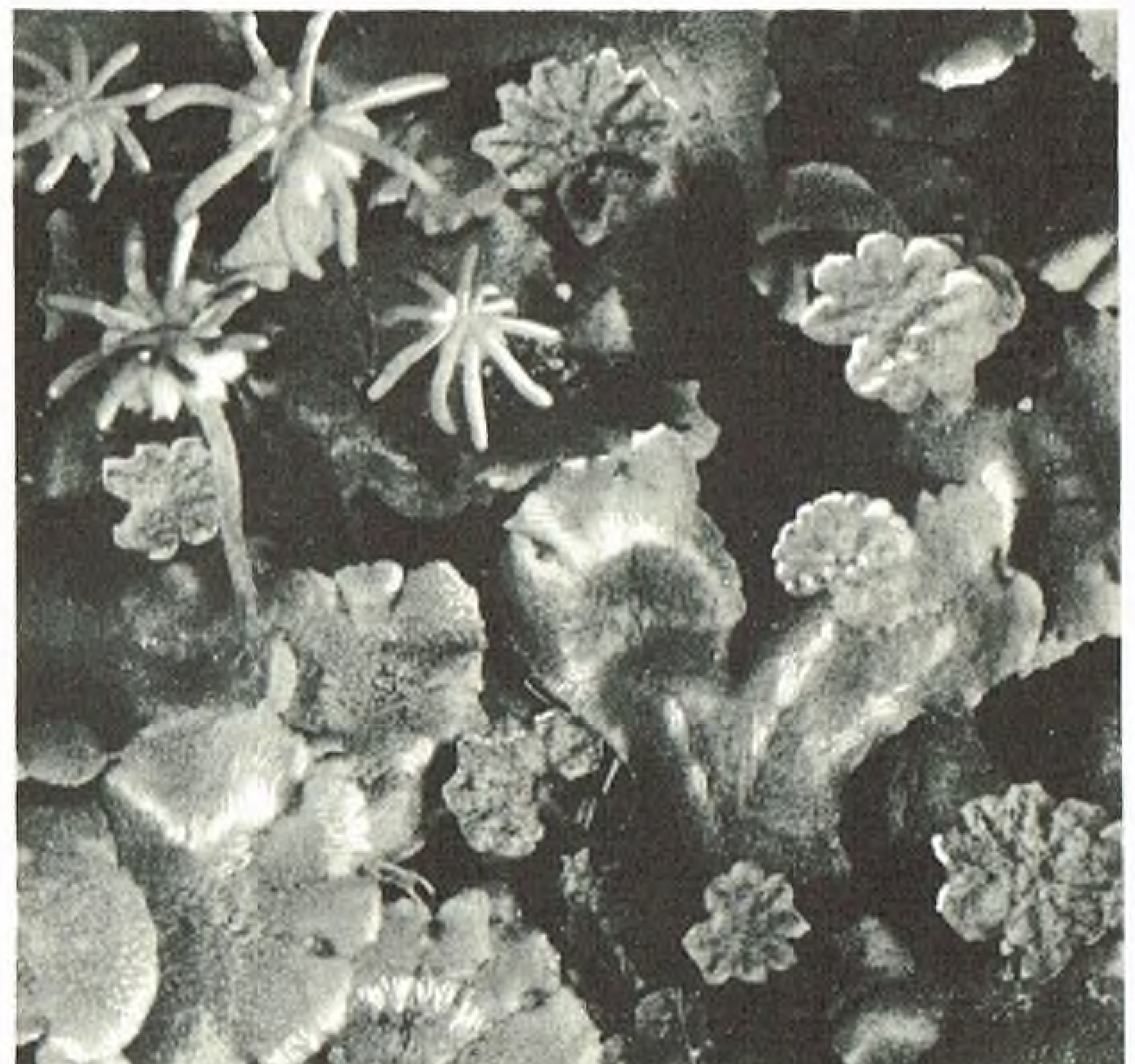
Las briofitas se dividen en dos clases (hepáticas y musgos) que, por otra parte, no son tan distintas entre sí como los hongos de las algas.



Marchantia: A, macho; B, hembra (Compárese con la fot. siguiente)

Clase de las hepáticas

Éstas son las briofitas inferiores, cuyo aparato vegetativo es un *talo* laminar, apenas más evolucionado que el de las algas pardas. En las *marchantias* ese aparato está constituido por una lámina verde ramificada por dicotomías sucesivas. Pero, examinando con el microscopio un corte vertical del talo, se ve que éste presenta una diferenciación notable: cada una de sus caras está cubierta por una capa de células o *epidermis* incolora. La epidermis inferior



Marchantia *(Fot. R. - H. Noailles)*

tiene *escamas* protectoras y *rizoides* o pelos absorbentes que penetran en el suelo. La epidermis superior cubre un conjunto de *cámaras respiratorias* romboidales, a las que da acceso por pequeños orificios. En el fondo de las cámaras respiratorias (comparables a las *estomas* de las plantas superiores) se encuentran frondosidades de células clorofílicas. Entre las dos epidermis se extiende un tejido flojo y lleno de agua.

Constituido así el talo de las marchantias se completa en el momento de la reproducción con órganos en forma de sombreros. Unos, los machos, tienen el borde lobulado y presentan en su cara superior *anteridios* que producen *anterozoides*. Otros, *hembras*, tienen un contorno profundamente recortado y presentan, en su cara inferior, *arquegonios*, cada uno de los cuales contiene una *oosfera*. La fecundación tiene lugar después de una lluvia, que permite a los anterozoides nadar hasta su encuentro con las oosferas. Más tarde, los *óvulos* se desarrollan en *esporogonios* que viven parasitariamente sobre los sombreros de las hembras. Finalmente, las *esporas* salidas de los esporogonios reproducen una nueva hepática.

Clase de los musgos

Los *musgos* son algo más elevados en organización que las hepáticas y su aparato vegetativo comprende una especie de *talo* sobre el que se erigen *tallos foliáceos* que sostienen a su vez los órganos reproductores. El propio esporogonio de los musgos es más complicado que el de las hepáticas.

Aparato vegetativo. — Adherido al suelo, a un muro viejo o a un tronco de árbol existe al principio un manojo de filamentos ramificados y divididos por tabiques, algunos de los cuales se hincan verticalmente y constituyen rizoides o pelos absorbentes. Esta parte del musgo es su *protonema* (del griego *protos*, primero, y *nema*, filamento), y se parece extraordinariamente al talo de un alga verde.

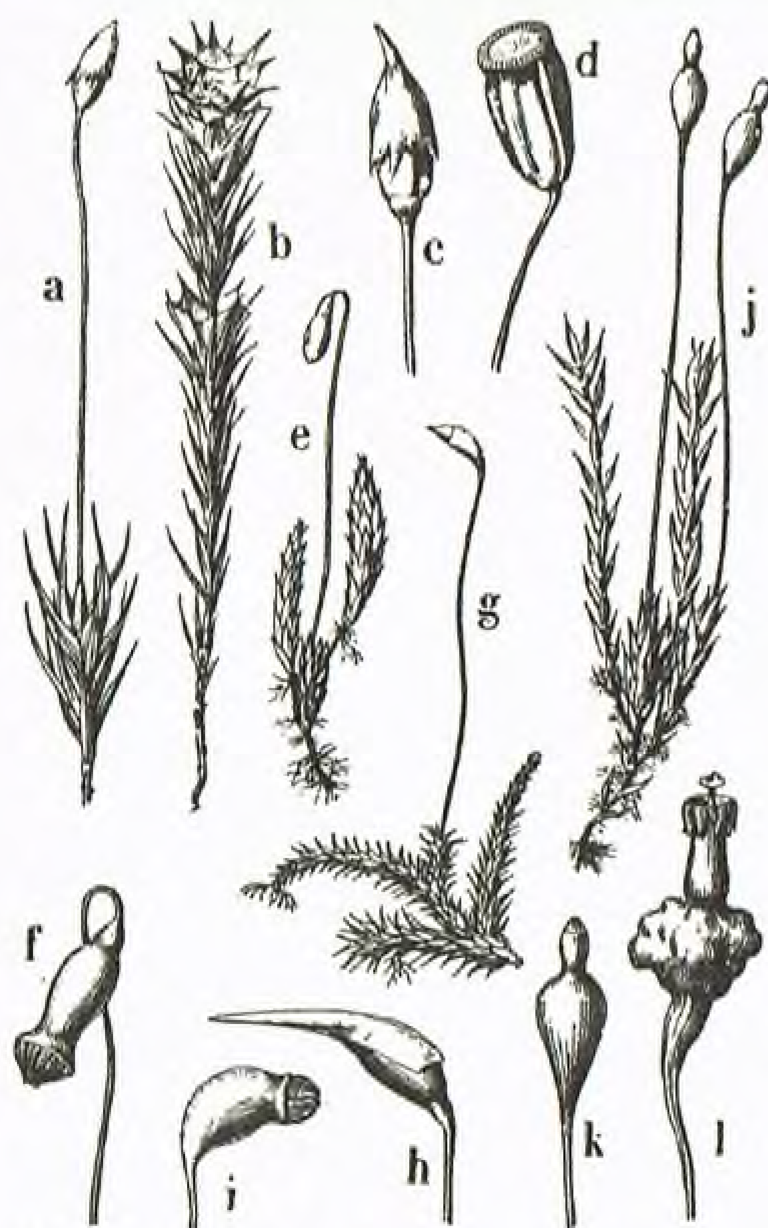
Sobre este protonema aparecen ulteriormente *tallos foliáceos*.

Los tallos son órganos cilíndricos que, examinados con el microscopio, se ven constituidos de una *corteza* y una *medula*. En la extremidad del tallo se encuentra una *célula inicial* tetraédrica que ha engendrado todo el órgano con sus divisiones sucesivas. Las *hojas* están compuestas de una sola capa de células, salvo en el eje, donde existe una especie de *nervadura* formada por un gran número de células muy pequeñas.



El *Barbula muralis*, musgo de las paredes, de las rocas, de los tejados; la cápsula subcilíndrica es sostenida por un pedicelo rojo *(Fot. R. - H. Noailles)*

Órganos machos. — En la parte extrema de ciertos tallos foliáceos se constituyen órganos machos o *anteridios* en forma de maza. La base es un pedículo formado de algunas hileras de células. El ápice es una masa redonda que comprende una pared y *anterozoides* o gametos machos en forma de pequeñas comas terminadas en su punta por dos largos cilios vibrátiles. Los anteridios maduros se abren en la parte superior y dejan escapar los anterozoides.



Varias especies de musgos (*a, b, e, g, j*): Cápsulas nuevas con su cofia (*c, h, k*): Cápsulas maduras que muestran su peristomo (*d, f, i, l*)

Órganos hembras. — Los mismos tallos foliáceos precedentes, u otros llevados o no por el protonema, forman en la cúspide órganos hembras o *arquegonios* en forma de botella. Los arquegonios recuerdan por su forma externa los oogonios de las algas rojas, pero son órganos mucho más complejos. La pared de estos órganos reproductores está formada de una o varias capas de células. En cuanto al cuello, se halla poblado por numerosas células especiales que luego degeneran en *tapón mucilaginoso* y pegajoso. En el fondo de la botella se encuentra una *oosfera* o gameto hembra.

Los anterozoides puestos en libertad llegan a las proximidades del arquegonio, atraídos por una substancia azucarada que se encuentra en el tapón mucilaginoso del cuello. Así es como se efectúa la fecundación.

Órganos esporíferos. — El *óvulo* se rodea de una membrana celulósica y luego se desarrolla inmediatamente en un nuevo órgano, el *esporogonio*, que vive parasitariamente en la punta del tallo foliáceo que le ha dado nacimiento.

El esporogonio es un órgano complicado, incluso más complicado, en ciertos aspectos, que el musgo del cual proviene. El esporogonio comprende una larga *seda* basilar y una *cápsula* superior vejigosa en la que se distingue con el microscopio: *a*) una epidermis externa; *b*) un tejido con abundantes lagunas; *c*) una capa de células destinadas a producir esporas; *d*) un eje o columela.

En la extremidad del esporogonio se encuentran embutidos unos en otros: *a*) una *caliptra* cónica que es el resto del arquegonio levantado por el desarrollo del esporogonio; *b*) un *opérculo* redondeado; *c*) un *peristomo* formado por una corona de dientes puntiagudos.

Las células madres de las esporas se dividen varias veces sucesivas para dar las *esporas* propiamente dichas, que nacen de cuatro en cuatro o, como también se dice, por *tétradas*.

Al llegar al estado de madurez, la caliptra y el opérculo caen y los dientes del peristomo se separan para dejar paso a las esporas. Éstas, al germinar, reproducen nuevos protonemas y nuevos musgos.

Alternancia de generaciones. — Los musgos se componen de dos generaciones sucesivas:

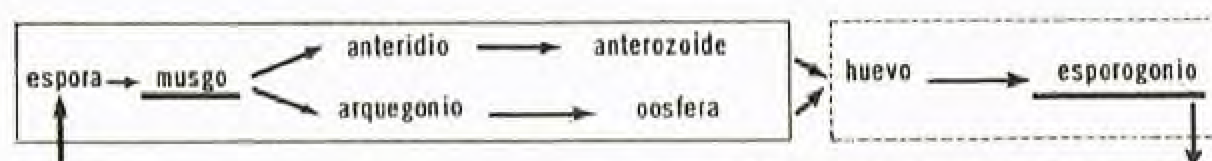
1º Una *generación sexual* o *gametofita*, que es el musgo propiamente dicho. Esta generación comienza en la espora y termina en los gametos. Todas esas células tienen un núcleo de *n* cromosomas. Gametofito es, pues, sinónimo de *fase haploide*;

2º Una *generación asexual* o *esporofita*, que aquí se llama *esporogonio*, pero que corresponde al peritecio de los ascomicetos, al sombrerito de los basidiomicetos, al carpogonio de las algas rojas, etc. Esta generación comienza en el óvulo y termina en las esporas. Todas esas células tienen un núcleo de 2 *n cromosomas*, lo que hace que esporofito sea sinónimo de *fase haploide*.

El paso de una a otra fase exige una *reducción cromática* y una *duplicación cromática*. La reducción se efectúa en el momento de la formación de las esporas por tétradas. De las dos cariocinesis necesarias para esta formación, la primera no implica división longitudinal de los cromosomas *(cariocinesis reductora)*. La segunda es normal. En cuanto a la duplicación cromática, ésta resulta de la unión de los gametos (fecundación).

En resumen:

Gametofito o fase haploide — *Esporofito o fase diploide*



Como en las algas rojas, el *gametofito predomina ampliamente sobre el esporofito*, y éste es parásito de aquél.

Plantas vasculares

Todos los vegetales estudiados hasta ahora pertenecen al subreino de las *plantas celulares*. Todo el organismo de estas plantas se compone de células poco diferenciadas unas de otras. La savia no es conducida a todas las partes de la planta por vasos identificables. Muy diferente es la condición de las *plantas vasculares*, que tienen *verdaderos órganos* (raíces, tallos, hojas) y *verdaderos tejidos*, entre los cuales figura en primer lugar un *tejido conductor* o *vascular*.

Las *plantas vasculares* constituyen el segundo subreino del reino vegetal y se dividen a su vez en dos tipos:

1° Las *pteridofitas* o *criptógamas vasculares*, que comprenden los helechos, las colas de caballo y los licopodios.

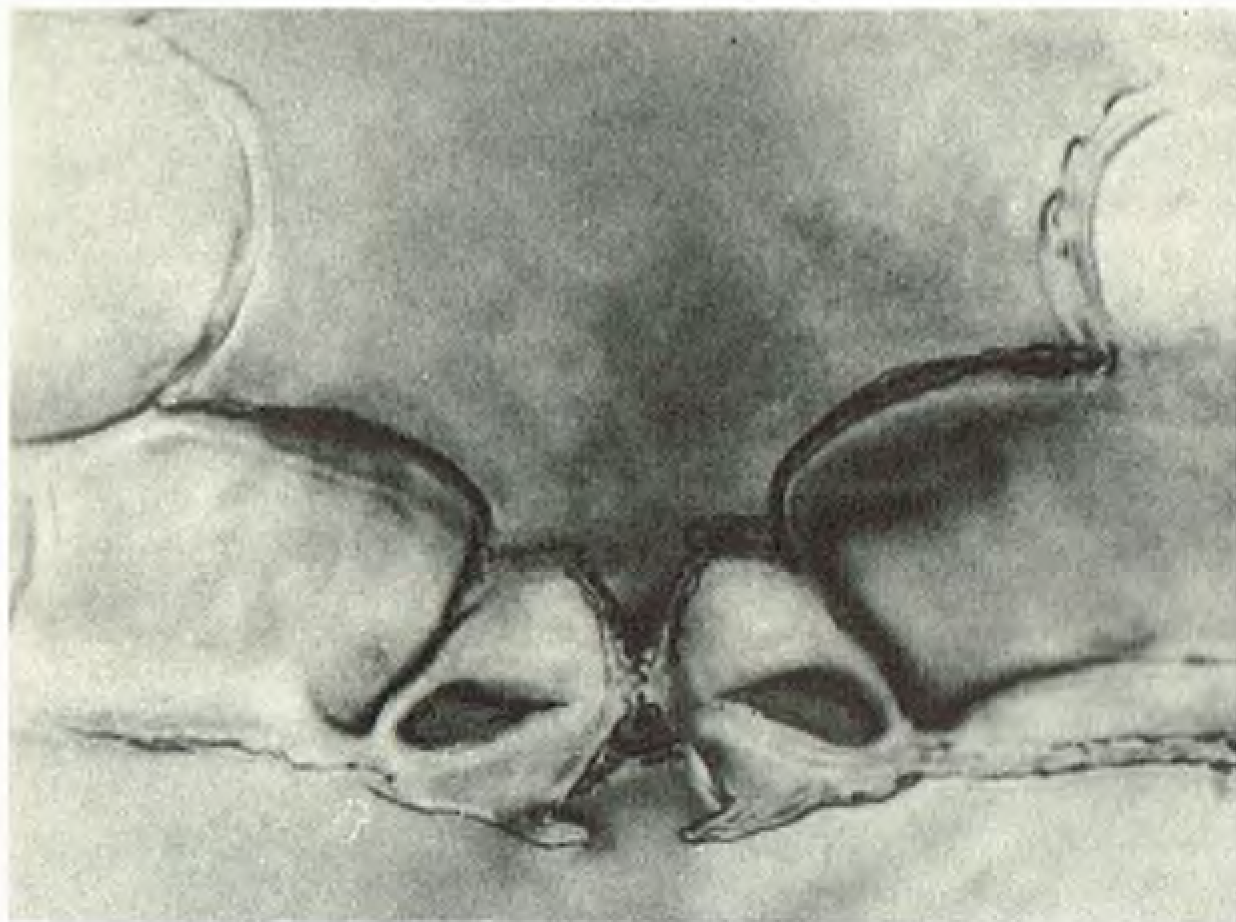
2° Las *espermatofitas* o *fanerógamas*, que comprenden las gimnospermas y las angiospermas.

Antes de entrar en el estudio de esos dos tipos, importa definir y describir los principales tejidos que los caracterizan.

Tejidos vegetales

Definición de los tejidos. Epidermis. Corcho o súber. Parénquima. Células secretorias. Epidermis y pelos secretorios. Células laticíferas. Redes laticíferas. Bolsas y canales secretorios: Bolsas secretorias. Canales secretorios. Tejidos de sostén: Colénquima. Esclerénquima. Fibras textiles. Madera: Vasos imperfectos. Vasos perfectos. Líber

Definición de los tejidos. — Una célula de planta celular es capaz de cumplir todas las funciones de su existencia. Por lo menos, teóricamente, esta célula no depende de ninguna otra y puede ser separada del conjunto sin daño apreciable. Un pedazo de micelio, por ejemplo, sigue viviendo y creciendo después de ser desprendido del hongo al cual pertenecía e incluso es capaz de reconstruir uno nuevo. Una sola célula del micelio posee la misma propiedad de regeneración. No es ése el caso de las plantas superiores, en que cada célula está diferenciada con vistas a una función determinada. Hay células de sostén, protectoras, respiratorias, etc. Del mismo modo que los obreros de una fábrica moderna, cada célula cumple una sola función, siempre la misma. Este fenómeno, que no es especial de los vegetales, recibe el nombre de *división del trabajo fisiológico* y tiene el inconveniente de la extrema dependencia que establece entre las células o sea: una categoría de células especializadas no puede morir sin acarrear la muerte de las demás y, recíprocamente, la muerte de las células no especializadas implica la de las especializadas.



Microfotografía de una sección de hoja que muestra un estoma y su cámara estomática (*Fot. Claire*)

Se llama tejido a un conjunto de células que tienen la misma forma, idéntica estructura e igual función.

El tejido fundamental es el *meristema* o tejido embrionario, cuyas células, muy vivas, poliédricas, cumplen a la vez todas las funciones. Este tejido se encuentra en el extremo superior de la raíz y del tallo en vías de crecimiento. De él derivan todos los demás tejidos por diferenciación y especialización, los cuales pueden ser clasificados como indica el siguiente cuadro:

Tejidos de protección	*Epidermis* (viva) *Corcho o súber* (muerto)
Tejido asimilador y de reserva	*Parénquima* (vivo)
Tejidos secretorios	*Células secretorias* (vivas) *Canales secretorios* (vivos)
Tejidos de sostén	*Colénquima* (vivo) *Esclerénquima* (muerto)
Tejidos conductores	*Madera* (muerta) *Líber* (vivo)

Epidermis. — Este tejido de protección se encuentra en la superficie del tallo nuevo y de las hojas y está formado de una sola capa de células aplanadas y desprovistas de clorofila. En términos zoológicos, podría decirse: epitelio simple.

La superficie externa está cubierta de *cutina*, substancia impermeable, de la naturaleza de las grasas, cuya fórmula es $C_6H_{10}O$. La cutina resulta de la transformación *(cutinización)* de la celulosa que forma la pared exterior de las células epidérmicas. En ciertas hojas (acebo y yedra) es muy espesa y puede ser separada perfectamente con la punta de un cortaplumas, en cuyo caso se dice que forma *cutícula* en la superficie de la hoja. A veces, la cutícula es reemplazada por *cera*. La epidermis puede estar también impregnada de *caliza* (CO_3Ca) o de *sílice* (SiO_2).

La epidermis está frecuentemente cubierta de *pelos* (hojas lanosas) o de *aguijones* (tallo del rosal). Los pelos pueden ser unicelulares o pluricelulares; de ellos veremos varios ejemplos al tratar de las células secretorias. El *algodón* está formado por los pelos que cubren los frutos del algodonero.

La epidermis no es sólo protectora, sino respiratoria. En efecto, la epidermis es una membrana con pequeños orificios, los *ostíolos* (del lat. *ostium*, puerta), que dan acceso a cavidades o *cámaras estomáticas* del tejido subyacente. Cada ostíolo está limitado por dos *células estomáticas* en forma de alubia que contienen clorofila. Éstas son las únicas células verdes de la epidermis. El conjunto de un ostíolo, de sus dos células colindantes y de una cámara estomática recibe el nombre de *estoma* (del griego *stoma*, boca). Al estudiar la hoja veremos que hay *estomas aeríferos* y *estomas acuíferos*.

Corcho o súber. — Ésta es una formación secundaria que aparece en las raíces y tallos viejos. La formación del corcho va acompañada de la caída de la epidermis.

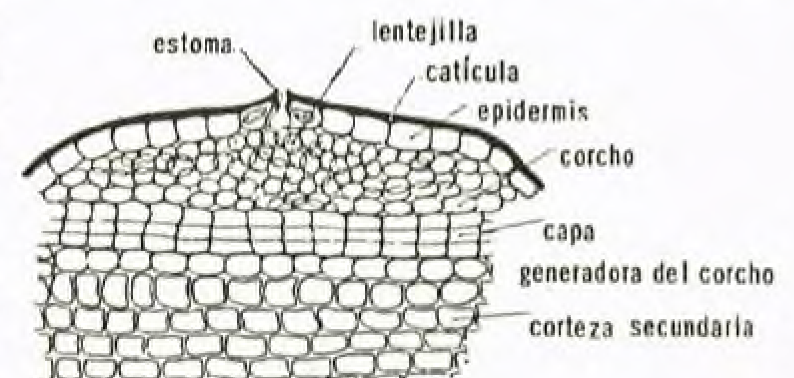
El corcho comprende varias capas de células muertas, aplanadas y dispuestas regularmente en filas radiales. El núcleo y el protoplasma de las células han desaparecido y son reemplazados por aire. Además, la pared de las células está impregnada de una substancia impermeable llamada *suberina*.

Igual que la cutina, a la cual se parece, la suberina proviene de una alteración de la celulosa *(suberificación)*.

El corcho es protector:

a) Contra la humedad;

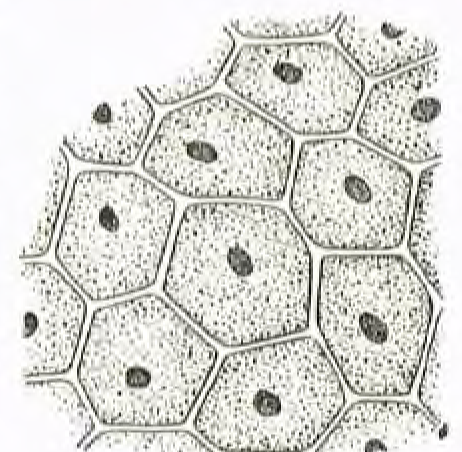
b) Contra las variaciones de la temperatura. En este aspecto, las células llenas de aire pueden compararse a los ladrillos huecos empleados en la construcción de edificios. El aire, por su mala conductibilidad, actúa como aislante contra el frío y el calor.



Funcionamiento de la capa generadora del corcho

Parénquima. — Este tejido, el más abundante de todos, es al mismo tiempo el menos diferente del tejido embrionario o meristema, y las células de que está formado son poliédricas, muy vivas, y tienen una pared de celulosa pura. Éstas contienen siempre mitocondrias, plastos y substancias de reserva. Además, los parénquimas expuestos a la luz encierran cloroplastos. En suma, hay *parénquimas incoloros* y *verdes*, éstos en el tallo y las hojas.

Las células parenquimatosas, primero apretadas unas contra otras, se separan cada vez más a medida que envejecen. Entre estas células se abren pequeños espacios intercelulares llamados *meatos*, y después *lagunas*, grandes espacios equivalentes al volumen de varias células. Las cámaras estomáticas, de las que se ha hablado ya a propósito de la epidermis, son lagunas que comunican con el exterior.



Parénquima

El parénquima tiene múltiples funciones:

a) Como todos los tejidos, es el centro de una respiración;
b) Acumula reservas;
c) Cuando es verde, se encarga de la función clorofílica.

Células secretorias. — Los tejidos secretorios son sumamente variados en los vegetales. A veces, el producto de secreción se acumula en el interior de las células, que son entonces *secretorias*, análogas a las células glandulares de los animales, y pueden ser clasificadas según su forma y su distribución en la planta.

Epidermis y pelos secretorios. — La esencia de rosa está contenida en las células epidérmicas de la superficie de los pétalos. En la ortiga, los *pelos urticantes* son largas células puntiagudas que encierran ácido fórmico, y de ahí la característica comezón producida por simple contacto cuando rompemos estas puntas. Los pelos de esencia de las hojas de lavanda, por ejemplo, son pluricelulares.

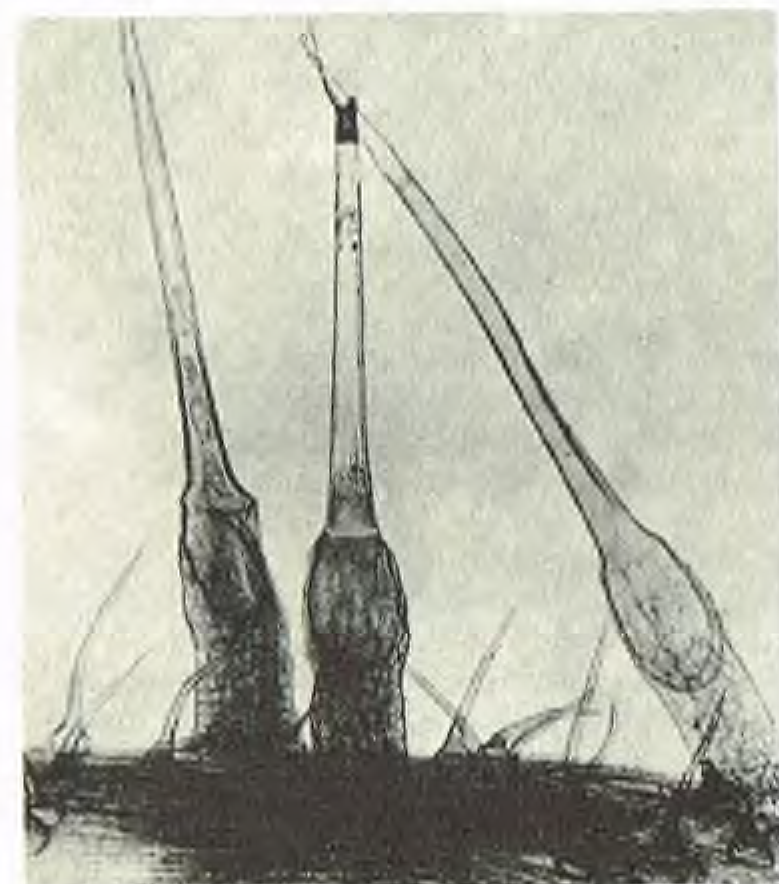
Células laticíferas. — El caucho producido por varios árboles y bejucos de países cálidos está contenido en grandes células muy alargadas y ramificadas llamadas *células laticíferas* (de *latex*, líquido lechoso, y *fero*, yo llevo). Se conocen laticíferas que, comprendidas sus ramificaciones, alcanzan kilómetros de longitud. Éstas se extienden desde las raíces hasta las hojas de los grandes árboles y son las mayores células conocidas.

El *látex* de las laticíferas es una emulsión o suspensión de pequeñas gotas y de corpúsculos extremamente tenues en los que se encuentran granos de almidón. El látex puede coagularse. Además del caucho, citaremos el látex blanco de los euforbios, el látex amarillo de la celidonia mayor, el látex de los morales, etc.

Redes laticíferas. — En ciertas plantas de la familia de las compuestas (diente de león) existen hileras de células secretorias dispuestas en forma de red. A veces desaparecen los tabiques transversales y la red toma el aspecto de una laticífera.

Bolsas y canales secretorios. — Algunas veces, el producto de secreción sale de las células que lo han engendrado y se acumula en espacios intercelulares que son, según el caso, bolsas o canales.

Bolsas secretorias. — El origen de una bolsa es una célula secretoria, que se divide en 2, 4, 8, 16 células y así sucesivamente. Las células engendradas se apartan en el centro de la bolsa y delimitan un meato y luego una laguna en la que se acumula el producto de la secreción. Éste es el caso de la esencia de naranja y de limón. Cuando se examina una piel de naranja por transparencia se ven unos puntos claros que no son otra cosa que las bolsas secretorias de este fruto. Una simple presión con los dedos hace estallar las bolsas que contienen la esencia, saturada de ácido cítrico.



Microfotografía de pelos de ortiga (*Fot. Duval-Eymonnet*)

Canales secretorios. — Supongamos que varias células secretorias, dispuestas en fila, se portan como precedentemente: en lugar de una cavidad esférica se produciría una cavidad cilíndrica, es decir, lo que ocurre precisamente con las umbelíferas (zanahoria, cicuta, angélica), con un gran número de compuestas (manzanilla y ajenjo) y con las coníferas (pino y abeto), plantas en que los canales tienen una doble pared y contienen resina.

Tejidos de sostén. — Estos tejidos, que constituyen el esqueleto de las plantas, sólo se encuentran en los órganos que necesitan ser sostenidos. Dichos tejidos existen en el tallo, pero no en la raíz, y hay que distinguir entre ellos el colénquima y el esclerénquima.

Colénquima. — Las células que lo componen se alargan en forma de huso cuyas fibras pueden alcanzar de 10 a 15 milímetros de longitud. La pared de estos filamentos es extremadamente espesa, formada de celulosa pura y la cavidad, de la que generalmente han desaparecido el protoplasma y el núcleo, está reducida casi a la nada. Se encuentra tejido colénquima en los tallos de las labiadas y en las venas de los tallos de las umbelíferas.

Esclerénquima. — Este tejido de sostén difiere del precedente porque sus células tienen paredes de *lignina* (madera). La lignina es una substancia dura, quebradiza, derivada de la celulosa (lignificación), y su fórmula es $C_{19}H_{24}O_{10}$. Lo que quiere decir que sólo puede existir en los órganos cuyo crecimiento ha terminado. Además, la lignina ahoga el contenido celular, que desaparece. En lugar del protoplasma y del núcleo subsiste un líquido que comunica con el de las células vecinas por numerosos *canalículos*.

Las células esclerenquimosas son generalmente alargadas en forma de fibra, pero pueden también ser esféricas. Estas células constituyen las *espinas* de ciertas plantas, las *cáscaras* y los *huesos* de los frutos, las "piedras" incluidas en las peras, las *vainas* rígidas de las nervaduras, etc.

Fibras textiles. — Hay que considerar aparte las fibras del lino, del cáñamo, del ramio, del esparto, etc. Estas fibras tienen varios centímetros de longitud, están agrupadas en haces en los tallos, y su pared, en vez de ser de lignita, está formada por una variedad de celulosa sumamente resistente. Dichas fibras son extraídas por *enriamiento* o fermentación, que destruye los tejidos intermediarios, sin por ello alterarlas. El copo es después transformado en hilo y luego en tejido.

Madera. — La madera o *tejido leñoso* es un tejido conductor de la *savia bruta* que sube desde las raíces hasta las hojas y sirve también, aunque secundariamente, de tejido de sostén. Éste es uno de los tejidos más abundantes en las raíces y en los tallos. En el interior de las hojas, la madera constituye una parte de las nervaduras. No obstante, hay que distinguir, como luego veremos, *madera primaria* y *madera secundaria*.

En todos los casos, la madera está constituida por *vasos leñosos* agrupados en *haces leñosos*.

Un vaso leñoso es una hilera de células *muertas* cuyos tabiques pueden o no haber desaparecido. Si éstos subsisten, el vaso es *imperfecto*, debido a que la savia encuentra obstáculos en su desplazamiento y debe franquear los tabiques por ósmosis. Si los tabiques han desaparecido, el vaso es *perfecto*.

Los vasos se mantienen abiertos, a pesar de la presión que soportan por parte de los demás tejidos, gracias a la lignificación parcial de sus paredes. La *lignina* es esa substancia dura ya señalada a propósito del esclerénquima. Según su modo de depósito, los vasos perfectos e imperfectos se dividen en varias categorías.

Vasos imperfectos. — 1° *Vasos anillados.* La lignina forma anillos dispuestos perpendicular u oblicuamente al eje. Éstos son los primeros vasos que aparecen en la raíz y en el tallo y son, en efecto, capaces de alargarse por separación de los anillos de la lignina;

2° *Vasos espirales.* Los anillos son reemplazados por una *espiral* de lignina. Estos vasos aparecen después de los anillados y son menos capaces de alargarse;

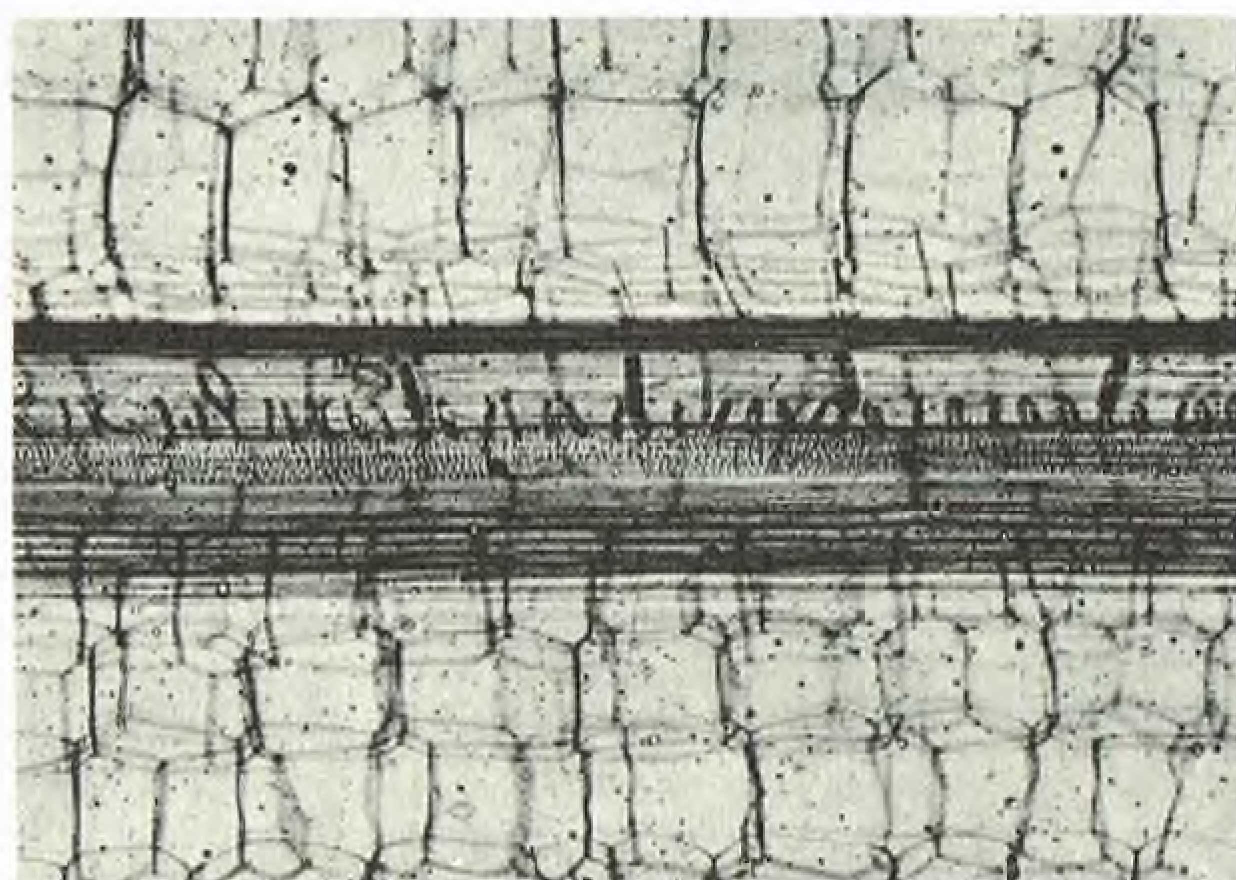
3° *Vasos areolados.* Casi toda la pared es leñosa, salvo ciertas partes circulares y de pequeño tamaño en las que subsiste la celulosa. Esas partes celulósicas están protegidas exterior e interiormente por un pequeño reborde de lignina en forma de tronco de cono. El conjunto constituye una *aréola*. Los vasos areolados son característicos de las gimnospermas (pinos, abetos, etc.);

4° *Vasos escalariformes.* Estos vasos sólo existen en los helechos, colas de caballo y licopodios, y se disitnguen de los precedentes por dos caracteres. Primero, por ser prismáticos en vez de cilíndricos, y segundo, porque la lignina dibuja sobre cada cara del prisma una especie de escala (en latín *scala*).

Vasos perfectos. — 1° *Vasos rayados.* La lignita dibuja bandas transversales irregulares;

2° *Vasos reticulados.* El espesamiento leñoso toma una disposición irregular con aspecto de red;

3° *Vasos puntuados.* Como en el caso de los vasos areolados, la lignina lo ha invadido todo, salvo ciertos lugares circulares, pero ahora sin reborde protector, llamados *puntuaciones*. Los vasos puntuados son los mayores de todos y alcanzan medio milímetro de diámetro en ciertas plantas trepadoras (vid, calabaza, etc.).



Vasos anillados del tallo de maíz (*Microfot. Bille*)

Líber. — El *líber* o *tejido liberiano* es un tejido conductor de la savia elaborada que, volviendo de las hojas, se dirige a los diversos órganos de la planta. El líber se encuentra en las raíces, en los tallos y en las nervaduras de las hojas. Sin detenernos por ahora en distinguir el *líber primario* del *secundario*, diremos que el líber está siempre constituido por *vasos liberianos (tubos cribosos)*, agrupados en *hacecillos liberianos*.

Un vaso liberiano es una sucesión de células alargadas que han permanecido vivas, con las membranas transversales generalmente oblicuas y perforadas, por donde circula lentamente la savia en sentido descendente. La savia ocupa el centro de las células y rechaza el núcleo y el protoplasma a la periferia. La pared de los tubos es de celulosa y su diámetro varía de 10 a 50 micras.

Tipo de las pteridofitas

Clase de las filicíneas: Raíz. Tallo. Hojas. Órganos esporíferos. Protalo. Órganos machos. Órganos hembras. Desarrollo del huevo. Comparación entre los helechos y los musgos. — **Clase de las equisetíneas:** Aparato vegetativo. Órganos reproductores. — **Clase de las licopodíneas:** Aparato vegetativo. Órganos reproductores. Comparación entre las selaginelas y los musgos

Las *pteridofitas* (del griego *pteridos*, helecho, y *phyton*, planta) son también llamadas *criptógamas vasculares*. Éstas, son, en efecto, criptógamas, puesto que no dan flores y que, por consiguiente, su reproducción es más o menos disimulada, como la de las briofitas y las talofitas. En este aspecto, las pteridofitas son opuestas a las fanerógamas o plantas superiores. No obstante son plantas vasculares, puesto que tienen *tejidos* y *vasos*. El aparato vegetativo de estas plantas comprende una *raíz*, un *tallo* y *hojas* y, como tienen *clorofila*, son *autotrofas*. La reproducción de las pteridofitas es una *alternancia esporogametofítica con predominio del esporofito.*

Las pteridofitas se dividen en tres clases: *filicíneas*, *equisetíneas* y *licopodíneas.*

Clase de las filicíneas

Las *filicíneas* o *helechos* tienen siempre *grandes hojas*, pero un aspecto muy diferente, según que su tallo sea subterráneo *(rizoma)* o aéreo *(estípite)*. En este caso, se dice que el helecho es arborescente. Su forma recuerda la de la palmera.

Los helechos abundan sobre todo en los países cálidos y húmedos. En las regiones templadas, esas filicíneas habitan en la maleza y algunas son acuáticas.

Raíz. — Este órgano subterráneo aparece aquí por primera vez en el reino vegetal. Un corte transversal de una raíz de helecho muestra, visto con el microscopio, los tejidos siguientes:

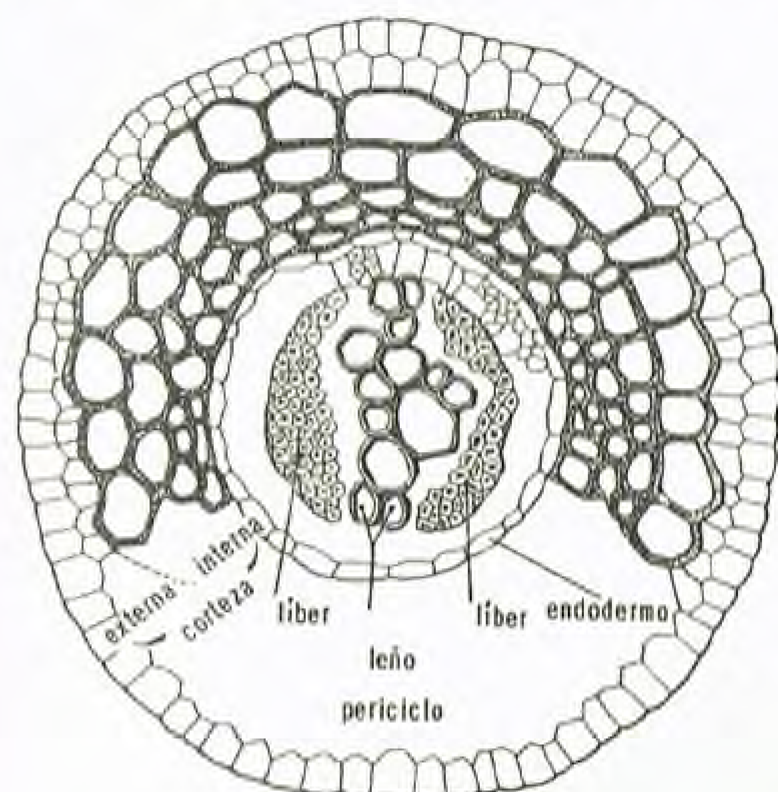
a) Una *corteza* cuyas células periféricas, hacia la punta de la raíz, se alargan en pelos absorbentes;

b) Un *endodermo* formado de una capa de células en un marco de suberina;

c) Un *periciclo* formado de una o varias capas de células;

d) Dos *hacecillos liberianos* o *fascículos* formados de tubos cribosos;

e) Dos *hacecillos leñosos* formados de vasos imperfectos y, sobre todo, *escalariformes*. Estos dos hacecillos se tocan en el centro de la raíz y separan uno de otro los hacecillos liberianos.



Estructura de la raíz del helecho

Conforme envejece la raíz, las células de la corteza se lignifican y se transforman en un *esclerénquima pardo* que aumenta la resistencia del órgano.

En la punta de la raíz se ve una *célula inicial tetraédrica* que, por su división en tabiques, ha engendrado todo el órgano. Las células producidas por su cara externa constituyen una cofia protectora.

Las ramificaciones o radicelas se forman a expensas del endodermo.

Tallo. — Bien sea subterráneo *(rizoma)* o aéreo *(estípite)*, visto con el microscopio en corte transversal, el tallo presenta la serie de tejidos siguiente:

a) Una *epidermis* con estomas;
b) Una *corteza* o parénquima cortical;
c) Un *endodermo* en un marco de suberina;
d) Un *periciclo;*
e) Un *anillo de líber;*
f) *Un hacecillo leñoso* que ocupa todo el centro del órgano.

El conjunto del periciclo, del anillo liberiano y del hacecillo leñoso constituye el *cilindro central* o *estela.*

En la base del tallo, la estructura es siempre la que acaba de describirse, pero a medida que la estela crece, se subdivide. La estructura *monostélica* de la base se transforma en *polistélica*. Cada una de las ramificaciones se compone del leño central y del líber periférico, rodeado éste a su vez por un periciclo y un endodermo. Las formas de uno y otro, vistas en sección, son más o menos irregulares.

A medida que el tallo envejece y exige una mayor resistencia, ciertas partes de su corteza se transforman en *esclerénquima pardo*, que se distingue a simple vista sobre los cortes transversales que, a veces, parecen letras groseramente dibujadas.

En el extremo superior del tallo existe una *célula inicial tetraédrica* que, por su división en tabiques, ha engendrado todo el órgano.

Hojas. — Éstas pueden ser simples (escolopendra) o recortadas (polipodio, helecho macho, culantrillo, etc.). Cuando estas hojas son nuevas están *circinadas* o enrolladas en forma de cayado. En un corte transversal se distinguen las partes siguientes de las hojas:

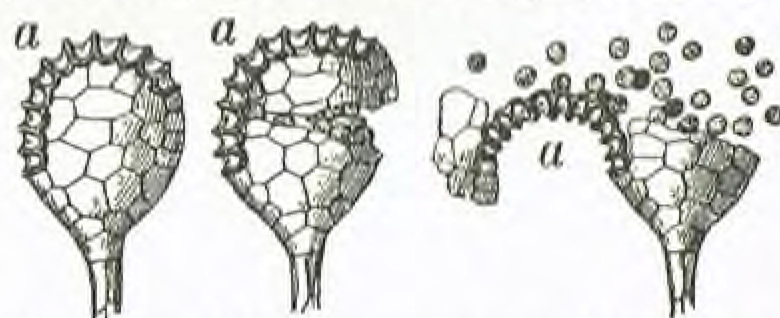
a) Una *epidermis superior* y otra *inferior*, ambas provistas de estomas, que contienen clorofila. Pero hay que señalar que este último carácter es muy raro en una epidermis y denota una existencia acuática o un medio muy húmedo. Además, la pared externa no está cutinizada: las hojas de los helechos resisten mal la desecación;

b) Un *parénquima* verde situado entre las dos epidermis;

c) *Nervaduras* que son la prolongación de las estelas del tallo, pero cuya estructura se simplifica cada vez más hasta terminar constituida por algunos vasos leñosos y liberianos.

Cada hoja crece gracias a una *célula inicial tetraédrica*, situada en su ápice.

Órganos esporíferos. — El helecho es un *esporofito*. En la época de su reproducción vemos, en efecto, aparecer *soros* o grupos de esporangios en la cara inferior de las hojas. A veces los esporangios están desnudos, pero otras están protegidos por una pequeña membrana o *indusio* que tiene la forma de un cestillo o de un paraguas.



Abertura del esporangis: *a*, hilada mecánica

Cada *esporangio* comprende un pedículo formado de varias células con una parte vejigosa, que viene a tener el tamaño de una cabeza de alfiler y que, examinada con el microscopio, presenta la composición siguiente:

a) Una *hilada* externa de células que, siguiendo un meridiano del esporangio, tienen sus paredes internas y laterales lignificadas (vistas en sección, tienen la forma de una U). Esta primera hilada se llama *mecánica*, porque va a servir para abrir el *esporangio;*

b) Una segunda hilada de células llamadas *nutricias* porque van a servir para la nutrición de las esporas;

c) En el centro, una aglomeración de *células fértiles* o *células madres de esporas*, en número de 16.

Examinemos el mismo esporangio un poco más desarrollado. Cada célula fértil ha producido cuatro esporas que forman una *tétrada*, por lo que en total hay *64 esporas*. La hilada nutricia ha desaparecido y sólo subsiste la mecánica, gracias a la cual, bajo el efecto de la desecación, no tarda en producirse la abertura o *dehiscencia* del esporangio.

He aquí cómo funciona esa hilada mecánica.

Por la sequedad del aire, cada célula arroja vapor de agua y disminuye de volumen. Las células que tienen sus paredes laterales e internas lignificadas sólo pueden encogerse por la cara externa, que permanece delgada y celulósica, lo que produce una tirantez sobre toda la cara externa del esporangio y un desgarramiento de la pared.

Las esporas, puestas en libertad, caen entonces.

Protalo. — La germinación de una espora no engendra un nuevo helecho, sino un *protalo*, pequeña lámina verde en forma de corazón, de algunos milímetros de longitud. Esta lámina vive unida al suelo y tiene una vida independiente gracias a su *clorofila* y a los *pelos absorbentes* o *rizoides* que parten de su cara inferior. Se podría creer que es un alga verde. Ahora bien, sobre esa plántula no tardan en aparecer órganos machos o anteridios y órganos hembras o arquegonios.

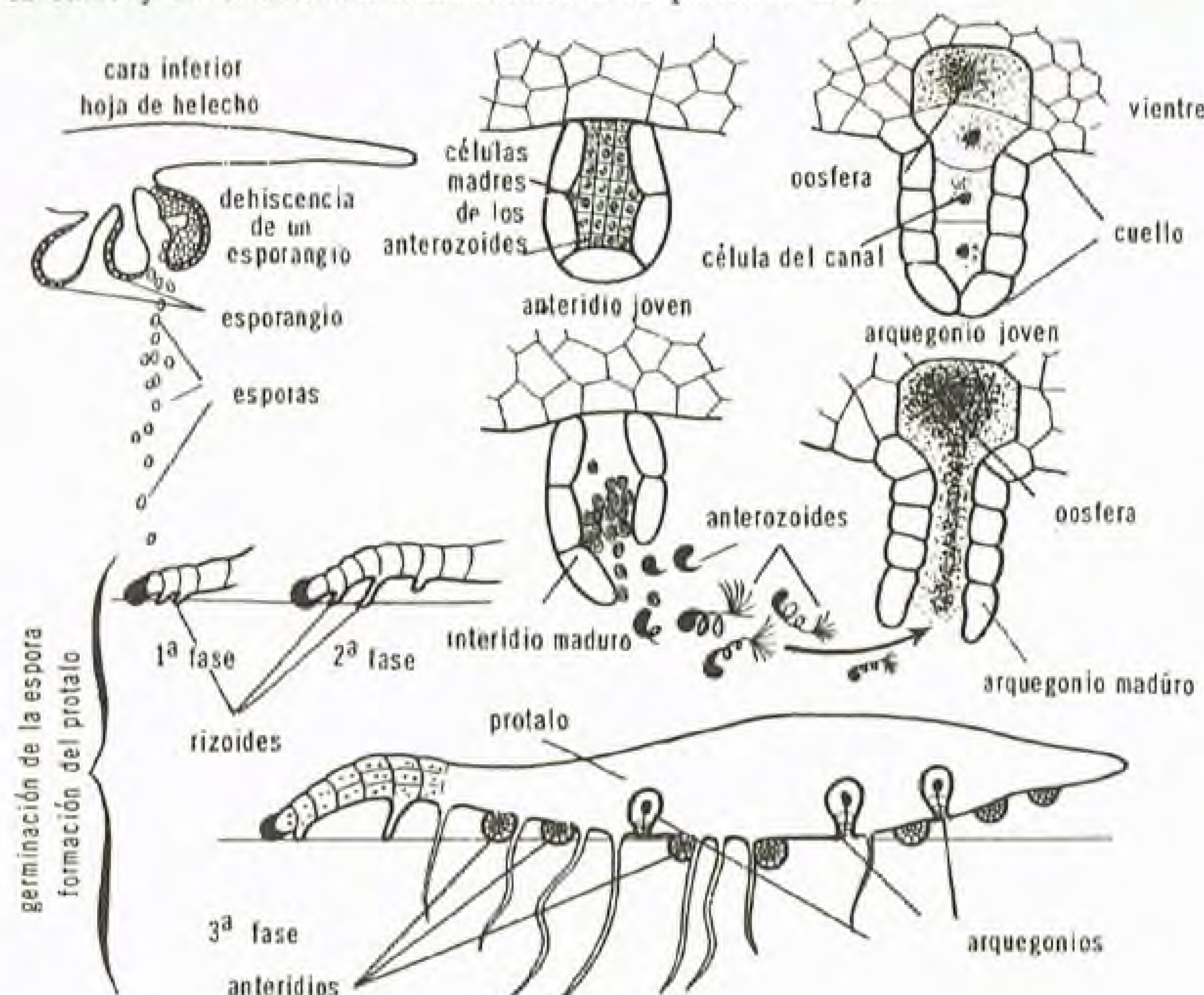
Órganos machos. — Los *anteridios* están situados en la cara inferior, cerca de la punta del protalo, entre los pelos absorbentes. Los anteridios son cajitas sin pedículo, cuya pared, formada de una sola capa de células, se abre a su madurez para dejar en libertad los anterozoides. La célula terminal es la que se levanta como una tapadera bajo la influencia de la humedad. Los *anterozoides* son células casi reducidas a su núcleo que están enrolladas en forma espiral. En la extremidad puntiaguda se encunetra una mata de cilios vibrátiles.

Órganos hembras. — Los *arquegonios* tienen, como los musgos, forma de botella, pero están incluidos en el protalo y sólo dejan sobresalir el cuello, obstruido por un *tapón* mucilaginoso y adherente. En el interior del arquegonio se encuentra la *oosfera* o gameto hembra.

Si tenemos en cuenta que los arquegonios están situados, como los anteridios, en la cara inferior del protalo (pero hacia su escotadura), comprendemos que basta a los anterozoides una sola gota de agua para poder nadar al encuentro del tapón adhesivo de esos órganos huecos. Por otra parte, el *ácido málico* contenido por ese tapón pegajoso ejerce un poder de atracción. Si en una gota de agua vertida en un cristal de reloj ponemos anterozoides de helecho podremos atraerlos y capturarlos todos como en un cepo al inmergir en el líquido el extremo de un tubo capilar, previamente llenado de ácido málico. Esta excelente experiencia pone de manifiesto la atracción química que interviene en la fecundación.

Naturalmente, la fecundación es, en ese caso, *heterógama*, ya que los gametos son muy diferentes uno de otro.

Desarrollo del óvulo. — El óvulo o zigoto, una vez constituido, se divide en dos y después en cuatro células, que continúan dividiéndose para constituir el embrión. Una de esas células forma el pie o chupador, que se hunde en el protalo y sirve para nutrir el embrión. La segunda célula forma la raíz; la tercera engendra el tallo y la cuarta da nacimiento a la primera hoja.

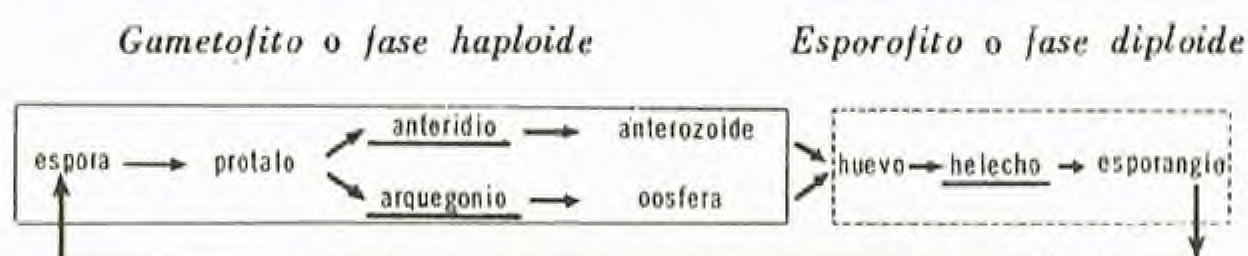


Reproducción de los helechos

Este embrión vive parasitariamente sobre el protalo hasta llegar a poseer clorofila y transformarse en autotrofo. Perfeccionándose, poco a poco, se convierte entonces en un nuevo helecho.

Comparación entre los helechos y los musgos. — La alternación esporogametofítica de los helechos se resume así:

Gametofito o fase haploide *Esporofito o fase diploide*



Si se compara esta alternación de generación con la de los musgos, vemos que aquí el *esporofito predomina sobre el gametofito* y no a la inversa. En otros términos: un helecho corresponde al esporogonio de un musgo y un musgo al protalo de un helecho. En los dos grupos de plantas, el *esporofito es parásito del gametofito.*

Añadamos a esto que la *reducción cromática* necesaria para el paso de la fase diploide a la haploide tiene lugar, como en los musgos, en el curso de la primera cariocinesis *(cariocinesis reductora)* que da nacimiento a las tétradas de las esporas.

Clase de las equisetíneas

Las *equisetíneas* (de *eqqus*, caballo, y *seta*, seda, crin) son llamadas vulgarmente *colas de caballo* a causa de su aspecto. Hoy éstas son plantas que apenas pasan de un metro de altura. En la era primaria, por el contrario, existían equisetíneas arborescentes *(calamitas).*

Aparato vegetativo. — Actuales o fósiles, las equisetíneas se reconocen por su tallo acanalado y sus pequeñas hojas dispuestas en forma de gorguera. Su única diferencia con los helechos reside en el tallo y las hojas.

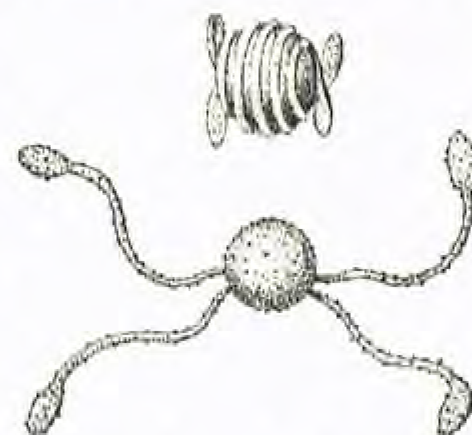
El tallo subterráneo o *rizoma* tiene *ramas aéreas*, cuyos entrenudos o *artículos* pueden destacarse fácilmente unos de otros y están ornados de *canaladuras* longitudinales. En los nudos pueden nacer ramos secundarios dispuestos en círculo que tienen la misma estructura que las ramas principales.

En un corte transversal se observa que cada saliente es sostenido por tejido *esclerénquima* y que bajo cada canaladura existe una *laguna* abierta en el parénquima cortical. En el centro del tallo existe otra laguna mayor. Se observa, además, un círculo de *hacecillos liberoleñosos*, cada uno de los cuales está compuesto de madera en el interior y de líber en el exterior.

Las hojas son pequeñas, puntiagudas y dispuestas en forma de gorguera o *verticilos* en los nudos de diversos ramos.

Órganos reproductores. — Ciertos ramos son fértiles y se terminan, en la época de la reproducción, por una *espiga esporífera.* Esta espiga está formada por los entrenudos terminales, que son muy cortos y cuyos verticilos foliáceos están estrechamente yuxtapuestos. Por compresión mutua, las hojas adquieren la forma de clavos de cabeza hexagonal. Desde el exterior sólo se ven las cabezas, dispuestas en forma de mosaico. Vistos en sección, sobre cada cabeza se ve un *escudo* o círculo de *esporangios* que contiene un gran número de esporas colocadas de cuatro en cuatro.

Llegada la madurez, los esporangios se abren por una hendidura longitudinal, los escudos se separan y las *esporas* quedan en libertad. Éstas tienen un aspecto muy especial. En efecto, la membrana de las esporas se compone de dos capas, una de las cuales, la externa, se divide en cuatro *lacinias* o *eláteres* en forma de cruz, que, según la atmósfera sea seca o húmeda, se extienden o se enrollan alrededor de la espora, lo que la hace caer y favorece su diseminación.



Espora de cola de caballo con lacinias enrolladas y extendidas

Todas las esporas tienen la misma forma y dimensión. Sin embargo, unas dan *protalos machos* y otras *protalos hembras*, por lo que fisiológicamente son distintas, si bien no lo son morfológicamente. Las colas de caballo son, por consiguiente, *heterosporadas.*

Los protalos son láminas verdes cortadas en tiras y semejantes a algas. Unos tienen *anteridios* y otros *arquegonios.* El resto de la reproducción no difiere de la de los helechos.

Clase de las licopodíneas

Las *licopodíneas* actuales son plantas bajas *(licopodios, isoetes, selaginelas,* etc.) que recuerdan vagamente las licopodíneas arborescentes *(Lepidodendron, Sigillaria)* del Carbonífero.

Aparato vegetativo. — Las licopodíneas tienen la propiedad de dividir su raíz y su tallo por dicotomías y sus hojas, pequeñas, están dispuestas a lo largo de sus ramos.

Las licopodíneas son netamente superiores a los helechos y a las colas de caballos, y por ciertos caracteres son vecinas de las gimnospermas:

1º Su raíz, en vez de tener una sola célula inicial tetraédrica, posee *tres células iniciales* superpuestas, una de las cuales, la superior, produce el cilindro central, la media la corteza, y la inferior la cubierta o caliptra;

2º En la raíz y en el tallo de las licopodíneas se encuentran fósiles arborescentes de *formaciones secundarias* (leño y líber secundarios) que se observan en todas las plantas superiores.

Órganos reproductores. — No es necesario estudiar los licopodios, cuya reproducción es esencialmente igual a la de los helechos. Por el contrario, las *selaginelas* son *heterosporadas* y poseen *espigas esporíferas* que van a conducirnos hacia los conos de las coníferas y las flores de las plantas superiores.

Una espiga esporífera de selaginela está formada de entrenudos cortos cuyas hojas se cubren en parte unas a otras. Las hojas de la base son estériles y recuerdan los sépalos y los pétalos de las flores. Las superiores, por el contrario, son fértiles y pueden equipararse con los estambres y los carpelos. Más adelante veremos que existe algo más que una simple analogía entre esos órganos.

Las hojas fértiles llevan, unas (las de la base), *macrosporangios* que contienen cuatro *macrosporas;* otras (las del ápice), *microsporangios* que contienen un gran número de *microsporas* agrupadas de cuatro en cuatro.

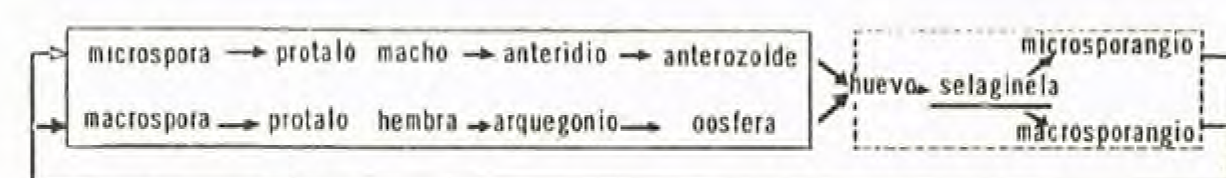
Las esporas evolucionan en protalos machos y hembras en el *interior mismo* de los esporangios respectivos.

Los *protalos machos* son microscópicos, reducidos casi a un *anteridio* que produce *anterozoides* de dos cilios vibrátiles.

Los *protalos hembras* son algo más voluminosos y comprenden una masa de células estériles en la cual existen *arquegonios.* Éstos no tienen cuello saliente y son, por consiguiente, más sencillos que los de los helechos. Cada uno de estos arquegonios contiene una *oosfera.*

La fecundación tiene lugar después de haber sido mojadas las espigas esporíferas por la lluvia. Una vez constituido, el zigoto se divide a continuación en dos células: la inferior da el *embrión* y la superior forma una especie de *suspensorio* que rechaza el embrión hacia la masa atestada de materias de reserva del protalo. De esta forma, la nueva planta puede vivir parasitariamente hasta que, adquirida la clorofila, puede desprenderse y vivir independientemente.

Comparación entre las selaginelas y los musgos. — El desarrollo completo de las selaginelas se expresa de la manera siguiente:



Igual que en los helechos, el *esporofito domina sobre el gametofito, del cual es parásito.*

La originalidad de las selaginelas reside en los hechos siguientes:

a) Reunión de los microsporangios y macrosporangios en una espiga esporífera;

b) Desdoblamiento del gametofito en protalo macho y hembra;

c) Reducción extrema de sus protalos;

d) Evolución de esos protalos en el interior de los esporangios.

Veremos acentuarse y precisarse estos caracteres en el tipo de las fanerógamas o espermatofitas.

Tipo de las espermatofitas

Subtipo de las gimnospermas: Aparato vegetativo. Reproducción del ginkgo. Cambio de nomenclatura. Reproducción del pino: Flores machos. Flores hembras. Fecundación. Desarrollo del óvulo. Diferencias entre el endospermo y el albumen. Resumen del ciclo evolutivo. Clasificación de las gimnospermas. — **Subtipo de las angiospermas:** Reproducción de las angiospermas. Clasificación de las angiospermas. **Principales familias de las angiospermas.** — **Clase de las monocotiledóneas:** Caracteres de las monocotiledóneas. Familia de las gramíneas. Familia de las palmáceas. Familia de las liliáceas: Tribu de las liliales. Tribu de los cólquicos. Tribu de las asparagíneas. Familia de las orquidáceas. — **Clase de las dicotiledóneas:** Caracteres de las dicotiledóneas. Familia de las cupulíferas: Tribu de las quercíneas. Tribu de las coriláceas. Tribu de las betuláceas. Usos. Familia de las ranunculáceas. Tribu de los ranúnculos. Tribu de las anemones. Tribu de los delfinios. Familia de las crucíferas. Familia de las papilionáceas: Tribu de las genistas. Tribu de las faseólas. Tribu de los lotos. Tribu de las vicias. Tribu de las hedisáreas. Familia de las rosáceas: Tribu de las fragarias. Tribu de los rosales. Tribu de las espíreas. Tribu de las amigdaláceas. Tribu de las agrimonias. Tribu de las pomáceas. Usos. Familia de las umbelíferas. Familia de las labiadas. Familia de las compuestas: Tribu de las ligulifloras. Tribu de las tubifloras. Tribu de las radiadas. Usos

Las *espermatofitas* (del griego *sperma*, *spermatos*, grano, y *phyton*, planta) son también llamadas *fanerógamas* (de *phaneros*, aparente, y *gamos*, unión). Antiguamente se creía las fanerógamas opuestas por completo a las criptógamas, ya que la posesión de *flores* hace más visible su reproducción. Pero la flor es un órgano que deriva de toda una serie de formas intermedias. La flor no es, pues, rigurosamente propia de las fanerógamas y no basta para caracterizarlas.

Mucho más importante en estos vegetales es la posesión de semillas, es decir, de órganos que se desprenden de la planta en un cierto momento y que contienen, además de reservas nutritivas, un embrión en estado de vida lenta. Esta detención del desarrollo embrionario sólo existe en las espermatofitas y no se revela por ningún signo en los demás tipos del reino vegetal.

Así, pues, las *espermatofitas o fanerógamas son plantas con semillas y accesoriamente con flores* cuya reproducción comprende una *alternación esporogametofítica con predominio del esporofito*. El aparato vegetativo de estas plantas se compone de una *raíz*, de un *tallo* y de *hojas*. Como tienen clorofilia, las espermatofitas son generalmente *autotrofas* y se dividen en dos subtipos: *gimnospermas* y *angiospermas*, según que las semillas estén o no encerradas en un fruto.

Subtipo de las gimnospermas

Las *gimnospermas* (del griego *gymnos*, desnudo, y *sperma*, grano) tienen sus semillas simplemente colocadas entre unas especies de hojas coriáceas, imbricadas, como las que forman las piñas de los pinos. Como no tienen verdaderos frutos, las gimnospermas son espermatofitas inferiores y su reproducción puede relacionarse con la de las pteridofitas. Las estudiaremos en dos tipos extremos: el *ginkgo*, que representa la clase de las *natrices*, y el *pino*, prototipo de las *vectrices*.

Aparato vegetativo. — No difiere esencialmente del de las angiospermas, que será estudiado con detalle en capítulos ulteriores. Señalemos, sin embargo, los detalles siguientes:

1º El tallo de las gimnospermas sólo tiene una célula inicial tetraédrica, mientras que su raíz posee tres, o sea que nos encontramos exactamente ante la misma antinomia comprobada en las selaginelas;

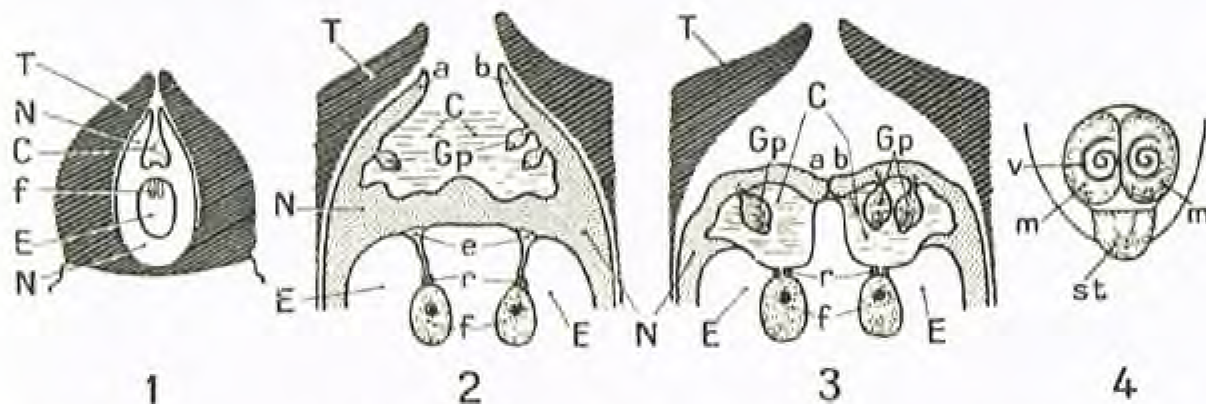
2º Las gimnospermas, aparte de los pequeños vasos anillados, espirales y rayados, no tienen vasos perfectos y puntuados, sino sólo *areolados* o envueltos en hilos de apretadas espirales. En las cicas persisten incluso los vasos escalariformes de las pteridofitas;

3º Las hojas de las gimnospermas tienen una nervadura rudimentaria, reducida a veces a agujas coriáceas (pino, abeto). Por otra parte, junto a esos caracteres arcaicos, las gimnospermas poseen *formaciones secundarias* y, muy frecuentemente, *canales secretorios* que producen trementina.

Reproducción del ginkgo. — El *ginkgo* o *árbol de los cuarenta escudos*, así llamado a causa del amarillo oro de sus hojas en otoño, es un árbol de China y el Japón, aclimatado en diversos países.

En la época de la reproducción aparecen en ciertos árboles *espigas esporíferas*, cuyas hojas llevan todas *microsporangios* de 64 *microsporas*.

Estas microsporas evolucionan, en el mismo lugar en que se encuentran, en minúsculos *protalos machos* reducidos a tres o cuatro células,



Fecundación del ginkgo: 1. Óvulo ligeramente aumentado; 2 y 3. Parte superior más aumentada; 4. Extremo libre del grano de polen muy aumentado; *a*, *b*, bordes de la nuecezilla que se inclinan sobre la parte central; C, cámara polínica; E, endospermo; *e*, embudos; *f*, gameto hembra (oosfera); *Gp*, grano de polen en plena germinación; *m* y *m'*, gametos machos; N, nucela; *r*, roseta de corpúsculo; *st*, células estériles; T, tegumentos; *V*, cilios vibrátiles de los gametos machos (anterozoides)

una de las cuales se desarrolla en *anteridio* y engendra dos *anterozoides ciliados*.

En otros árboles aparecen *macrosporangios* sostenidos de dos en dos por los extremos de pequeñas horquillas. Cada macrosporangio se compone de una envoltura y una *macrospora*.

La macrospora evoluciona, en el lugar en que está, como *protalo hembra* y se compone como sigue:

a) De células *estériles* ricas en materias de reserva;

b) De varios *arquegonios* reducidos cada uno de ellos a un pequeño *cuello* y a una *oosfera*.

En la parte superior del protalo hembra, la envoltura del macrosporangio se entreabre y forma una celdilla que contiene un líquido azucarado. Esta celdilla es lo que se llama *cámara de fecundación*.

A la madurez, los protalos machos forman un polvo fino que, llevado por el aire, alcanza los árboles hembras. Varios de esos protalos se fijan en la pared interna de una cámara de fecundación y liberan los anterozoides. Éstos nadan en el líquido azucarado y llegan hasta las oosferas para fecundarlas.

El proceso del desarrollo es el siguiente: generalmente, sólo evoluciona un huevo en cada protalo y acarrea la muerte de los demás. El *embrión* único se nutre de las reservas del protalo y constituye sus diversas partes: *radícula*, *plúmula*, *gémula* o pequeña yema terminal y *cotiledones* o primeras hojas. A continuación, el embrión pasa al estado de vida lenta. El protalo hembra entero se convierte en semilla, a la que basta desprenderse del árbol para luego germinar y dar un nuevo ginkgo.

Todo este desarrollo no hace sino repetir, con pequeñas diferencias, el de las selaginelas. Las únicas diferencias son:

a) La diseminación, por el aire, de los protalos machos;

b) Su llegada hasta una cámara de fecundación;

c) La desaparición de todos los embriones, salvo uno;

d) La suspensión del desarrollo embrionario y la formación de una semilla.

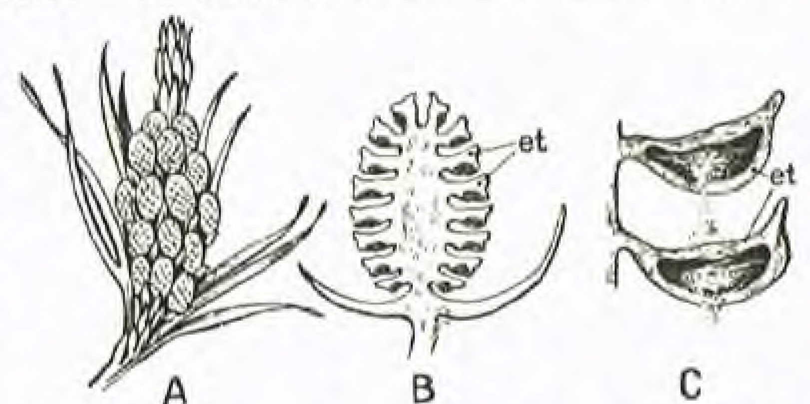
Cambio de nomenclatura. — Los órganos reproductores del ginkgo han sido descritos antes de haberse tenido la idea de compararlos a los de las selaginelas, por lo que se les ha dado nombres diferentes. Es necesario, pues, establecer la sinonimia con los precedentes, o sea:

Espiga esporífera = *flor*.

Órganos machos	Microsporangio	= *saco polínico*
	Protalo macho	= *semilla de polen*
	Anteridio	= *célula generadora*
Órganos hembras	Macrosporangio	= *óvulo*
	Protalo hembra	= *saco embrionario*
	Células estériles	= *endospermo*
	Arquegonio	= *corpúsculo* = *célula generadora*

Reproducción del pino. — El pino, de la familia de las coníferas, es uno de los principales representantes del grupo de las *vectrices*.

Desde el punto de vista de la reproducción es necesario distinguir en cada especie *flores machos* y *flores hembras*. En efecto, los sexos están separados en la misma planta: el pino es *monoico*.



Flores machos del pino: A, grupo de conos machos; B, corte longitudinal de un cono macho; C, dos estambres; *et*, estambres

Flores machos. — En el momento de la reproducción se ven aparecer espigas esporíferas, que llamaremos *flores machos*. Cada una de las hojas fértiles o *estambres* que constituyen estas flores dan en su cara inferior dos microsporangios o *sacos polínicos* que contienen 64 *microsporas*.

Esas microsporas evolucionan, en el mismo sitio donde se encuentran, y se convierten en protalos machos o *granos de polen*.

Los granos de polen del *pino* se componen de cuatro células, una grande y tres pequeñas, contenidas éstas en la mayor. Una de las células pequeñas es generadora y puede ser llamada *anteridio*. Las demás son células vegetativas. Los granos de polen tienen dos envol-

turas: la interna o *intina*, estrechamente aplicada a su superficie, y la externa o *exina*, hinchada a los lados y que forma dos baloncillos llenos de aire que sólo se encuentran en las abietíneas.



Polen de pino *(Fot. R. - H. Noailles)*

En el *ciprés*, la simplificación de los granos de polen los reduce a dos células: una vegetativa y otra generadora.

Al madurar, los granos de polen son llevados a lo lejos por el aire y constituyen lo que en el campo llaman *lluvias de azufre*.

Flores hembras. — A las flores machos corresponden *flores hembras* reducidas a una hoja estéril o *bráctea* que lleva en su axila un corto *ramo* el cual sostiene a su vez una hoja fértil o *carpelo*. Pero estas flores hembras, muy simples, están agrupadas en forma de hélice alrededor de un eje y constituyen un *cono*, característico de la familia de las coníferas.

Volvamos al carpelo; esta hoja fértil de cada flor lleva en su cara superior dos macrosporangios u *óvulos*.

Visto con el microscopio, el óvulo se muestra protegido por una membrana, la *primina*, que abre en su ápice un orificio o *micropilo* (del griego *mikros*, pequeño, y *pylé*, puerta). En el interior se ve una masa de células estériles, la *nucela*, que contiene una sola *macrospora*.

Flor hembra de pino: *br*, bráctea; *ol*, óvulo; *ov*, ovario; *pe*, pedúnculo

La macrospora evoluciona en su sitio como protalo hembra o *saco embrionario* y comprende:

a) Células estériles que forman el *endospermo*;

b) Un número variable de arquegonios o *corpúsculos*, reducidos cada uno de ellos a una oosfera rematada por un pequeño cuello o *roseta*.

Fecundación. — Cuando un grano de polen es colocado en una gota de agua ligeramente azucarada, su protoplasma se hincha, hace estallar la exina y se alarga por el orificio en un filamento llamado *tubo polínico*. Los mismos fenómenos se producen cuando un grano de polen llega al micropilo de un óvulo. El tubo polínico se introduce en el orificio y atraviesa el endospermo (que digiere) hasta ponerse en contacto con los corpúsculos. Al mismo tiempo, por el tubo polínico llega la célula generadora del grano de polen, que no tarda en dividirse en dos *gametos machos*. Uno de esos dos gametos fecunda una oosfera.

Desarrollo del óvulo. — Terminada la fecundación, el óvulo, pese a permanecer en el interior del endospermo, se divide y presenta la particularidad de engendrar cuatro embriones en lugar de uno solo. Esta fecundación se llama *poliembrionía*.

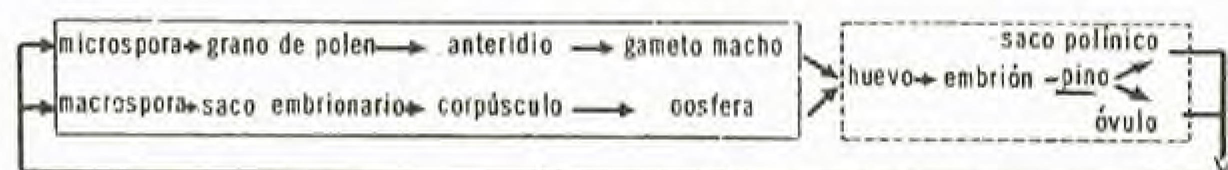
Pero luego subsiste sólo uno de esos embriones, que se nutre de los demás, así como del endospermo. Este embrión adquiere las cuatro partes fundamentales de una planta pequeña: *radícula, plúmula, gémula* y *cotiledones*.

Más tarde se produce la suspensión del desarrollo embrionario, característico de los espermatofitos. El óvulo se transforma en *semilla*, compuesta de un tegumento, de un resto de endospermo y de un embrión central.

Mientras los óvulos se transforman en semillas, las brácteas se espesan y dan al cono el aspecto peculiar de la piña. Al madurar, las brácteas se abren y liberan las semillas, que, como puede apreciarse, no están contenidas en un verdadero fruto cerrado análogo a una cereza o a una vaina de guisante. Estas *semillas desnudas* constituyen la característica verdadera de las gimnospermas.

Diferencias entre el endospermo y el albumen. — Más adelante veremos que la semilla de las angiospermas está rodeada de un tejido de reserva llamado *albumen*. Este albumen aparece después de la fecundación y pertenece al *esporofito (2n* cromosomas) mientras que el endospermo aparece antes de la fecundación de la oosfera y pertenece al *gametofito (n* cromosomas).

Resumen del ciclo evolutivo. — La reproducción completa de un ginkgo o de un pino puede resumirse de la manera siguiente:



La semejanza es casi idéntica a la alternación esporogametofítica de una selaginela. El *pino es un esporofito* o *fase diploide* con núcleo celular de *2n* cromosomas. El gametofito que le corresponde es doble y rudimentario. Tanto el grano de polen por un lado como el saco embrionario por otro son, además, parásitos del esporofito.

La única diferencia con la selaginela radica en la necesidad de dar el nombre de *embrión*, en el pino, a la existencia de una *semilla* en la que ese embrión subsiste largos meses en estado de vida lenta.

Por esta cadena continua la reproducción de las fanerógamas se encuentra enlazada con la de las criptógamas.

Clasificación de las gimnospermas. — Las gimnospermas son un grupo residual que, después de haber predominado durante toda la era secundaria, sólo está representado hoy por 600 especies (en lugar de 20 000 en el Jurásico).

Las gimnospermas se dividen en dos grandes clases: *natrices* y *vectrices*, según tengan o no anterozoides libres y ciliados.

A las **natrices** pertenecen la mayoría de las especies fósiles y, en la hora actual, los géneros *cicas, zamia* y *ginkgo*. Las cicas y las zamias son árboles de países cálidos, cuyo tallo no ramificado (estípite) y las grandes hojas terminales (frondes) se parecen a los de las palmeras. Los ginkgos son árboles de las regiones templadas y su aspecto nada tiene de anormal.

A las **vectrices** pertenecen las **coníferas,** que son las gimnospermas más difundidas. Éstas comprenden los pinos, los abetos, las piceas, los cedros, los alerces, las araucarias y las secoyas, que constituyen una primera subdivisión *(abietáceas)*; la segunda división está formada por los cipreses, los enebros y las tuyas *(cupresáceas)*; los tejos constituyen, en fin, por sí solos, unas tercera subdivisión *(taxáceas)*.

Todas estas plantas, salvo los tejos, tienen *canales secretorios* que producen *trementina* (esencia y resina) y forman grandes bosques que se extienden principalmente por el hemisferio Norte hasta las proximidades de las regiones polares. Las *secoyas* de California, actualmente protegidas por el Gobierno de los Estados Unidos, son árboles gigantescos que alcanzan más de cien metros de altura.

Subtipo de las angiospermas

Las *angiospermas* (del griego *aggeion*, recipiente, y *sperma*, semilla) tienen sus óvulos contenidos en *ovarios* cerrados y sus semillas dentro de *frutos*. Estas plantas tienen, además, *verdaderas flores*, generalmente adornadas de vivos colores. Por otra parte, su aparato vegetativo tiene también caracteres de superioridad: tres células iniciales, tanto en el tallo como en la raíz, vasos puntuados, formaciones secundarias, etc.

Reproducción de las angiospermas. — Si bien el estudio completo de las angiospermas se hará ulteriormente, se trata ahora de resumir y mostrar su encadenamiento con el de las plantas precedentes.

Una *flor* es una espiga esporífera cuyas hojas basilares *(sépalos, pétalos)* son estériles y protectoras, y cuyas hojas terminales *(estambres, carpelos)* son fértiles.

Hojas carpelares: A, de angiosperma; B, de gimnosperma

Los estambres llevan microsporangios o *sacos polínicos* con microsporas que evolucionan muy rápidamente en protalos machos o *granos de polen*.

Los carpelos llevan microsporangios u *óvulos* con macrospora que evoluciona con igual rapidez hasta convertirse en protalo hembra o *saco embrionario*.

La superioridad sobre las gimnospermas consiste en una nueva reducción del protalo hembra. El saco embrionario comprende sólo siete células llamadas *oosfera, sinérgidas, antípodas* y *célula central*. No existen ya arquegonios o corpúsculos.

Los granos de polen germinan en un *tubo polínico* que conduce los gametos machos reducidos a su núcleo al saco embrionario. Hay *doble fecundación*. La oosfera fecundada da un *embrión*.

La célula central fecundada da un segundo embrión o *albumen* que sirve para nutrir al anterior.

Finalmente, el óvulo se transforma en semilla encerrada en un *fruto*.

Las únicas diferencias con la reproducción de las gimnospermas son las siguientes:

Gimnospermas	*Angiospermas*
Óvulo *desnudo*.	Óvulo en *ovario cerrado*.
Saco embrionario que comprende células nutricias (*endospermo*).	Saco embrionario sin endospermo.
Arquegonio o *corpúsculo*, con una oosfera terminada en pequeño cuello o *roseta*.	Arquegonio reducido a una sola célula (oosfera, sinérgida, etc.).
Grano de polen formado de *varias células*, una de las cuales es generadora.	Grano de polen formado de una sola célula de *dos núcleos*, uno de los cuales es generador.
Fecundación *simple* que da nacimiento al embrión.	Fecundación *doble* que da nacimiento al embrión y al *albumen*.
Embrión sumergido en el endospermo.	Embrión sumergido en el albumen.
Semilla desnuda.	Semilla encerrada en un *fruto*.

Clasificación de las angiospermas. — El embrión de las gimnospermas es policotiledóneo, mientras que el de las angiospermas sólo tiene un cotiledón, como en el trigo, o dos en el caso de la judía. De ahí se desprende una división de las angiospermas en dos clases llamadas *monocotiledóneas* y *dicotiledóneas*. (V. cuadro de la página siguiente.)

PRINCIPALES FAMILIAS DE LAS ANGIOSPERMAS

CLASES	ÓRDENES		FAMILIAS	GÉNEROS O ESPECIES TIPO
MONOCOTILEDÓNEAS	**Sin pétalos y con ovarios libres**		**Gramíneas***	Arroz, avena, trigo, centeno, cebada, mijo, esparto, maíz, caña de azúcar, bambú
			Ciperáceas*	Juncia (chufa)
			Lemnáceas	Lenteja de agua
			Aráceas	Aro
			Tifáceas	Juncos, anea
			Potamogetonáceas	Potamogeton, zostera, posidonia
	De pétalos poco coloreados y con ovarios libres		**Palmáceas***	Palmera, de dátiles, sagú, carnauba, cocotero, corojo, palmera de aceite
			Juncáceas	Junco
	De pétalos muy coloreados	Ovario libre (ovario súpero)	**Liliáceas***	Ajo, cebolla, azucena, tulipán, jacinto, yuca, espárragos
			Alismatáceas	Llantén de agua, sagitaria, junco florido
		Ovario adherente (ovario ínfero)	Iridáceas	Iris, azafrán, gladíolo
			Amarilidáceas	Nardo, narciso, pita o maguey
			Orquidáceas*	Orquídeas, vainilla
			Hidrocaridáceas	Vallisneria
			Escitamináceas	Plátano, jengibre, caña de Indias
			Bromeliáceas	Piña de América, bromelia
DICOTILEDÓNEAS	**Sin pétalos (apétalas)**	Ovario libre (ovario súpero)	**Urticáceas**	Ortiga, parietaria, higuera, morera, cáñamo indiano, olmo (Las cuatro últimas, de familias afines)
			Buxáceas	Boj
			Platanáceas	Plátano (árbol de sombra)
			Salicáceas	Sauce, álamo, chopo
			Piperáceas	Pimentero
			Poligonáceas	Acedera, alforfón
			Quenopodiáceas	Espinaca, té de México, remolacha
		Ovario adherente (ovario ínfero)	**Cupulíferas***	Haya, castaño, roble, alcornoque, encina Abedul, avellano
			Juglandáceas	Nogal
	Con pétalos separados (dialipétalas)	Ovario libre (ovario súpero)	**Ranunculáceas***	Ranúnculo, peonía, acónito, anemone, clemátide, celidonia
			Berberidáceas	Agracejo
			Lauráceas	Laurel, alcanforero, canela, aguacate
			Ninfeáceas	Nenúfares, loto, maíz de agua
			Malváceas	Malvavisco, malva, baobab, pochote, tilo, cacao
			Teáceas	Camelia, té
			Hipericáceas	Hipérico
			Euforbiáceas	Euforbias, crotón, ricino, manzanillo, heveas o caucho, yuca
			Resedáceas	Reseda
			Crucíferas*	Alelí, col, nabo, colza, mostaza, berro
			Papaveráceas	Amapola, adormidera
			Geraniáceas	Geranio, pelargonio
			Lináceas	Lino
			Crasuláceas	Siempreviva, ombligo de Venus
			Cariofiláceas	Clavel, saponaria, silene
			Rutáceas	Ruda, jaborandi, limón, naranjo
			Aceráceas	Arce
			Hipocastanáceas	Castaño de Indias
			Papilionáceas*	Guisante, lenteja, haba, judía, trébol, algarrobo, copayero, copal, palo Brasil, miroxilón, retama, sangre de drago, cacahuete o maní, regaliz
			Rosáceas*	Rosal, palo jabón, zarzamoras, frambueso, fresa, manzano, membrillo, peral, almendro, melocotonero, cerezo, ciruelo
		Ovario adherente (ovario ínfero)	**Umbelíferas***	Zanahoria, perejil, hinojo, apio, cicuta
			Araliáceas	Hiedra
			Cornáceas	Cornejo
			Cactáceas	Chumberas, nopal, mamilaria, cirio
			Saxifragáceas	Saxifraga, grosellero, jeringuilla
			Enoteráceas	Fucsia, epilobium
			Mirtáceas	Eucaliptus, clavo
	Con los pétalos soldados (gamopétalas)	Ovario libre (ovario súpero)	**Ericáceas**	Madroño, arándano, brezo
			Solanáceas	Patata, tomate, tabaco, belladona, pimiento, estramonio
			Borragináceas	Borraja, miosotis, pulmonaria
			Convolvuláceas	Boniato o moniato, jalapa, cúscuta
			Gencianáceas	Genciana
			Apocináceas	Hierba doncella, quebracho, adelfa, estrofanto
			Escrofulariáceas*	Verónica, digital, linaria, conejitos o hierba becerra
			Labiadas*	Menta, poleo, salvia, romero, lavándula, tomillo, orégano, hisopo, melisa
			Orobancáceas	Orobanche
			Verbenáceas	Verbena
			Plantagináceas	Zaragatona, llantén
			Oleáceas	Olivo, fresno, jazmín real
			Primuláceas	Prímula, ciclamen, anagallis o murajes
		Ovario adherente (ovario ínfero)	Campanuláceas	Lobelia, campánula
			Rubiáceas	Quinas, cafetos, ipecacuana
			Caprifoliáceas	Madreselva, saúco, bola de nieve o mundillo
			Valerianáceas	Valeriana
			Dipsacáceas	Escabiosa
			Compuestas*	Cardo, centaura, alcachofa, lechugas, dalia, margarita, árnica, crisantemo, manzanilla, té de roca, girasol
			Cucurbitáceas	Calabaza, pepino, sandía

Este cuadro contiene las familias más importantes. Las que poseen más especies o tienen más aplicaciones se citan en **letras negrillas**. Las que van seguidas de un asterisco * se tratan a continuación.

Clase de las monocotiledóneas

Caracteres de las monocotiledóneas. — Aparte del carácter resultante de su *cotiledón único*, estas plantas ofrecen, en general, las particularidades siguientes:

a) Sus piezas florales (sépalos, pétalos, estambres, carpelos) están dispuestas de tres en tres o por múltiplos de tres. Se dice que su flor está construida sobre el tipo tres (trímeros);

b) Su cáliz y corola son del mismo color;

c) Sus hojas no tienen pecíolo y las nervaduras son paralelas;

d) Por exigir esta nervadura un gran número de hacecillos liberoleñosos, el tallo posee varios círculos concéntricos de tales hacecillos;

e) Sus raíces y tallos están desprovistos de formaciones secundarias;

Las monocotiledóneas comprenden unas 20 000 especies, repartidas entre 1 600 géneros y 26 familias. Éstas pueden agruparse en cuatro órdenes, tengan o no pétalos —sean sus pétalos poco o muy coloreados— o, también, según que el ovario esté libre en el centro de la flor (ovario súpero) o adherido a la base de ésta y en apariencia debajo de la misma flor (ovario ínfero).

Las principales familias de las monocotiledóneas son la de las *gramíneas*, la de las *palmáceas*, la de las *liliáceas* y la de las *orquidáceas*.

Familia de las gramíneas. — Esta familia es una de las más importantes del reino vegetal por el número (unas 3 500) y los usos de sus especies. Ahora bien, si resulta fácil reconocer las gramíneas, no lo es ya tanto distinguir unas de otras. Todas se parecen mucho a causa de la posesión de un gran número de caracteres comunes:

1º *Raíz fasciculada* que, en las especies corrientes (trigo y avena), forma un manojo *cabelludo* en la base del tallo y fija sólo ligeramente la planta al suelo;

2º Tallo hueco o *caña* cuya medula ha desaparecido y contiene tabiques sólo a la altura de los nudos, tales como, por ejemplo, una paja, un bambú, una caña de pescar, etc.;

limbo
paja
lígula
vaina abierta
nudo

Rastrojo y hoja de trigo

3º Hojas en *forma* de cintas, erguidas, *envainadoras* y con nervaduras paralelas. Su larga *vaina* se prolonga por encima del limbo por una *lígula*;

4º *Epidermis silicificada*, lo que produce esa ceniza resplandeciente de un montón de paja incendiado;

5º Flores agrupadas en *espiguillas* y éstas, a su vez, en espigas (trigo, cebada y centeno) o en panojas (avena);

6º Espiguilla que comprende una o varias flores insertas en un eje y protegidas por dos piezas llamadas *glumas*: gluma superior y gluma inferior;

7º *Flor* compuesta de dos *glumelas*, dos *glumélulas*, tres *estambres* colgantes con anteras en forma de X y, por último, dos *carpelos* soldados en un ovario cerrado y libre, rematado por dos *estigmas plumosos* (vilano). Generalmente, las glumelas son consideradas como brácteas y las glumélulas como sépalos. En este caso falta la corola;

8º Un *sólo óvulo* en el interior del ovario. El segundo que debería existir aborta;

9º *Semilla de albumen harinoso* (almidón). Sólo la capa periférica contiene una reserva proteica (aleurona y gluten).

10º Embrión de *un solo cotiledón* en forma de zueco;

11º Fruto seco indehiscente, de pared soldada a la semilla. Por esta definición se reconoce un *cariópside*, impropiamente llamado grano (grano de trigo).

La clasificación de las gramíneas no ofrece interés alguno de orden general, por descansar sobre mínimas diferencias entre las especies: número de hojas por espiguilla; grupo de espiguillas en espigas o en panojas; número de espiguillas en cada nudo de la espiga; forma de las glumas y de las glumelas; adherencia de éstas al grano, etc.

Sin embargo, existen algunas gramíneas aberrantes, como el *arroz*, de flores de seis estambres, y el *maíz*, planta monoica, cuyas flores machos están en el ápice del tallo y las hembras en medio. Esa disposición, completada por largos estigmas viscosos, facilita la polinización por la simple caída del polen.

Las gramíneas son plantas generalmente *herbáceas*. Algunas de ellas, como el bambú, de crecimiento sumamente rápido, llegan a alcanzar no obstante la talla de un arbolillo. Las gramíneas son las plantas que cubren esas inmensas extensiones herbosas llamadas *estepas* en el sur asiático, *sabanas* en África, *pampas* en Argentina, *praderas* en el oeste de los Estados Unidos.

Desde el punto de vista de sus aplicaciones, las gramíneas pueden dividirse en tres grupos:

1º Los *cereales*, que nos dan sus granos alimenticios: trigo, centeno, cebada ordinaria y de cervecería, avena, arroz, maíz;

2º Las *gramíneas forrajeras*, que forman prados naturales o artificiales: bromo, grama de olor, poa, fleo, etc.;

3º Las *gramíneas industriales*, como la caña de azúcar, el esparto, el bambú, el sorgo o zahína.



Frontispicio del tomo primero de *Espectáculo de la Naturaleza o charlas sobre las particularidades de la historia natural*, etc. (1379), grabado por J.-P. Le Bas, y acompañado del siguiente subtítulo: «Salomón estudió las plantas desde el cedro que se encuentra en el Líbano hasta el hisopo que sale de la muralla. Estudió, asimismo, los animales de la Tierra, las aves, los reptiles y los peces. 3. Libro de los Reyes. 4. 33» (*Fot. Larousse*)

Familia de las palmáceas. — Se cuentan unas 1 000 especies de palmeras pertenecientes a regiones intertropicales. Solamente algunas desbordan por el norte y el sur de estas áreas, principalmente en México, África del Norte y Australia.

Sus características comunes son las siguientes:

1º *Tallo o estípite cilíndrico sin ramificar, terminado por un enorme ramo de hojas.* La forma cilíndrica se debe a la ausencia de formaciones secundarias. A medida que crece el tallo, las hojas caen y son reemplazadas por otras que brotan en el ápice. En ciertas especies, las hojas caen y el estípite queda liso. En otras, las hojas abandonan las bases de los pecíolos, que se transforman pronto en una estopa protectora, lo que da al tallo la apariencia de ser más grueso de lo que es en realidad;

2º *Hojas grandes y profundamente recortadas.* Pueden ser éstas *compuestas pinadas* (datilero y cocotero) o *compuestas palmeadas* (palmito). Los recortes no existen en la hoja joven y se producen a medida de su desarrollo;

3º *Flores siempre unisexuales.* Algunas palmeras (cocotero) son *monoicas*, es decir, que tienen a la vez flores machos y hembras. Otras son *dioicas*, ya que los diferentes sexos están sobre pies diferentes. Recordemos que, por esta razón, los árabes, en sus oasis, se ven obligados a practicar la polinización artificial de los datileros hembras;

4º *Hojas siempre muy pequeñas y verdosas*, pero agrupadas en racimos voluminosos, rodeadas por una gran bráctea o *espata* en forma de cucurucho. Cada flor macho se compone de tres sépalos, tres pétalos y seis estambres. Cada flor hembra comprende tres sépalos, tres pétalos y tres carpelos, soldados éstos a un ovario de tres celdillas y, en apariencia, situado debajo de la flor: *ovario ínfero;*

5º *Un solo óvulo* en el interior del ovario. Los otros dos que deberían existir abortan;

6º *Semilla de albumen* de constitución química muy variable;

7º Embrión de *un solo cotiledón*;

8º Fruto carnoso que puede ser, según el caso, una *baya* (fruto con pepitas) o una *drupa* (fruto con hueso).

La clasificación de las palmáceas no ofrece interés general. Baste insistir sobre sus múltiples utilidades.

Ciertos pueblos consumen les yemas de algunas especies de palmáceas, como el llamado *palmito*, o extraen de sus inflorescencias un líquido azucarado capaz de dar un *vino de palma* excelente, e incluso *vinagre* y *alcohol*. Un cocotero puede producir anualmente 300 litros de tal vino. Los *dátiles* y el *coco* son frutos muy estimados. Lo

que vulgarmente se llama coco es el núcleo de una drupa cuya cáscara o *gachumbo* ha sido retirada para fabricar fibras vegetales o cuerdas. El núcleo o nuez contiene el albumen, una parte del cual es sólida y otra líquida. La parte sólida, llamada *marfil* a causa de su dureza y color, proporciona una *harina* y un *aceite* (manteca de coco y vegetalina) muy apreciados. La parte líquida o *leche* permite un consumo local debido a su riqueza en azúcar y su sabor ácido. El cocotero es, pues, uno de los árboles más útiles de los países cálidos. Otra palmácea, llamada *palmera de aceite,* da dos clases de líquido: el *aceite de palma,* extraído de su drupa, y el *aceite de palmito,* extraído de su albumen. Estos últimos años se ha emprendido la explotación racional de esta tan interesante especie.

Desde el punto de vista industrial, las palmáceas dan numerosos productos: la *cera,* que cubre los hojas o el tallo de algunas especies de América del Sur; el *marfil vegetal,* que es el albumen córneo del corojo; la *rafia* y la *crin vegetal,* producidas por las nervaduras de especies de Madagascar y el Japón. Una palmácea de la India, conocida vulgarmente bajo el nombre de *rota, rotén* y *palma de Indias,* es un bejuco cuyo tallo se emplea para la fabricación de *bastones* y *rejillas* para asientos de sillas.

Familia de las liliáceas. — A la inversa de las familias precedentes, que son muy homogéneas, la de las *liliáceas* comprende tres subfamilias o tribus, que conviene estudiar separadamente antes de resumir los caracteres comunes:

I. **Tribu de las liliales.** — El tipo de esta tribu es la azucena o lirio blanco, que se conserva de un verano a otro por medio de una *cebolla* o *bulbo escamoso,* compuesto de un tallo corto con raíces adventicias y una yema terminal. El conjunto está cubierto por una especie de escamas u hojas espesas repletas de substancias nutritivas e imbricadas unas con otras. Una vez el bulbo enterrado, la yema terminal engendra un tallo y hojas aéreas.

Las *flores* forman un racimo en el ápice del tallo y cada una de ellas comprende tres sépalos petaloides, tres pétalos, seis estambres y tres carpelos. Los estambres tienen sus sacos polínicos del lado del eje de la flor y son, por consiguiente, *introrsos.* Los carpelos están soldados en un ovario de tres celdillas, libre en el centro de la flor, con un largo estilo que termina en tres estigmas. El ovario es, pues, *súpero.* La placentación es *axil.* Los óvulos, muy numerosos, dispuestos en seis filas longitudinales, son *anátropos.* A su madurez, el ovario se convierte en fruto seco, dehiscente, que se abre por tres hendiduras longitudinales en medio de la pared externa de las tres celdillas, o sea, una *cápsula loculicida.* Las semillas tienen un albumen en el que la celulosa desempeña el papel de reserva nutritiva.

Además de la *azucena* o *lirio blanco,* la tribu de las liliáceas comprende el *tulipán,* el *jacinto* y las diversas especies de *ajo* (ajo propiamente dicho, chalote, cebollana, cebolla y puerro).

II. **Tribu de los cólquicos.** — El *cólquico* de otoño es muy corriente en los prados húmedos. Las hojas de esta planta aparecen en primavera y sus flores, semejantes a las del lirio, son de un hermoso color malva durante el mes de septiembre. La única diferencia con las liliáceas es que las grietas de la cápsula no se producen de la misma manera, sino que cada celdilla se separa de las otras dos y después se abre por su borde interno. La cápsula es *septicida.*



Sellos de Salomón con flores

III. **Tribu de las asparagíneas.** — En esta tercera tribu, el bulbo es reemplazado por un *rizoma* y la cápsula por una *baya.* El rizoma del *sello de Salomón* será estudiado en el párrafo de los tallos subterráneos. El del *espárrago,* que los jardineros designan bajo el nombre de *raíz,* es la parte que engendra los brotes jóvenes comestibles. En el sello de Salomón y en el *muguete* o *lirio de los valles,* los sépalos y los pétalos soldados entre sí constituyen una campanilla.

Los únicos caracteres comunes a las tres tribus de las liliáceas son los siguientes:

1° *Flores* de tres sépalos, tres pétalos, seis estambres y tres carpelos;
2° Sépalos *petaloides;*
3° *Carpelos soldados* en un ovario de tres celdillas y libre en el centro de la flor;
4° *Semillas con albumen.*

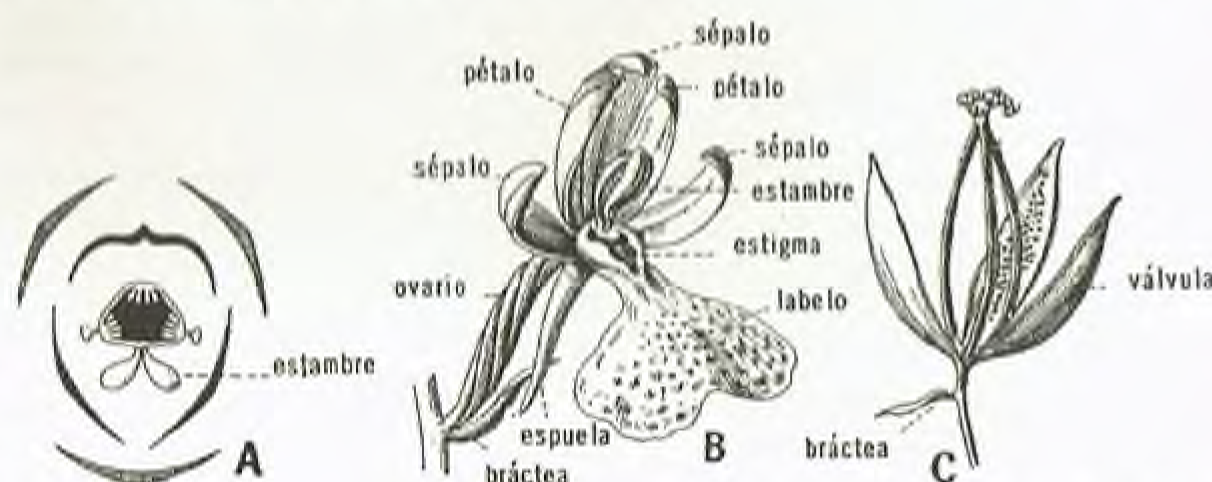
Usos. — Las liliáceas nos son útiles como plantas ornamentales (lirio, tulipán, jacinto, muguete) y como plantas alimenticias (ajo, chalote, cebolla, puerro, espárrago). Los bulbos del cólquico contienen un alcaloide venenoso. De las hojas del áloe se extrae una resina purgante (acíbar). Se incluye en las liliáceas un árbol de países cálidos, el *drago,* que destila por el tronco, durante los grandes calores, una especie de resina roja conocida en farmacia bajo el nombre de *sangre de drago.* Hay que señalar que el drago, con el áloe y la yuca, es una de las pocas monocotiledóneas con formaciones secundarias. Se conocen dragos que tienen 25 metros de altura y 15 de diámetro.

Familia de las orquidáceas. — Esta familia es una de las más importantes (6 000 especies) y de las más extraordinarias que puedan existir. Las orquidáceas difieren profundamente de todas las demás monocotiledóneas por un conjunto de particularidades morfológicas y fisiológicas:

1° *Raíz tuberculosa* o, más exactamente, formada por la unión de varias raíces adventicias;

2° *Flores muy irregulares.* Los tres sépalos petaloides y los tres pétalos toman las formas y las disposiciones más diversas. Uno de los sépalos, particularmente, se yergue después en forma de *casco* o *capuchón,* mientras que los otros dos se extienden como *alas* o se sueldan en forma de *espuela.* Uno de los pétalos es colgante y constituye el *labelo,* que puede estar más o menos dividido, prolongado o no por una *espuela* cubierta de pelos y de toda clase de asperezas. Todas estas modificaciones —que afectan también al color— han dado por resultado que las flores de las orquídeas sean comparadas a los objetos y animales más diversos: zapato de Venus, el hombre ahorcado, la ophrys mosca, ophrys, araña, órquide mosquito, etc.;

3° *Un solo estambre* soldado al estilo del ovario, formando una columnilla central llamada *ginostemo,* en cuyo extremo superior se encuentra la antera única y dos estigmas,



Flor de orquídea: A, diagrama de una flor; B, conjunto de una flor; C, modo de abertura del fruto

4° Granos de polen de cada una de las mitades de la antera, aglomerados en una masa o *polinia* que termina en su parte inferior en un pequeño pie hinchado y pegajoso *(retináculo).* Ésta es una de las más extraordinarias adaptaciones a la *polinización por los insectos* que transportan de flor en flor las polinias adheridas a ellos. La vainilla, planta de la familia de las orquidáceas, es polinizada en las Antillas (su país de origen) por insectos y sólo puede serlo artificialmente en los demás países en que ha sido aclimatada;

5° Carpelos soldados a *un ovario de una sola celdilla* que en apariencia se encuentra debajo de la flor. Este ovario *ínfero* se parece, a primera vista, al pedicelo floral, del que sólo se distingue por estar retorcido sobre sí mismo;

6° Óvulos de *placentación parietal;*

7° *Semillas sin albumen y con embrión reducido a un pequeño macizo celular indiferenciado;*

8° Fruto seco, dehiscente, que se abre por seis grietas y, por consiguiente, seis ventallas, de las que sólo tres llevan las semillas. Esta clase de fruto es una *cápsula septífraga.*

Desde el punto de vista fisiológico, las orquidáceas ofrecen un interés inmenso y se pueden dividir en tres categorías, según las condiciones en que viven:

a) Las que, en posesión de clorofila suficiente, son integralmente *autofitófagas.*

b) Las que, por el contrario, no teniendo bastante substancia verde, son a un tiempo autofitófagas y *saprofitas.*

c) Las que viven sobre otros vegetales, no como parásitas, sino como *epífitas,* igual que los musgos y los líquenes. Estas epífitas adornan las cimas de los árboles en los bosques tropicales y suelen alcanzar grandes dimensiones. Las raíces colgantes y provistas de clorofila de estas orquidáceas están revestidas de un tejido esponjoso que absorbe instantáneamente el agua de la lluvia.

Cualquiera que sea su modo de vida, las orquidáceas viven en simbiosis con un hongo microscópico necesario para su desarrollo. Una semilla esterilizada y puesta en ambiente estéril no germina. Es necesario que la semilla esté invadida superficialmente por el hongo para que dé nacimiento a una nueva planta. En algunas especies hay *simbiosis perpetua,* y en otras, *simbiosis de estación.* Estudiemos este último caso, que es el más interesante. Tomemos una semilla de órquide puesta en tierra e invadida por su hongo simbiótico. El embrión se desarrolla en un primer tubérculo en forma de trompo. Este tubérculo da otro después que, no infectado por el hongo, se aisla y, hacia el mes de julio, produce los órganos de la planta. En octubre, el hongo lo invade y se produce un nuevo tubérculo sano. Cada año, la órquide vive en simbiosis desde octubre a julio, y sin ella desde julio a octubre. La órquide acumula reservas en el primer período y florece en el segundo.

Las orquidáceas son, seguramente, las plantas que más necesitan del concurso de otras para subsistir sobre la superficie del Globo: los árboles son los que las soportan cuando son epífitas, los insectos los que las polinizan y los hongos los que aseguran su crecimiento.

Clase de las dicotiledóneas

Caracteres de las dicotiledóneas. — Esta segunda clase de las angiospermas se distingue de la precedente por los caracteres siguientes:

a) Dos cotiledones;

b) Piezas florales tetrámeras o pentámeras, o múltiplos de cuatro o cinco (ocho, diez, por ejemplo);

c) Cáliz y corola diferentemente coloreados;

d) Hojas con pecíolos y nervaduras ramificadas;

e) Un solo círculo de hacecillos liberoleñosos en el tallo;

f) Raíz y tallo provistos de formaciones secundarias.

Estos caracteres, salvo el primero, están sujetos a numerosas excepciones.

Las dicotiledóneas comprenden unas 85 000 especies, repartidas en 6 700 géneros y 220 familias. Éstas pueden ser agrupadas en seis órdenes, según tengan pétalos o no —que éstos estén soldados entre sí o libres—, y según que el ovario esté libre en el centro de la flor, o en apariencia debajo de ella. Los términos empleados para designar esos diferentes casos son: flores *apétalas*, *dialipétalas* y *gamopétalas*; flores *superováricas* e *inferováricas*.

Estudiemos las siguientes familias: *cupulíferas*, *ranunculáceas*, *crucíferas*, *papilionáceas*, *rosáceas*, *umbelíferas*, *labiadas* y *compuestas* (*composáceas*, actualmente).

Familia de las cupulíferas. — La mayoría de los árboles de los bosques de Europa forman parte de esta familia, que cuenta unas 400 especies en las regiones templadas del hemisferio Norte, la mitad de las cuales son diversas especies de encina. Los caracteres comunes de estas plantas son los siguientes:

1° *Flores* siempre *unisexuales*;

2° *Flores* de dos sexos sobre el mismo árbol (estado *monoico*);

3° *Ovario ínfero*;

4° *Semilla sin albumen*;

5° Fruto seco, indehiscente, de la categoría de los *aquenios*;

6° Aquenio más o menos rodeado de escamas formando *cúpula*.

La familia de las cupulíferas se divide en tres subfamilias o tribus:

I. **Tribu de las quercíneas.** — Éstas son la *encina*, el *haya* y el *castaño*. Las flores machos están agrupadas en pequeños racimos o *amentos* y se componen cada una de seis sépalos y de un número variable de estambres. Las flores hembras tienen seis sépalos y tres carpelos, y están insertas una por una (encina), de dos en dos (haya), de tres en tres (castaño) en amentos más cortos. Los carpelos están soldados en un ovario de tres celdillas, situado en apariencia debajo de la flor. De los seis óvulos, sólo uno llega a la madurez. El aquenio contiene, por consiguiente, una sola semilla. En la encina, cada aquenio está rodeado en su base por una típica cúpula que recibe vulgarmente el nombre de *bellota*. En el haya, los aquenios están desarrollados por parejas en una misma cúpula completa, que se abre por cuatro valvas y que se llama comúnmente *hayuco*. En el castaño hay tres aquenios en una misma cúpula completa y espinosa que se abre por cuatro ventallas, cuyo conjunto es la *castaña*.

II. **Tribu de las coriláceas.** — El *avellano* y el *carpe* u *ojaranzo* constituyen esta tribu, que se diferencia de la precedente por la ausencia de sépalos en las flores machos, reducidas a algunos estambres. La cúpula misma se reduce a una simple gorguera (avellano) o es trilobulada en la base de los aquenios (carpe u ojaranzo).

III. **Tribu de las betuláceas.** — El *abedul* y el *aliso* son los principales representantes de esta tribu, cuyas flores hembras son las que no tienen sépalos. La cúpula se reduce a una simple escama.

Usos. — Los empleos de las cupulíferas son semejantes a los de los árboles en general, pero tienen además otros usos particulares. La corteza y las agallas de la encina proporcionan la casca y el tanino, utilizados en el curtido de las pieles. La corteza del alcornoque da el corcho; el hayuco, fruto del haya, contiene un aceite comestible; la castaña es un buen alimento farináceo.

Familia de las ranunculáceas. — Con esta familia entramos en la categoría de las dicotiledóneas dialipétalas. Entre ellas figuran las ranunculáceas, que se distinguen por los caracteres siguientes:

1° *Numerosos estambres extrorsos*;

2° *Ovario súpero*;

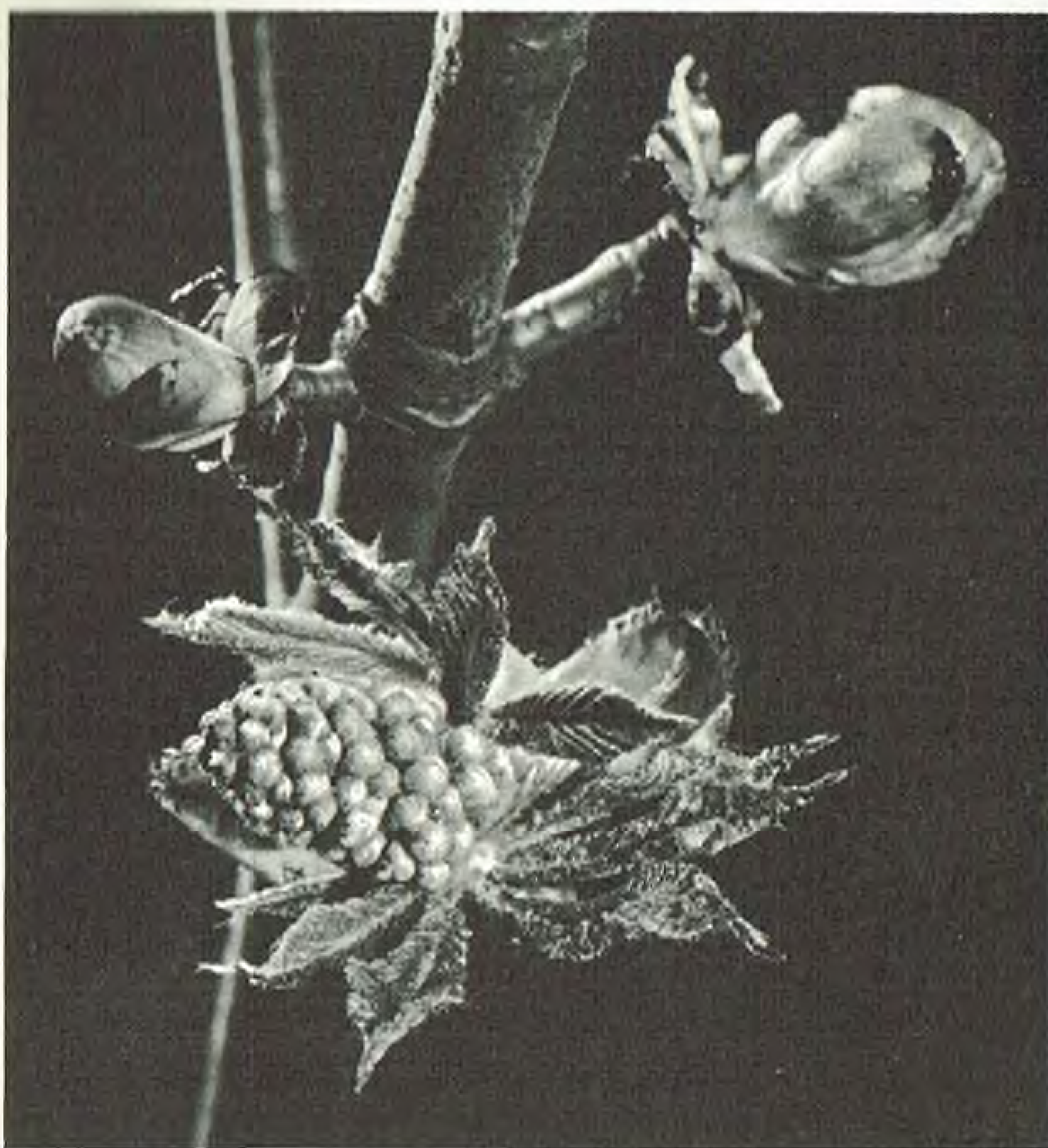
3° *Semillas con albumen*.

Aparte de estos caracteres constantes, todos los demás son variables, lo que conduce a dividir la familia en tres subfamilias o tribus:

I. **Tribu de los ranúnculos.** — El tipo de esta tribu es el *ranúnculo* o *botón de oro*, que comprende además la *ficaria* o *celidonia*, llamada también *ranúnculo falso*, cuya flor se compone de cinco sépalos, cinco pétalos y numerosos estambres y carpelos. En el ranúnculo, los sépalos son verdes y los pétalos amarillos. En la ficaria o celidonia, sólo hay tres sépalos verdes; los otros dos son petaloides, amarillos como la corola, que está compuesta de siete piezas. Los carpelos están insertos por separado en el receptáculo inflado del centro de la flor. Cada uno de ellos se convierte en un aquenio y el fruto es un *poliaquenio*.

Con respecto a la ficaria o celidonia hay que señalar la formación de *bulbillos* en las axilas de las hojas, que son otros tantos brotes auxiliares, los cuales, al caer, dan una planta nueva, lo que equivale a un procedimiento de multiplicación vegetativa similar a la reproducción por esquejes.

II. **Tribu de las anemones.** — Las dos plantas principales de esta tribu son la *anemone* y la *clemátide*. Éstas difieren de las precedentes por la *ausencia de corola*. Los sépalos, en compensación, son *petaloides*.



Abertura de una yema de castaño (*Fot. C. Bille*)

Estas plantas no se colocan en la categoría de las apétalas, porque derivan manifiestamente, por simple atrofia de la corola, de las más típicas ranunculáceas. La clemátide es un arbolillo que trepa gracias a sus pedúnculos foliares transformados en zarcillos. Los aquenios de la clemátide tienen un largo penacho plumoso.

III. **Tribu de los delfinios.** — En ésta, las flores conservan sus sépalos y pétalos; sus estambres son siempre muy numerosos, pero, en cambio, sólo tienen *cinco* (a veces *tres*) *carpelos* libres en el centro de la flor. Cada uno de los carpelos, al llegar a su madurez, se convierte en un *folículo* que contiene varias semillas.

Los delfinios son muy singulares por las modificaciones de su perigonio. La *arañuela* tiene sus pétalos reducidos a cinco pequeñas escamas del mismo color que los sépalos. El *eléboro* los tiene en forma de cucuruchos. Los pétalos de la *aguileña* son en forma de cucurucho o de espuelas colgantes, en los que se acumula el néctar, muy apetecido por los insectos melíficos. En la *espuela de galán*, la flor se hace irregular: un sépalo y los dos pétalos correspondientes constituyen una espuela nectárea que cuelga por debajo de la flor. En el *acónito*, por último, tres pétalos son rudimentarios, en tanto que los otros dos forman una especie de casco a cuyos lados se encuentran los sépalos.

Usos. — Las ranunculáceas son, sobre todo, plantas de adorno, de las cuales se cultivan un gran número de especies y variedades. De ciertas especies de esa familia se extraen alcaloides utilizados en medicina (aconitina y eleborina).

Familia de las crucíferas. — Esta familia, que comprende unas 1 200 especies de las regiones templadas, es una de las más homogéneas que existen, por lo que no se divide en tribus. Los caracteres de estas plantas son los siguientes:

1° *Raíz diplóstica*, es decir, de dos hacecillos leñosos, dos liberianos y cuatro filas de radicelas que alternan con los hacecillos precedentes;

2° *Flores* dispuestas en *racimos*, compuesto cada uno de *cuatro sépalos, cuatro pétalos, seis estambres* y *dos carpelos*;

3° *Sépalos desiguales*: dos tienen forma de vejiga en su base y están insertos un poco más abajo que los otros dos;

4° *Pétalos encogidos en la base* (uña) y *dispuestos en forma de cruz*, de donde procede el nombre de la familia;

5° Estambres divididos en dos círculos concéntricos, uno de los cuales, el externo, tiene sólo dos piezas, por haber abortado los dos restantes;

6° Carpelos soldados por sus bordes a un ovario *súpero*, de *una sola celdilla* y con *placentación parietal*. Pero se forma secundariamente un *falso tabique* que separa los dos carpelos;

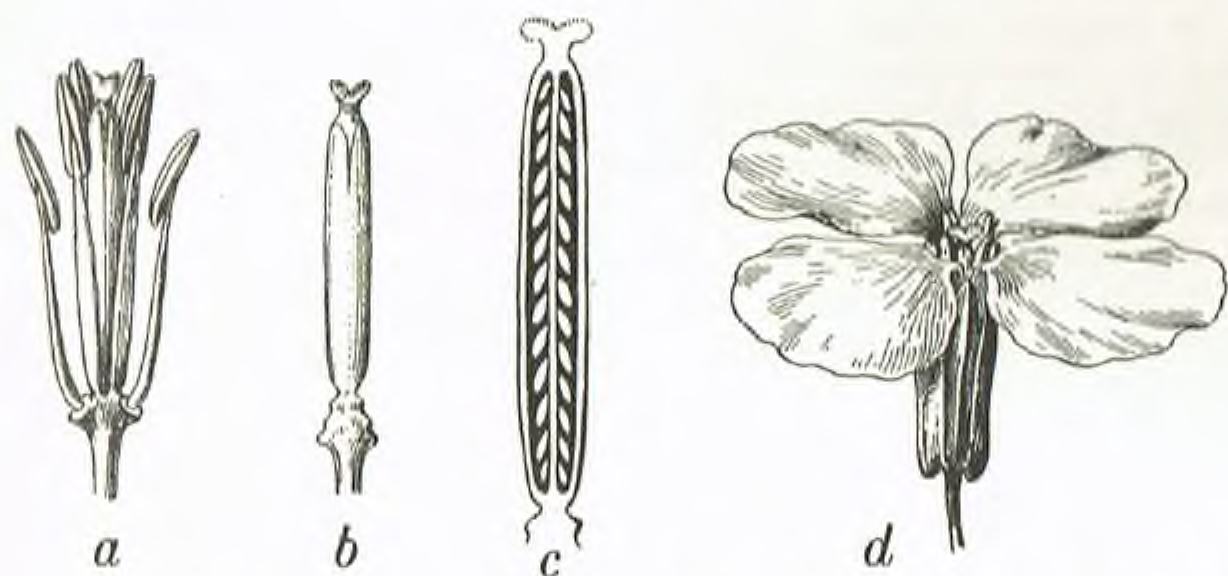
7° Fruto seco, dehiscente, que se abre por cuatro grietas. Este fruto es *silicua* cuando es más alto que ancho, y *silícula* cuando es más ancho que alto. Las semillas permanecen sujetas al falso tabique, mientras que las ventallas se apartan a derecha e izquierda. En ciertos casos (rábanos), el falso tabique es sinuoso y se adhiere a las paredes del fruto, de lo que resulta una serie de compartimientos, cada uno de los cuales encierra una sola semilla y que se separan unos de otros al llegar a la madurez. En este caso, la silicua es reemplazada por una serie de *aquenios*;

8° *Semillas sin albumen*;

9° Cotiledones planos, plegados o en espiral.

Las crucíferas tienen múltiples usos: *alimenticios, industriales, ornamentales, medicinales,* etc.

Familia de las papilionáceas. — Las *papilionáceas* o *leguminosas* constituyen una de las más importantes familias, por el número de sus especies (unas 7 000) y los servicios que prestan a la agricultura.



Flor de alhelí: *a*, androceo y pistilo; *b*, pistilo aislado; *c*, sección del pistilo que muestra los dos carpelos; *d*, flor entera

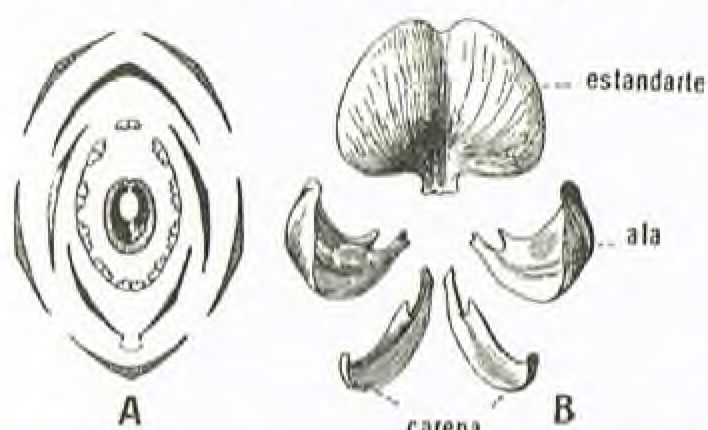
Los numerosos caracteres comunes de estas especies hacen de ellas una familia homogénea. Estos caracteres son:

1º *Hojas generalmente compuestas*;

2º *Flores* dispuestas en *racimos* o en *capítulos* o *cabezuelas* y de una simetría netamente bilateral. La semejanza con las mariposas ha dado el nombre a la familia;

3º *Cáliz* formado de cinco sépalos soldados entre sí (gamosépalo);

4º *Corola* formada de cinco pétalos libres y desiguales. El posterior, llamado *vexilo* o *estandarte*, se yergue entre los pétalos laterales o *alas*, precedidos éstos a su vez de un casco formado por los pétalos anteriores, llamado *carena* o *quilla*;



Flor de guisante: A, diagrama; B, pétalos separados

5º *Estambres* en número de diez, soldados entre sí por su filamento (algunas veces, el estambre posterior queda libre). El conjunto de los estambres se alberga en la carena;

6º *Carpelo único*, libre, con el estilo acodado, alojado también en la carena y que atraviesa el tubo estamíneo;

7º *Fruto seco*, dehiscente, que se abre por dos hendiduras opuestas, o sea una típica *legumbre;*

8º Numerosas semillas sin albumen, adheridas a las ventallas del fruto.

Aparte de algunas leguminosas aberrantes (*mimosa, acacia*) cuya corola no es papilionácea, o lo es imperfectamente (*ciclamor, algarrobo*), las demás se dividen en cinco tribus:

I **Tribu de las genistas** (*retama, aulaga, codeso*), cuyos estambres están todos soldados por sus filamentos. Las hojas son simples o compuestas palmeadas.

II. **Tribu de las faséolas** (*judía, soja*), uno de cuyos estambres queda libre y el estilo es corvo en forma de cayado en el interior de la carena. Las hojas son trifoliadas.

III. **Tribu de los lotos** (*loto, meliloto, trébol, mielga, glicina, robinia*), uno de cuyos estambres permanece libre, pero sin el estilo en forma de cayado. Las hojas son compuestas pinadas y tienen un folíolo terminal.

IV. **Tribu de las vicias** (*arveja, algarroba, guisante, lenteja, haba, almorta*), que se distingue de las precedentes en que sus hojas, compuestas pinadas, se terminan por un filamento o un zarcillo.

V. **Tribu de las hedisáreas** (*pepirigallo* o *esparceta, cacahuete*), vecinas de los lotos, pero cuya vaina se transforma en una hilera de aquenios.

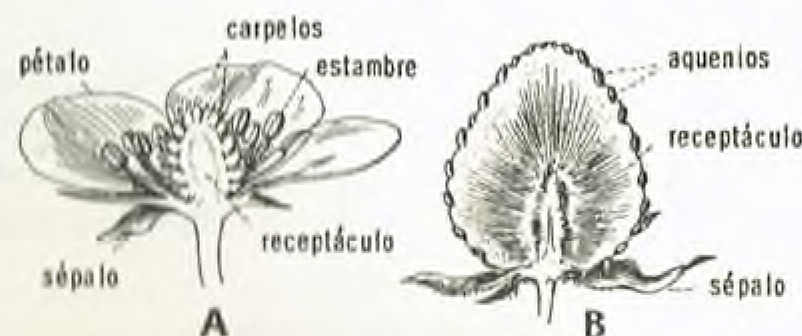
Usos. — Las leguminosas tienen importantes usos: *alimenticios, industriales, ornamentales* y *medicinales*.

Bastará recordar que las leguminosas, gracias a unas bacterias radicícolas que albergan (nodación), tienen la propiedad de absorber el nitrógeno atmosférico, por lo que enriquecen el suelo y constituyen un abono de primer orden.

Familia de las rosáceas. — Con sus 2 000 especies, entre las cuales figuran la mayor parte de los árboles frutales, la familia de las *rosáceas* ocupa uno de los lugares más importantes en el reino vegetal. Pero todo lo que tienen de homogéneas ciertas familias, como las gramíneas y las crucíferas, lo tiene de heterogénea la de las rosáceas.

El único carácter común de todas las rosáceas es que su flor posee *cinco sépalos sobre los cuales se insertan los pétalos y los estambres*. Si se arranca un sépalo, se arrancan también las piezas que éste sostiene. Las rosáceas se dividen en seis tribus:

I. **Tribu de las fragarias** (*fresa, zarza, frambueso*). — Fórmula floral 5 S + 5 P + ∞ E + ∞ C. Los últimos están insertos separadamente en el receptáculo que sobresale en el centro de la flor. El fruto es múltiple; ya sea formado de *aquenios* (fresa), o de *drupas* pequeñas (frambuesa madura). En la flor de la fresa hay un doble cáliz (cáliz y calículo).



Fresa: A, corte de la flor; B, sección de una fresa

II. **Tribu de los rosales** (*rosal silvestre* o *escaramujo*). — La fórmula floral es la misma que en las precedentes, pero el receptáculo es cóncavo en vez de abultado. En ambos casos, la superficie, más extensa, le permite soportar numerosos carpelos. Éstos, al madurar, se convierten en *aquenios*, y quedan contenidos en una especie de botella roja que no es sino el receptáculo que se ha hecho carnoso.

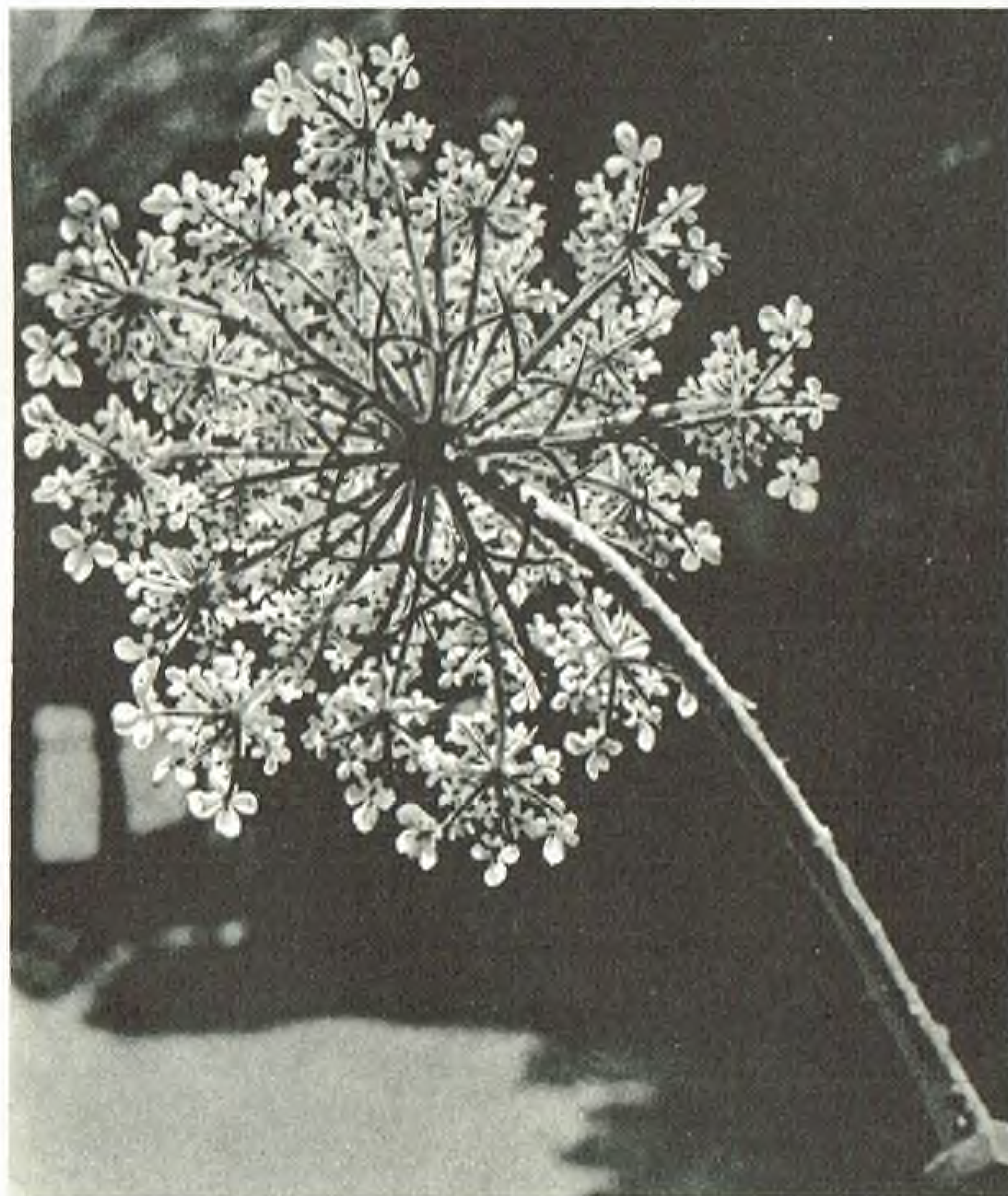
III. **Tribu de las espíreas** (*reina de los prados*). — La fórmula floral es: 5 S + 5 P + ∞ E + 5 C. Los carpelos, menos numerosos, están colocados en el receptáculo plano, unos al lado de otros, y al madurar se convierten en *folículos*, cada uno de los cuales contiene varias semillas. Obsérvese la correspondencia entre la multiplicidad de estos últimos y el escaso número de los frutos.

IV. **Tribu de las amigdaláceas** (*almendro, durazno, ciruelo, endrino, cerezo, albaricoquero*). — Fórmula floral 5 S + 5 P + ∞ E + IC. El único carpelo, en el centro de la flor, sólo contiene dos óvulos, uno de los cuales aborta. El fruto es una *drupa* cuyo hueso contiene una sola almendra.

V. **Tribu de las agrimonias** (*agrimonia, pimpinela, pimpinela mayor, pie de león* o *alquimila*). — En esta tribu, completamente aberrante, los pétalos pueden desaparecer y los estambres reducirse a cuatro e incluso a uno solo. A veces, la flor es unisexual. En todos los casos hay sólo dos carpelos unidos, cada uno de los cuales contiene solamente un óvulo que, al madurar, se convierte en un doble *aquenio*.

VI. **Tribu de las pomáceas** (*manzano, peral, membrillo, níspero, espino*). — Esta tribu es la transición de las plantas superováricas a las plantas inferováricas. La fórmula floral es:

(5 S + 5 P + ∞ E + 5 C).



Flores de zanahoria silvestre aumentadas dos veces
(Fot. R.-H. Noailles)

Los paréntesis significan que se trata de ovario ínfero. El ovario, situado en apariencia por debajo de la flor, se compone de cinco celdillas, cada una de las cuales contiene dos óvulos. El fruto es una *baya* cuyas pepitas están envueltas en una masa coriácea de tejido colénquima. En cambio, el níspero es, por excepción, una *drupa* de cinco huesos.

Usos. — *Alimenticios.* La mayor parte de los *frutos* de pepitas o de hueso provienen de las rosáceas.—*Industriales.* Los árboles frutales proporcionan *maderas de ebanistería*. Las rosáceas contienen *tanino* y de varias especies se extraen *esencias*.—*Ornamentales.* Las innumera-

bles *variedades de rosas* han sido obtenidas todas ellas a partir del escaramujo o rosal silvestre.

Familia de las umbelíferas. — En esta familia, que cuenta unas 1 500 especies en todas las regiones del Globo, los caracteres generales son numerosos y permiten una definición muy precisa:

1º *Tallo hueco*, cuya superficie presenta *surcos y venas;*

2º *Canales secretorios*, que producen *esencias;*

3º *Hojas muy recortadas;*

4º *Flores agrupadas en umbelas;*

5º *Flores* compuestas de *cinco sépalos, cinco pétalos, cinco estambres y dos carpelos*. Todas estas piezas, soldadas por su base, hacen que la *flor* sea *inferovárica*. Éste es uno de los caracteres esenciales de la familia;

6º *Ovario* compuesto de *dos celdillas*, cada una de las cuales encierra un solo óvulo;

7º *Semillas con albumen;*

8º *Fruto compuesto de dos aquenios* que, reunidos primero, se separan a continuación, si bien quedan suspendidos de un pedúnculo común.

Las diferentes especies se clasifican según la forma y la ornamentación de los aquenios, aunque esta clasificación carece de interés. Hay que señalar, sin embargo, algunas umbelíferas aberrantes, como el *cardo corredor*, cuyas hojas espinosas y flores en capítulo se parecen extraordinariamente a las del cardo.

Las raíces (tubérculos) de las umbelíferas se emplean sobre todo en alimentación.



Zanahoria silvestre: *a*, **diagrama de la flor;** *b*, **corte de la flor;** *c*, **sección del fruto**

Familia de las labiadas. — Con las *labiadas* (2 500 especies en las regiones templadas) entramos en la categoría de las plantas gamopétalas cuyos caracteres son los siguientes:

1º *Tallo de sección cuadrada*, cuyos ángulos son sostenidos por hacecillos de tejido colénquima;

2º *Hojas opuestas, simples y velludas*, que desprenden un perfume o esencia contenido en *pelos secretorios;*

3º *Flores de simetría bilateral y generalmente bilabiadas*. Hay que entender esta expresión en el sentido de que la corola tubular se termina por dos labios; uno superior, formado de dos pétalos, y otro inferior, que comprende los tres pétalos restantes;

4º *Fórmula floral* (5 S) + (5 P) + 4 E + (2 C);

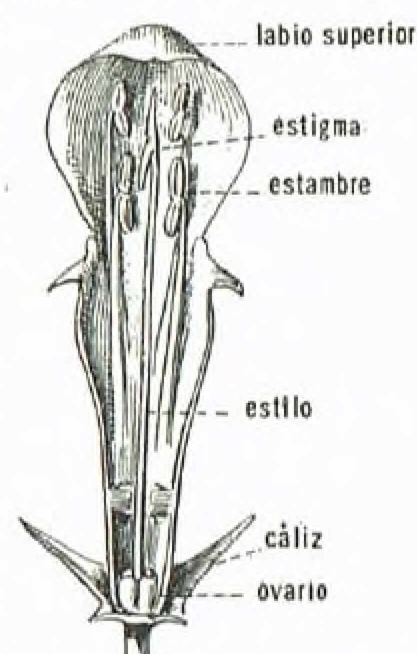
5º *Estambres de tamaños diferentes:* dos grandes y dos pequeños, todos situados debajo del labio superior;

6º *Carpelos soldados* en un *ovario ínfero*, que un falso tabique divide en *cuatro celdillas*. Hay un óvulo por celdilla;

7º *Fruto formado de cuatro aquenios*, soldados y rodeados por el cáliz;

8º *Semillas sin albumen.*

Las labiadas son, sobre todo, plantas de terreno seco y, muy especialmente, propias de la región mediterránea. Citemos el *espliego*, la *menta*, la *salvia*, el *romero*, el *tomillo*, el *serpol*, el *toronjil*, etc.



Sección de una flor de laurel blanco

Familia de las compuestas. — Esta familia es una de las más importantes del reino vegetal por el número de sus especies (unas 10 000). He aquí sus caracteres generales:

1º Aparato vegetativo que contiene sea *canales secretorios*, productores de *esencia*, sea *redes laticíferas*, productoras de *látex;*

2º *Flores agrupadas en cabezuela o capítulo* en el extremo de un ancho receptáculo, rodeadas de un *involucro*. Cada flor lleva el nombre de *flósculo*;

3º *Flósculos* compuestos de *una hilera de pelos formando cáliz*, de *cinco pétalos soldados en forma de tubo*, de *cinco estambres* y de *dos carpelos*. Todas esas piezas, soldadas por su base, hacen la *flor inferovárica;*

4º *Estambres soldados por sus anteras* en un tubo en el cual entra el estilo del ovario. Hay que recordar que este dispositivo es muy adecuado para la polinización directa;

5º *Ovario de una sola celdilla* y *óvulo único;*

6º Fruto de la categoría de los *aquenios*, pero rematado siempre por un *vilano* que facilita su diseminación por el aire;

7º *Semillas sin albumen.*

La familia de las compuestas se divide en tres tribus:

I. **Tribu de las ligulifloras** *(achicoria, diente de león, lechuga, salsifí, escorzonera)*, cuyos flósculos tienen una corola ligulada, es decir, alabeada hacia el lado externo de la cabezuela mediante una lengüeta más o menos grande. Las plantas de esta tribu tienen un látex amargo, contenido en redes laticíferas.

II. **Tribu de las tubifloras** *(cardo, centaura, aciano, alcachofa)*, cuyos flósculos son, por el contrario, tubulares, es decir, desprovistos de lígula. El aparato vegetativo posee canales secretorios que contienen una esencia.

III. **Tribu de las radiadas** *(margarita, dalia, crisantemo, girasol, aguaturma, maravilla, manzanilla, ajenjo, artemisa, siempreviva)*, cuyos flósculos periféricos son ligulados, mientras que los centrales son tubulares y generalmente de colores diferentes. La mayor parte de los órganos son recorridos por canales secretorios.

Usos. — Las compuestas tienen gran número de usos *alimenticios*, *ornamentales* y *medicinales*.

Anatomía y fisiología de las plantas superiores

Órganos de nutrición

La raíz: Partes de una raíz. Estructura primaria. Crecimiento en longitud. Dirección de crecimiento: Acción de la fuerza de gravedad o geotropismo. Acción de la humedad o hidrotropismo. Crecimiento en espesor: Crecimiento en las dicotiledóneas. Crecimiento de las monocotiledóneas. Estructura secundaria. Ramificación de la raíz. Raíces adventicias. — **El tallo:** Partes del tallo. Estructura primaria: Tallo de las dicotiledóneas. Tallo de las monocotiledóneas. Comparación entre el tallo y la raíz. Paso de la raíz al tallo. Crecimiento en longitud. Dirección del crecimiento: Acción de la fuerza de gravedad o geotropismo. Acción de la luz o fototropismo. Crecimiento en espesor: Crecimiento en las dicotiledóneas. Crecimiento en las monocotiledóneas. Estructura secundaria. Las capas anuales del líber y del leño secundarios. Dimensiones y edad de las plantas. Ramificación del tallo. Tallos trepadores: Plantas que se arrollan. Plantas con zarcillos. Plantas con garfios. Tallos rastreros. Tallos subterráneos: Rizomas. Tubercúlos. Bulbos escamosos. — **Hojas:** Partes de la hoja. Formas de las hojas. Nervadura. Filotaxis. Estructura de las hojas: Estructura del peciodo. Estructura del limbo. Estomas. Crecimiento y caída de las hojas. Hojas subterráneas

El *aparato vegetativo* de las angiospermas se compone de una *raíz*, de un *tallo* y de *hojas*, que son los *órganos de nutrición*. Después de haberlos estudiado desde el doble punto de vista de su estructura y de su desarrollo, examinaremos la influencia que ejercen sobre ellos los factores cósmicos (calor, luz, ambiente, clima, etc.). Un último capítulo será dedicado a la multiplicación vegetativa o reproducción por medio del aparato vegetativo (esqueje, acodadura, injerto).

Solamente después será estudiada la reproducción sexual.

La raíz

La *raíz* es un órgano generalmente subterráneo —por consiguiente, desprovisto de clorofila— cuya función es: 1°, fijar la planta al suelo; 2°, absorber el agua y las sales minerales del suelo; 3°, acumular reservas nutritivas. La raíz es a veces acuática y otras aérea.

Hay que distinguir la *raíz terminal*, que se encuentra en la prolongación del tallo, y las *raíces adventicias*, que nacen en un punto cualquiera del tallo e incluso de las hojas.

Partes de una raíz. — Si observamos con la lupa una raíz muy regular, como la de una lenteja de agua *(lemna)*, veremos de abajo arriba las partes siguientes:

1° La *caliptra*, especie de cofia protectora, de células cutinizadas;

2° La *región lisa*, cuya longitud es constante;

3° La *región pilífera*, cubierta de *pelos absorbentes*. Su longitud es constante y los pelos son tanto más largos cuanto más altos se encuentran. Los pelos inferiores son pelos recientemente formados a expensas de la región lisa. Los pelos superiores son pelos viejos que, al caer, agrandan la región siguiente;

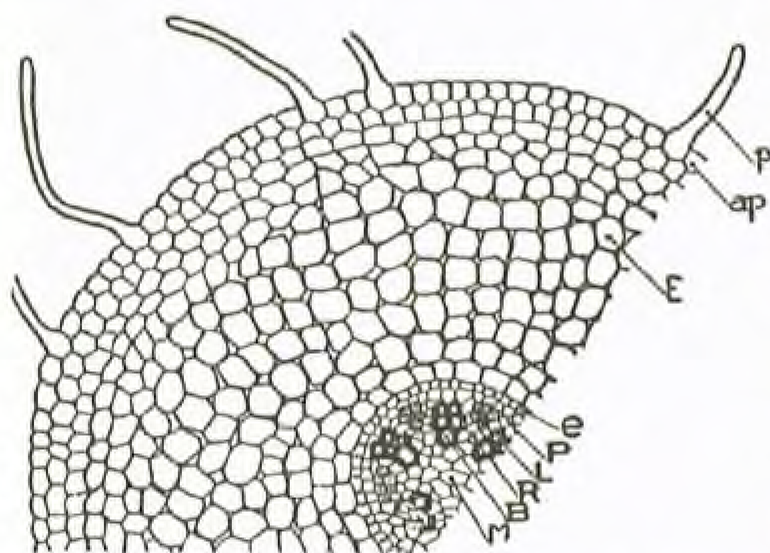
4° La *región rugosa*, en la que se ven las cicatrices de los pelos caídos.

5° El *cuello* o región de transición con el tallo.

Estructura primaria. — La estudiaremos en un corte transversal hecho en la región pilífera con una hoja de afeitar. La sección, lo más delgada posible, es sumergida durante diez minutos en lejía, con el fin de destruir el protoplasma de las células y aclarar la preparación. A continuación se lava ésta con ácido acético, que elimina el exceso de lejía, y luego con agua destilada. Por fin, se colora la preparación con carmín y verde de yodo, con lo que la celulosa se tiñe de rosa y la madera de verde. Ya sólo queda observar el corte con el microscopio, el cual nos muestra, de la periferia hacia el centro, los tejidos siguientes:

1° La **corteza,** conjunto de tejidos que sirven para la absorción, protección y acumulación de reservas. Ésta comprende:

a) La *zona pilífera*, formada de una sola capa de células largas y salientes, que constituyen los *pelos absorbentes*. Un pelo absorbente, es, pues, una célula única que puede tener cinco milímetros de larga y cuyo núcleo se encuentra en la extremidad;



Estructura primaria de la raíz: *p*, pelo absorbente; *ap*, capa pilífera; E, corteza; *e*, endodermo; P, periciclo; L, hacecillo liberiano; B, hacecillo leñoso; R, radio medular primario; M, medula

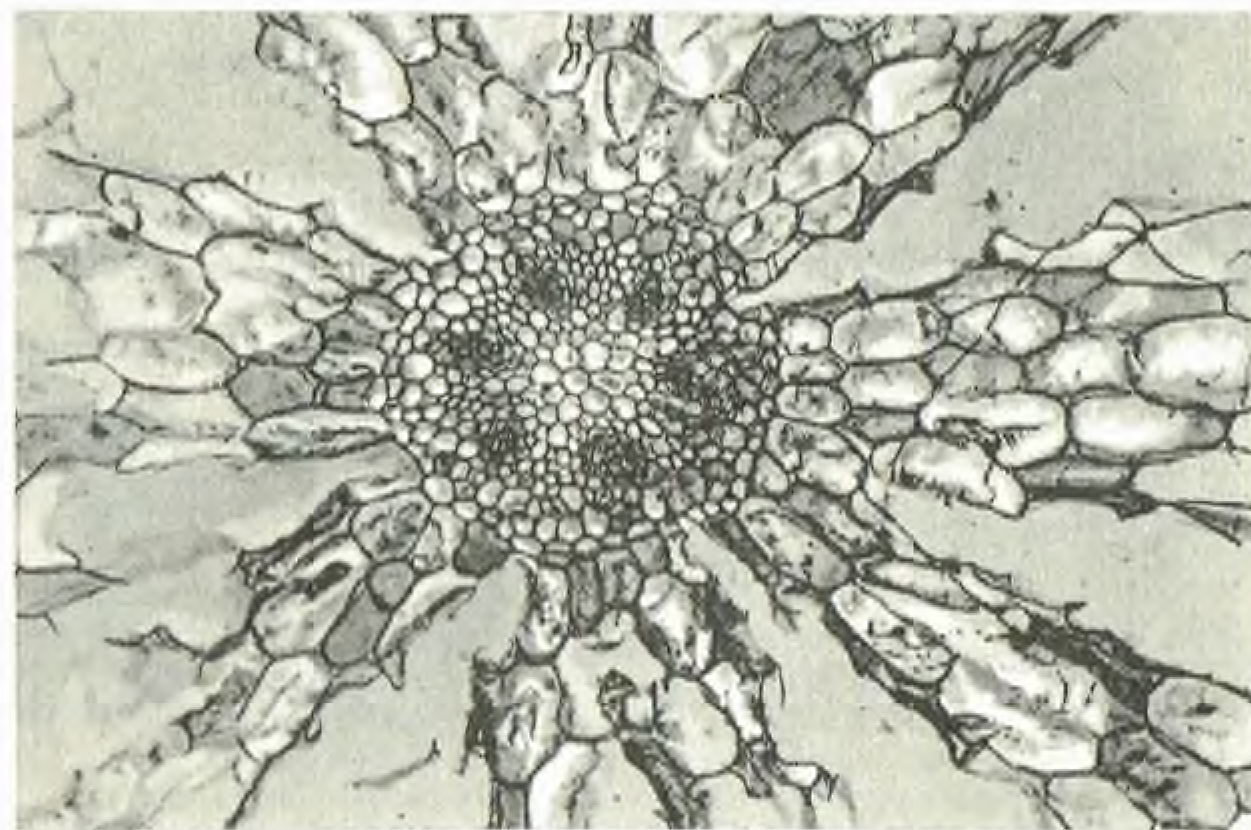
b) El *parénquima cortical externo*, formado de células poliédricas, irregulares, no separadas en sus ángulos por meatos;

c) El *parénquima cortical interno*, formado de células paralelepípedas, dispuestas con gran regularidad en capas concéntricas y en filas radiales, separadas, además, por meatos;

d) El *endodermo* o capa profunda de la corteza, cuya función es protectora. Las células que componen el endodermo están alineadas como las precedentes, pero sus paredes laterales e interna están más o menos lignificadas. En las dicotiledóneas hay un solo *cuadro* leñoso en las *caras laterales*. En las monocotiledóneas, la lignificación se extiende a las caras laterales e interna (sección en forma de herradura);

2° El **cilindro central** o **estela,** conjunto de tejidos que sirven para conducir la savia o para contener reservas. Éste comprende:

a) El *periciclo*, formado de una capa de células que alternan muy regularmente con las del endodermo;


Tipo de formación primaria: Corte de *Ranunculus ficaria* (*Fot. C. Bille*)

b) El *leño primario*, formado de *hacecillos leñosos* en número constante en cada especie. Su sección es triangular, con el ápice vuelto hacia el periciclo. Con el microscopio se ve que los vasos de la punta son *estrechos* y *anillados* o *espirales*. Éstos son los únicos capaces de alargamiento y, por consiguiente, los primeros en aparecer. En el centro, los vasos son un poco más anchos y *reticulados*. En la base del triángulo, los vasos son anchos y *punteados*. Éstos han sido los últimos en diferenciarse a expensas del meristema que los envolvía. La diferenciación procede, pues, de fuera hacia dentro, desde la punta del hacecillo visto en corte transversal. Es ésta una *diferenciación centrípeta;*

c) El *líber primario*, formado de *hacecillos liberianos* que alternan con los precedentes y son, por consiguiente, de igual número. Estos hacecillos, de sección lenticular, están formados por tubos cribosos;

d) La *medula* o parénquima central, que enlaza con el periciclo, en el intervalo de los hacecillos, por medio de los *radios medulares* o *vasos conductores*. Éste es un tejido de reserva.

En la región rugosa de la raíz, la capa pilífera ha desaparecido y la que se ha transformado en la superficial del parénquima cortical se suberiza. El resultado es una *capa suberosa* protectora. Por otra parte, aparecen en la medula hacecillos leñosos suplementarios que constituyen el *metaxilema* (del griego *meta*, después, y *xylos*, madera). Esos hacecillos están generalmente alineados con los mismos radios que los liberianos y anuncian ya la estructura que tendrá el tallo.

Crecimiento en longitud. — En el ápice de la raíz, debajo de la caliptra, se encuentran *tres células iniciales* sobrepuestas que, por multiplicación, dan nacimiento a tres meristemas o tejidos embrionarios, en los que ulteriormente se diferenciarán los distintos tejidos. Pero hay que hacer una distinción, según se trate de dicotiledóneas o monocotiledóneas.

En las *dicotiledóneas*, la célula superior produce el cilindro central; la célula media engendre la corteza; la célula inferior origina la caliptra y la *zona pilífera*.

En las *monocotiledóneas*, la célula superior produce el cilindro central; la media engendra la corteza y la *zona pilífera;* la inferior origina la caliptra.

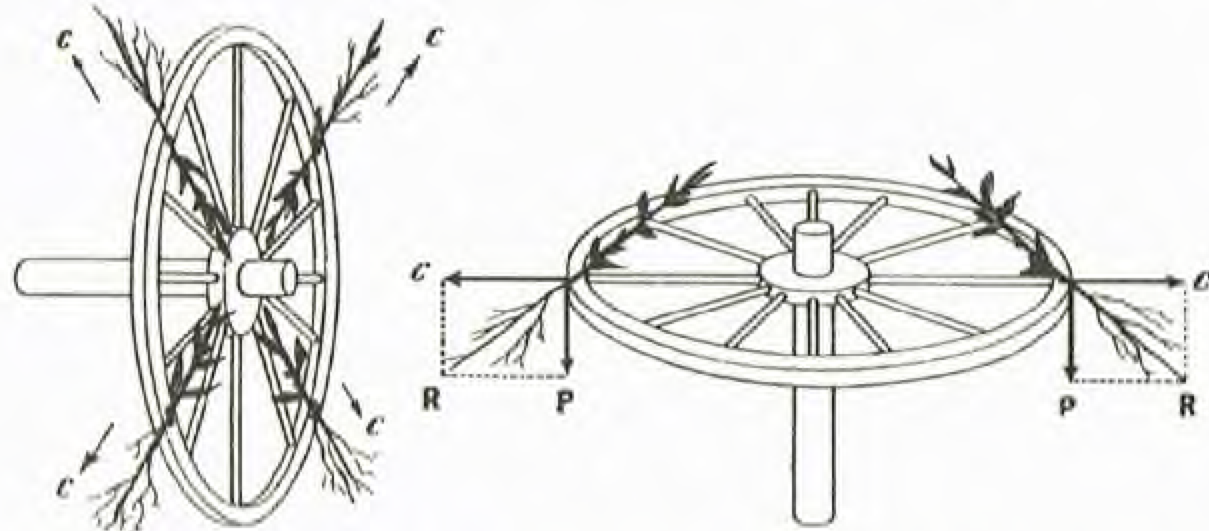
A causa de que las células se encuentran debajo de la caliptra y no en su extremidad, el crecimiento en longitud es *casi terminal* o, como se dice, *subterminal.*

Esto puede apreciarse en una raíz en la cual se hayan marcado trazos de tinta china distanciados de un milímetro a partir de la extremidad. Al cabo de un día, se comprueba que la tercera división a partir de la extremidad ha crecido mucho más que las otras.

La extremidad de la raíz se hunde en el suelo, no en línea recta, sino describiendo una hélice como la punta de un sacacorchos. Esta *circunnutación* (del latín *circum*, alrededor, y *nutare*, balancearse) le permite sortear tales obstáculos como granos de arena o pequeños guijarros.

Dirección de crecimiento. — La raíz se hunde verticalmente en el suelo. Esta dirección de crecimiento es impuesta por la *fuerza de gravedad* y por la *humedad.*

Acción de la fuerza de gravedad o geotropismo. — Puesto que la raíz se hunde en el suelo, se dice que el geotropismo es *positivo.* Esta acción de la fuerza de gravedad se demuestra por la experiencia de la rueda de Knight. Sea primero una *rueda vertical* que gira alrededor de un eje horizontal. Se fijan en la circunferencia unos trocitos de algodón en rama o musgo húmedo sobre los cuales se hacen germinar semillas. Hay que considerar tres casos:



Influencia de la fuerza de gravedad: P, acción de la gravedad; *c*, acción de la fuerza centrífuga; R, resultante

a) *Con la rueda inmóvil.* Todas las pequeñas raíces se dirigen de arriba abajo por efecto de la fuerza de gravedad;

b) *Si la rueda gira lentamente.* Las pequeñas raíces se dirigen en todos los sentidos. Efectivamente, la rotación anula el efecto de la gravedad, puesto que cada semilla presenta sucesivamente sus diferentes caras hacia el suelo;

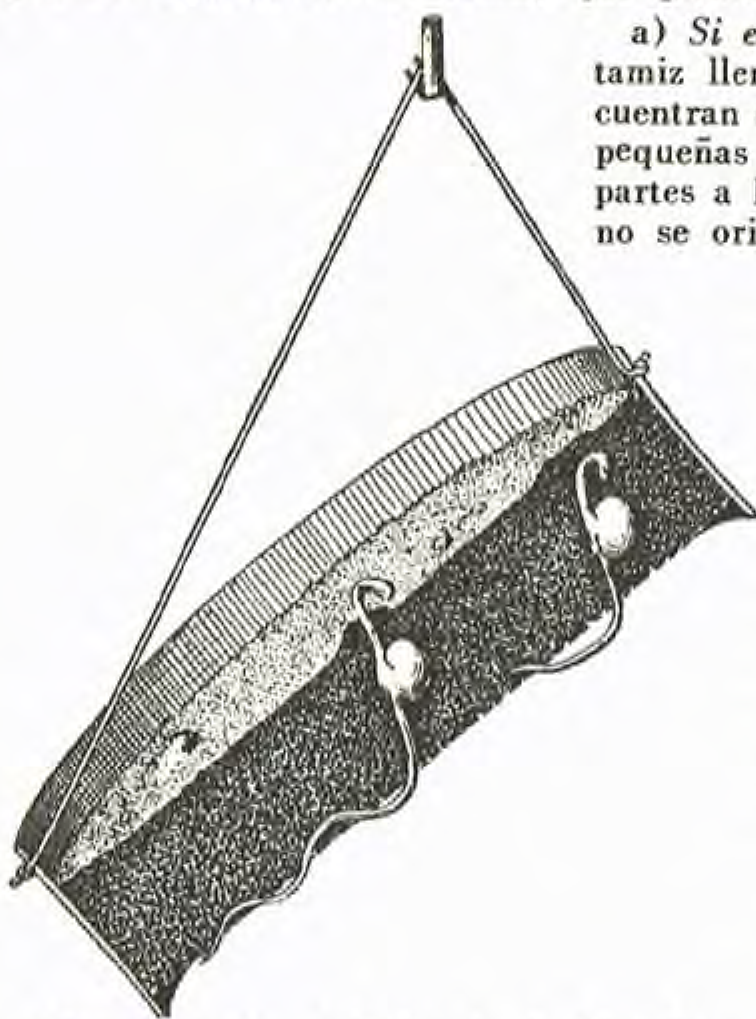
c) *Si la rueda gira de prisa.* Las raíces se orientan oblicuamente, según los radios, y se alejan de la circunferencia, porque interviene una nueva fuerza que substituye la fuerza de gravedad, o sea, la fuerza centrífuga. Veamos ahora con una *rueda horizontal* que gira alrededor de un eje vertical:

a) *Con la rueda inmóvil.* Todas las raíces se dirigen hacia abajo.

b) *Si la rueda gira lentamente.* Se produce el mismo resultado.

c) *Si la rueda gira de prisa.* Las raíces se dirigen oblicuamente, según la composición de las dos fuerzas en presencia: la de gravedad, vertical, y la centrífuga, horizontal.

Acción de la humedad o hidrotropismo. — La raíz es atraída por la humedad del suelo. El hidrotropismo es *positivo.* Esto se demuestra por la experiencia del tamiz, que puede ser horizontal u oblicuo:


Experimento del tamiz inclinado

a) *Si el tamiz es horizontal.* En el tamiz lleno de tierra húmeda se encuentran semillas en germinación. Las pequeñas raíces, sometidas por todas partes a la misma dosis de humedad, no se orientan por sí mismas y sólo obedecen a la fuerza de gravedad, que las hace salir por los agujeros del tamiz. El desarrollo de las raíces continúa en el aire, de arriba abajo;

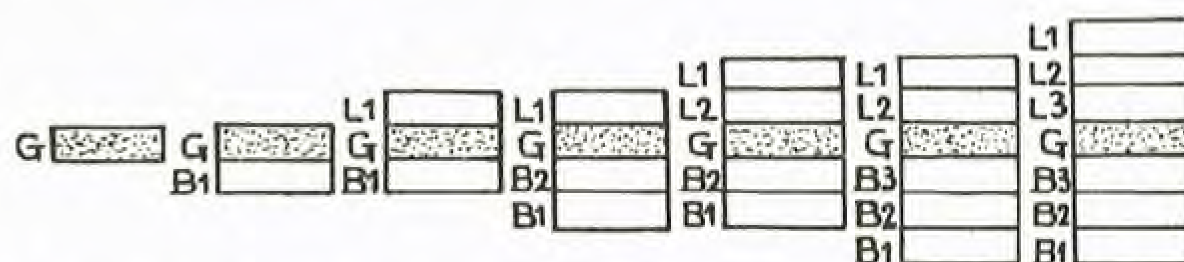
b) *Con el tamiz inclinado.* Las pequeñas raíces, sometidas por todas partes a la misma dosis de humedad, se orientan según la gravedad y no tardan en salirse del tamiz.

Consideremos una de ellas. Inmediatamente después de hacerse aérea, forma, con relación a la superficie del tamiz, un ángulo agudo y otro obtuso. Del lado del ángulo agudo, la humedad de la tierra se manifiesta más vivamente que del otro lado, por lo que la raíz se incurva por la parte del ángulo agudo y entra en el tamiz. Pero entonces la raíz se encuentra en un medio en el que la humedad, igual por todas sus caras, cesa de orientarla. La fuerza de gravedad vuelve a producir su efecto, la raíz recupera su verticalidad y se sale de nuevo del tamiz.

Crecimiento en espesor. — La mayor parte de las monocotiledóneas se limitan a reforzar la raíz sin espesarla. Las células ya existentes se lignifican o suberizan, pero no se forman nuevos tejidos. Por el contrario, las dicotiledóneas y tres monocotiledóneas (drago, yuca, áloe) producen nuevos tejidos *(formaciones secundarias)* que determinan un crecimiento en espesor de su raíz.

Crecimiento en las dicotiledóneas. — Las formaciones secundarias resultan del funcionamiento de dos *zonas generadoras*, situada una en la corteza y la otra en el cilindro central. La primera es la *capa generadora externa* y la segunda la *capa generadora interna.* Estudiaremos primero los puntos que les son comunes y después los particulares de cada una.

Funcionamiento de una capa generadora. Una capa generadora es un solo estrato de células muy activas y en vías de multiplicación. Consideremos una de estas células G. Ésta crece hacia el interior y luego se divide por un tabique en dos células G y B_1. A continuación, la célula crece hacia el exterior y se divide en dos células G y L_1, para crecer de nuevo hacia el interior, empujando la célula B_1, y dividirse en dos células G y B_2. Las divisiones se suceden de esta forma, alternativamente hacia dentro y hacia fuera. Las células ya formadas se alejan cada vez más de la capa generadora. Su orden de aparición se expresa por la sucesión de las letras B_1, B_2, B_3, etc., y L_1, L_2 L_3, etc. Ahora hay que preguntarse qué sucede con los *meristemas* externo e interno realizados a costa de cada una de las capas generadoras.



Tabicado de una célula generadora G, que origina las células L_1, L_2, L_3, las cuales se diferenciarán en líber, y las células, B_1, B_2, B_3, que originarán el leño

Capa generadora externa o suberofelodérmica. Esta capa está situada en la corteza y, algunas veces, en el periciclo. En sección, esa capa es de forma circular:

1° Hacia el exterior, la capa produce un *meristema* que no tarda en diferenciarse en *corcho* o *súber.* El corcho es un tejido de protección cuyas células muertas y aplanadas tienen la pared suberificada. Por su impermeabilidad, el corcho impide que la savia se desparrame en los tejidos situados en su exterior. Estos tejidos mueren y se desprenden de la raíz, cuya capa superficial es entonces constituida por el corcho;

2° Hacia el interior, la capa produce un *meristema* cuyas células toman una forma poliédrica, conservan sus paredes celulósicas y se convierten simplemente en *parénquima* o *felodermo.*

Capa generadora interna o liberoleñosa, llamada también *cambium.* Esta capa está contenida en el cilindro central y presenta en corte tranversal una forma sinuosa. Con respecto a los fascículos liberianos, la capa pasa por dentro del cilindro, pero por el exterior de los hacecillos leñosos. Puede decirse que esta capa se compone de una sucesión de *arcos intraliberianos* y de *arcos extraleñosos:*

1° Hacia el exterior, la capa engendra un *meristema* que se diferencia ulteriormente en *líber secundario.* Este líber es un conjunto de tubos cribosos y de células o fibras de paredes celulósicas. Los hacecillos o fascículos del líber primario son empujados hacia el exterior;

2° Hacia el interior, la capa produce un *meristema* que se diferencia en *leño secundario* y rechaza hacia el interior los hacecillos del leño primario. El leño secundario es un conjunto de vasos leñosos y de células o fibras de paredes igualmente leñosas. La mayor parte de los vasos son rayados o punteados. En primavera, en razón del aflujo de la savia, éstos son anchos y caracterizan el *leño de primavera.* En verano, a causa de la sequía, los vasos son estrechos y dan al *leño de verano* una coloración obscura. El conjunto de un leño de primavera y de otro de verano forma una *capa anual.* Con la ayuda de una lupa se pueden contar las diferentes capas anuales y determinar así la edad de una raíz. Las capas de líber son demasiado finas para poder prestarse a la misma enumeración.

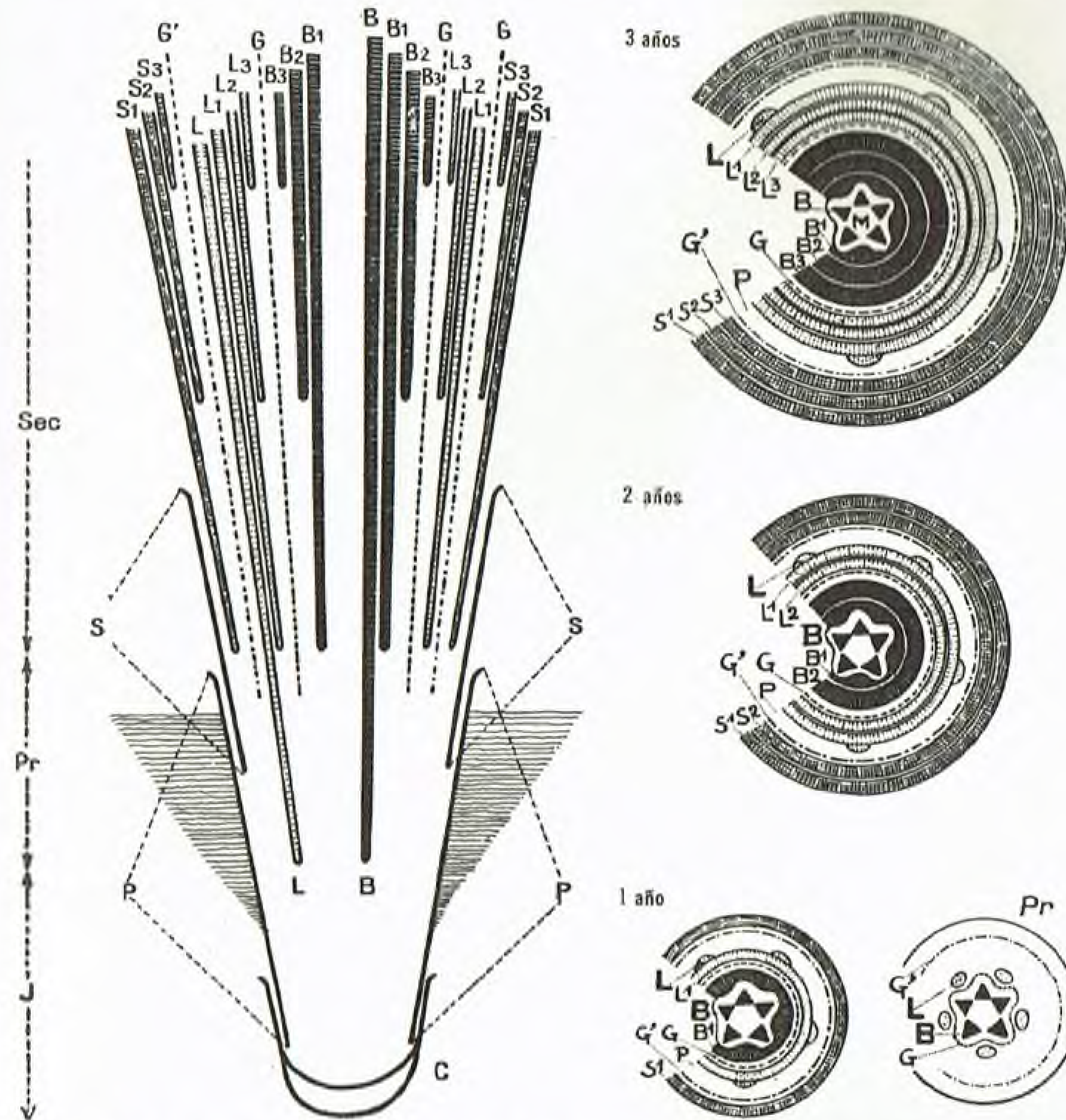
El leño y el líber secundarios son conductos *continuos* y cilíndricos que no conservan huella alguna de su primitiva forma sinuosa. Sólo en algunas plantas (judía, calabaza) son éstos *discontinuos* a causa del funcionamiento desigual de los arcos intraliberianos y extraleñosos. Estos últimos producen meristemas que no se diferencian en tejidos conductores.

Crecimiento de las monocotiledóneas. — En las tres monocotiledóneas que tienen formaciones secundarias (drago, yuca, áloe), éstas se constituyen de una manera muy especial.

Al exterior de los hacecillos primarios de las monocotiledóneas, es decir, en sus periciclos, existe una capa generadora y un meristema. Éste crece constantemente hacia el exterior y, cada año, durante el buen tiempo, se distinguen en él nuevos hacecillos.

Estructura secundaria. — Esta estructura de la raíz vieja es la estructura primaria aumentada con las formaciones secundarias y disminuida de los tejidos exteriores del corcho. En las dicotiledóneas, esta estructura implica, pues, la serie de tejidos siguientes:

1º El *corcho* o *súber;*
2º La *capa generadora externa;*
3º El *felodermo;*
4º El resto de la *corteza primaria* con el *endodermo;*
5º El *periciclo;*
6º Los hacecillos de *líber primario;*
7º El *líber secundario;*
8º La *capa generadora interna* o *cambium;*
9º El *leño secundario;*
10º Los hacecillos del *leño primario;*
11. La medula, que comunica con el periciclo por los *radios medulares* estrechos que atraviesan el leño y el líber secundarios. En la judía y la calabaza, debido a la discontinuidad de los conductos del líber y del leño, existen, además, anchos radios medulares.



Sección longitudinal de una raíz, que presenta: J, la parte nueva; Pr, la estructura primaria; Sec, la estructura secundaria; B, leño primario; L, líber primario; B_1, B_2, B_3, leño de uno, dos y tres años; G y G', capas generadoras interna y externa; C, la cofia; S_1, S_2, S_3, corteza secundaria de uno, dos y tres años

Ramificación de la raíz. — La raíz terminal comprende una raíz principal y ramificaciones o *radicelas.* Según su desarrollo relativo, se distinguen tres clases de raíces:

1º Las *raíces giratorias,* cuyo eje principal y las ramificaciones están igualmente bien desarrolladas;

2º Las *raíces fasciculadas,* en las que el eje principal es muy reducido y no se distingue ya de las radicelas o raicillas, cuyo conjunto forma un haz en el base del tallo (ej.: el trigo);

3.º Las *raíces tuberculosas,* en las que se produce el caso inverso: la raíz principal es voluminosa y repleta de substancias de reserva. Las radicelas son, por el contrario, pequeñas y parecen pelos al lado de la raíz principal (ej.: zanahoria, nabo, remolacha).

Las radicelas no están distribuidas en desorden por la raíz principal, sino colocadas en hileras según líneas generatrices que pueden ser del mismo número o doble que el de los hacecillos leñosos. De ello resultan dos clases de raíces:

1º *Raíces isósticas,* con las radicelas insertadas enfrente de los hacecillos leñosos primarios. Éstas son las raíces que tienen más de dos hacecillos leñosos (ej.: la judía).

2º *Raíces diplósticas,* con las radicelas insertas entre los hacecillos leñosos y los liberianos. Estas raíces tienen dos hacecillos leñosos que alternan con otros dos liberianos. El número de radicelas es aquí de cuatro (ej.: la col).

Desde el punto de vista de su origen, las radicelas son *endógenas,* es decir, provienen de un tejido profundo. En el lugar en que va a formarse una radicela, el *periciclo* produce una especie de yema que, al alargarse, rechaza el endodermo y digiere la corteza a su paso. Al fin, la radicela surge al exterior.

Raíces adventicias. — Además de la raíz terminal ya tratada, pueden existir *raíces laterales* o adventicias nacidas en un punto cualquiera del tallo o incluso de las hojas. Estas raíces son de diferentes clases y desempeñan funciones muy diversas. He aquí algunos ejemplos:

a) La hiedra trepa por los troncos de los árboles y los muros y se mantiene sólidamente en ellos por medio de *raíces ganchudas* dispuestas por matas a lo largo del tallo;

b) El arbusto que produce las vainas de vainilla posee *raíces prensiles* que se enroscan alrededor de un soporte;

c) La cuscuta, planta parásita, se fija sobre su huésped por medio de *raíces chupadoras;*

d) La higuera tiene grandes raíces adventicias que descienden de las ramas horizontales hasta el suelo. Una sola higuera puede tener centenares de *raíces rodrigón,* semejantes a troncos;

e) El mangle o árbol con zancos crece en el litoral de los mares cálidos y en los estuarios de los ríos tropicales. El tronco se destruye en la base y se sostiene mediante raíces adventicias dispuestas a manera de zancos o rodrigones.

Veremos, a propósito de la multiplicación vegetativa, que las raíces adventicias son utilizadas en diversos cultivos: reproducción por esqueje, acodadura, etc.

El tallo

El *tallo* es un órgano generalmente aéreo y, por consiguiente, con clorofila, que sostiene las hojas, conduce la savia y acumula, si es necesario, reservas nutritivas. Algunas veces es subterráneo o acuático. Se distinguen el *tallo principal,* que es la prolongación de la raíz central, de la que está separado por una región de transición o cuello, y los *tallos adventicios,* que nacen en cualquier punto de la raíz.

Nos ocuparemos primero de los tallos aéreos.

Partes del tallo. — Al examinar un tallo, vemos que da *hojas* de trecho en trecho. El punto en el cual se sujeta una hoja está generalmente abultado y se llama *nudo.* El intervalo entre dos nudos consecutivos es un *entrenudo.*

Las hojas son, por lo general, oblicuas con respecto al tallo. En el ángulo superior de la base de la hoja, que es agudo, se encuentra un *brote axilar* (del latín *axila*), destinado a producir una rama o ramo.

En la extremidad del tallo, los entrenudos son cada vez más cortos, y las hojas, muy apretadas, constituye el *brote terminal.* En el centro de este brote es donde se produce el crecimiento del tallo y el nacimiento de las nuevas hojas.

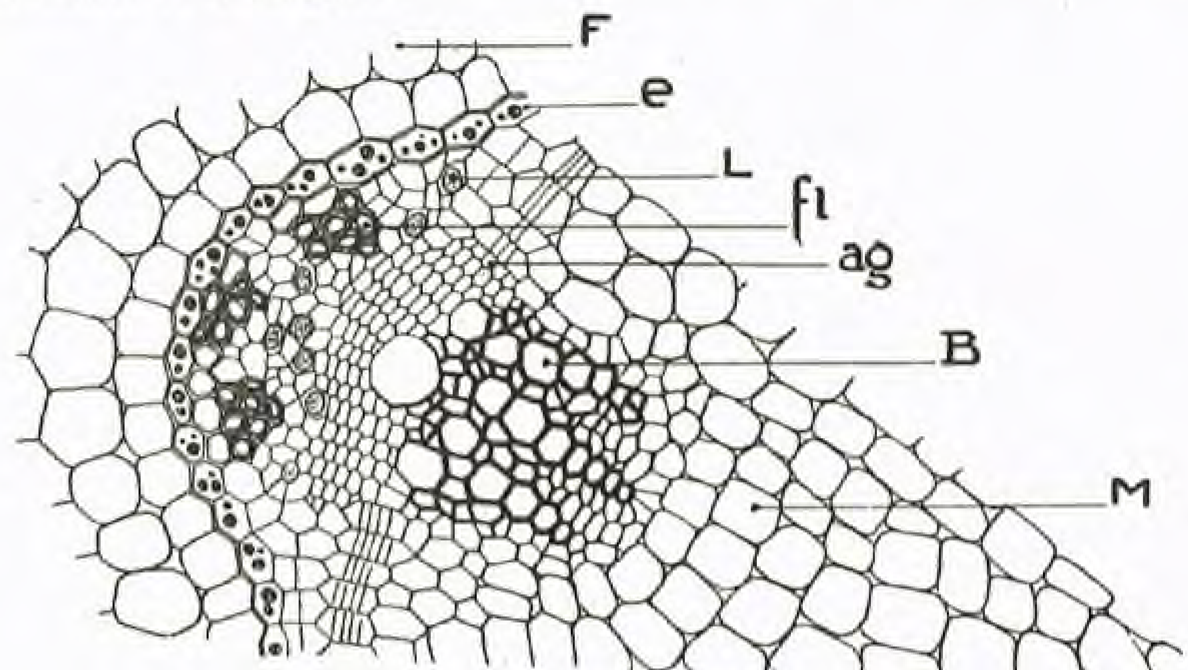
Estructura primaria. — La estudiaremos, como la de la raíz, en un corte transversal, muy fino, teñido de verde carmín de yodo. Pero hay que hacer primero la distinción entre el tallo de las dicotiledóneas y el de las monocotiledóneas.

Tallo de las dicotiledóneas. — Los diferentes tejidos que se encuentran en estas plantas desde el exterior al interior son los siguientes:

1º La **epidermis.** Este tejido externo está formado de una sola capa de células, algunas de las cuales, agrupadas de dos en dos y en forma de judía, son *células estomáticas* que limitan los *ostíolos de los estomas.* A este primer carácter, resultante de la existencia de los estomas, la epidermis une el de no poseer clorofila. La superficie de la epidermis está más o menos cubierta de una substancia impermeable y protectora que es la *cutina* o *cera.* Por esta circunstancia es muy conocida una palmera de los Andes peruanos, cuyo tallo está cubierto de una capa de cera de un centímetro de espesor que se explota, con el nombre de "cera de palma", para los mismos usos que la cera de abejas.

El tallo está generalmente cubierto de *pelos* o *aguijones* dependientes de la epidermis. Estos aguijones deben su dureza al *esclerénquima;*

2º La **corteza,** formada como la epidermis de células vivas, entre las cuales se distinguen:



Estructura primaria de un tallo: *ag,* capa generadora interna; B, leño primario; *e,* endodermo; F, corteza primaria; *fl,* fibras liberianas; L, tubos cribosos del líber; M, medula

a) El *parénquima cortical,* cuyas células son irregulares, poliédricas y dejan entre sí intervalos o *meatos.* Además, todas estas células contienen clorofila, que da al tallo su coloración verde. También se encuentran en ellas productos de asimilación clorofílica. En ciertos tallos angulosos, como los de las labiadas, o venosos, como los de las umbelíferas, existe colénquima que refuerza los ángulos o las venas;

b) El *endodermo*, o base profunda de la corteza, cuya función es protectora. Éste presenta sólo raramente los cuadros lignificados que tan netamente caracterizan el endodermo de la raíz. A veces, estos cuadros se borran incluso con la edad;

3° El *cilindro central* o *estela*, así llamado a causa de su forma y situación, y que se compone de varias partes:

a) El *periciclo*, formado de una o varias capas de células, las más externas de las cuales alternan regularmente con las del endodermo;

b) El *leño* y el *líber* primarios, representados por un número constante de *hacecillos liberoleñosos*. Cada uno de éstos comprende un hacecillo liberiano externo y otro leñoso interno.

La sección de la parte leñosa es poco más o menos triangular y con el vértice principal vuelto hacia la medula. Observada esta sección con el microscopio, vemos que los vasos de la punta son estrechos y *anillados* o *espirales*, y los primeros en aparecer. En el centro, los vasos son de un volumen medio y *reticulados*. Hacia la base del triángulo, éstos son más anchos y *punteados*. Estos últimos vasos, incapaces de alargamiento, son también los últimos en aparecer. En otras palabras, la parte leñosa se ha diferenciado del interior hacia el exterior, o sea, que se ha producido lo que se llama *diferenciación centrífuga*.

Hay que señalar que los vasos leñosos y liberianos están mezclados con *fibras* de esclerénquima y de colénquima que aumentan la solidez del tallo. Estas fibras no existían en la raíz;

c) La *medula* o parénquima medular, en la que se acumulan las reservas. Las partes de la medula que, entre los hacecillos liberoleñosos alcanzan el periciclo, son llamados *radios medulares*.

Tallo de las monocotiledóneas. — La estructura de estas plantas difiere de las precedentes por los cuatro caracteres esenciales siguientes:

1° Ausencia de endodermo;

2° Ausencia de periciclo;

3° Hacecillos liberoleñosos muy numerosos (hasta 200) y dispuestos en varios círculos concéntricos. El volumen de estos hacecillos disminuye desde el centro a la periferia;

4° La parte leñosa de cada hacecillo rodea más o menos completamente la parte liberiana.

Comparación entre el tallo y la raíz. — Las diferencias principales entre estos dos órganos de la planta son las siguientes:

1° La raíz es subterránea y desprovista de clorofila. El tallo es aéreo y verde (al menos cuando es nuevo);

2° La raíz tiene una zona pilífera con pelos absorbentes. El tallo posee una epidermis con innumerables estomas. Hay que señalar que, desde el punto de vista de su origen, la epidermis del tallo corresponde a la caliptra de la raíz;

3° El parénquima cortical es en parte regular y en parte irregular en la raíz, mientras que en el tallo es enteramente irregular. El endodermo es muy neto en la raíz y poco en el tallo. La raíz está, en suma, más diferenciada que el tallo;

4° La raíz tiene hacecillos leñosos y liberianos alternos, mientras que el tallo los posee liberoleñosos;

5° Los hacecillos leñosos de la raíz tienen sus vasos estrechos e imperfectos hacia el exterior (diferenciación *centrípeta*). La parte leñosa de los hacecillos del tallo tiene, por el contrario, una diferenciación *centrífuga*.

Paso de la raíz al tallo. — La región de este paso es el *cuello*. Sabemos que la raíz encierra *n* hacecillos leñosos que alternan con *n* hacecillos liberianos. En el tallo sólo hay *n* hacecillos liberoleñosos, en los cuales el leño se adhiere a la cara interna del líber. ¿Cómo se opera este cambio de posición y de orientación del leño? En la base del cuello, en la región rugosa de la raíz, aparecen, además de los hacecillos o fascículos leñosos habituales, otros suplementarios que alternan con los primeros y están, por consiguiente, enfrente de los liberianos. Esto es lo que se llama *metaxilema*. Un poco más arriba, se ven los hacecillos leñosos de la raíz reducirse y desaparecer, mientras que el metaxilema adquiere cada vez mayor importancia. Finalmente, los hacecillos del metaxilema se adhieren a los liberianos y constituyen los liberoleñosos del tallo.







Paso de la raíz R al tallo T, pasando por el eje hipocótilo

Crecimiento en longitud. — Este crecimiento es doble:

1° En el extremo superior del tallo, en la yema terminal, se encuentran tres células iniciales sobrepuestas. La célula superior produce la epidermis, la media engendra la corteza y la inferior da nacimiento al cilindro central. Como las células iniciales se encuentran en el ápice del tallo, el crecimiento de éste es verdaderamente *terminal* y no *subterminal* como el de la raíz;

2° Debajo de la yema terminal, y en un cierto número de entrenudos, las células, sin multiplicarse, aumentan de volumen y de longitud. De ahí resulta un crecimiento *intercalar* que se añade al crecimiento terminal;

La rapidez de crecimiento varía mucho según la especie, la temperatura, la humedad y la luminosidad, etc. La mayor rapidez de crecimiento, observada en un bambú de las regiones ecuatoriales, es de 30 centímetros por día.

Dirección del crecimiento. — De ordinario, el tallo se alarga de abajo arriba, en dirección inversa de la gravedad. Éste es el caso de los *tallos derechos*, pero hay otros que no tienen la fuerza de sostenerse y descansan sobre el suelo *(tallos rastreros)* o se enrollan alrededor de un soporte *(tallos volubles)*.

El enrollamiento de las plantas volubles exige que el extremo de su tallo progrese en forma de "hélice", como la punta de un sacacorchos. Este fenómeno de circunnutación, semejante al de la raíz, es más acusado en las plantas volubles que en las demás.

La dirección del crecimiento del tallo obedece a varios factores, entre los cuales los dos principales son la gravedad y la luz.

Acción de la fuerza de gravedad o geotropismo. — Puesto que el tallo se aleja del suelo, se dice que el geotropismo es negativo. Este fenómeno, aunque no explicado, es muy real, como demuestra el *experimento del tiesto puesto boca abajo*. Si se desnivela un tiesto, el tallo de su planta se endereza a fin de volver a su verticalidad.

Acción de la luz o fototropismo. — Los tallos son atraídos por una luz unilateral. El fototropismo del tallo es, pues, positivo. Esto se demuestra por las dos experiencias siguientes, que se completan una a otra.

1ª EXPERIENCIA. Se hacen germinar dos semillas idénticas: una a la luz y otra en la obscuridad. En el primer caso, el tallo crece normalmente y se hace verde. En la obscuridad, por el contrario, el tallo se *ahila*, permanece amarillo y los entrenudos se alargan desmesuradamente. Todo ocurre como si la obscuridad favoreciese el crecimiento en longitud, mientras que la luz lo retrasara.



Tallo dirigiéndose hacia la luz

2ª EXPERIENCIA. Pongamos la planta de un tiesto dentro de una caja que sólo presente una abertura para que penetre la luz. Al cabo de unos días veremos el tallo curvarse hacia dicha abertura. Se dice corrientemente que la planta es *atraída* por el sol. En realidad, la parte del tallo que recibe la luz se alarga menos que la que está en la sombra y de ahí la curvatura que se produce, llamada *fototropismo positivo*.

Crecimiento en espesor. — Al mismo tiempo que el tallo crece en longitud, aumenta de espesor, pero por diferentes procedimientos según se trate de una dicotiledónea o de una monocotiledónea. Nos encontramos aquí con la misma distinción que para el crecimiento en espesor de la raíz.

Crecimiento en las dicotiledóneas. — Igual que en la raíz, existen en el tallo dos *capas generadoras* que engendran *formaciones secundarias*.

Capa generadora externa o suberofelodérmica, situada en la corteza o en el periciclo. Esta capa es continua y funciona como en la raíz.

1° Sobre la cara externa, la capa engendra un *meristema* que se transforma ulteriormente en *corcho* o *súber*. Este corcho puede alcanzar 30 centímetros de espesor en el alcornoque y ser objeto de explotación. El súber es interrumpido en los puntos en los cuales el meristema conserva sus caracteres nuevos y sigue blando y permeable. Esas interrupciones del corcho aseguran la respiración de la planta y constituyen las *lenticelas* visibles a simple vista en la superficie de los árboles nuevos. Las lenticelas miden con frecuencia más de un milímetro;

2° Sobre su cara interna, la capa engendra un *meristema* que se *diferencia ulteriormente en parénquima* o *felodermo*.

Ni que decir tiene que la formación del corcho, tejido impermeable, acarrea la muerte de todos los tejidos primarios (epidermis, parte de la corteza) situados a su exterior. El corcho se convierte así en el tejido superficial del tallo.

El corcho viejo se resquebraja y cae a medida que el nuevo lo empuja. El conjunto de los tejidos muertos que se desprenden anualmente de la superficie del tallo recibe el nombre de *ritidoma* y su aspecto varía mucho según las plantas. En la encina, por ejemplo, la corteza se resquebraja y cae en jirones; en el plátano cae en grandes placas; en la vid se desprende en hebras largas que constituyen una especie de estopa alrededor del tallo.

Capa generadora interna o liberoleñosa, también llamada cambium, situada en el límite del leño primario con el líber igualmente primario. La capa atraviesa, por consiguiente, los hacecillos liberoleñosos y tiene desde su origen, en corte transversal, una forma circular. Dicha capa se compone de *arcos fasciculados*, contenidos en los hacecillos liberoleñosos, y de *arcos interfasciculados:*

1° Sobre su cara externa, el cambium engendra un *meristema* que se transforma ulteriormente en *líber secundario* y rechaza hacia el exterior los hacecillos del líber primario. Este líber de nueva formación comprende tubos cribosos y fibras de colénquima;

2° Sobre su cara interna, el cambium engendra un *meristema* que más tarde se diferencia en *leño secundario*, conjunto de vasos rayados, vasos puntuados, células asociadas y fibras de esclerénquima. Los hacecillos del leño primario son empujados hacia el interior.

Crecimiento en las monocotiledóneas. — La mayor parte de las plantas de este grupo conservan durante toda su vida una estructura primaria. Multiplican simplemente el número de círculos de sus hacecillos liberoleñosos, pero están desprovistas de verdaderas formaciones secundarias.

Hay que exceptuar algunas monocotiledóneas (dragón, yuca, áloe) que, cada año, aumentan el diámetro de su tallo y de su raíz con la formación de nuevos tejidos, debidos a un meristema cuyo funcionamiento hemos estudiado a propósito de la raíz.

Estructura secundaria. — Puede decirse que la estructura secundaria es igual a la primaria, aumentada por las formaciones secunda-

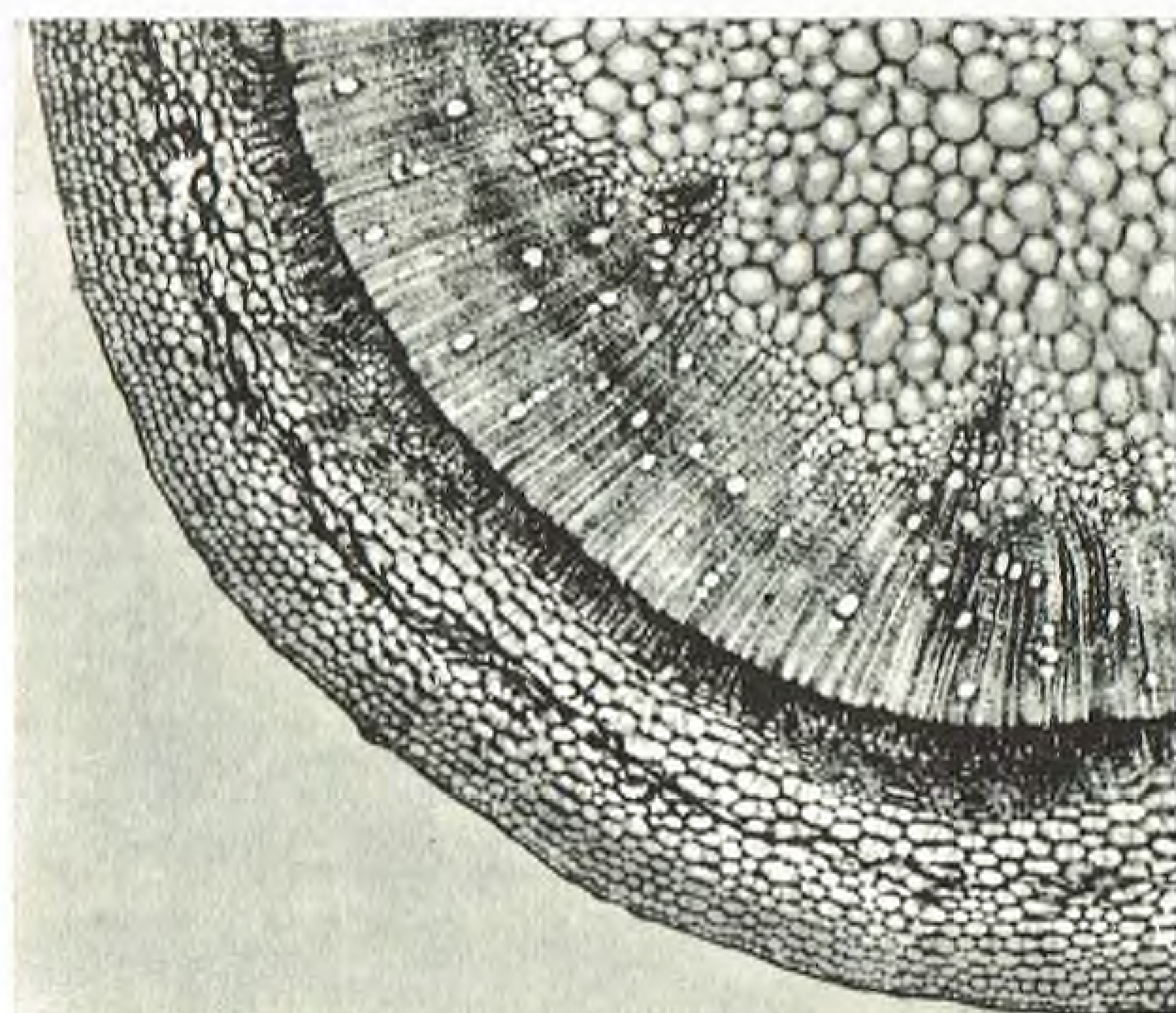
rias y disminuida de los tejidos primarios exteriores del corcho. Es decir, un tallo viejo posee, del exterior al interior, los tejidos siguientes:

1º La **corteza,** que comprende el *corcho,* la *capa generadora externa,* el *felodermo,* el resto del *parénquima cortical primario* y el *endodermo.* Éste es casi imperceptible, debido a la desaparición de los cuadros leñosos;

2º El **cilindro central,** que comprende el *periciclo,* los hacecillos de *líber primario,* el *líber secundario,* la *capa generadora interna* o *cambium,* el *leño secundario,* los *hacecillos del leño primario* y la *medula.* Ésta se halla en relación con el periciclo mediante los *radios medulares* que atraviesan el leño y el líber secundarios. Estos radios son particularmente anchos en la judía y en la calabaza, en las cuales hemos visto que el leño y el líber secundarios sólo se forman enfrente del leño y del líber primarios.



Hay que señalar que la estructura secundaria del tallo se parece mucho a la de la raíz. Sólo se distingue verdaderamente en los hacecillos del leño y del líber primarios, por encontrarse éstos situados sobre los mismos radios y no en alternación.



Tipo de formación secundaria: tallo de ricino (sección transversal) [*Microfot. C. Bille*]

Las capas anuales del líber y del leño secundarios.

— Cada año se forma una capa de líber secundario que empuja *hacia el exterior* las capas de los años precedentes. Estas capas son delgadas y semejantes a las hojas de un libro: de ahí el nombre de *líber* dado a esta parte de la planta.

De la misma forma, cada año se forma una capa de madera secundaria que empuja *hacia el interior* las capas de los años precedentes. Estas capas son mucho más espesas que las de líber y nos procuran un medio de conocer la edad de la planta. Pero esto sólo es posible como consecuencia del fenómeno siguiente:

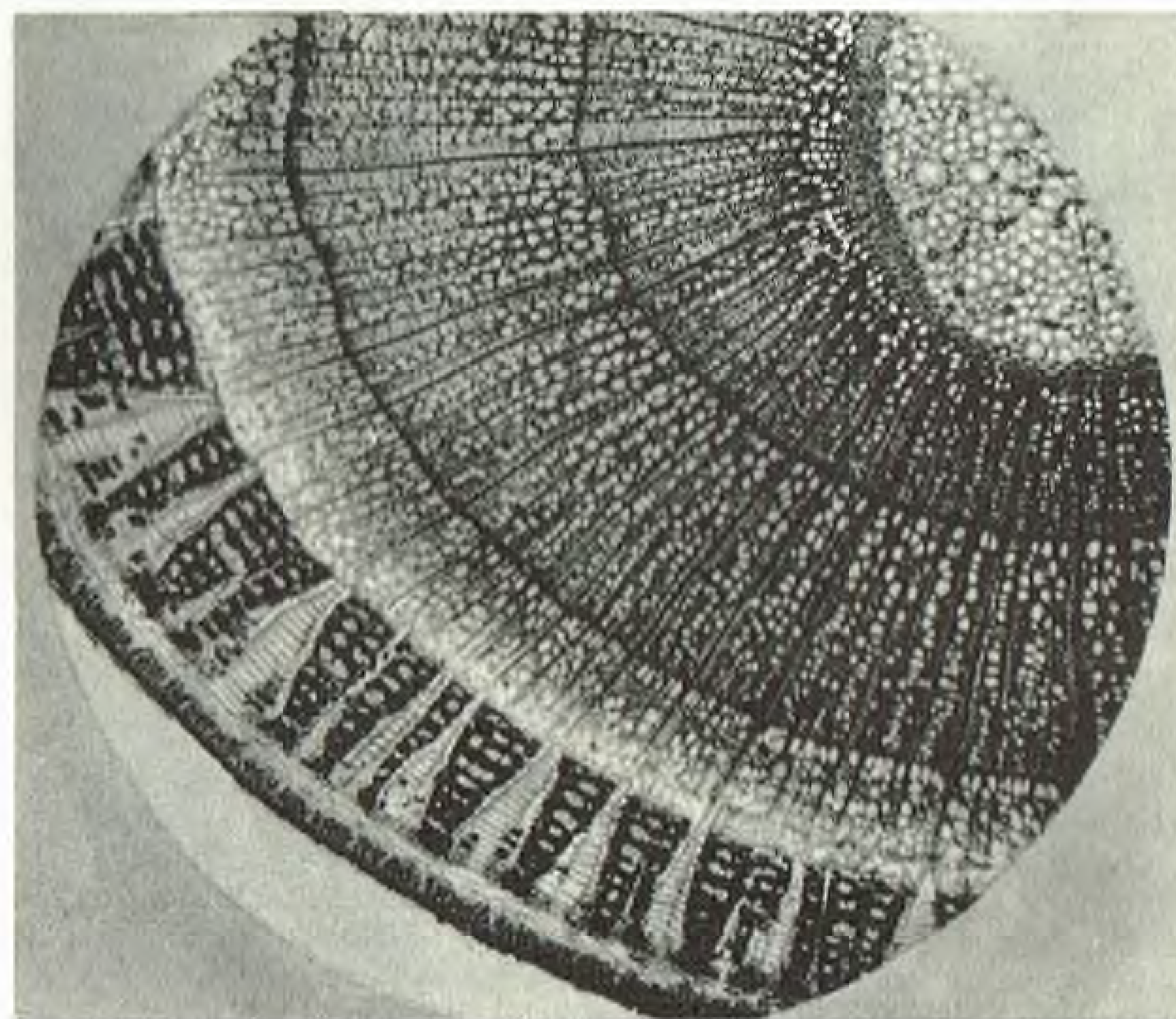
1º Cada primavera, a causa de la abundancia de la savia, la madera que se constituye está formada de vasos anchos, en los que las cavidades predominan sobre las partes llenas. Es la *madera de primavera,* clara y leve;

2º Cada verano, período seco, la madera que se añade a la precedente está formada de vasos angostos. Las partes llenas predominan sobre las cavidades. Es ésta una *madera de verano,* obscura y pesada;

3º En otoño e invierno, el crecimiento cesa para reanudarse en la primavera siguiente.

En resumen: *cada capa anual es el resultado de la yuxtaposición de una capa de madera de primavera, clara, y de una capa de madera de verano, obscura.* Como el límite entre las dos capas anuales es perfectamente neto, basta contar los anillos claros u obscuros para conocer la edad del árbol.

Por otra parte, no todos los árboles crecen con la misma rapidez. Una sección de encina, por ejemplo, puede tener 50 anillos obscuros, mientras que una de álamo, del mismo diámetro, sólo 20. El primer árbol tiene, sin embargo, 50 años, y el otro 20.



Tallo de tilo, de dos años y medio *(Microfot. C. Bille)*

Esto depende: 1º, de la naturaleza del árbol (de su especie); 2º, de la naturaleza del suelo. Los sauces, los álamos y los alisos crecen al borde de los ríos, en terreno siempre muy húmedo, por lo que la mayoría de sus vasos son anchos y poco apretados. La madera de estos árboles es clara y blanda. Ésta es la "madera blanca" empleada por los carpinteros. Por el contrario, la encina, y sobre todo el boj y el laurel, crecen en terrenos calizos y secos, por lo que su madera es pesada y compacta.

En un árbol, las partes más viejas de leña son las más duras, debido a estar desecadas y apretadas, y a que no circula en ellas la savia. Estas partes, situadas en el centro del árbol, constituyen su *corazón* y a ellas se oponen, bajo el nombre de *albura* (del latín *albus,* blanco), las más blandas, más blancas y más nuevas.

Dimensiones y edad de las plantas.

— Las plantas de pequeñas dimensiones son *hierbas* o *plantas herbáceas.* El tallo de las hierbas carece de dureza, aunque puede ser *anual, bianual* o *vivaz* y poseer un gran número de capas leñosas. Las plantas de mayores dimensiones son arbustos o árboles. El tallo es en ellos duro y vivaz y recibe, según los casos, el nombre de *tronco* (encina) o de *estípite* (palmera).

Los árboles más altos son las secoyas de California y los eucaliptus de Australia, algunos de los cuales pasan de los 100 metros.

Los árboles más gruesos tienen de 10 a 15 metros de diámetro, como los baobabs de África.

Algunos árboles son sumamente viejos, como la encina "Júpiter" del bosque de Fontainebleau (Francia), que tiene seiscientos años; el ahuehuete de la Noche triste de Alvarado, que se conserva en México; los castaños del Etna y los olivos de Jerusalén, que tienen un millar de años. Los baobabs y los cipreses pueden alcanzar de cinco a seis mil años.

Ramificación del tallo.

— Algunos tallos no se ramifican, tales como los *estípites* de las palmeras y las *cañas* de los cereales y los bambúes. Una caña es un tallo hueco cuya cavidad axial es interrumpida solamente por tabiques situados en los nudos.



Corte de una rama de cuatro años, que muestra cómo se produce una ramificación

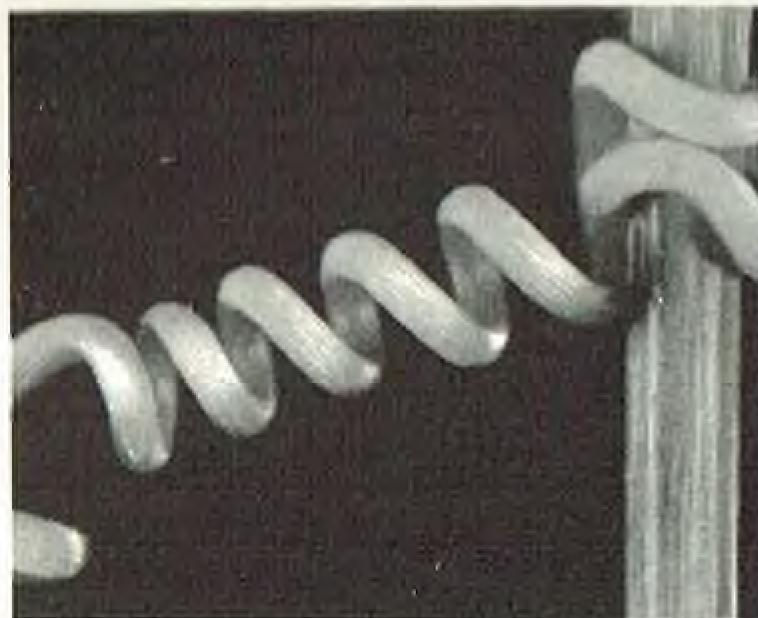
Todos los demás tallos, en particular los *troncos* de los árboles, se ramifican. Estas ramificaciones se llaman *ramos* o *ramas* y nacen en general de yemas axilares que, como su nombre indica, se encuentran en las axilas de las hojas y tienen un origen externo (al contrario de las radicelas, que es interno).

La disposición de las ramas confiere a los árboles un aspecto característico. Citemos, por ejemplo, el pino parasol, el álamo piramidal y el sauce llorón.

También existen *ramos adventicios* que nacen en un punto cualquiera del tallo e incluso de la raíz. En este caso son llamados *retoños.* Para obtener ramas de mimbre de calibre uniforme se secciona la cabeza de los sauces *(desmoche)*: sobre el corte brotan ramos adventicios, todos de la misma edad y diámetro. Del mismo modo, las *tallas* están formadas de ramos adventicios que nacen en las secciones de los troncos de los árboles a ras del suelo, en los bosques sometidos a talas regulares.

Tallos trepadores.

— Los tallos incapaces de mantenerse erguidos pueden ser trepadores o rastreros. Los trepadores suelen arrollarse alrededor de su soporte o bien fijarse por medio de ganchos, zarcillos, etc.



Formación de un zarcillo *(Fot. Claire)*

Plantas que se arrollan. — Estas plantas reciben el nombre de *volubles* y entre ellas figuran la campanilla y el lúpulo. El ápice de su tallo, al arrollarse, describe una hélice de izquierda a derecha, en el sentido de las agujas del reloj, en las plantas *sinestrorsas* (lúpulo), y una hélice de derecha a izquierda, o sea en sentido contrario al caso anterior, en las plantas *dextrorsas* (campanilla). Este arrollamiento en forma de hélice representa una exageración de la circunnutación general de los tallos.

Plantas con zarcillos. — La vid ordinaria y la vid virgen tienen algunas ramas transformadas en zarcillos. La clemátide, la calabaza y el guisante poseen *hojas* o *folíolos* transformados en zarcillos. En ambos casos, los zarcillos son sumamente sensibles: en cuanto su extremidad toca un soporte se arrollan a su alrededor. A continuación, el zarcillo da vueltas como un sacacorchos y aproxima la planta al soporte. En un zarcillo hay tantas espiras en un sentido como en el otro: la mitad de las vueltas las da hacia la derecha y la otra a la izquierda.

Plantas con garfios. — Como tipo tenemos la hiedra. A lo largo del tallo se forman mechones de raíces adventicias que fijan la planta al soporte.

Tallos rastreros. — Son aquellos que se extienden sobre la superficie del terreno. Ejemplo: los estolones del fresal. Estos tallos tienen tres caracteres especiales: 1° la reducción de sus tejidos de sostén; 2° la atrofia de sus hojas; 3° su aptitud para producir raíces adventicias. Más adelante se verá el empleo de los estolones del fresal para los acodos.

Tallos subterráneos. — Hay tallos que no salen jamás de tierra y que a veces pueden confundirse con las raíces, como los rizomas, los tubérculos y los bulbos escamosos.

Rizomas. — Tomemos como ejemplo la planta llamada "sello de Salomón", frecuente en los lugares húmedos y cuyas hojas se parecen a las del muguete o lirio de los valles. Sólo se ven salir de tierra las hojas, que dan unas flores como campanillas. El tallo es subterráneo y comprende varios segmentos (una decena como máximo) dispuestos en serie lineal. Cada sección corresponde a un año. El más nuevo da las hojas actuales y una yema que originará la parte del año siguiente. Los segmentos anteriores sólo presentan una cicatriz circular —de ahí el nombre de "sello de Salomón"— que corresponde a las hojas ya desaparecidas.



Rizoma de sello de Salomón

La estructura de los rizomas (del griego *rhiza*, raíz) difiere de la de los tallos aéreos: 1° por el gran desarrollo de los tejidos de protección (capa suberosa, endodermo, corcho); 2° por la reducción de los tejidos de sostén (esclerénquima, leño); 3° por la ausencia de clorofila; 4° por la abundancia de reservas amiláceas.

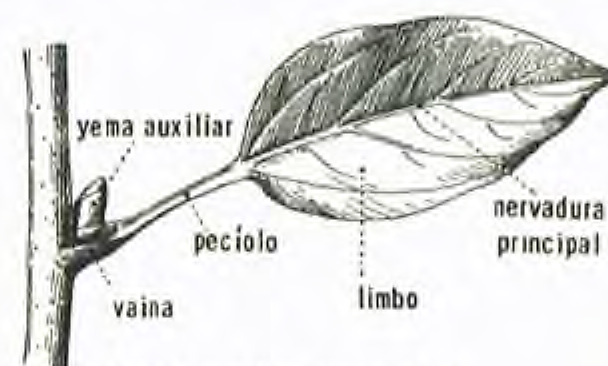
Tubérculos. — Las patatas, boniatos y chufas no son raíces, pese a que se encuentran en la base de las plantas y bajo tierra, sino verdaderas ramas subterráneas hipertrofiadas cuyo número puede acrecentarse por *aporcadura*. Contienen abundantes reservas nutritivas: almidón e inulina.

Examinemos con cuidado una patata: en su superficie se encuentran unos "ojos" que comprenden cada uno una hoja pequeña reducida a una escama y una yemita axilar. El tubérculo es, por consiguiente, un verdadero tallo con varios nudos y entrenudos. En uno de sus extremos hay una yema terminal. Si un tubérculo se expone a la luz en una atmósfera húmeda, germina, de sus yemas salen ramas y aparece la clorofila.

Bulbos escamosos. — Los bulbos *escamosos* o *macizos* son una especie de cebollas formadas por un tallo corto e hinchado cuyo extremo presenta, como todos los tallos, una yema terminal. Las hojas, reducidas a *escamas* apergaminadas, revisten su superficie. En la base se encuentra una cabellera de raíces adventicias. A este tipo pertenecen los bulbos del tulipán y el gladíolo, que no deben confundirse con las cebollas de otras plantas: estas cebollas, en realidad, están constituidas principalmente por hojas espesas y carnosas y serán estudiadas al hablar de las hojas.

Hojas

Las *hojas* son órganos generalmente aéreos, sostenidos por el tallo y provistos de clorofila. Pueden ser consideradas como verdaderos laboratorios vegetales donde, con una intensidad máxima, ocurren los siguientes fenómenos: 1° la respiración; 2° la asimilación clorofílica y la síntesis de las más diversas substancias; 3° la transpiración. Su número abundante y su gran superficie favorecen esta triple función.



Partes de la hoja

Partes de la hoja. — Una hoja ordinaria se compone de tres partes:

1° El *limbo* o parte plana recorrida por las *nervaduras*;

2° El *pecíolo*, que une la hoja al tallo;

3° La *vaina* o parte inferior del pecíolo.

A veces el pecíolo falta y la hoja se llama *sentada* o *sésil*.

La vaina puede tener una extensión más o menos grande e incluso rodear el tallo a todo lo largo de un entrenudo *(hojas envainadoras)*; puede prolongarse por encima del pecíolo y formar una lengüeta suplementaria o *lígula (hojas liguladas)*. Con frecuencia se divide en dos partes simétricas que se llaman *estípulas (hojas estipuladas)*. Las *estípulas* parecen hojas que se encuentran situadas a ambos lados del pecíolo de la hoja principal.

Formas de las hojas. — La forma del limbo es muy variable y constituye un buen carácter para la diferenciación de las plantas. Se distinguen:

1° *Hojas enteras* (lila);

2° *Hojas dentadas* (castaño, avellano);

3° *Hojas lobuladas* (roble);

4° *Hojas cordiformes* (nenúfar);

5° *Hojas lanceoladas* (sagitaria);

6° *Hojas cintiformes* (trigo);

7° *Hojas pinatisectas* (perejil);

8° *Hojas compuestas*, con entrantes profundos en el limbo, los cuales llegan hasta la nervadura principal. Cada división es un *folíolo*. Éstos no se pueden confundir con las hojas, puesto que no poseen vaina ni estípula en la base. Las hojas compuestas pueden ser de dos clases:

a) *Hojas palmadocompuestas* (castaño de Indias, trébol);

b) *Hojas pinadocompuestas* (nogal, acacia). Los folíolos en este caso están dispuestos a derecha e izquierda, como las barbas de una pluma (en latín *penna*). En el extremo de la nervadura principal se encuentra un folíolo impar (acacia) o un zarcillo (guisante);

9° *Hojas laciniadas*, cortadas enteramente en bandas estrechas, como ocurre en muchas plantas acuáticas.

Finalmente, hay hojas que se transforman en *zarcillos*, como en la calabaza. A veces sólo es el pecíolo el que se arrolla alrededor de un soporte (clemátide), o bien sólo el folíolo terminal de una hoja pinadocompuesta el que se transforma en zarcillo (guisante).

Nervadura. — La observación de una hoja al trasluz permite ver el limbo recorrido por un gran número de hilillos que incluso a veces sobresalen en la cara inferior de la misma, llamados *nervios foliares*. Su disposición o *nervadura* es típica en cada especie, y se distinguen:

1° La *nervadura paralela* (trigo), cuyos nervios foliares son paralelos y están unidos entre sí por nervios transversales. La hoja es cintiforme;

2° La *nervadura palmeada* (vid, hiedra), en la que aparecen varios nervios divergentes, como las varillas de un abanico, que parten del ápice del pecíolo. Cada uno de los nervios se ramifica a su vez en otros;

3° La *nervadura pinada*, que es la más frecuente y en la cual existe un nervio principal que lleva a derecha e izquierda nervios de segundo orden.

En todos los casos, las ramificaciones de los nervios producen en el limbo el dibujo de una red muy compleja.

Filotaxis. — Recibe este nombre la disposición de las hojas sobre el tallo o sobre las ramas; se distinguen:

1° Las *hojas verticiladas*, es decir, dispuestas en forma de collar o verticilo en cada nudo (adelfa o laurel rosa);

2° Las *hojas opuestas*, dispuestas por pares en cada nudo (lilas). De uno a otro nudo las hojas forman un ángulo recto entre sí;

3° Las *hojas aisladas* o *alternas*, insertas una a una en cada nudo. En este caso, las hojas se sitúan, desde el ápice hasta la base del tallo, sobre una espiral que se puede materializar por medio de un hilo blanco. Se fija el hilo en la base de una hoja cualquiera y se arrolla alrededor del tallo, pasando sucesivamente por la base de las diferentes hojas hasta llegar a la situada exactamente encima o debajo de la primera. El hilo describe distintas espiras y encuentra cierto número de hojas (aparte de la primera o punto de partida). La relación entre el número de vueltas y el de hojas es constante para cada especie. Las relaciones más frecuentes son: $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$ y $8/21$. Cada uno de estos valores se obtiene sumando los numeradores y los denominadores de las dos relaciones precedentes de la serie. En el trigo, por ejemplo, la divergencia es $1/2$, es decir, que las hojas se sitúan sobre el tallo, según dos generatrices opuestas, mientras que en el abedul es $1/3$, o sea, que las hojas se insertan según tres generatrices.



Clases de hojas: 1. Lobulada del ricino; 2. Lobulada del arce; 3. Lobulada del acónito; 4. Palmadocompuesta del castaño; 5. Opuestas de la menta; 6. Verticiladas del laurel rosa

En la mayor parte de los casos, (roble, manzano, ciruelo, peral, etc.), la relación es $^2/_5$: hay que dar dos veces la vuelta al tallo con el hilo y encontrar cinco hojas para volver a la generatriz primitiva. El ángulo de divergencia entre dos generatrices consecutivas es de 720° : 5 = 144°.

Estructura de las hojas. — Las hojas viven muy poco tiempo para poder llegar a tener una estructura secundaria. Incluso las "hojas perennes" (acebo, hiedra) caen todos los años, pero son reemplazadas por otras nuevas a medida que se marchitan. Los árboles de "hojas caducas", las pierden todas las mismo tiempo y cuando brotan lo hacen también simultáneamente.

Veamos primero la estructura del pecíolo y luego la del limbo.

Estructura del pecíolo. — Esta estructura es intermedia entre la del tallo y la del limbo. Ciertos pecíolos tienen una sección circular, como el tallo, y un círculo completo de haccecillos liberoleñosos. Pero se puede ver que éstos son desiguales y simétricos con relación a un plano. Otros pecíolos tienen una simetría bilateral aún más clara. Su cara superior es acanalada y el círculo de hacecillos queda reducido a un arco. En este arco, los hacecillos son, a medida que se alejan del plano de simetría, cada vez más pequeños. El leño se encuentra en la cara superior y el líber en la inferior. Esta disposición se explica por comparación con la del tallo.

Estructura del limbo. — En un limbo cortado transversalmente y observado con el microscopio, distinguimos las siguientes partes:

1° *Epidermis superior*, cutinizada y desprovista de estomas. La capa de cutina es bastante gruesa en algunas hojas (boj, hiedra) y forma una cutícula que se puede separar con la punta de un cortaplumas;

2° *Parénquima en forma de empalizada*, constituido por una o varias capas de células prismáticas, comprimidas entre sí y ricas en cloroplastos. Vistas en corte tienen la disposición de una empalizada. A la luz solar, los cloroplastos se agrupan en las caras laterales; en la penumbra, se reúnen en la cara superior de cada célula;

3° *Parénquima lagunoso* o *intersticial*, formado por células poligonales o redondeadas que dejan entre sí grandes intervalos o *lagunas*, algunas de las cuales comunican con el exterior, que son *cámaras estomáticas* o *estomas aeríferos*. Todas estas lagunas o intersticios contienen aire rico en gas carbónico;

4° *Epidermis inferior*, poco cutinizada, pero perforada por numerosos ostíolos que comunican con las cámaras estomáticas. Sobre una hoja de col se calcula que existen unos 600 ostíolos por milímetro cuadrado, lo cual representa una decena de millones en una hoja de dimensiones medias. Más adelante insistiremos sobre los estomas;

5° Las *nervaduras*, o sea, *hacecillos liberoleñosos* que proceden del pecíolo y, por lo tanto, del tallo. El leño está en la cara superior, el líber en la inferior, y terminan de la siguiente manera: unos hacecillos se anastomosan con las nervaduras vecinas y carecen en realidad de fin; los otros se encogen, y pierden sucesivamente su líber y sus vasos punteados y reticulados. En el extremo subsisten sólo algunos vasos anillados y espirales, los cuales se transforman en el borde de la hoja en estomas acuíferos.

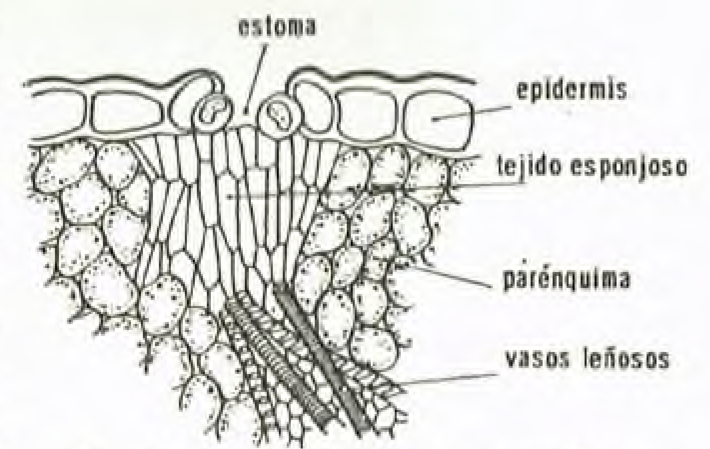
En muchos casos, las nervaduras están reforzadas por una vaina de *colénquima* o *esclerénquima*.

Las hojas así constituidas son *bifaciales*, ya que la cara superior y la inferior son distintas. En otras ocasiones sucede lo contrario, de modo que muchas de las hojas que se presentan erguidas (iris) y que reciben por tanto la luz por ambas caras, poseen estomas y parénquima en forma de empalizada o intersticial.

Estomas. — Hay dos clases de estomas, si bien hasta el presente sólo hemos citado una:

1° *Estomas aeríferos*, que son los más difundidos sobre la superficie de la hoja. Su cámara, libre, está llena de aire que sirve para la respiración, la asimilación clorofílica y la transpiración;

2.° *Estomas acuíferos*, situados en el borde o extremidad de la hoja y mucho menos numerosos que los precedentes. Su cámara estomática contiene un tejido blando, incoloro, esponjoso y empapado de agua en el cual termina una nervadura. Estos estomas sirven para la sudación o excreción de agua líquida.



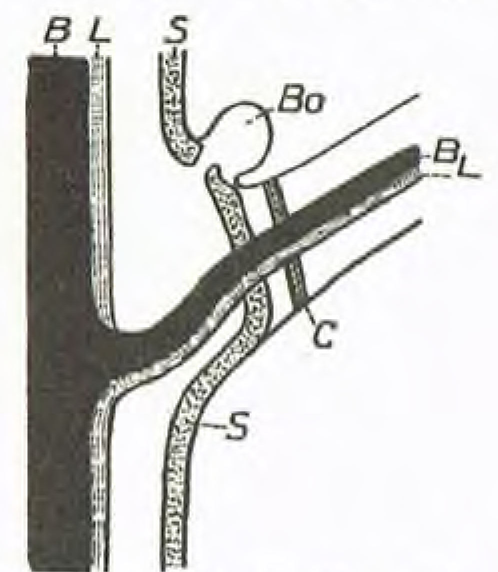
Corte de un estoma acuífero

Crecimiento y caída de las hojas. — Las hojas se forman en el centro de la yema terminal del tallo. Cada una de ellas aparece como un cojín que aumenta progresivamente de longitud. El crecimiento es terminal e intercalar. La epidermis de las hojas enlaza con la del tallo, a cuya corteza unen también su parénquima.

A medida que las hojas envejecen, se separan de las yemas como consecuencia del crecimiento de los entrenudos y adquieren la posición vertical u horizontal que las caracteriza.

En muchas plantas, las hojas caen simultáneamente en otoño (hojas *caducas*); en otras, como el boj o la hiedra, viven un tiempo variable y se desprenden por separado (hojas llamadas propiamente *perennes*).

La *caída de las hojas* es un fenómeno complejo, que no se presenta de improviso. Hacia el lugar del pecíolo, donde se producirá la separación, aparece una zona generadora transversal que engendra sobre sus dos caras una pequeña capa de corcho o súber. A continuación, esta zona degenera y la hoja sólo queda sostenida por los hacecillos liberoleñosos. Basta un ligero movimiento del aire para hacerla caer. Posteriormente la herida se cicatriza y el resto del pecíolo acaba asimismo por desprenderse.



Corte de un tallo y de una hoja poco antes de caer: B, leño; L, líber; C, células aislantes; S, corcho; Bo, yema axilar

Hojas subterráneas. — Los tallos subterráneos están desprovistos de hojas (rizomas) o éstas son *escamosas* y rudimentarias (tubérculos, bulbos escamosos). En este caso, las hojas subterráneas pueden ser también espesas y *carnosas* y contener reservas nutritivas. Tal ocurre con los *bulbos foliares* o *cebollas*, como la cebolla vulgar y el bulbo del jacinto. Si se separan todas las hojas o túnicas de la cebolla, podrá verse en el centro un tallo rudimentario coronado por una yema terminal y que lleva en su base una cabellera de raíces adventicias. Cada hoja posee una yema axilar que, en el caso particular del ajo, puede desarrollarse independientemente. Así resulta una *cabeza de ajo* o *bulbo compuesto*, cuyas partes integrantes se llaman *dientes*.

Acción del medio ambiente sobre las plantas

Acción del calor. Acción de la luz. Acción de los alimentos. Acción de la humedad. Acción del medio ambiente subterráneo: Comparación entre la raíz y el tallo. Comparación entre los tallos subterráneos y los aéreos. Tallos convertidos experimentalmente en subterráneos. Acción del medio ambiente acuático: Comparación entre la parte aérea y la acuática de un mismo tallo. Comparación entre las hojas aéreas, flotantes y sumergidas. Hojas convertidas experimentalmente en acuáticas. Acción del clima alpino: Caracteres debidos a la intensidad de la luz. Caracteres debidos a las variaciones bruscas de temperatura. Caracteres debidos a la brevedad del período vegetativo. Caracteres debidos a la sequedad atmosférica. Acción de los demás climas. Distribución en altitud. Distribución en latitud

Todo ser viviente, y por lo tanto toda planta, vive en un *medio ambiente* (subterráneo, acuático, etc.) del cual conocemos cierto número de componentes, llamados *factores ambientales*. Los unos son *factores materiales*: humedad, alimentos, atmósfera. Los otros son *factores energéticos*: fuerza de gravedad, calor, luz, electricidad. Entre estos diversos factores, algunos actúan sobre la estructura de los órganos y

son capaces de transformarlos en gran parte. Así ocurre con los llamados factores morfogénicos, muy importantes en la teoría de la evolución.

Consideremos primero la acción de varios factores morfogénicos (calor, luz, alimentos, humedad), examinados aisladamente. Veamos luego la acción del propio medio ambiente (subterráneo o acuático). Por último, consideremos la influencia del clima (clima alpino, mediterráneo y ártico).

Acción del calor. — La temperatura ambiental interviene de un modo activo en la distribución geográfica de las plantas. Una especie determinada vive solamente entre ciertos límites de temperatura y exige en el curso de su desarrollo cierto número de calorías.

Desde un punto de vista morfogénico se pueden citar las dos siguientes experiencias:

1° La zanahoria silvestre es *anual* y posee una pequeña raíz en forma de cola de ratón. Sembrándola con retraso, se impide que produzca las flores y semillas en una sola estación, con lo cual llega a ser *bienal*. La raíz se hincha desmesuradamente para acumular, durante el primer año, las reservas nutritivas que utilizará durante el siguiente;

2° Si por medio de estufas alternamos las temperaturas altas y bajas del medio ambiente, la planta no crece, sino que se queda enana y sus hojas se cubren de pelos cortos.

Acción de la luz. — Al tratar del tallo, se ha indicado que la luz uniforme retrasa el crecimiento en longitud y que la luz unilateral origina una curvatura *(fototropismo positivo)*. Muchas plantas, y sobre todo numerosas flores, se dirigen hacia la luz, y por el hecho de seguir la marcha solar, reciben el nombre de *plantas brújulas*. Las plantas se orientan hacia el Este durante la mañana, al Sur al medio día, y al Oeste al llegar la noche. Ejemplos: el tornasol, el heliotropo y el salsifí.

También se ha indicado que las *hojas horizontales*, cuya parte superior se encuentra más iluminada que la inferior durante el curso del día, son *bifaciales*, mientras que las *verticales*, como las del trigo, las del iris, etc., tienen las dos caras idénticas.

Bonnier pudo comprobar, al cultivar diferentes plantas bajo la acción de una luz eléctrica continua, que las hojas eran más verdes y que el parénquima en forma de empalizada se extendía cada vez más a expensas del parénquima lagunoso, que terminaba por desaparecer.

Acción de los alimentos. — Los *abonos* poseen una gran importancia agrícola. En los *terrenos salinos* (orillas del mar y cercanías de las minas de sal), las plantas son enfermizas y cloróticas, volviéndose las hojas espesas, carnosas y blancuzcas. **Molliard** realizó la siguiente experiencia para demostrar la influencia de los alimentos en el desarrollo de las plantas: nutrió unos rábanos con azúcar y consiguió que las hojas fueran más verdes y que el tallo se hinchase lo mismo que la raíz hasta llegar a constituir un enorme tubérculo lleno de admidón (en lugar del azúcar de un rábano normal).

Acción de la humedad. — La *humedad* del suelo es indispensable para la germinación, pero es necesario que no sea demasiada ni escasa. Cada especie tiene un *óptimo de humedad* que, junto con su temperatura, regula la distribución geográfica de esa planta.

La *humedad atmosférica* ejerce asimismo una gran influencia de tipo morfogénico. Se puede demostrar experimentalmente que las plantas que crecen en una atmósfera seca poseen hojas estrechas y coriáceas y numerosas espinas. Sus estomas aparecen hundidos con respecto a la superficie de la hoja y se protegen, por medio de pelos u otros dispositivos, de una transpiración demasiado fuerte. Por el contrario, las plantas espinosas (retama espinosa, agracejo o berberis) pierden sus espinas si son cultivadas en una atmósfera húmeda.

Acción del medio ambiente subterráneo. — Hay tres métodos para comprobarlo:

1° **Comparación entre la raíz y el tallo.** — La raíz posee más tejidos protectores (cofia, capa suberosa, corcho) que el tallo, pero menos tejidos esqueléticos o de sostén (esclerénquima, colénquima). Su parénquima está desprovisto de clorofila, pero acumula una mayor cantidad de substancias de reserva.

2° **Comparación entre los tallos subterráneos y los aéreos.** — Los tallos subterráneos son los rizomas, los tubérculos y los bulbos escamosos. Comparemos un tubérculo (patata) con un tallo aéreo de la misma planta:

Tallo aéreo	*Tallo subterráneo*
Cilíndrico	Engrosado en tubérculo
Epidermis	Corcho (corteza o piel)
Colénquima	Ningún tejido de sostén
Esclerénquima	
Parénquima verde	Parénquima incoloro
Cloroplastos	Amiloplastos

Al mismo tiempo, las hojas insertas en los tallos subterráneos son de tipo *escamoso*, rudimentarias y pardas, o bien, como en el caso de las cebollas, *espesas* y *carnosas*, y llenas de substancias nutritivas.

3° **Tallos convertidos experimentalmente en subterráneos.** — La aporcadura de las patatas tiene por objeto obligar las ramas aéreas a que sean subterráneas. **Constantin** hizo experiencias análogas sobre numerosas plantas y en todos los casos comprobó:

a) Aumento de los tejidos protectores;
b) Reducción de los tejidos de sostén;
c) Acumulación de reservas y tendencia a la suberización;
d) Reducción de los estomas;
e) Atrofia o hipertrofia de las hojas;
f) Desaparición de la clorofila.

Estos caracteres se deben a la influencia del medio ambiente subterráneo y se explican precisamente por las propiedades ambientales: *dureza, densidad, obscuridad* y *humedad.*

Acción del medio ambiente acuático. — Esta influencia se puede estudiar de diversas maneras:

1° **Comparación entre la parte aérea y la parte acuática de un mismo tallo.** — Las *utricularias* viven en los pantanos y desarrollan una parte de sus tallos en el agua y la otra en el aire:

Tallo aéreo	*Tallo acuático*
Epidermis con cutícula y estomas, pero sin clorofila	Epidermis sin cutícula ni estomas, pero con clorofila
Con esclerénquima	Sin esclerénquima
Parénquima con pequeñas lagunas	Parénquima con grandes lagunas
Leño y líber normales	Leño y líber atrofiados

2° **Comparación entre las hojas aéreas, flotantes y sumergidas.** — La *sagitaria*, planta común en los estanques y remansos de los ríos, posee tres clases de hojas, que comparamos a continuación en su forma y estructura:

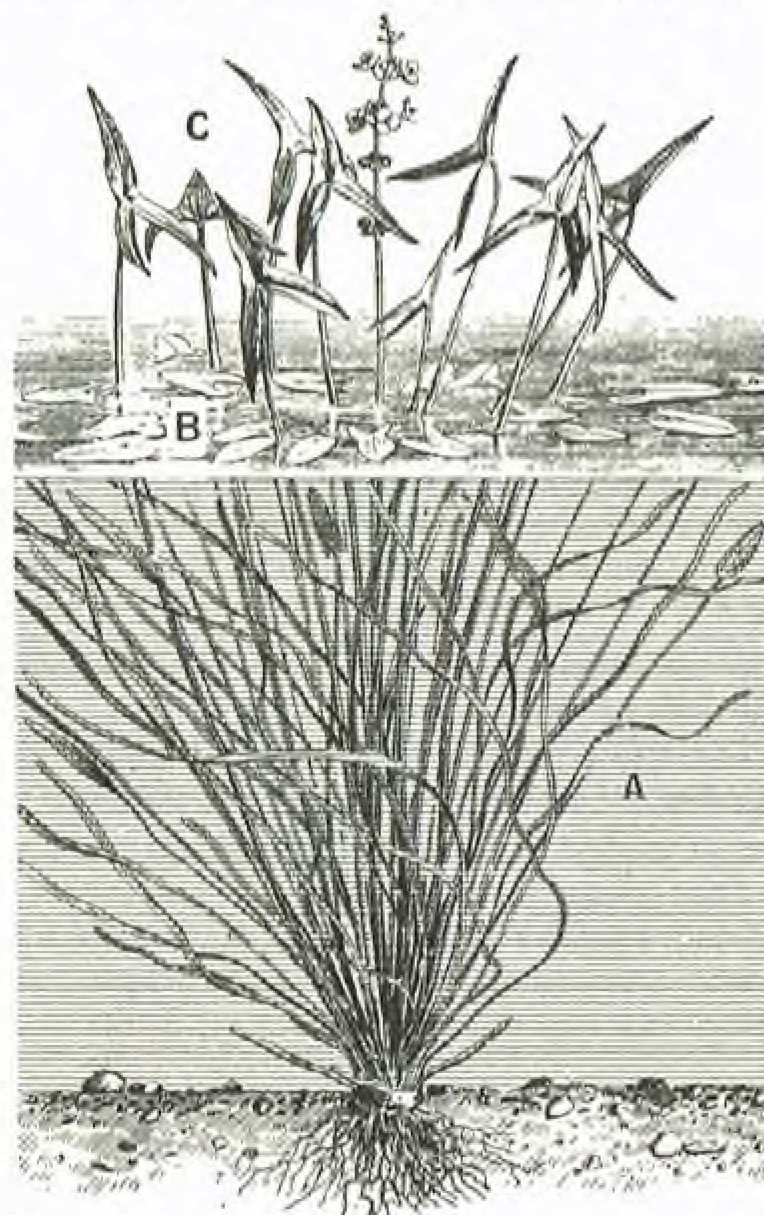
Hojas aéreas	*Hojas flotantes*	*Hojas sumergidas*
Lanceoladas	Cordiformes	Laciniadas
Cutinizadas	Cutinizadas	No cutinizadas
Con esclerénquima	Con esclerénquima	Sin esclerénquima
Estomas en la cara inferior	Estomas en la cara superior	Sin estomas
Parénquima en forma empalizada y lagunoso		Parénquima lagunoso
Epidermis sin clorofila		Epidermis clorofílica
Nervaduras bien desarrolladas.		Nervaduras atrofiadas

3° **Hojas convertidas experimentalmente en acuáticas.** — **Constantin** comprobó, al cultivar nenúfares y sagitarias bajo el agua, que todas las hojas adquieren forma laciniada y la estructura de las hojas acuática.

De un modo general, el medio ambiente acuático se caracteriza por su *densidad* igual a la de las plantas, su *humedad* total, su *iluminación* y su *aereación* reducidas. La planta reacciona frente a estos factores mediante:

a) La reducción de los tejidos de sostén;
b) La reducción de los tejidos conductores;
c) La supresión de los estomas;
d) La formación de lagunas que contienen reservas de aire;
e) El aumento de la cantidad de clorofila.

La estructura y la forma exterior de la planta se simplifican, e incluso hay hojas acuáticas que quedan reducidas a las epidermis y a una sola capa de células parenquimatosas.



Sagitaria con sus hojas: A, sumergidas; B, flotantes; C, aéreas

Acción del clima alpino. — Tomándolo como ejemplo, su acción sobre las plantas fue estudiada por **Bonnier:** 1°, comparando plantas de origen montañoso con plantas habituales de los llanos; 2°, cultivando en montaña plantas de los llanos, y viceversa.

Los caracteres predominantes del clima alpino son: *a) luz intensa*; *b) variaciones bruscas e importantes de la temperatura*; *c) sequedad atmosférica*; *d) brevedad del período de vegetación*, que sólo dura unas semanas o unos meses durante el verano.

Las plantas alpinas poseen, por consiguiente, un conjunto de caracteres que se pueden agrupar de este modo:

1° **Caracteres debidos a la intensidad de la luz.** — Aumento del tejido en forma de empalizada, hojas más verdes y asimilación clorofílica más intensa, con lo que aumenta la cantidad de substancias de reserva. Las patatas sembradas en regiones montañosas son más ricas en fécula y, asimismo, el néctar de las flores alpinas y la miel que de ellas proviene son productos más azucarados y perfumados que los originados en el llano;

2° **Caracteres debidos a las variaciones bruscas de temperatura.** — Reducción de las partes aéreas en provecho de las subterráneas: tallos

cortos, hojas en forma de rosetón, raíces tuberculosas, rizomas, tubérculos y bulbos donde se acumulan las reservas;

3° **Caracteres debidos a la brevedad del período vegetativo.** — Mayoría de plantas bienales o vivaces o perennes;

4° **Caracteres debidos a la sequedad atmosférica.** — Para restringir la respiración: hojas pequeñas, vellosas, de cutícula espesa, con estomas hundidos y protegidos por pelos.

Acción de los demás climas. — Todo clima ejerce una influencia particular que da a los vegetales caracteres propios.

El *clima mediterráneo*, por ejemplo, actúa por su sequedad y luminosidad. Las plantas que en él se encuentran tienen en su mayoría hojas vellosas, estomas hundidos y protegidos, abundante tejido en forma de empalizada, asimilación clorofílica intensa, flores ricas en néctar y muy perfumadas, espinas, etc.

El *clima ártico* se caracteriza por su humedad, su luz débil, pero continua (días de seis meses), su temperatura baja y la brevedad de su período de vegetación. Los raros vegetales que logran adaptarse son de corta talla (abedul enano, sauce herbáceo) con gran desarrollo de las partes subterráneas. La mayoría son perennes y tienen una asimilación clorofílica intensa, que se nota por la abundancia de substancias de reserva, el néctar y el color de las flores, etc.

Una especie vegetal cultivada en el llano o en la montaña, en el Norte o en el Sur, puede modificar de tal forma sus características que dé origen aparentemente a especies completamente diferentes, lo que constituye un argumento de gran valor en favor del lamarckismo.

Distribución en altitud. — A medida que se asciende por una montaña puede verse que la vegetación aumenta hasta los 1 500 metros. A partir de esta altitud, aparecen los bosques: primero con árboles de hojas caducas (robles, hayas), luego con otros de hojas perennes (pinos, abetos, alerces) que desaparecen hacia los 2 300 metros. A continuación vienen las praderas salpicadas de saxífragas y gencianas con árboles enanos de trecho en trecho (abedul enano, sauce herbáceo). Finalmente, a partir de los 2 700 metros aproximadamente, la roca sólo está cubierta por una débil vegetación constituida por líquenes. Todas estas clases de vegetación constituyen otras tantas zonas escalonadas unas sobre otras.

Distribución en latitud. — Partiendo de los bordes del Mediterráneo y dirigiéndonos hacia el norte de Europa, evitando las cordilleras montañosas, se pueden apreciar sucesivamente:

a) Una zona de plantas propias del litoral mediterráneo: olivo, laurel, naranjo, mirto, roble verde, alcornoque, pino de Alepo y pino piñonero, a los cuales la aclimatación ha mezclado algunas especies de los países cálidos: palmera, plátano, eucalipto, etc.;

b) Una inmensa zona de vegetación que se extiende hasta el norte de Suecia. En otro tiempo, extensos bosques de los cuales sólo existen hoy vestigios, cubrían una gran parte de esta zona. En las bajas latitudes crecían los árboles de hojas caducas; en las latitudes más elevadas dominaban las coníferas;

c) En Laponia o en Islandia. una zona de *praderas árticas*;

d) Por último, aún más al Norte, una zona de *tundras* o llanuras heladas.

En resumen, las variaciones de latitud producen los mismos efectos que las de altitud.

Multiplicación vegetativa

Multiplicación natural. Estacas. Acodadura. Injerto: Variaciones por injerto

Una planta puede perpetuarse de dos modos diferentes: por *reproducción* y por *multiplicación*. La *reproducción* se efectúa por medio de *células reproductoras diferenciadas* y puede ser axesual *(esporulación)* o sexual *(fecundación)*, si bien la diferencia entre estos dos modos es a veces difícil de establecer. La *multiplicación*, por el contrario, al no necesitar órganos reproductores, se efectúa por medio del aparato vegetativo, del cual se separa una parte para producir una nueva planta: se trata entonces de una *multiplicación vegetativa*.

Vamos a estudiar primeramente la multiplicación natural de las plantas y luego los procedimientos artificiales de multiplicación por medio de estacas, injertos y acodos.

Multiplicación natural. — Este medio de perpetuación se encuentra extraordinariamente difundido entre las plantas, como se ve en los siguientes ejemplos:

1° Las bacterias se multiplican por *división*;

2° Las levaduras lo hacen por *gemación*. En el primer caso, la división produce dos seres de igual tamaño; en el segundo, los seres son desiguales: la yema es más pequeña que la célula de la cual proviene. Hay que tener en cuenta que la división y la gemación sólo tienen lugar cuando las condiciones vitales son favorables, pero si éstas desaparecen, se produce una esporulación;

3° El micelio del hongo se multiplica por *fragmentación*;

4° Las algas azules *(Nostoc, Oscillatoria)*, pueden desprender fragmentos del talo y reproducir una nueva alga. Estos fragmentos se llaman *hormogonias*;

5° Los líquenes se multiplican por *soredios*, que comprenden a la vez filamentos del hongo y células del alga;

6° Los musgos y helechos pueden emitir *propágulos* unicelulares o pluricelulares de formas muy variadas que, nacidos sobre el gametofito (musgo, prótalo), originan siempre otro nuevo;

7° Una planta que crece en bosques con alto grado de humedad, la *Ficaria*, produce en la axila de sus hojas unos *bulbillos* con estructura radicular que, al caer, engendran una nueva planta. En ciertas variedades, éste es el único modo de reproducción, ya que sus flores son estériles;

8° Varias plantas acuáticas, como la *Hydrocharis*, producen *hibernáculos* o bulbillos análogos a los precedentes, pero destinados a pasar el invierno en el fondo del agua en estado de vida lenta;

9° Los *tubérculos* de la patata, del tupinambo, etc., tienen por función natural multiplicar la planta; para ello se separan unos de otros y producen en su superficie raíces y ramas adventicias, que es lo que sucede cuando una patata germina;

10 Ciertos bulbos, como el del ajo, están compuestos de pequeños bulbillos o *dientes* que se separan unos de otros y reproducen nuevas plantas;

11 En las raíces de muchos árboles (acacia blanca, codeso, etc.) se forman ramas adventicias o *retoños* que salen de tierra, producen hojas, raíces adventicias y por último se separan de la planta madre;

12 Los tallos rastreros o *estolones* del fresal se entierran en su extremidad y engendran una nueva planta que se separa posteriormente de aquella de que proviene.

Estacas. — Este procedimiento de multiplicación artificial consiste en separar de una planta un trozo de tallo o de hoja, llamado *estaca*, *esqueje* o *cogollo*, y hundirlo en tierra para que forme raíces y ramas adventicias.

Por ejemplo, si se quiere obtener un sauce o un álamo, basta cortar una rama en punta y hundirla en la tierra. Al cabo de poco tiempo aparecen en la sección del tallo raíces adventicias que permiten la nutrición de la estaca y producen un nuevo árbol.

La propagación por estaca o esqueje da resultado con las plantas ricas en savia: sauce, álamo, vid, caña de azúcar, plátano, etc. A veces suple completamente la reproducción por semilla: el banano, por ejemplo, es estéril, y la totalidad de los álamos (álamos de Italia) que crecen en las orillas de los ríos franceses son árboles hembras propagados por estacas.

Una variedad de begonia puede multiplicarse por medio de un simple trozo de hoja, que funciona como esqueje.

La ventaja de esta clase de propagación sobre la siembra de semillas es que la nueva planta crece rápidamente y sin variación. Su inconveniente es que la planta comienza su vida con la edad de la que la originó.

Acodadura. — Los acodos son simples estacas o esquejes que se separan de la planta madre cuando han brotado las raíces adventicias. Es una reproducción segura, ya que la nueva planta es nutrida por la planta madre hasta que posee una resistencia lo bastante fuerte para poder vivir libremente.

Así, por ejemplo, los fresales poseen tallos rastreros llamados *estolones*. Basta enterrar uno de éstos para que forme raíces adventicias y origine un nuevo fresal. Posteriormente se corta la comunicación con el fresal inicial. Este procedimiento tiene su origen en la multiplicación natural de la planta.



Acodo sencillo

Cuando un vegetal, como el laurel rosa, tiene tallos rígidos que le impiden curvar sus ramas hacia el suelo para enterrarlas, se rodea una parte de la rama con un recipiente que contiene tierra muy húmeda; tan pronto como se desarrollan las raíces adventicias se corta la rama y se transplanta al sitio adecuado.

Injerto. — El injerto es la implantación de una planta sobre otra. El *injerto* se inserta sobre la planta patrón o *portainjerto*, con lo cual se establece una asociación de provecho mutuo o simbiosis.

Para ello hay que poner en contacto las capas generadoras liberoleñosas de las dos plantas a fin de que se establezca una comunicación entre los tejidos conductores con intercambio de savias. Y hay varios procedimientos: injerto por aproximación, de hendidura. en forma de corona, de flauta, de escudo, etc.

Para que el injerto sea eficaz hay que utilizar plantas que puedan vivir en asociación. Ahora bien, éstas no son obligatoriamente especies

del mismo género, ni siquiera de la misma familia, pues las afinidades biológicas de las plantas son verdaderamente desconcertantes. Así el peral se injerta bien sobre el membrillo, que lo hace a su vez sobre el espino blanco, pero el injerto en orden inverso es imposible. El peral que se injerta bien sobre el membrillo, lo hace mal sobre el manzano, del cual está más próximo en la clasificación. La col puede injertarse sobre el tomate, a pesar de que estas dos plantas pertenecen a familias muy diferentes.

Variaciones por injerto. — Antes se consideraba el injerto como un medio de conservar intactos los caracteres. Se creía que el portainjerto era sólo un medio de cultivo que aportaba la savia, pero sin influir morfológicamente sobre la otra planta. Sin embargo, numerosas observaciones muestran que puede haber *hibridación por injerto*:

a) Si se injerta el pimiento sobre el tomate, el injerto produce bayas de dos clases: unas lisas y voluminosas, y otras con costillas, pequeñas, e intermedias entre el pimiento y el tomate;

b) En Bonvaux (Francia) existe un níspero injertado sobre espino blanco, algunas de cuyas ramas son espinosas, si bien llevan verdaderos nísperos, mientras que otras presentan a la vez nísperos y frutos propios del espino blanco;

c) En el Jardín de Plantas de París hay un codeso injertado en 1830 que da flores amarillas y otras de color rosa que recuerdan las dos especies que lo originaron, pero que tiene además flores híbridas.

Es difícil de explicar la variación por injerto a menos de admitir que los caracteres hereditarios pueden transmitirse por alguna clase de células de la planta, aparte de las verdaderas células reproductoras. De todas formas, el fenómeno tiene una gran importancia desde el punto de vista práctico. Y así el injerto antifiloxérico de la vid sobre pie de viña americana ha hecho variar las propiedades de los caldos en cuanto al perfume, acidez, color, riqueza en azúcar y en tanino, etc.

Funciones de nutrición

Circulación de la savia: Analogía entre la savia y la sangre. Absorción por la raíz: La raíz absorbe agua del suelo. La absorción se efectúa en los pelos absorbentes. Mecanismo de la absorción. Transpiración de las hojas: Las hojas desprenden vapor de agua. La transpiración se efectúa por los estomas aeríferos. Intensidad de la transpiración. Inconveniente de la transpiración. Exudación por las hojas. Circulación en el tallo: Circulación de la savia bruta. Circulación de la savia elaborada. Mecanismo de la circulación: La presión atmosférica. La capilaridad. La ósmosis. — **Nutrición mineral de las plantas:** Elementos necesarios para la vida de las plantas: Método analítico. Método sintético. Método agronómico. Asimilación mineral. Asimilación nitrogenada. Asimilación del carbono. Correctivos y abonos. Abonos minerales: Abonos amoniacales. Abonos nítricos. Abonos potásicos. Abonos fosfatados. Abonos compuestos. Abonos orgánicos. Abonos catalíticos. Abonos verdes. — **Asimilación del nitrógeno:** Nitrógeno orgánico. Nitrógeno amoniacal: Putrefacción o fermentación pútrida. Fermentación amoniacal. Nitrógeno nítrico: Nitrosación o fermentación nitrosa. Nitratación o fermentación nítrica. Nitrógeno atmosférico. Fijación del nitrógeno por las bacterias del suelo. Fijación del nitrógeno por las leguminosas: Experiencia de laboratorio. Nudosidades. Estudio de dichas bacterias. Explicación del papel de las nudosidades. Bacterias desnitrificantes. Ciclo del nitrógeno. — **Asimilación del carbono:** Carbono orgánico. Carbono mineral, Carbono atmosférico. Función clorofílica. Intensidad de la función clorofílica. Clorofila. Otros pigmentos. Espectro de la clorofila. Función de la clorofila. Fotosíntesis de los glúcidos. Fotosíntesis de los prótidos y los lípidos. Ciclo del carbono

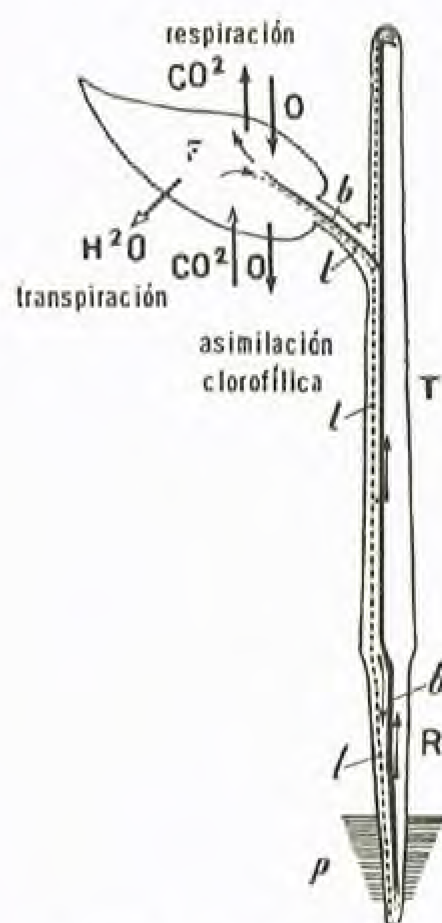
Las angiospermas, a semejanza de los demás seres vivientes, se alimentan para procurarse los principios nutritivos y la energía indispensable para: 1° su crecimiento; 2° su reconstitución; 3° sus movimientos. Su *nutrición* abarca un conjunto de fenómenos, entre los cuales hay que distinguir la *absorción*, la *circulación*, la *transpiración*, la *exudación*, la *respiración*, la *función clorofílica*, la *secreción*, etc. Insistiremos especialmente sobre la *asimilación nitrogenada* y la del *carbono*, que difieren en ciertos aspectos de las asimilaciones análogas de los animales y las completan sin embargo en otros.

Circulación de la savia

Analogía entre la savia y la sangre. — La *savia* de los vegetales puede compararse con la *sangre* de los animales, por las siguientes razones:

1° La sangre proviene en gran parte del quilo intestinal que ha sido absorbido por las vellosidades debido a un fenómeno de ósmosis. Análogamente, la savia proviene en gran parte del agua y demás substancias del suelo absorbidas por los pelos absorbentes de la raíz. Ésta es la *absorción* radical;

2° La sangre se difunde por todo el cuerpo y sirve para alimentar las células, de las que recibe a cambio las substancias de desecho. Igualmente la savia de las plantas circula y podemos distinguir:



Circulación de la savia: *p*, pelos absorbentes; R, raíz; *l*, vasos liberianos; *b*, vasos leñosos; T, tallo

a) La *savia bruta*, mineral o ascendente, que asciende hasta las hojas;

b) La *savia elaborada*, orgánica, nutritiva, que proviene de la transformación de la savia bruta y se dirige desde las hojas hacia todas las partes de la planta. Hay, pues, una *circulación* de la savia;

3° Una gran parte del agua de la sangre se pierde por exudación y transpiración. Del mismo modo, la savia pierde constantemente agua en estado de vapor *(transpiración)* o en el de líquido *(exudación)*. Estos dos fenómenos tienen lugar principalmente en las hojas, con las cuales los estudiaremos;

4° Durante su recorrido, la savia sufre transformaciones importantes. La *respiración* y la *asimilación clorofílica* son los fenómenos que desempeñan el papel principal, aunque no son más que aspectos particulares del metabolismo general de las plantas (Véase más lejos);

5° Parte de la savia origina *reservas nutritivas*, *secreciones* y productos de desecho o *excreciones*, difíciles de diferenciar unos de otros y que se estudian posteriormente.

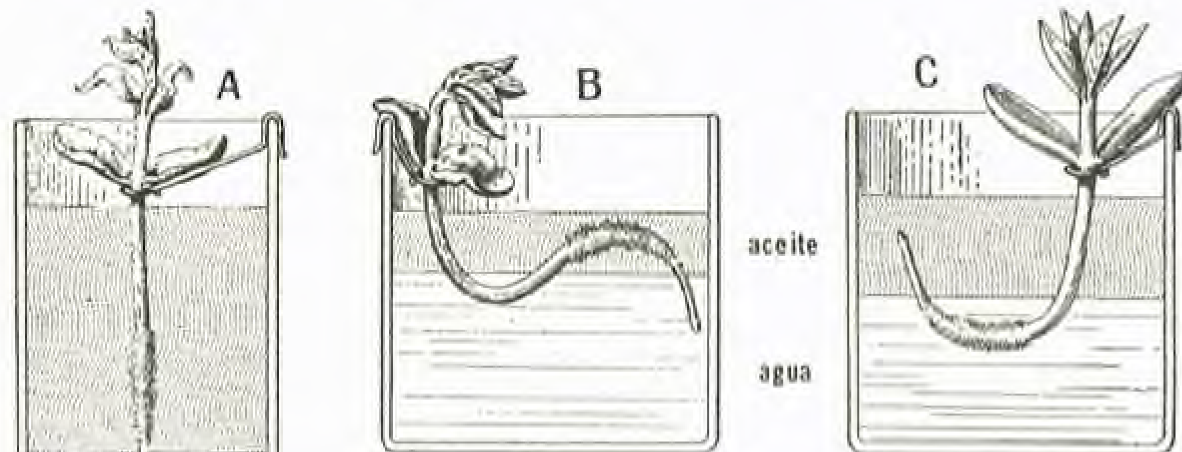
Estos fenómenos se resumen en el diagrama adjunto.

Absorción por la raíz. — Hay que demostrar los dos hechos siguientes: 1° la raíz absorbe agua del suelo; 2° la absorción tiene lugar en los pelos absorbentes de la raíz.

La raíz absorbe agua del suelo. — HALES, físico del siglo XVIII, seccionó una cepa de vid en primavera, casi al ras del suelo, y le ajustó herméticamente un estrecho tubo de vidrio. Poco después vio el agua rezumar por la sección de la cepa y elevarse en el tubo. Se puede asimismo disponer de un manómetro de azogue. El agua empuja el mercurio y lo hace subir por la otra rama. El desnivel en esta rama mide el exceso de la presión de la savia con relación a la presión atmosférica. En el caso de la vid, puede pasar de un metro, lo que indica una presión total de la savia de dos atmósferas y media. Esta presión se llama *empuje radicular*.

La absorción se efectúa en los pelos absorbentes. — En una raíz los pelos absorbentes están localizados en la zona pilífera situada entre las regiones rugosa y lisa, que cuenta en su extremo apical con la cofia o caliptra.

Preparemos varios vasos conteniendo agua con una capa de aceite e introduzcamos las raíces de tres plantas jóvenes. En el primero, la cofia está en el agua y los pelos absorbentes en el aceite: la planta se marchita y muere; en el segundo, la zona situada encima de los pelos absorbentes está también en el agua: la planta muere a su vez; en el tercero, sólo los pelos absorbentes están en el agua: la planta vive. De ahí el calificativo de *absorbentes* dado a estos pelos.



Experimento que muestra la absorción. A y B, la planta cuyos pelos absorbentes están en el aceite se marchita; C, la que los tiene en el agua permanece fresca

Mecanismo de la absorción. — Se impone inmediatamente una comparación entre el dispositivo de **Hales** y el *osmómetro* de **Dutrochet**. Este aparato se compone de un estrecho tubo, ensanchado en su base; ésta se halla cubierta por una vejiga de cerdo, en el interior de la cual hay agua azucarada. Introducido el aparato hasta un cierto nivel en agua pura, se ve cómo ésta sube en el tubo después de haber atravesado la membrana permeable. El agua pura se encuentra en cierto modo atraída por la que contiene azúcar *(endósmosis)*. Posteriormente, el agua azucarada atraviesa la membrana en sentido contrario *(exósmosis)* y el nivel del líquido interior recupera su altura inicial. Pero se puede comprobar que el azúcar está repartido igualmente, tanto en

el interior como en el exterior del osmómetro. La membrana permeable se deja atravesar por el agua y el azúcar. Las soluciones que al principio eran diferentes, una muy concentrada o *hipertónica* (agua azucarada), la otra poco concentrada o *hipotónica* (agua pura), se han vuelto *isotónicas*.

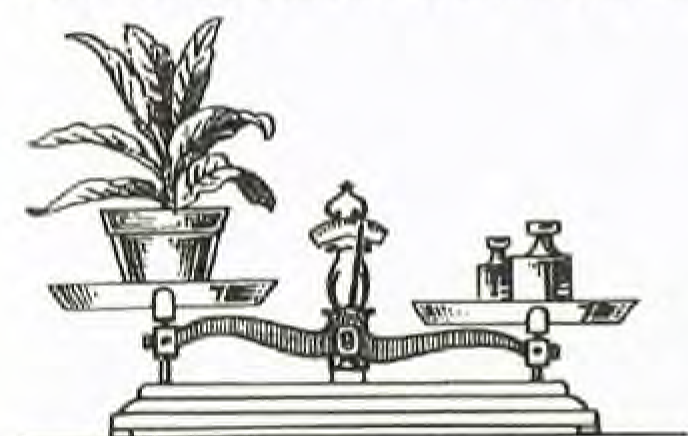
La atracción del agua pura por la azucarada, observada al principio de la experiencia, equivale a una presión ejercida sobre dicha agua, llamada *presión osmótica*.

Volvamos a la raíz. Por ser su contenido celular más concentrado que el agua del suelo, ésta es atraída por la raíz, que desempeña, desde el punto de vista osmótico, la misma función que el líquido azucarado puesto en el osmómetro. En los dos casos, el agua se eleva porque pasa de un medio hipotónico a otro hipertónico, por cuyo motivo podemos afirmar que la absorción del agua por la raíz es un fenómeno de ósmosis.

En realidad, el mecanismo no es tan sencillo. Las membranas celulares no son tan permeables como la vejiga de cerdo, es decir, son *semipermeables* o poseen una *permeabilidad selectiva* que les permite dejar pasar unas substancias con exclusión de otras, o bien facilitar el paso en un sentido —del suelo hacia la raíz— y no en el otro. Esto explica que dos plantas sumergidas en el mismo líquido no utilicen los mismos componentes. Cada especie tiene sus necesidades, las cuales satisface variando la permeabilidad de sus membranas.

Transpiración por las hojas. — Todas las partes de la planta desprenden vapor de agua, pero son las hojas las que, debido a su inmensa superficie, poseen un grado mayor de transpiración.

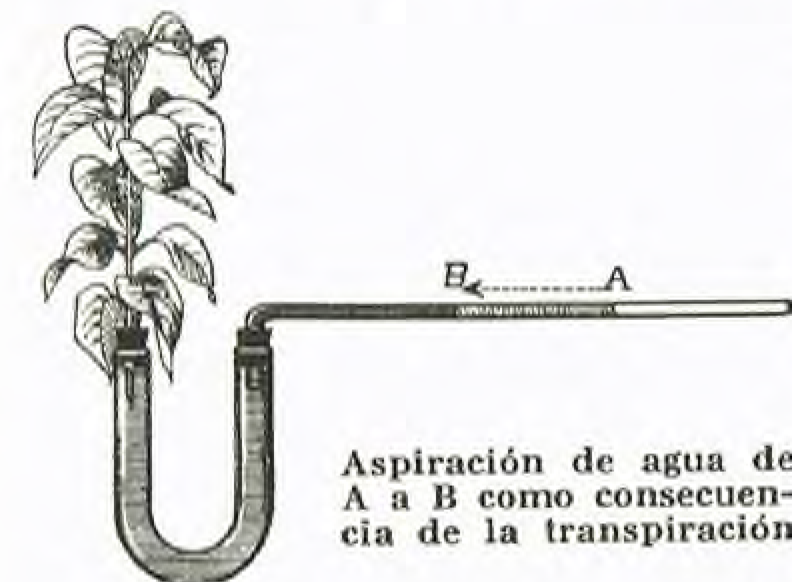
Las hojas desprenden vapor de agua. — 1ª EXPERIENCIA. En un tubo herméticamente cerrado con un tapón, se introduce una hoja de cereal unida a la planta. Poco después, la pared interna del tubo se cubre de vaho y el agua se condensa en el fondo del mismo.



Experimento que muestra la pérdida de peso producida por la transpiración

2ª EXPERIENCIA *(experiencia de la balanza)*. Sobre el platillo de una balanza se coloca una planta en un tiesto y se equilibra con pesas o una tara cualquiera. El tiesto estará cubierto de grasa o barnizado para que sea impermeable; al mismo tiempo, la tierra se cubre de un cuerpo graso o una placa de vidrio. Al cabo de una hora, el equilibrio de la balanza se rompe en provecho del peso, lo cual prueba que la planta se ha vuelta más ligera: luego desprende vapor de agua;

3ª EXPERIENCIA. En realidad, en la experiencia anterior se había supuesto que era el vapor de agua el que se desprendía de la planta. Para probarlo, se comienza de nuevo la experiencia, con la planta cubierta con una campana de vidrio. En estas condiciones, el equilibrio subsiste, pero la pared interna de la campana se cubre de vaho. El agua que se desprende queda en el interior de la campana y, por consiguiente, sobre la balanza, gracias a lo cual se puede recoger el líquido y pesar;



Aspiración de agua de A a B como consecuencia de la transpiración

4ª EXPERIENCIA. Tomemos un tubo en forma de U. En uno de sus orificios se introduce un tubo acodado y muy fino, y en el otro una rama con hojas. Se llena con agua de modo que el líquido llegue hasta la señal A del tubo acodado. Al cabo de unos minutos, se ve que el agua se ha desplazado de A a B. Esto prueba que el agua ha disminuido en el tubo en forma de U, debido a la transpiración de las hojas. Si el tubo está graduado, se puede conocer por una simple lectura la cantidad de agua evaporada por unidad de tiempo y por unidad de superficie de las hojas: *x* centímetros cúbicos de agua por hora y por centímetro cuadrado.

La transpiración se efectúa por los estomas aeríferos. — Recordemos que, en una hoja ordinaria, los estomas están situados en la cara inferior.

1ª EXPERIENCIA. Dada una hoja de grandes dimensiones, se pega sobre cada una de sus caras una pequeña campana conteniendo un poco de cloruro de calcio ($CaCl_2$), o un poco de sulfato de cobre deshidratado (SO_4Cu).

En el primer caso, el cloruro de calcio absorbe la humedad y aumenta de peso sólo en la campana de la cara inferior de la hoja. En el segundo, el sulfato de cobre, blanco por la deshidratación, absorbe la humedad y se vuelve azul, pero sólo en la campana de la cara inferior.

2ª EXPERIENCIA. Se coloca una hoja de árbol entre dos hojas de papel de filtro impregnadas de cloruro de cobalto o de un cloruro de hierro y paladio. Las hojas de papel, perfectamente secas, son azules en el primer caso y blancas en el segundo. Pero, bajo la influencia del vapor de agua desprendido por los estomas, el papel se cubre de manchas rosas en el caso del cloruro de cobalto, y negras si se trata de cloruro de hierro y paladio. Con esta experiencia se "fotografía" en cierto modo la situación de los estomas y se demuestra su papel.

Intensidad de la transpiración. — Antes se creía que la clorofila intervenía en el desprendimiento del vapor de agua *(clorovaporización)*. Lo que sucede es que la luz aumenta la permeabilidad de las membranas celulares y permite que el agua se desprenda en mayor cantidad.

Las leyes de la *transpiración* muestran que no hay diferencia con el fenómeno físico de la *evaporación*. La transpiración es más intensa si el aire es más seco, más cálido o circula con mayor velocidad. En cierto modo, las hojas de un árbol se pueden comparar con la ropa tendida y puesta a secar.

Durante un período de crecimiento normal, una hectárea de trigo pierde alrededor de tres millones de litros de agua, lo cual equivale a una capa de 30 centímetros, o sea unos dos tercios de la lluvia que cae anualmente sobre Francia.

Inconveniente de la transpiración. — Se puede afirmar que la transpiración es inútil e incluso perjudicial para las plantas, ya que las deseca y tiende a marchitarlas. Pero es un mal inevitable. Los estomas son necesarios para la respiración y la función clorofílica, y el vapor de agua los aprovecha para desprenderse. Las plantas localizadas en países secos tienen que defenderse contra este peligro mediante la formación de una cutícula espesa y el hundimiento y protección de los estomas. Las plantas carnosas (cactáceas) tienen un jugo celular muy rico en ácidos orgánicos, lo cual hace disminuir su evaporación.

Exudación por las hojas. — La exudación es la expulsión de agua en *estado líquido*, en forma de pequeñas perlas que cubren la superficie de las hojas y que no deben confundirse con el rocío.

La experiencia de Hales demuestra que la absorción de agua por las raíces, como fenómeno osmótico, tiene lugar incluso en ausencia de elementos foliares, es decir, cuando no puede haber transpiración. Por todo ello, si suponemos una planta cuya velocidad de transpiración disminuye, lo cual puede ocurrir al ponerse el sol, como el agua es aún absorbida, deberá ser expulsada en estado líquido. Esta exudación es particularmente intensa en verano. Las gotas de agua salen por los *estomas acuíferos*, situados en la extremidad de las nervaduras, según puede comprobarse fácilmente.

Se puede considerar asimismo como producto de exudación el líquido azucarado o *néctar* que se produce en los *nectarios* de las flores.

Circulación en el tallo. — En el tallo es donde la circulación se puede poner de manifiesto más fácilmente.

Circulación de la savia bruta. — La savia bruta es una solución acuosa de productos minerales que, procedente del suelo, se dirige hacia las hojas; su movimiento, es por lo tanto, ascendente y puede demostrarse que circula por el leño (vasos leñosos).

1ª EXPERIENCIA. Se corta a ras del suelo el tronco de un álamo o de un sauce y se seca la sección con un papel secante. Al cabo de poco tiempo, el agua aparece en la región donde se encuentra el leño nuevo (albura).

2ª EXPERIENCIA. Se introduce la sección de una rama con hojas en una solución teñida con rojo carmín. Cortando la rama a diferentes alturas, al cabo de un cierto tiempo se puede comprobar que sólo el leño está teñido de rojo.

Esta experiencia permite medir la velocidad de ascensión. Para ello se mide la longitud de un tallo cuyo leño se tiñe al cabo de un cuarto de hora. Si, por ejemplo, es de 50 centímetros, la velocidad será de dos metros por hora.

3ª EXPERIENCIA *(descortezamiento anular)*. Para realizar esta experiencia se hace un corte circular en la rama de un árbol, se separa solamente un anillo completo de corteza y líber, y se dejan intactos el leño y la medula. En estas condiciones, el árbol sigue viviendo sin marchitarse, lo que demuestra que la savia bruta le llega por el leño.

Circulación de la savia elaborada. — La savia elaborada es menos fluida que la bruta. Contiene diferentes substancias orgánicas elaboradas en las hojas, que se distribuyen por toda la planta por medio de los tubos cribosos del líber.

En la experiencia de descortezamiento anular, al cabo de unas semanas se forma un reborde, debido a la cicatrización del labio superior de la herida, sobre el cual aparecen raíces adventicias. Por otra parte, los frutos que existen en dicha rama son más voluminosos (frutos típicos de concursos agrícolas). Estos fenómenos se explican al admitir que la savia elaborada por las hojas situadas en dicha rama no puede esparcirse por el resto del árbol a causa de la interrupción del líber, y origina una sobrealimentación con hipertrofia de dicha rama.



Reborde formado por la detención de la savia elaborada

Mecanismo de la circulación. — Para explicarlo se ha recurrido a diferentes hipótesis:

1º **La presión atmosférica.** — La transpiración de las hojas crea en el interior de la planta un vacío parcial y, por consiguiente, una succión del agua del suelo, la cual sube por los vasos leñosos como si éstos fueran el tubo de una bomba aspirante.

Supongamos un tubo de vidrio lleno de agua dispuesto sobre una cubeta con mercurio y cerrado en el extremo por un tapón atravesado por una rama con hojas. Al cabo de cierto tiempo, se ve como el azogue asciende en el tubo a medida que el agua se evapora, señal de una disminución de la presión.

Asimismo se pueden colocar manómetros de mercurio en el leño de un árbol a niveles diferentes. Observándolos se ve que, en la base, la

presión interna es superior a la atmosférica, mientras que en la parte superior sucede precisamente lo contrario. Este experimento sirve para comprobar el doble fenómeno de *absorción por la raíz* y *succión por las hojas.*

En todo caso, si la presión atmosférica interviene, su acción es limitada, ya que: 1º, el vacío es parcial; 2º, aunque fuera total, el agua sólo se podría elevar hasta la altura de 10,33 m;

2º **La capilaridad.** — El agua asciende en tubos finos, de pequeño diámetro, por adherencia a su pared, fenómeno conocido con el nombre de *capilaridad.* Ésta no parece intervenir en la circulación de la savia, ya que en los vasos la columna líquida no es continua, sino que se encuentra interrumpida por burbujas de aire. Ahora bien, según se demuestra en Física, la existencia del llamado *rosario de Jamin* se opone a la capilaridad;

3º **La ósmosis.** — Queda como última explicación la ósmosis, ya citada a propósito de la absorción por la raíz, y que es la verdadera causa.

Si consideramos un vaso, lo veremos rodeado de células vivas, llamadas *células anexas.* Por otra parte, a medida que nos dirigimos desde la raíz hacia el ápice de la planta, las células anexas poseen una solución mineral cada vez más concentrada, debido a la pérdida de agua por transpiración. Resulta, pues, de ello una *ósmosis progresiva, de la célula menos concentrada (hipotónica) a la más concentrada (hipertónica), desde los pelos absorbentes hasta las células foliares.* En su marcha, la savia bruta contornea durante su camino las burbujas de aire de los vasos.

Por consiguiente se ve que el papel esencial lo desempeñan las células anexas, ya que los vasos facilitan la circulación, sin ser indispensables. Por ello, en determinadas criptógamas de gran tamaño (algas gigantes), la ausencia de vasos no impide la circulación de la savia.

Nutrición mineral de las plantas

Elementos necesarios para la vida de las plantas. — Ante todo, es preciso hallar cuáles son los cuerpos simples o elementos minerales necesarios para la vida de las plantas y ver luego de qué modo se los procuran.

Analizando químicamente una planta y las substancias que contiene, y completando dicho análisis con otro espectrocópico, se puede deducir que los vegetales contienen casi todos los elementos conocidos, pero hay algunos que existen en mayor proporción y que *a priori* son más importantes que los otros.

Método analítico. — Para determinar cuáles son los elementos más importantes para la planta, se la incinera en un *recipiente cerrado* y se analizan las cenizas y los cuerpos volátiles producidos.

Las cenizas contienen los siguientes elementos:

Potasio	**K**	Hierro	**Fe**
Sodio	**Na**	Azufre	**S**
Calcio	**Ca**	Fósforo	**P**
Magnesio	**Mg**	Silicio	**Si**
Manganeso	**Mn**	Cloro	**Cl**

Los cuerpos volátiles (gases y vapores) contienen:

Carbono	**C**	Hidrógeno	**H**
Oxígeno	**O**	Nitrógeno	**N**

Estos últimos elementos se desprenden principalmente bajo la forma de anhídrido carbónico CO_2, óxido de carbono CO, vapor de agua H_2O y amoniaco NH_3.

En las gramíneas o cereales (trigo) existe mucho *silicio,* el cual da una cierta rigidez a los tejidos, y por eso las cenizas del trigo relucen después, por ejemplo, del incendio de un pajar.

En algunas plantas marinas, como las algas, existe mucho *bromo* y *yodo,* que son utilizados industrialmente. Una especie de violeta contiene *cinc.* Pero estos elementos son accesorios, inútiles o indiferentes para la vida vegetal.

Método sintético. — El método analítico, incluso completado por la espectroscopia y la microquímica, no nos informa sobre el grado de utilidad de los elementos, ya que uno de ellos, aunque muy abundante, puede ser completamente inútil. Así tenemos el oxalato de calcio, que se acumula en las hojas en razón de su insolubilidad y no por su utilidad.

Es preciso completar el análisis con la síntesis. Para ello se hace germinar una semilla, se cultiva la planta y se nutre exclusivamente por medio de una *solución nutritiva.* Por tanteo se encuentra la solución que da el mejor rendimiento.

Para las plantas verdes, las mejores soluciones nutritivas son las de *Knop* y de *Deitmer.*

El líquido de Knop tiene la siguiente composición en gramos:

Agua destilada	1 000	**H** . **O**
Nitrato de calcio	1	**N** . O . **Ca**
Nitrato de potasio	0,25	N . O . **K**
Sulfato de magnesio	0,25	**S** . O . **Mg**
Fosfato de potasio	0,25	**P** . O . H. **K**
Fosfato de hierro	cant. inf.	P . O . **Fe**

Los elementos que contiene son nueve (inscritos a la derecha), a los cuales hay que añadir el carbono que las plantas verdes obtienen de la atmósfera.

Si se trata de cultivar un hongo o un moho, se emplea una solución que contenga el carbono bajo forma orgánica, como hizo **Raulin,** discípulo de Pasteur, quien, para cultivar un moho *(Sterigmatocystis),* utilizó la siguiente composición en gramos:

Agua destilada	1 500	**H** . **O**
Azúcar cande	70	**C** . H . O
Ácido tartárico	70	C . H . O
Nitrato de amonio	4	**N** . O . H
Fosfato de amonio	0,60	**P** . O . N . H
Carbonato de potasio	0,60	C . O . **K**
Carbonato de magnesio	0,40	C . O . **Mg**
Sulfato de amonio	0,25	**S** . O . N . H
Sulfato de hierro	0,07	S . O . **Fe**
Sulfato de cinc	0,07	S . O . **Zn**
Silicato de potasio	0,07	**Si** . O . K
Carbonato de manganeso	0,04	C . O . **Mn**

Por lo tanto, la solución de Raulin contiene 12 elementos. Difiere de la solución de Knop: 1º por la substitución del calcio por el silicio; 2º por la presencia de cinc y manganeso. Estos dos últimos elementos actúan sólo cataliticamente y no son verdaderos alimentos.

Resumiendo, vemos que hay *10 elementos indispensables para la vida de las plantas,* que son: *carbono, nitrógeno, hidrógeno, oxígeno, calcio (o silicio), magnesio, potasio, fósforo, azufre* y *hierro.*

Comparándolo con la lista que nos proporciona el método analítico, vemos que el *cloro,* que existe en la mayoría de las plantas, no es un elemento indispensable.

Método agronómico. — Supongamos que se quiere determinar si un cuerpo químico, como el nitrato de potasio, conviene a una planta. Se eligen dos parcelas de terreno de las mismas dimensiones y composición química. A una de ellas se incorpora la substancia objeto del estudio y luego se siembra en las dos la misma cantidad de semillas. La comparación del rendimiento de las cosechas nos da el resultado buscado.

Pese a su falta de precisión, el método agronómico ha permitido establecer la utilidad de tres cuerpos simples: el nitrógeno, el fósforo y el potasio, y justificar su empleo en los abonos.

Asimilación mineral. — Todos los elementos indispensables para la vida de las plantas —con excepción del carbono y a veces del nitrógeno— provienen de las substancias minerales del suelo. Así también es como el azufre y el fósforo son absorbidos por las raíces bajo forma de sulfatos y fosfatos.

En muchas rocas, como el granito, existe un mineral, el *feldespato,* que es un silicato doble de aluminio y de potasio. Su fórmula desarrollada es $6SiO_2 . Al_2O_3 . K_2O$. Este mineral se descompone bajo la acción del agua de lluvia, cargada de anhídrido carbónico. El potasio se une al anhídrido carbónico para formar carbonato de potasio, CO_3K_2. El silicato alumínico que queda constituye el caolín y posteriormente la arcilla (mezcla de caolín y de impurezas). Al mismo tiempo, parte de la sílice se transforma en sílice gelatinosa.

Las plantas adquieren el potasio necesario a partir del carbonato de potasio, cuyo origen acaba de explicarse. Pero para que una substancia pueda ser absorbida por las plantas es necesario que cumpla una de las siguientes condiciones:

1º Solubilidad en el agua pura: caso de los nitratos y de los cloruros;

2º Solubilidad en el agua que contenga anhídrido carbónico: caso de la caliza $CaCO_3$, del fosfato tricálcico $Ca_3(PO_4)_2$ y de la sílice gelatinosa;

3º Solubilidad en la secreción ácida propia de las raíces, la cual se puede observar haciendo germinar una semilla en un medio de cultivo transparente (solución de Knop en gelatina) y teñido con azul de tornasol. Alrededor de la raicilla el tornasol vira al rojo.

Asimilación nitrogenada. — La mayoría de las plantas absorben su nitrógeno del suelo bajo la forma de nitratos. No obstante, ciertas bacterias que viven libres en el suelo o en simbiosis con plantas de la familia de las leguminosas (trébol, alfalfa, etc.), tienen la propiedad de absorber directamente el nitrógeno del aire, lo mismo que otros vegetales absorben el oxígeno. Más adelante insistiremos sobre este punto.

Asimilación del carbono. — Las plantas recurren a tres fuentes para la obtención de carbono: 1º los carbonatos del suelo; 2º el anhídrido carbónico del aire, que sólo puede ser utilizado por las plantas verdes; 3º las materias orgánicas carbonadas, que sólo son utilizadas por los vegetales sin clorofila. Esta asimilación es objeto de un capítulo posterior.

Allí se verá que las plantas verdes, absorbiendo el carbón del anhídrido carbónico atmosférico, se alimentan y al mismo tiempo elaboran los alimentos de los animales herbívoros y carnívoros. Su papel en el ciclo del carbono es, pues, preponderante, ya que sin ellas la vida sería imposible en la superficie de la Tierra. Incluso en el desarrollo de la evolución y en el origen de la vida, los organismos clorofílicos fueron probablemente los que dieron paso a los seres sin clorofila.

Correctivos y abonos. — Se llaman *correctivos* las substancias que se incorporan a los terrenos para modificar sus propiedades físicas. Un terreno completo debe contener caliza, sílice (arena), arcilla y humus. Si falta alguno de estos cuerpos hay que introducirlo artificialmente. Así se practica la *encaladura* de las tierras pobres en caliza, y el abono con *marga* de las poco calizas y arcillosas (terrenos silicosos). La cal también es útil para neutralizar los suelos demasiado ricos en humus y, por lo tanto, muy ácidos.

Se llaman *abonos* las substancias que se incorporan al suelo para nutrir las plantas. Su empleo es necesario dado que los cultivos intensi-

vos agotan los mejores terrenos. Los abonos se clasifican en: 1° abonos *minerales:* 2° *orgánicos;* 3° *catalíticos;* 4° *verdes.*

Abonos minerales. — Éstos se dividen a su vez en abonos *amoniacales,* en *nítricos,* en *potásicos,* en *fosfatados* y en *compuestos.*

Abonos amoniacales. — El nitrógeno está contenido en ellos bajo forma de amoniaco, NH_3. Así sucede con el *sulfato de amonio* $(NH_4)_2SO_4$, obtenido por síntesis directa a partir del agua de las cloacas o de las aguas de depuración del gas del alumbrado, etc. Es ésta una sal blanca finamente cristalizada y fácilmente soluble en agua, pero sólo puede ser utilizado por las plantas después de su transformación en nitrato de calcio, lo cual ocurre bajo la acción de las bacterias. Por lo tanto, se puede concluir que los abonos amoniacales deben ser incorporados al terrenos temprana y profundamente para que se transformen en nitrato. La acción de estos abonos sobre las plantas es progresiva y lenta.

Abonos nítricos. — El nitrógeno está contenido bajo la forma de ácido nítrico, HNO_3. Antes se utilizaba el *nitrato de sodio,* $NaNO_3$, más conocido por el nombre de salitre de Chile. Hoy en día se prefiere el *nitrato de calcio,* $Ca(NO_3)_2$, obtenido por síntesis, que se presenta comercialmente bajo el aspecto de gránulos grisáceos y es el verdadero alimento nitrogenado de los vegetales. Muy soluble en el agua, es absorbido inmediatamente por las raíces, por lo que sólo debe incorporarse a la tierra por la superficie del terreno. Su presencia fomenta la vegetación.

Abonos potásicos. — La potasa es muy útil, especialmente para las leguminosas, los cereales y la vid. Las minas de potasa de Alsacia, cerca de Mulhouse (Francia), y de Stassfurt (Prusia) proporcionan al mercado el *cloruro de potasio,* KCl, y el *sulfato de potasio,* K_2SO_4, ambos excelentes abonos.

Abonos fosfatados. — Los terrenos son generalmente pobres en ácido fosfórico. Así, los fosfatos y superfosfatos son siempre útiles. Los *fosfatos naturales* y las *escorias de defosforación* (subproducto de los altos hornos) son poco solubles en el agua, por lo que se prefieren los *superfosfatos* obtenidos por acción del ácido sulfúrico sobre los fosfatos naturales. Los superfosfatos son en realidad mezclas de fosfato monocálcico soluble, $CaH_4(PO_4)_2$, y sulfato de calcio, $CaSO_4$.

Abonos compuestos. — Estos abonos participan de varias características propias de los anteriormente estudiados. Así:

a) El *nitrato de amonio* y el *amonitre,* que son al mismo tiempo amoniacales y nítricos;

b) El *potazoe,* que es amoniacal y potásico;

c) La *nitropotasa,* que es amoniacal, nítrica y potásica.

La industria busca un *abono completo* que corresponde aproximadamente a la siguiente fórmula: ácido fosfórico 5%, nitrógeno nítrico y amoniacal 10 %, potasa 5 %.

Abonos orgánicos. — El principal es el *estiércol,* formado por paja y excrementos que han sufrido numerosas fermentaciones. Éste es un abono completo, pero *poco concentrado* y con el inconveniente de que *refleja la composición del terreno.* Así, si un suelo carece de potasa, la paja y las plantas forrajeras que allí se producen tampoco la poseen, e igual los excrementos y orinas de los animales que se nutren con dichas plantas. No obstante, la ventaja del estiércol es que aporta al terreno la materia negra (humus) y sus numerosas bacterias.

Otros numerosos cuerpos orgánicos se utilizan como abonos: compuestos integrados por las basuras domésticas, aguas de cloacas, restos de carne y sangre desecada procedentes de los mataderos, harina de pescado, cuernos y cueros solubilizados, desechos de lana, residuos de semillas, turba, etc.

Más adelante se verá cómo estos abonos orgánicos sólo pueden servir de alimentos para las plantas después de haber sido transformados en nitratos por acción de las bacterias.

Abonos catalíticos. — Estos abonos no alimentan las plantas, pero facilitan reacciones químicas cuyo conjunto constituye el *metabolismo.* Como las diastasas y los catalizadores, actúan en mínima cantidad, por lo que basta emplear soluciones muy diluidas. La mayoría contienen metales, como el cinc y el manganeso, o metaloides, como el boro y el flúor, pero su empleo no ha salido aún de la fase experimental.

Abonos verdes. — Pronto se verá que las plantas de la familia de las *leguminosas* (trébol, alfalfa) tienen la propiedad, gracias a ciertas bacterias que viven en sus raíces, de absorber y de fijar el nitrógeno del aire. Por consiguiente, enterrando las citadas plantas en vez de cosecharlas, se enriquece el terreno en nitrógeno. Estas leguminosas constituyen los llamados abonos verdes.

Asimilación del nitrógeno

El *nitrógeno* se ofrece a las plantas bajo cuatro formas: el *nitrógeno orgánico,* el *amoniacal,* el *nítrico* y el *atmosférico.*

Nitrógeno orgánico. — Los desechos orgánicos que provienen de los animales (cadáveres, excrementos, orinas, estiércol) y los vegetales (estiércol, humus) contienen nitrógeno que los hongos y las bacterias utilizan directamente. Pero las plantas verdes sólo son capaces de aprovecharlo en condiciones excepcionales:

1° Los árboles forestales tienen frecuentemente en la extremidad de sus raíces, en lugar de los pelos absorbentes, un manguito de micelio que pertenece a un hongo llamado *micorriza* (del griego *myké,* hongo, y *rhiza,* raíz). Se admite que el hongo vive en simbiosis con el árbol y le permite así utilizar el nitrógeno del suelo;

2° Se puede forzar las plantas verdes a nutrirse de ciertas substancias orgánicas nitrogenadas: urea, aminoácidos, etc. Para esto hay que restringir, en lo posible, su función clorofílica por el procedimiento de colocar las plantas en la penumbra y en una atmósfera viciada. La planta, al no poder absorber más que el anhídrido carbónico desprendido en su respiración y teniendo necesidad de carbono, absorbe entonces las substancias orgánicas del suelo.

Nitrógeno amoniacal. — Éste es el nitrógeno del *amoniaco* NH_3 y de las *sales amoniacales,* de las cuales la más común es el carbonato amónico, $(NH_4)_2CO_3$.

El nitrógeno amoniacal proviene de la fermentación de las materias orgánicas bajo la acción de ciertas bacterias. Hay dos fermentaciones principales: la putrefacción y la fermentación amoniacal.

Putrefacción o fermentación pútrida. — Si una materia orgánica cualquiera, como por ejemplo un cadáver, queda sobre el suelo, numerosas especies de bacterias proliferan sobre ella. Se producen entonces reacciones químicas complejas, algunas de las cuales equivalen a una verdadera digestión, que desprenden numerosos gases que saturan la atmósfera, entre ellos: CO_2, CO, H, N, $\mathbf{NH_3}$, H_2S, PH_3. Al mismo tiempo se producen substancias tóxicas llamadas *tomaínas* (del griego *ptoma,* cadáver). El cadáver termina por transformarse en líquidos nauseabundos que pentran en la tierra. Estudiemos aquí sólo la producción de amoniaco.

Fermentación amoniacal. — Ésta es la fermentación propia de la orina. La orina fresca es límpida, inodora y ligeramente ácida, pero abandonada al aire se enturbia, se alcaliniza y desprende un fuerte olor amoniacal. La urea que se encontraba en ella se convierte por hidratación en carbonato de amonio:

$$\underset{\text{urea}}{CO(NH_2)_2} + 2H_2O = \underset{\text{sal amoniacal}}{(NH_4)_2CO_3}$$

El carbonato de amonio es una sal amoniacal que desprende espontáneamente amoniaco, NH_3. Esta fermentación se debe a una bacteria redonda llamada *Micrococcus ureæ,* que actúa por medio de una diastasa o enzima llamada *ureasa.*

De este modo, la putrefacción y la fermentación amoniacal engendran sales amoniacales, que sólo pueden ser utilizadas directamente por los hongos, ya que las plantas verdes exigen su transformación previa en nitrógeno nítrico.

Nitrógeno nítrico. — Es el nitrógeno del ácido nítrico, HNO_3, y de los *nitratos,* de los que el más difundido es el nitrato de calcio, $Ca(NO_3)_2$.

El nitrógeno nítrico se origina en el suelo por la fermentación de las sales amoniacales bajo la acción de ciertas bacterias. Hay dos fermentaciones sucesivas: la *nitrosación* y la *nitratación,* cuyo conjunto constituye la *nitrificación.*

Nitrosación o fermentación nitrosa. — El amoniaco es oxidado y convertido en ácido nitroso por la acción de dos clases de bacterias: unas redondas *(nitrosococos)* y otras alargadas *(nitrosomonas):*

$$\underset{\text{amoniaco}}{NH_3} + 3O = \underset{\text{ác. nitroso}}{HNO_2} + H_2O$$

Tan pronto como se forma el ácido nitroso, éste se combina con las bases del terreno (calcio, magnesio, sodio, potasio, etc.), para originar las correspondientes sales o nitritos. Si esta neutralización del ácido no tuviera lugar conforme éste se va produciendo, la nitrosación cesaría rápidamente.

Nitratación o fermentación nítrica. — Varias especies de bacterias alargadas *(nitrobacter)* actúan a continuación para oxidar el ácido nitroso y convertirlo, o, lo que es lo mismo, cambiar los nitritos en nitratos:

$$\underset{\text{ác. nitroso}}{HNO_2} + O = \underset{\text{ác. nítrico}}{HNO_3}$$

El producto final de la nitrificación es principalmente el *nitrato de calcio,* $Ca(NO_3)_2$, que es la mejor fuente de nitrógeno para las plantas verdes y también el mejor abono nitrogenado que se les pueda ofrecer. Todos los demás (estiércol, sales amoniacales) deben ser previamente transformados en nitratos antes de su utilización.

Las condiciones de la nitrificación fueron establecidas por **Schloesing** y **Muntz** por medio de la siguiente experiencia: Se llena un tubo largo con una mezcla de arena y creta finamente pulverizada, y se añade, gota a gota, una solución amoniacal. Si la experiencia se realiza entre 30 y 35° C, en la base de la columna se puede recoger nitrato de calcio en lugar de la sal amoniacal de la que se partió. Las bacterias contenidas en la tierra operan la nitrificación. Pero si sometemos el tubo a la acción de un anestésico (cloroformo, éter), o del calor, las bacterias "dormidas" o muertas cesan de actuar, con lo que el producto que se recoge es el mismo que se añadió. Por lo tanto, para que la nitrificación se produzca son precisas:

a) Sales amoniacales;

b) Bacterias nitrificantes;

c) Calcio u otro álcali capaz de neutralizar el ácido a medida que éste se produce;

d) Oxígeno y, por consiguiente, una tierra suelta;
e) Una temperatura bastante elevada.

La nitrificación es uno de los fenómenos más importantes de la fisiología vegetal, e interviene en el abono de los terrenos con el estiércol, en el riego con aguas residuales, en la formación de *salitre* sobre las paredes de establos y caballerizas, en la formación de precipitaciones blancas en la superficie del suelo en ciertos países (Egipto, India), etc.

Nitrógeno atmosférico. — Se podría pensar, *a priori*, que la atmósfera, rica en nitrógeno (79%), constituye una fuente de éste para las plantas. Pero no sucede así, como lo demuestran las experiencias de **Boussingault**. Se coloca una planta bajo una campana y se analizan por un método preciso las modificaciones que se producen en esa atmósfera en el transcurso de un día. En todos los casos se comprueba que el *nitrógeno no se absorbe en absoluto*, lo que justifica en dicho sentido el nombre que a veces se da de ázoe (de *a*, sin, y *zoom*, ser vivo, "no apto para la vida").

No obstante, ciertas bacterias tienen la propiedad de fijar el nitrógeno del aire. Unas viven en el suelo y las otras en simbiosis con las raíces de las leguminosas.

Fijación del nitrógeno por las bacterias del suelo. — El citado agrónomo francés Boussingault hizo en 1850, en sus tierras de Alsacia, las siguientes experiencias. Calculó el nitrógeno que una hectárea de tierra perdía en un año por las cosechas que se recogían y por el agua de drenaje. Esta pérdida se elevaba a 150 kilos. Por otra parte, la misma superficie de terreno ganaba solamente 70 kilos, que provenían de los abonos y del agua de lluvia. Había, pues, un déficit de 150 — 70 = 80 kilos, y la tierra debía empobrecerse de año en año. Pero esto no sucedía si se tenía la precaución de dejar las tierras en *barbecho*, es decir, sin cultivar, durante algún tiempo.

Berthelot, por otra parte, hizo la siguiente experiencia: colocando tierra en una campana por la que pasaba una corriente de aire continuo, comprobó que al cabo de unos meses la tierra se había enriquecido en nitrógeno, pero este enriquecimiento no tenía lugar si previamente se la esterilizaba por calefacción a 100° C durante unas horas. El fenómeno se debía, pues, a la presencia de determinados seres vivos.



Raíces de judía con nudosidades
(Fot. Boyer)

Éstos han sido aislados por medio de cultivos, y pertenecen a varias especies, de las cuales la más importante es el *Clostridium pastorianum*, bacteria alargada provista de pestañas vibrátiles y dotada de la propiedad de esporulación. Esta bacteria incorpora el nitrógeno libre y forma cuerpos nitrosos:

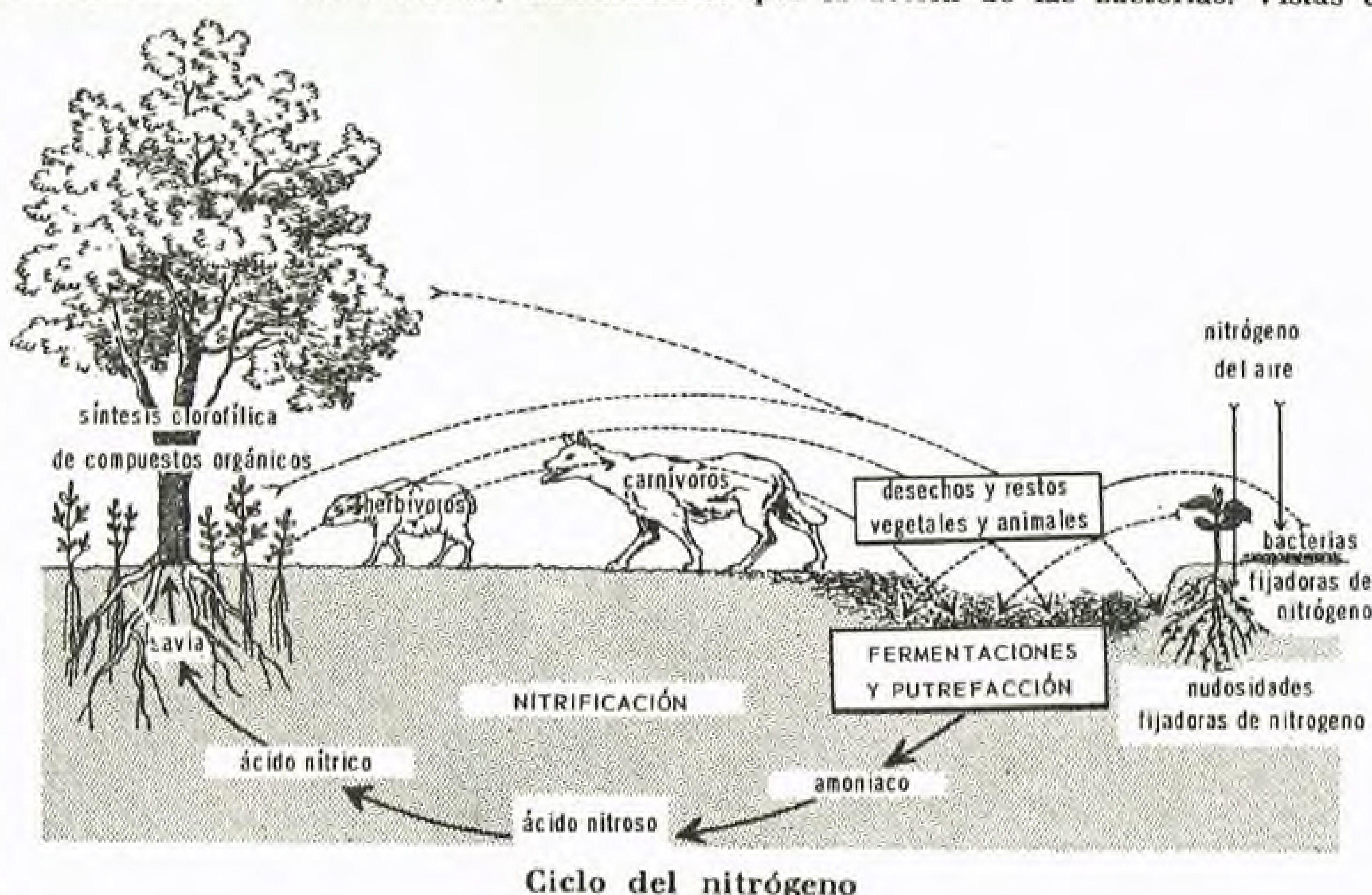
$$2H_2O + N_2 = (NH_4)NO_2$$

aunque para ello necesita tener a su disposición algunos glúcidos, como azúcares o almidón.

Fijación del nitrógeno por las leguminosas. — Boussingault, con sus experiencias, y después **Ville** comprobaron que las leguminosas tienen la propiedad de enriquecer el suelo en nitrógeno. De ahí el nombre que se les da de plantas *mejoradas* y las prácticas agrícolas conocidas bajo el nombre de *sideración* o *abono verde*, que consisten en enterrar las cosechas de leguminosas para hacerles servir de abonos nitrogenados. La *rotación*, que consiste en alternar los cultivos, descansa sobre el mismo principio. En la rotación trienal, por ejemplo, se alterna trigo, remolacha y una leguminosa. El trigo, a causa de sus raíces fasciculadas, agota la superficie del terreno; la remolacha, con las suyas tuberculosas, agota la parte profunda; la leguminosa, por el contrario, devuelve al suelo el nitrógeno de que se habían apropiado a sus expensas las plantas anteriores.

Experiencia de laboratorio. — Dos agrónomos alemanes, **Hellriegel** y **Wilfarth**, hicieron en 1885 la siguiente experiencia: cultivaron leguminosas (trébol, alfalfa) en macetas llenas de arena calcinada y regadas con una solución nutritiva sin nitrógeno. En estas condiciones vieron que las plantas crecían pobres, enclenques, y con verdadera "hambre de nitrógeno". Añadieron entonces a la arena calcinada un poco de tierra procedente del campo, y poco después las leguminosas recuperaron la salud. Ahora bien, sobre sus raíces habían aparecido unas *nudosidades* que permitían a las leguminosas enriquecerse en nitrógeno a expensas de la atmósfera.

Nudosidades. — Las nudosidades son cuerpos de forma esférica, más o menos irregular, como verdaderos tubérculos, esparcidos sobre las raíces, y del tamaño de un guisante. Desde el punto de vista anatómico son *radicelas*, transformadas por la acción de las bacterias. Vistas en corte con el microscopio, se observan en el interior de las células indicios de una materia viscosa que contiene bacterias en gran cantidad.



Ciclo del nitrógeno

Estudio de dichas bacterias. — El estudio de estas células fue realizado en el Instituto Pasteur de París por **Laurent** y **Mazé**, que llegaron a cultivarlas en una solución mineral desprovista de nitrógeno. Utilizando el nitrógeno atmosférico, las bacterias llegan a vivir y desarrollarse normalmente y sólo necesitan azúcares. Por otra parte, se ve que en el fondo del recipiente de cultivo se deposita una materia viscosa que recuerda la de las nudosidades y es muy rica en nitrógeno. Las bacterias de las nudosidades, por vivir normalmente en las raíces de las plantas, reciben el nombre de *Rhizobium leguminosarum* (del griego, *rhiza*, raíz, y *bios*, vida).

Explicación del papel de las nudosidades. — Ahora podemos comprender su funcionamiento. Las bacterias que allí se encuentran toman azúcar (alimento carbonado) de las leguminosas y nitrógeno de la atmósfera. Con estos materiales y el agua que poseen a discreción, viven, se multiplican y segregan la materia viscosa, rica en nitrógeno, que existe en dichas nudosidades. La leguminosa se nutre de dicha materia y obtiene el nitrógeno necesario, que en definitiva proviene de la atmósfera.

Por consiguiente, se puede concebir que las bacterias y leguminosas forman una *simbiosis* o asociación en provecho recíproco.

Bacterias desnitrificantes. — Mientras que ciertas bacterias fijan el nitrógeno del aire, hay otras que, por el contrario, lo desprenden al descomponer los nitratos del suelo; son, pues, antagonistas de las bacterias nitrificantes, puesto que destruyen lo que hacen éstas. Desde el punto de vista agronómico, su actuación es muy perjudicial, pues empobrecen el suelo en nitratos. El único medio de impedir su acción consiste en airear el terreno por medio de labores profundas.

Ciclo del nitrógeno. — Todo el conjunto anterior da lugar a un *ciclo*, es decir, a una circulación del elemento nitrógeno entre los reinos animal, vegetal y mineral.

Los animales toman directamente (herbívoros) o indirectamente (carnívoros) el nitrógeno de las plantas. Éstas, a su vez, lo toman del suelo o del aire. Por último, los microbios aseguran el retorno del nitrógeno. El estiércol y el humus, constituidos por las deyecciones de los animales y los restos de las plantas, se transforman sobre todo en sales amoniacales y luego en nitratos, una parte de los cuales se descompone de nuevo en nitrógeno.

Asimilación del carbono

El carbono es para las plantas un alimento de primera necesidad, puesto a su disposición, como el nitrógeno, bajo diversas formas: el *carbono orgánico*, el *mineral* y el *atmosférico* (CO_2). Veamos cómo unos y otros participan en la vida de las plantas.

Carbono orgánico. — Todas las substancias animales y vegetales (cadáveres, excrementos, estiércol, madera muerta, humus, etc.) contienen carbono en las moléculas de sus glúcidos, lípidos y prótidos.

Este carbono orgánico es utilizado directamente por las bacterias, las levaduras, los mohos y los hongos, que son plantas saprofitas, mientras que las verdes sólo lo aprovechan excepcionalmente. Así tenemos:

1° Los árboles forestales que tienen *micorrizas* lo hacen por medio de estos hongos, con los cuales viven en simbiosis;

2° Experimentalmente, al obligarlas a que reduzcan su función clorofílica, podemos hacer que las plantas verdes se vuelvan saprofitas. Así se puede ver al sembrar semillas de rábano en una solución gelatinosa de Knop con glucosa. Esta solución debe ser mantenida en la penumbra y en una atmósfera tal que el desprendimiento de CO_2 por la respiración sea compensado exactamente por la absorción del CO_2 debido a la función clorofílica. En tales condiciones, los rábanos consumen glucosa y adquieren caracteres distintos: hojas más verdes, tallo hinchado como la raíz, en forma de tubérculo, y que contiene almidón, radicelas más desarrolladas, etc.

Carbono mineral. — Éste es el carbono de los *carbonatos*, absorbido por todas las plantas. El carbonato de calcio, $CaCO_3$, debe sin embargo ser transformado previamente en bicarbonato, $H_2Ca(CO_3)_2$. Más adelante se verá que ciertas plantas acumulan en sus tejidos unas concreciones (cistolitos) de carbonato de calcio que parece constituir para ellas más bien un producto de desecho que una reserva nutritiva.

Carbono atmosférico. — La atmósfera contiene una cantidad constante de anhídrido carbónico: aproximadamente cerca del 0,03 %, lo que constituye la inagotable reserva de donde las plantas verdes toman la mayor parte de su carbono. Pero expliquemos primeramente cómo esta absorción es compensada por los desprendimientos de CO_2.

Los fenómenos compensadores son:

1° Las *combustiones* naturales y artificiales;

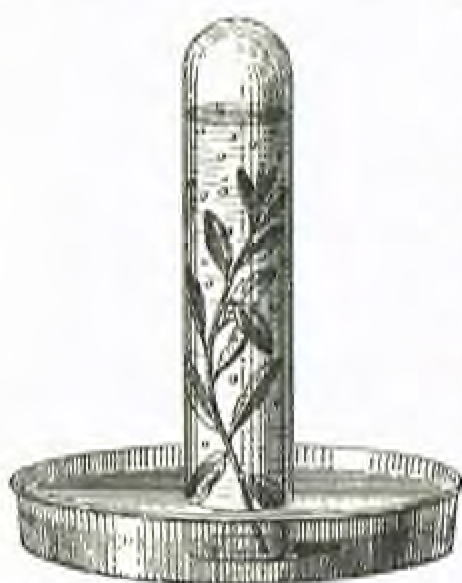
2° La *respiración* de los animales y de las plantas;

3° Las *fermentaciones* productoras de CO_2, de las que cabe citar la fermentación alcohólica, la butírica y la forménica.

La *fermentación alcohólica*, cuyo estudio se hará en el capítulo de la respiración, consiste en un desdoblamiento de la glucosa.

La *fermentación butírica* es una descomposición de la glucosa y de la celulosa en ácido butírico, hidrógeno y anhídrido carbónico.

La *fermentación forménica* es el proceso químico que tiene por resultado el desdoblamiento de la glucosa en metano o formeno y anhídrido carbónico.


Experimento que muestra la función clorofílica

Función clorofílica. — El proceso de utilización del carbono atmosférico por las plantas verdes constituye la *función* o *asimilación clorofílica*.

Coloquemos en una probeta que contenga agua rica en anhídrido carbónico, algunas plantas acuáticas verdes, como por ejemplo algas, e invirtamos la probeta sobre un recipiente lleno de agua. Si exponemos el conjunto a la luz solar, se ve cómo se desprenden burbujas de gas de la planta y se reúnen en el ápice del tubo. Introduciendo en la probeta una bujía recién apagada, se observa que ésta se enciende de nuevo, señal de que el gas desprendido y acumulado es el oxígeno. Repitiendo la experiencia en la obscuridad, se ve que no hay desprendimiento de gas. En el primer caso, el agua ha disminuido su contenido de CO_2; en el segundo, no.

Por lo tanto, la *función clorofílica, propia de las plantas verdes expuestas a la luz, se manifiesta por una absorción de anhídrido carbónico y un desprendimiento de oxígeno.* Más adelante se detalla extensamente esta función.

Intensidad de la función clorofílica. — Como la función clorofílica coexiste siempre con la respiración, su *intensidad* es difícil de apreciar, pero se logra por un método complejo, que aquí no podemos exponer muy extensamente, y que consiste, en síntesis, en medir la cantidad de anhídrido carbónico absorbido o la cantidad de oxígeno expelido en una hora, lo que puede variar:

1° *En función de la luz.* La intensidad es nula durante la noche; principia hacia las seis de la mañana, aumenta gradualmente hasta el mediodía y luego decrece hasta las seis de la tarde aproximadamente, si bien estas horas varían con la estación. A la luz solar directa, la intensidad clorofílica puede ser veinte veces más fuerte que la respiratoria. Por la mañana y por la noche, en cambio, hay unos momentos en los que ambas intensidades son iguales, pero de signo contrario: la planta desprende determinadas cantidades de oxígeno y anhídrido carbónico y absorbe las mismas proporciones;

2° *En función de la temperatura.* La función clorofílica principia bajo 0° C y aumenta hasta un óptimo situado entre los 25 y 30° C. Luego disminuye gradualmente hasta la muerte de la planta;

3° *En función del anhídrido carbónico.* La asimilación clorofílica se realiza con una intensidad máxima cuando el aire contiene un 10 % de CO_2. Esta condición tal vez fuera cumplida en otras épocas de vegetación exuberante (período carbonífero), pero hoy en día, el aire sólo contiene 0,03 % de CO_2, si bien las hojas remedian este inconveniente por presentar una superficie considerable para la respiración. Como simple anotación, indiquemos que una hectárea de cereales fija anualmente tres toneladas de carbón;

4° *En función de la especie vegetal y de la edad de la planta.*

Clorofila. — La *clorofila* (del griego *chloros*, verde, y *phyllon*, hoja) es el cuerpo verde de las hojas y otros órganos aéreos, y no se encuentra disuelta en el protoplasma de las células, sino fijada en unos corpúsculos llamados *cloroplastos*. Éstos son generalmente redondeados y abundan en todas las células, pero pueden también presentarse como elemento único y ofrecer formas excepcionales: en forma de plaqueta en el alga verde llamada *Mesocarpa*, en forma de espiral en el alga llamada *Spirogyra*, etc.

La clorofila se forma generalmente sólo en presencia de la luz. Así, una planta cultivada en la obscuridad permanece amarilla; no obstante, las algas, los musgos, los helechos e incluso las gimnospermas son capaces de formarla en ausencia de luz.

La clorofila se destruye por exceso de insolación. Así, en una célula foliar, los cloroplastos se desplazan en el curso del día: *a)* durante la noche, se distribuyen por toda la célula; *b)* durante la mañana y al atardecer, se sitúan junto a las paredes expuestas directamente al sol; *c)* al mediodía, en cambio, se acumulan junto a las paredes menos expuestas a la luz.

Para *extraer la clorofila* se utilizan hojas muy verdes (espinaca) y se trituran en un mortero con alcohol; éste disuelve la clorofila y otros dos pigmentos: la xantofila (amarilla) y la carotina (anaranjada), que da color a la zanahoria. Para aislar la clorofila se añade bencina o sulfuro de carbono a la solución alcohólica. En el primer caso, la bencina, más ligera que el alcohol, se sitúa en la capa superior y arrastra la clorofila. En el segundo, el sulfuro de carbono va al fondo del tubo, la arrastra igualmente, y por decantación se obtiene la solución de clorofila pura.

Evaporando suavemente una solución de clorofila se pueden obtener *cristales de clorofila.*

La clorofila se compone de carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno. Es, pues, una substancia cuaternaria o *proteica*, que posee además *magnesio*, probablemente como cuerpo catalítico. Su forma es $C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$.

La clorofila de las plantas se puede comparar adecuadamente con la hemoglobina de la sangre de los animales. En los dos casos nos encontramos con un cuerpo coloreado que interviene activamente en los intercambios gaseosos (respiración o función clorofílica). En ambos casos existe un metal catalizador: el magnesio para la clorofila y el hierro para la hemoglobina. Los productos de descomposición de las dos substancias tienden por último hacia la bilirrubina.

Otros pigmentos. — Los pigmentos o cuerpos colorantes de las plantas se pueden clasificar en cinco grupos:

1° Los pigmentos verdes o *clorofilas*, que se encuentran situados en los *cloroplastos* y sólo suelen existir en las células expuestas a la luz. Estos pigmentos son de naturaleza proteica y contienen magnesio;

2° Los pigmentos amarillos y anaranjados (pigmentos xanteicos), que abarcan las *xantofilas* y las *carotinas*. Estos pigmentos están situados en los *cloroplastos* o en corpúsculos especiales llamados *cromoplastos* y son los que tiñen el tomate, la zanahoria, el melón y las plantas marchitas. Desde el punto de vista químico, las carotinas poseen sólo carbono e hidrógeno, $C_{40}H_{56}$, mientras que las xantofilas contienen además oxígeno, $C_{40}H_{56}O_2$;

3° Los pigmentos azules, violeta, rosa y rojo (pigmentos ciánicos), de los que el principal es la *antocianina*. Estos pigmentos se encuentran disueltos en el jugo celular, cambian de color según la alcalinidad o acidez del mismo, y se hallan muy difundidos en las flores, los frutos (cereza, uva), las raíces (rábano, remolacha roja) y las hojas que enrojecen en otoño (haya púrpura, vid virgen);

4° Los pigmentos de las algas, es decir, la *ficocianina* de las algas azules, la *ficofeína* de las pardas y la *ficoeritrina* de las rojas. Estos pigmentos son solubles en el agua y precipitables por el alcohol;

5° Los pigmentos de las bacterias, de los mohos y de los hongos. Entre ellos hay uno, la *bacteriopurpurina*, propio de ciertas bacterias que parecen tener la propiedad de asimilar el CO_2 atmosférico, como la clorofila. Todos los demás están desprovistos de esta propiedad.

Espectro de la clorofila. — *La propiedad fundamental de la clorofila consiste en que absorbe ciertas radiaciones solares, es decir, que absorbe energía luminosa.*

Recordemos que si un rayo de luz atraviesa un prisma de vidrio, se refracta y al salir del medio aparecen un gran número de rayos coloreados, desde el violeta hasta el rojo, e idénticos a los colores del arco iris; es el *espectro solar*, que se puede proyectar sobre una pantalla. Los rayos rojos, anaranjados y amarillos son los menos refrangibles y los que desprenden más calor, es decir, los *rayos caloríficos*. Los rayos verdes, azules, índigo y violeta son los que presentan una acción química más intensa, o sea los llamados *rayos químicos*. Además de los que forman el espectro visible, existen también los rayos infrarrojos y los ultravioleta, que no se pueden percibir. Finalmente, se comprueba, en el espectro solar, la presencia de unas líneas negras transversales que corresponden a las radiaciones absorbidas por la atmósfera solar y terrestre. Retengamos solamente alguna de estas líneas, que se designan por las letras A, B, C, en el rojo, D en el amarillo, E en el verde, F en el azul, fáciles de localizar si recordamos que los intervalos entre ellas corresponden aproximadamente a las siguientes igualdades: $CD = DE = EF = 2AB = 2BC$.

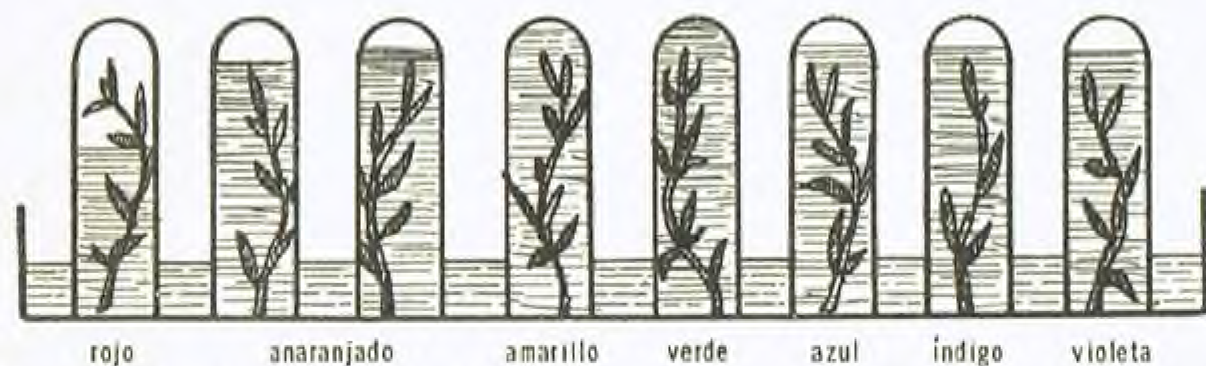
Coloquemos ahora en el trayecto del rayo solar y delante del prisma una cubeta de vidrio con una solución de clorofila, y veremos aparecer en el espectro unas bandas negras o *bandas de absorción*. Para simplificar, nos limitaremos a las cuatro más importantes: una banda entre los rayos B y C; una estrecha cerca de la raya D; otra también estrecha cerca de la raya E, y por último una banda ancha que ocupa toda la parte derecha del espectro, a partir de la raya F.

Por consiguiente, la clorofila ha absorbido la mayor parte de las radiaciones rojo anaranjadas y azul violeta de la luz solar.

Función de la clorofila. — La respiración (especie de combustión) es una reacción exotérmica, mientras que la función clorofílica, fenómeno inverso, es endotérmica. *A priori* puede suponerse, pues, que la clorofila, al absorber la energía luminosa, proporciona a la planta el calor necesario para aquella reacción. En efecto, por la experiencia se demuestra que esta hipótesis es acertada.

1ª EXPERIENCIA. Se proyecta sobre una pantalla un espectro solar completo y se dispone una serie de pequeños tubos conteniendo cada uno agua cargada de gas carbónico (por ejemplo, la de Seltz) y una hoja acuática. Todos los tubos son iguales y todas las hojas del mismo tamaño. Se invierten los tubos y se colocan en cubetas que contienen también agua.

Al cabo de cierto tiempo, se ve que algunos tubos contienen oxígeno y que son precisamente aquellos que se encuentran ante las radiaciones absorbidas por la clorofila. El desprendimiento es más fuerte en la zona del rojo anaranjado, y más débil en la del azul violeta.



Acción de la clorofila bajo la influencia de los colores del prisma

2ª EXPERIENCIA. Bajo campanas de doble pared se colocan diferentes plantas verdes, y a continuación se exponen a la luz solar. En la doble pared se introduce un líquido rojo anaranjado (solución de bicromato potásico), verde (solución de clorofila), o azul violeta (líquido de Schweizer, azul celeste). La asimilación clorofílica es muy intensa bajo la campana de color rojo anaranjado, poco en el azul violeta y nula en verde.

3ª EXPERIENCIA. Aquí se utiliza el microscopio y esta experiencia es más precisa y elegante que las dos otras.

Sobre una lámina de vidrio se coloca una gota de agua de Seltz que contenga un filamento de alga verde y bacterias ávidas de oxígeno, y luego un cubreobjetos con los bordes cubiertos con masilla o cera para impedir que el aire penetre en el interior de la gota de agua. Al principio de la experiencia, los microbios están repartidos uniformemente, pero poco tiempo después se acumulan junto al alga, que desprende oxígeno.

A continuación se proyecta sobre el alga verde un pequeño espectro solar (microespectro) y se continúa la observación. Las bacterias se desplazan y se localizan en las partes del alga situadas en el rojo anaranjado y en el azul violeta, únicos lugares donde se desprende oxígeno y, por lo tanto, donde tiene lugar la función clorofílica. También se nota que la aglomeración bacteriana es más considerable en el rojo anaranjado que en el azul violeta.

En resumen, *la función clorofílica sólo tiene lugar en presencia de las radiaciones luminosas rojo anaranjadas y azul violeta, que son precisamente las absorbidas por la clorofila.* Luego se puede concluir que la energía contenida por estas radiaciones sirve para la asimilación del anhídrido carbónico.

En cuanto a las radiaciones verdes, la clorofila no puede utilizarlas; por eso es verde por reflexión y por transparencia. Iluminar una planta con luz verde equivale, pues, a "nutrirla con sus propios excrementos" y, naturalmente, sometida a este régimen, acaba por morir.

Fotosíntesis de los glúcidos. — Para demostrar que se forma *almidón* en los órganos verdes de los vegetales expuestos a la luz, se comprueba que las hojas cosechadas por la mañana no lo contienen; a continuación, sin arrancar la hoja del árbol, se cubre con papel negro y se deja expuesta todo el día a la luz solar. En el papel se recorta previamente la palabra *almidón*. Por la noche se arranca la hoja y se la decolora por medio de alcohol, que disuelve la clorofila. Luego se introduce en una solución de yodo para precipitar el almidón. La hoja se tiñe sólo en los lugares expuestos a la luz y se ve aparecer, en azul, la palabra recortada, por lo que se deduce que este cuerpo es uno de los productos de la síntesis clorofílica y que el fenómeno, dado que se realiza por acción de la luz, es una *fotosíntesis*.

Actualmente se concibe el proceso químico de la función clorofílica como constituido por una serie de reacciones que conducen del anhídrido carbónico al almidón y otros glúcidos más complejos.

El anhídrido carbónico parece descomponerse en oxígeno y óxido de carbono:



$$CO_2 = CO + O.$$

Por otra parte, el agua se descompone en oxígeno e hidrógeno:



$$H_2O = 2H + O.$$

Mientras todo el oxígeno se desprende, el óxido de carbono y el hidróxido naciente se combinan, según la siguiente reacción:



$$CO + 2H = CH_2O.$$

Este cuerpo es el *formol* o *aldehído fórmico*, que es el primer término de la fotosíntesis.

Luego el formol se *polimeriza* por condensación y da *glucosa:*



$$6CH_2O = C_6H_{12}O_6.$$

Y una parte de la glucosa se transforma inmediatamente en *almidón:*



$$n\ C_6H_{12}O_6 = (C_6H_{10}O_5)n + n\ H_{2}O$$

El resto de la glucosa se distribuye por las diferentes partes de la planta a las cuales nutre, así como por los órganos de reserva, donde se acumula.

El propio almidón, formado durante el día en los *cloroplastos* de los órganos expuestos a la luz, se transforma de nuevo en glucosa durante la noche y emigra en esta forma soluble (forma viajera) hasta los órganos profundos (medula) o subterráneos (raíces, rizomas, tubérculos), donde se reconstituye en los *amiloplastos.*

La hipótesis del formol como término inicial de la fotosíntesis se apoya en las observaciones siguientes:

a) Los químicos pueden hacer la síntesis de la glucosa a partir del formol;

b) Las algas mantenidas en la obscuridad y alimentadas con formol elaboran almidón;

c) Existe formol en mínima cantidad en la mayoría de los órganos vegetales.

Sin embargo, no todos los fisiólogos admiten esta hipótesis y así algunos piensan que el primer término de la fotosíntesis es la *glucosa* obtenida directamente a partir del CO_2 y el agua.

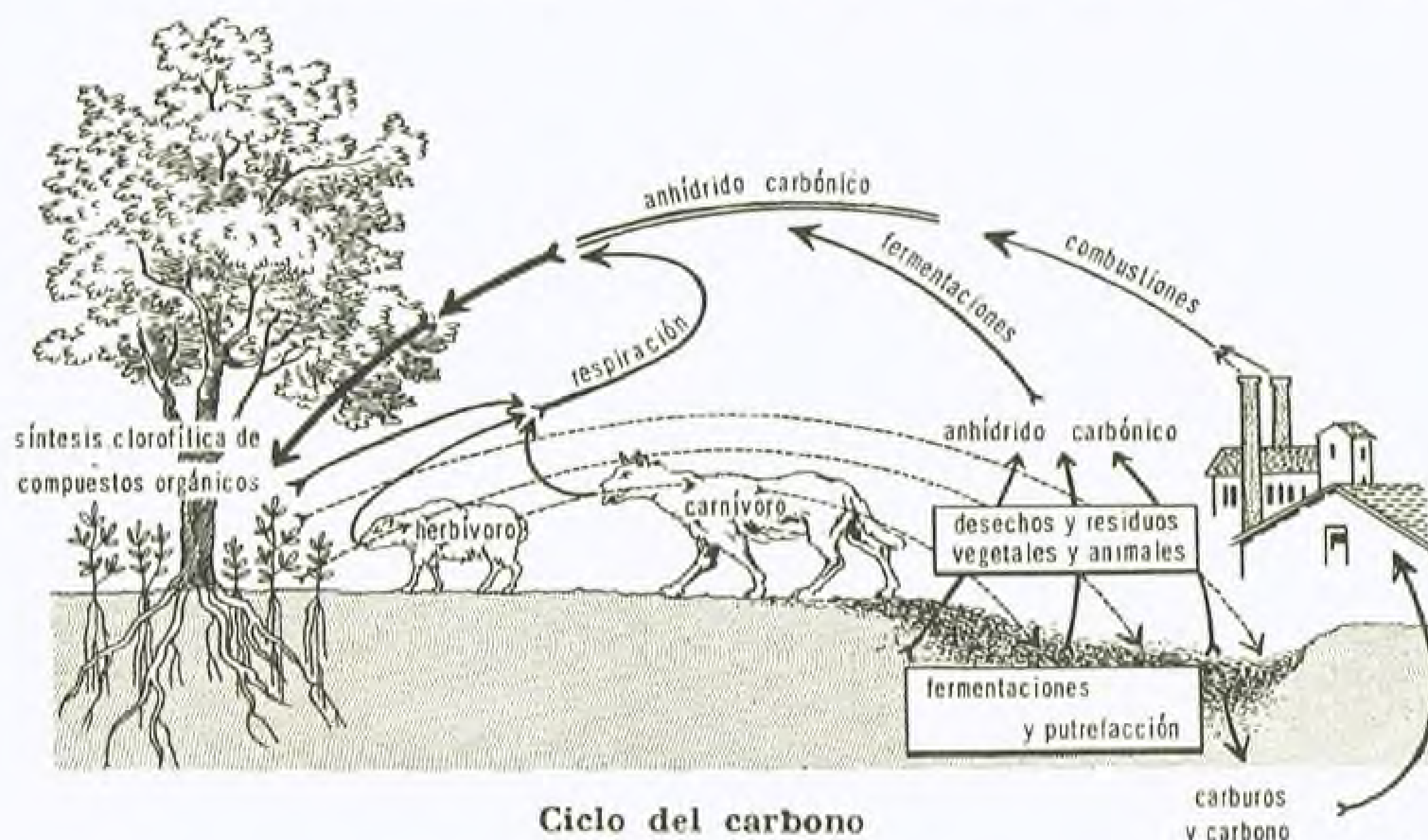
En cualquier caso, la clorofila es una especie de catalizador, o más adecuadamente, de *fotocatalizador*, que da a la célula verde el poder de utilizar la energía de las radiaciones luminosas.

Fotosíntesis de los prótidos y los lípidos. — Una parte de la energía captada por la clorofila sirve para sintetizar los prótidos y los lípidos y otros cuerpos orgánicos de las plantas.

En general, se admite que los nitratos procedentes del suelo se transforman en las hojas en amoniaco, NH_3, y luego en aminoácidos y prótidos, con lo cual se considera que hay una combinación directa entre los nitratos y el formol. Finalmente, el ácido cianhídrico HCN parece ser, al menos en ciertos casos (rosáceas), uno de los términos de la síntesis de los prótidos. Este ácido, veneno violento, abunda bastante en los vegetales. La síntesis de los lípidos podría efectuarse tomando como punto de partida la glicerina. En realidad, el proceso de fotosíntesis no tiene la simplicidad aquí expuesta, pero se conserva esta explicación por cuanto da una idea aproximada de lo que ocurre.

Ciclo del carbono. — De lo que precede se puede deducir que el carbono da lugar a un *ciclo*, es decir, a una circulación entre los tres reinos de la Naturaleza.

Todos los animales toman directa (herbívoros) o indirectamente (carnívoros) su carbono de las plantas verdes. Lo mismo sucede con los vegetales sin clorofila (hongos), mientras que las plantas verdes, por el contrario, lo toman de la atmósfera.



Ciclo del carbono

En contrapartida, los desechos de la vida animal o vegetal sufren *fermentaciones*, producidas por bacterias, con desprendimiento en algunos casos de CO_2.

La respiración de los animales y de las plantas produce asimismo CO_2.

Las *combustiones* son, además, una tercera fuente de CO_2, gracias a lo cual la atmósfera puede aportar lo necesario para la *función clorofílica*, sin un empobrecimiento sensible.

Esta última función ocupa un lugar preponderante en el ciclo del

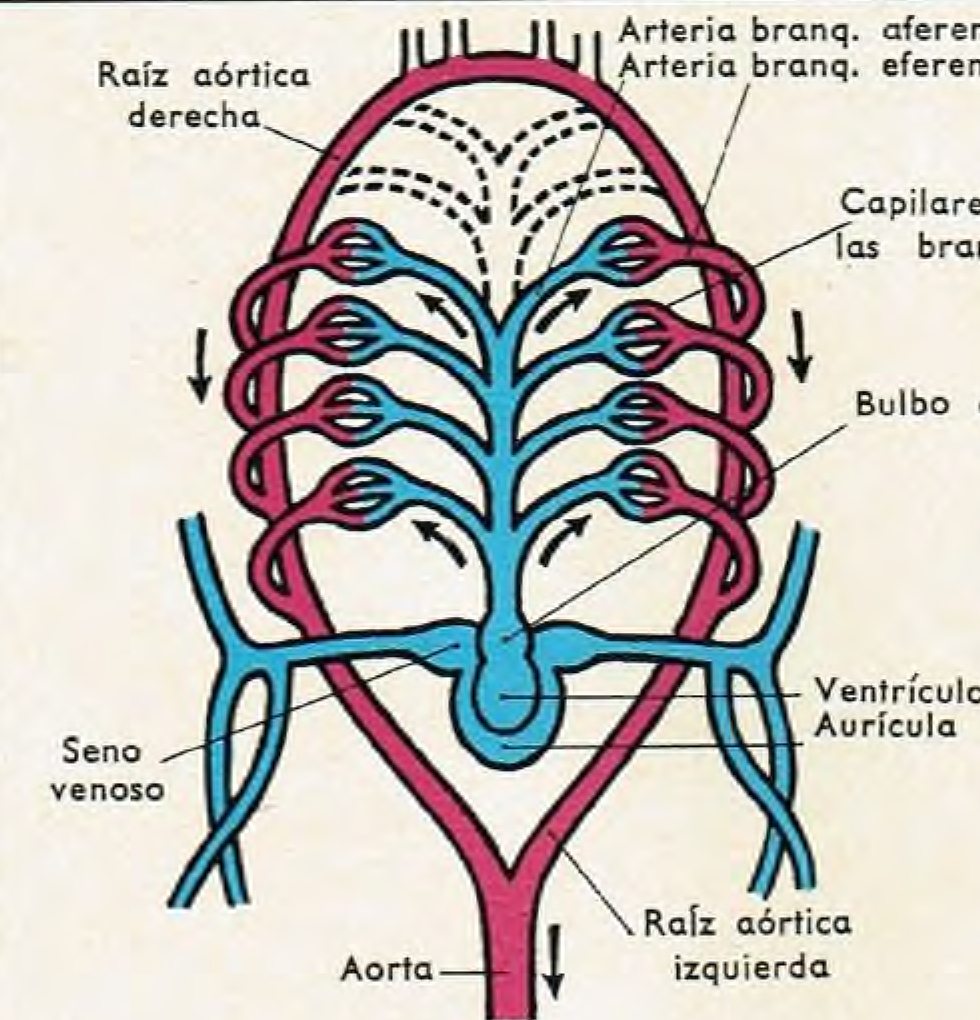
ANATOMÍA COMPARADA DEL APARATO CIRCULATORIO DE LOS VERTEBRADOS

(Sistema arterial)

Todos los embriones de vertebrados poseen seis pares de arcos aórticos. No obstante, si exceptuamos los peces cartilaginosos (tiburones), los dos primeros pares se atrofian muy pronto, como se puede ver en los esquemas adjuntos, en los cuales las líneas de puntos representan las partes desaparecidas

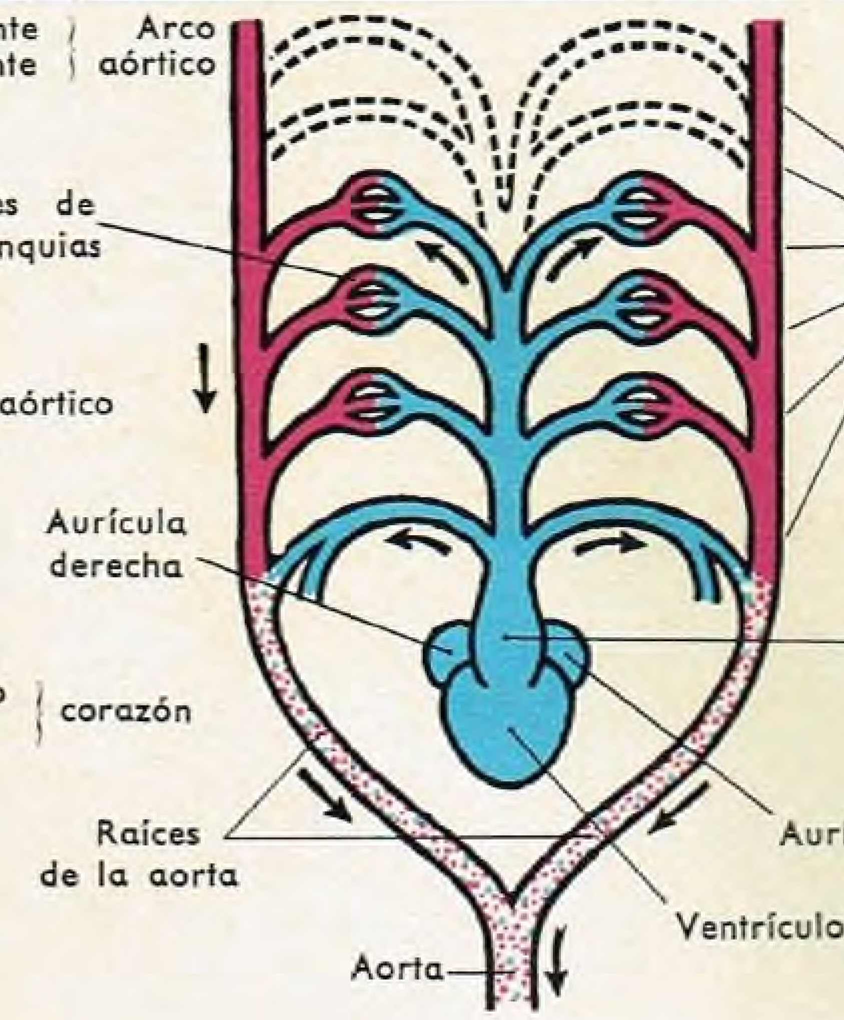
Podemos comparar los sistemas arteriales de las diversas classes de vertebrados y comprobar una evolución progresiva entre los peces y los mamíferos

Los arcos aórticos sufren ciertas modificaciones y, asimismo, el corazón se perfecciona. En los vertebrados superiores (aves y mamíferos), el corazón envía sangre negra pura a los pulmones y sangre roja pura a todos los órganos



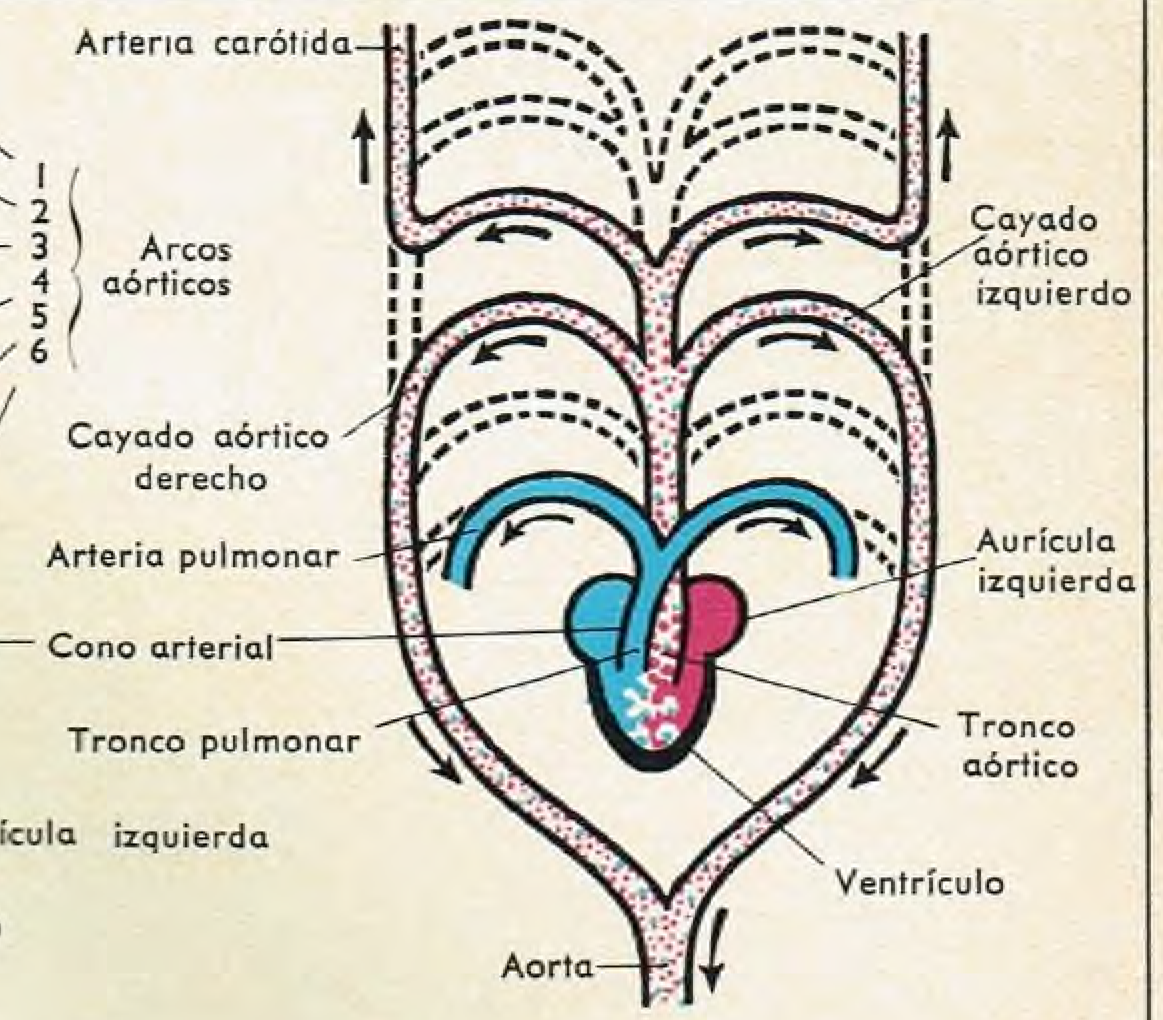
PEZ ÓSEO

El corazón (una sola aurícula y un solo ventrículo) es atravesado únicamente por sangre negra
Cuatro pares de arcos aórticos forman cada uno en la branquia correspondiente una red capilar en la cual la sangre se provee de oxígeno



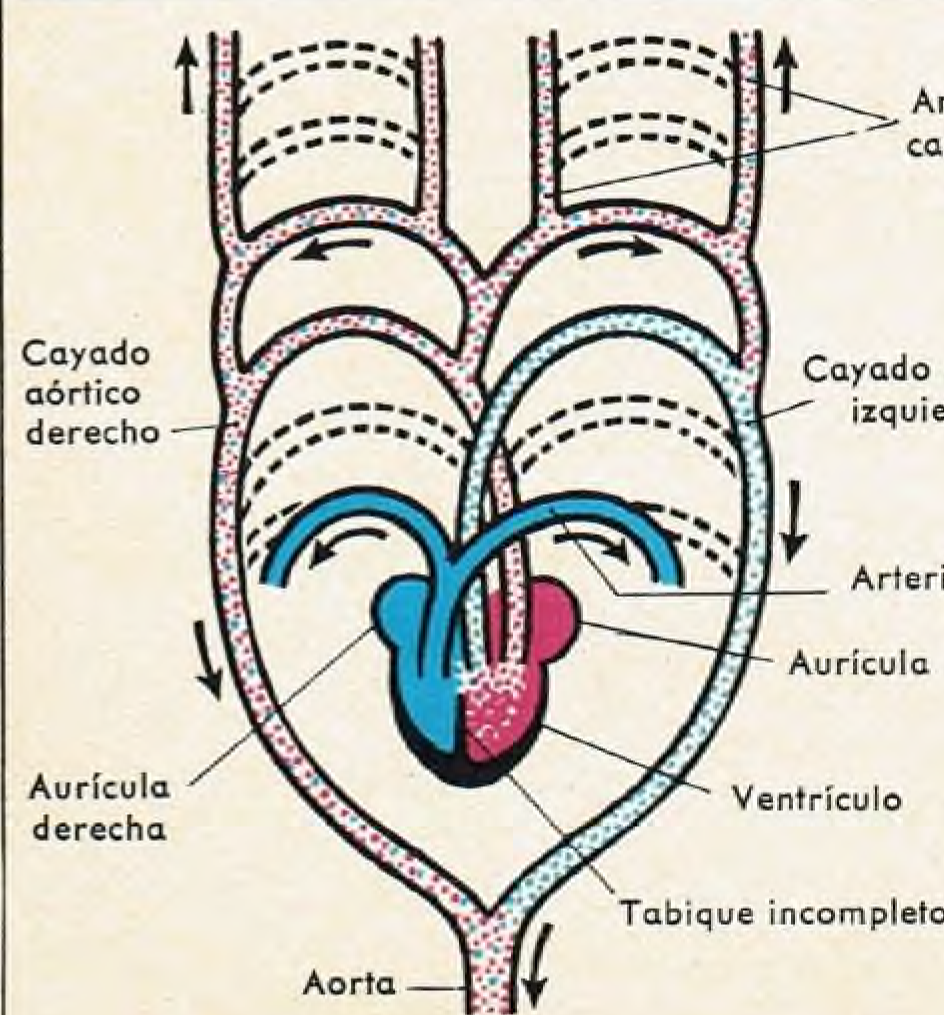
LARVA DE BATRACIO (RENACUAJO)

Corazón de dos aurículas y un solo ventrículo, atravesado por sangre negra. Larva acuática de respiración branquial. La sangre expedida a los órganos no es sangre roja pura, sino mezclada con sangre negra



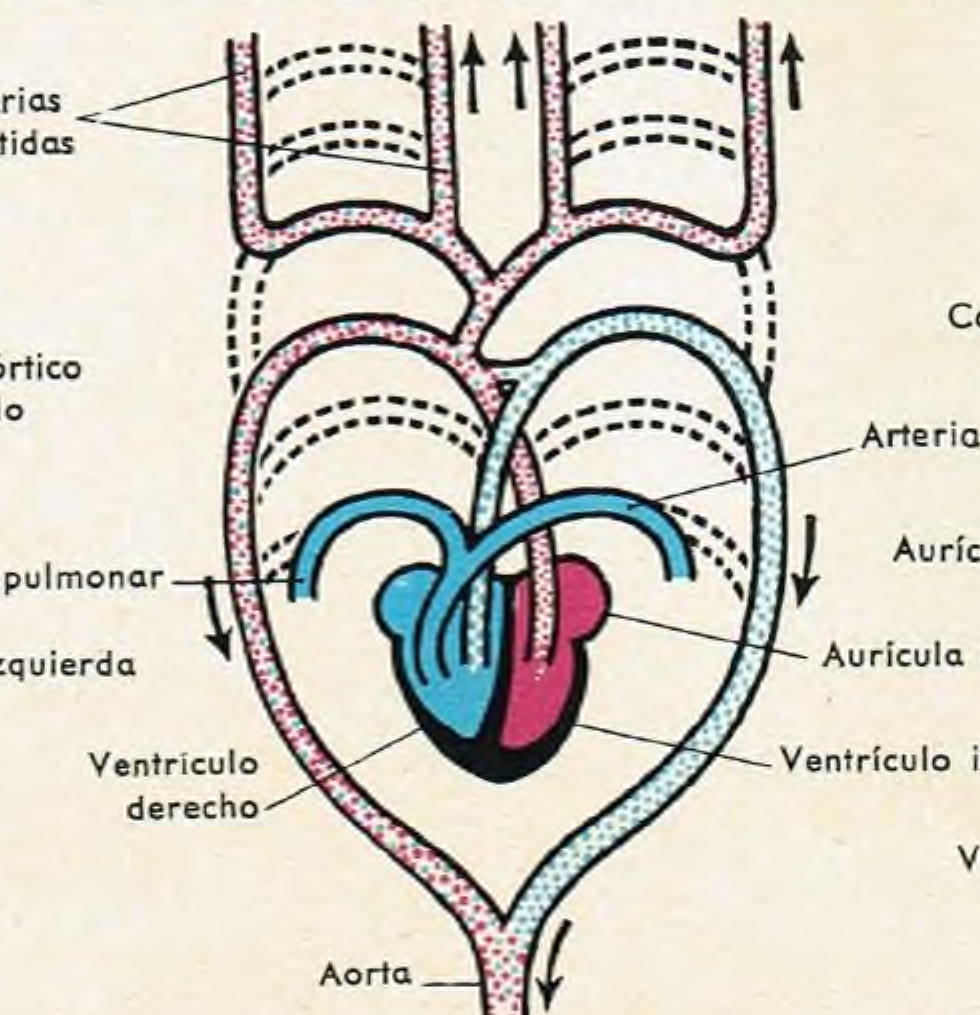
BATRACIO ADULTO (RANA)

Respiración pulmonar (aérea). Desaparición de las redes capilares branquiales. Adaptación de los diferentes arcos aórticos a funciones distintas. La cuarta arteria se convierte en la arteria pulmonar



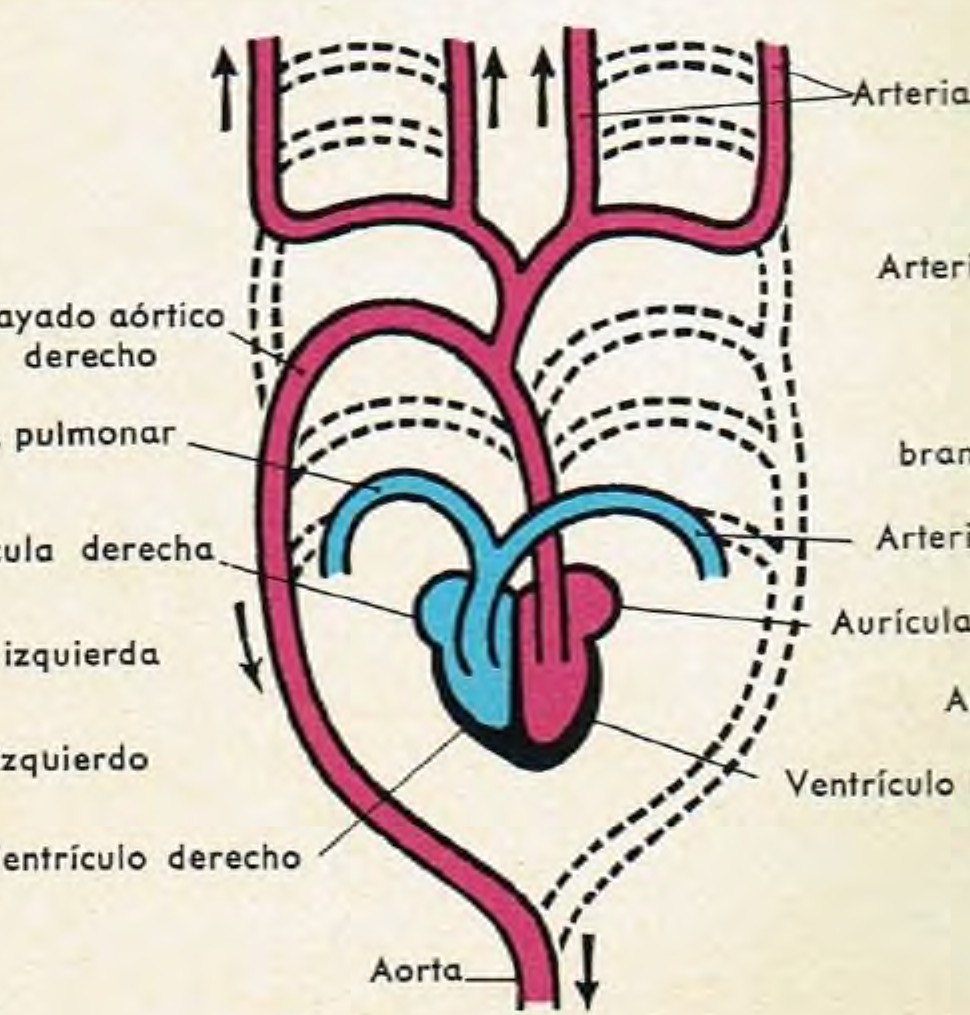
REPTIL (LAGARTO)

Corazón de dos aurículas y un ventrículo dividido en dos por un tabique incompleto. Los cayados aórticos y la arteria pulmonar están separados. Las sangres negra y roja se mezclan parcialmente



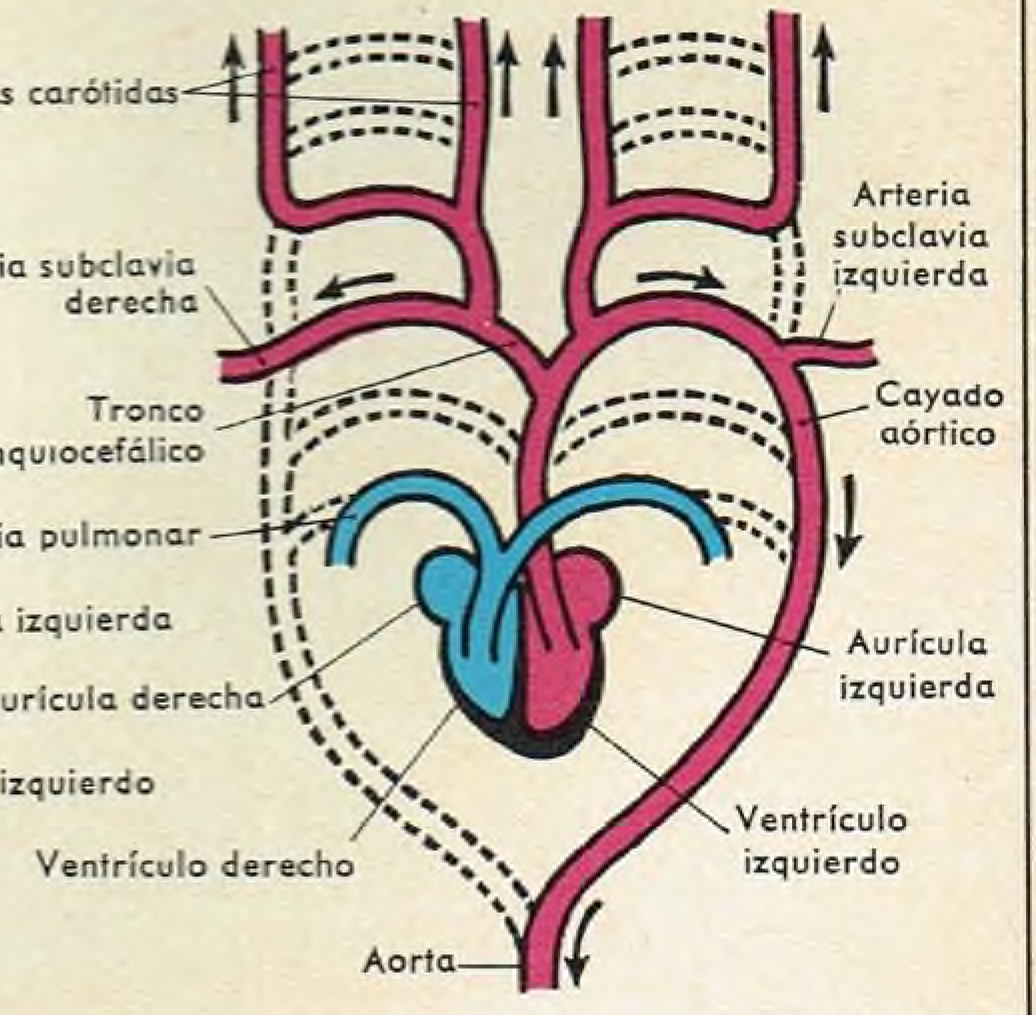
REPTIL (COCODRILO)

Corazón de dos aurículas y dos ventrículos, con tabique ventricular completo, aunque las sangres negra y roja se mezclan todavía un poco, por lo que la aorta no envía a los órganos sangre roja completamente pura



AVE

Corazón de dos aurículas y dos ventrículos. El cayado aórtico izquierdo ha desaparecido. Separación perfecta de la sangre negra y la sangre roja. La aorta envía a los órganos únicamente sangre roja pura



MAMÍFEROS

Igual perfección que en las aves. Separación perfecta de las sangres negra y roja. Pero aquí es el cayado aórtico derecho el que ha desaparecido

APARATO RESPIRATORIO DE LOS VERTEBRADOS

Boca
Arco branquial
Laminillas branquiales
Opérculo
Branquias

PEZ ÓSEO
Branquias laminosas cubiertas de un opérculo (sección)

Arteria branquial aferente
Arteria branquial eferente
Laminillas branquiales

PECES ÓSEOS
Irrigación sanguínea de las laminillas branquiales

Branquias externas
Boca
Órgano adhesivo
Músculos de la cola

BATRACIO LARVAL
(Renacuajo joven)

Saco aéreo
Bronquio principal
Capilares aéreos
Húmero

AVE
Estructura del pulmón

Alvéolos

BATRACIO ADULTO
(Rana)

Tráquea
Sacos aéreos
Pulmón
Sacos aéreos

AVE
Aparato respiratorio

Ramificaciones de un bronquio
Bronquios
Alvéolos
Tabiques alveolares

MAMÍFERO
Lobulillo pulmonar

Laringe
Tráquea
Bronquio izquierdo
Pleura
Costillas en sección
Corazón
Pulmón derecho (cara exterior)
Diafragma
Tabiques conjuntivos
Lobulillos pulmonares

MAMÍFERO
Aparato respiratorio del hombre

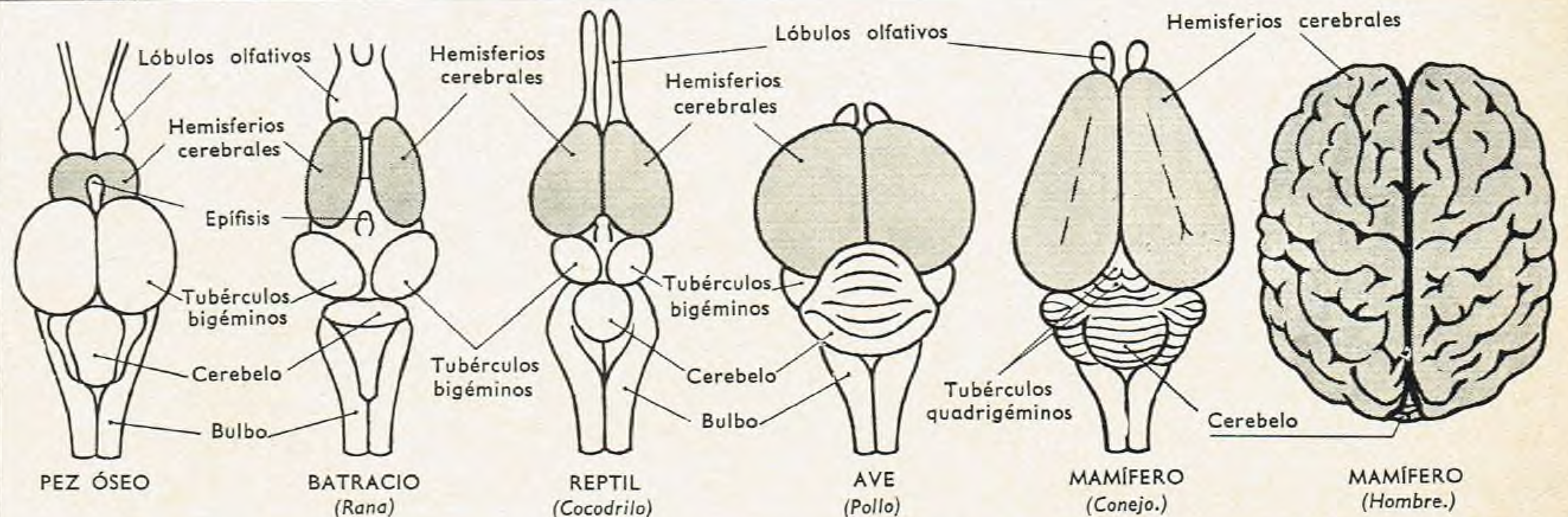
Los vertebrados acuáticos (peces y batracios larvales) respiran por medio de branquias (cuatro pares los peces óseos), sostenidas cada una de ellas por un arco óseo. El renacuajo cuenta en un principio con branquias externas que son rápidamente substituidas por otras internas (que no figuran en el grabado). Las branquias internas de la rana adulta son reemplazadas por dos pulmones muy simples. En los reptiles, los pulmones están ya más tabicados. Los de las aves están formados por numerosas ramificaciones de los bronquios, las últimas de las cuales forman capilares aéreos. Además, ciertos bronquios se prolongan hacia el exterior de los pulmones y terminan en sacos aéreos que sirven de reserva de aire durante el vuelo. En los mamíferos, las últimas ramificaciones de los bronquios terminan en los lobullilos pulmonares, cuyo tejido está surcado de canales. Los tabiques de estos canales forman minúsculas cavidades, llamadas alvéolos. Branquias y pulmones son irrigados abundantemente por la sangre, que de negra se convierte en roja, gracias al oxígeno recogido a su paso por estos órganos

SISTEMA NERVIOSO DE LOS VERTEBRADOS

(Anatomía comparada del encéfalo)

En las diferentes clases de vertebrados se observa un perfeccionamiento progresivo al pasar de los peces a los mamíferos

El encéfalo de los peces, de poco volumen, comprende hemisferios muy pequeños e insuficientemente distintos uno de otro. En los batracios, los hemisferios están un poco más desarrollados y son completamente distintos. En los reptiles son netamente mayores que las otras partes del encéfalo. En las aves son plenamente predominantes. En los mamíferos, este predominio se acentúa y la superficie de los hemisferios presenta pliegues o circunvoluciones cerebrales más o menos numerosas, según las especies. En el hombre, los hemisferios, muy plegados, están tan desarrollados que cubren todas las demás partes del encéfalo



carbono, ya que sólo ella es capaz de originar las combinaciones orgánicas del carbono a través de diversos procesos químicos, y sin ella la vida sería imposible en la superficie del Globo.

Incluso los combustibles que parecen más minerales porque se extraen del suelo (carbonos, petróleos), tienen un origen orgánico y provienen, en definitiva, de las plantas verdes, ya que es probable que determinadas células verdes análogas a algas unicelulares hayan sido los primeros habitantes del planeta.

Respiración vegetal

Modalidades de la respiración. Fermentación alcohólica: Experiencia fundamental de Pasteur. Complejidad del fenómeno. Interpretación y generalidad del fenómeno. Separación de las funciones respiratoria y clorofílica. Medida de la respiración: Método del aire confinado. Método del aire renovado. Método del vacío. Intensidad respiratoria. Cociente respiratorio. Mecanismo de la respiración. Calor vegetal

El ciclo del carbono comprende, entre otros fenómenos, la *respiración* de los animales y las plantas, con lo cual se restituye a la atmósfera una parte del anhídrido carbónico absorbido por la función clorofílica.

Modalidades de la respiración. — Mientras que la respiración de los animales ofrece en todos las mismas características, la de las plantas se presenta por lo menos bajo tres modalidades diferentes:

1° *Respiración directa,* que se traduce por una absorción de oxígeno y un desprendimiento de anhídrido carbónico. Estas dos operaciones tienen lugar a expensas de la atmósfera o del aire disuelto en el agua, y se realizan como si se tratase de una verdadera combustión. En esta modalidad se pueden incluir la respiración animal y la de la mayoría de las plantas, así como ciertas fermentaciones: fermentación acética (oxidación del alcohol), nitrosa y nítrica (oxidación del amoniaco);

2° *Respiración indirecta,* que consiste en que un organismo absorbe, no el oxígeno del aire, sino el de una substancia que dicho organismo descompone al desprender o no anhídrido carbónico. Tales son las fermentaciones alcohólica (descomposición de la glucosa), butírica y forménica (descomposición de los glúcidos), y la desnitrificación (descomposición de los nitratos);

3° *Sucedáneos de la respiración,* que son los procesos en los que hay un desdoblamiento de una substancia sin intervención del oxígeno, pero que conducen, como en la respiración, a una liberación de energía. Tales son la fermentación amoniacal (descomposición de la urea) y la láctica (descomposición de la glucosa).

La primera modalidad respiratoria recibe el nombre de proceso aeróbico o *aerobiosis* (del griego *aer,* aire, y *bios,* vida), por oposición a las dos últimas, que tienen lugar en ausencia de aire y son por eso consideradas procesos anaeróbicos o *anaerobiosis.* La mayoría de los seres vivientes son aerobios, y sólo algunas bacterias son anaerobias; la presencia del oxígeno libre impide a estas últimas su reproducción y las mata.

Fermentación alcohólica. — Se han estudiado antes varias fermentaciones a propósito de las asimilaciones nitrogenadas y de la asimilación del carbono por los vegetales. Aquí tiene interés estudiar la *fermentación alcohólica* para ver, en un mismo ser, el paso de la aerobiosis a la anaerobiosis. Ciertos fisiólogos consideran incluso la fermentación alcohólica como una de las fases normales de la respiración.

Experiencia fundamental de Pasteur. — La *levadura de cerveza (Saccaromyces cerevisiae)* se presenta comercialmente bajo el aspecto de una masa parda y compacta que, observada con el microscopio, aparece como una aglomeración de células ovoides que tienen de ocho a nueve micras de longitud. Estas células están separadas unas de otras o agrupadas pasajeramente en forma de cadena. Al no tener clorofila, sólo pueden vivir en un medio de cultivo que posea, a la vez, carbono bajo la forma de cuerpos orgánicos (azúcares) y nitrógeno, sea en estado mineral u orgánico (tartrato y fosfato de amoniaco). Sobre estos medios de cultivo naturales o artificiales, la levadura de cerveza vive como saprofito, pero, según Pasteur pudo comprobar, puede hacerlo de dos modos opuestos:

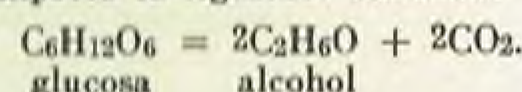
1° Sembremos de levadura una solución azucarada contenida en un recipiente ancho y poco profundo, y por lo tanto en fácil contacto con la atmósfera, o sea con el oxígeno del aire. La levadura se multiplica rápidamente, lo que quiere decir que es sana. Como respira fácilmente, quema el azúcar, lo hace desaparecer y desprende anhídrido carbónico, según la reacción:



$$C_6H_{12}O_6 + 6O = 6CO_2 + 6H_2O.$$
glucosa

En esta primera parte de la experiencia, la levadura es aerobia y consume la glucosa, como lo hacemos nosotros mismos en el interior de nuestros músculos;

2° Volvamos a realizar la experiencia, pero colocando esta vez el jugo azucarado, hervido previamente para eliminar el aire disuelto, en un frasco enteramente lleno y herméticamente cerrado. La levadura, al estar privada de aire, enferma, ya que se multiplica lentamente, y poco después esporula. Al mismo tiempo, en el tubo que se ha insertado en el frasco se observa que hay un desprendimiento de anhídrido carbónico. El líquido hierve o, si se quiere, sufre una fermentación (del latín *fervere,* hervir), que no es otra cosa que la fermentación alcohólica. El azúcar desaparece y el líquido se carga de alcohol que se puede recoger después por destilación. El fenómeno que ha ocurrido lo expresa la siguiente reacción:



$$C_6H_{12}O_6 = 2C_2H_6O + 2CO_2.$$
glucosa alcohol

Por consiguiente, la levadura *anaerobia* descompone el azúcar en lugar de quemarlo.

Complejidad del fenómeno. — En realidad, la fermentación alcohólica no es un proceso sencillo. Además del alcohol se producen glicerina, ácido succínico, alcoholes superiores (alcohol propílico, butílico, amílico), aldehídos, éteres, etc. Por otra parte, la fermentación alcohólica hace intervenir un fermento especial llamado *alcoholasa* o *zimasa.* Este fermento se encuentra en el interior de la levadura y sólo puede extraerse por medios drásticos: es decir, rotura de las células en presencia de una gran cantidad de agua o por pulverización por medio de arena. En los dos casos, el líquido obtenido y filtrado conserva la propiedad de desdoblar el azúcar en alcohol y CO_2.

Interpretación y generalidad del fenómeno. — Comparemos de nuevo las dos partes de la experiencia de Pasteur. En la primera, la levadura se encuentra en presencia de oxígeno; es *aerobia.* En la segunda, por el contrario, la levadura está privada de oxígeno y amenazada de asfixia: es *anaerobia.* En este caso le falta su fuente habitual de energía, es decir, la combustión de la glucosa, que se suple por otra reacción exotérmica: la producción de alcohol a expensas de la glucosa. Por consiguiente, la fermentación alcohólica es una defensa de la levadura para *evitar la asfixia.* Esta hipótesis es posiblemente cierta dado que en toda célula, todo tejido y todo órgano que contiene azúcar y está privado de oxígeno tiene lugar una fermentación alcohólica.

Esto se puede demostrar al colocar bajo una campana o en un frasco unas rodajas de zanahoria o remolacha, frutos azucarados, o incluso un trozo de hígado recientemente extraído de un animal. Si el recipiente está lleno y comunica por un tubo con una bureta invertida sobre una cubeta de agua, al cabo de unos días se puede observar claramente un desprendimiento de CO_2, mientras que al mismo tiempo el azúcar desaparece y se forma alcohol.

Separación de las funciones respiratoria y clorofílica. — Durante el día, una planta verde *desprende oxígeno* y absorbe CO_2; se diría que la planta no respira. En realidad, respira (fenómeno constante), pero su función clorofílica es más intensa que la respiratoria y la enmascara por completo.

Durante la noche o la obscuridad, la función clorofílica cesa y la respiración entonces se hace evidente: hay *desprendimiento de CO_2.*

De lo que precede se deduce que no se puede aislar la función clorofílica, pero sí aislar la respiratoria para estudiarla independientemente.

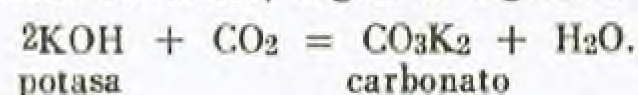
Para ello, se dispone, por ejemplo, bajo una campana, una planta verde (o unos hongos) en un tiesto, y se cubre todo con un papel negro.

También se puede colocar en un cristalizador una planta verde acuática, a la que se añaden unas gotas de éter para detener temporalmente la función clorofílica, y se recoge el CO_2 mediante un embudo y una bureta.

Medida de la respiración. — En 1884, **Bonnier** y **Mangin** emplearon los métodos del aire confinado y del aire renovado. **Maquenne** y **Demoussy** utilizaron en 1913 el método del vacío.

Método del aire confinado. — Las plantas objeto de la experiencia se colocan bajo una campana, cuyo aire es analizado al principio y al fin de la operación. No obstante, este método tiene el inconveniente de provocar un principio de asfixia en las plantas.

Método del aire renovado. — El aparato comprende una campana de vidrio, donde se colocan las plantas; las plantas verdes, en la obscuridad; los hongos, en la obscuridad o a la luz. Del extremo de la campana parten dos tubos que permiten la entrada y la salida del aire. El aire que llega pasa a través de una solución de potasa donde se elimina el anhídrido carbónico, según la siguiente reacción:



$$2KOH + CO_2 = CO_3K_2 + H_2O.$$
potasa carbonato

El aire que sale, que ha servido para la respiración de las plantas, atraviesa una solución de agua de cal que retiene el anhídrico carbónico, según la siguiente reacción:



$$Ca(OH)_2 + CO_2 = CaCO_3 + H_2O.$$
cal

A continuación se filtra el agua de cal, se separa el precipitado de carbonato, se pesa después de haberlo desecado y se deduce la cantidad de CO_2 expulsada por la planta.

Método del vacío. — Los métodos precedentes sólo dan resultados imprecisos en la estimación de la cantidad de CO_2, ya que este gas se disuelve fácilmente en el jugo celular y queda retenido en parte por la misma planta. Pero se puede subsanar este inconveniente si se extrae todo el gas de las plantas, al principio y al final de la experiencia, por medio de un aparato de vacío.

Intensidad respiratoria. — Se mide la intensidad respiratoria por la cantidad de CO_2 desprendida, o bien por la cantidad de oxígeno absorbida durante una hora. Los dos valores no son iguales, pero varían de la misma manera;

1° *En función de la especie vegetal.* Las plantas anuales son aquellas que respiran más activamente, mientras que las carnosas (cactus) tienen una respiración débil;

2° *En función del órgano.* Toda la planta respira, pero principalmente su parte aérea (hojas, tallo, flores);

3° *En función de la edad de la planta.* La intensidad respiratoria pasa por máximos sucesivos que corresponden a los siguientes estados de la vida de la planta: *germinación* (utilización de las reservas de la semilla), *eclosión de las yemas* (empleo de las reservas de la planta) y *floración* (elaboración de las reservas de la semilla);

4° *En función de la temperatura.* La intensidad respiratoria es prácticamente nula por debajo de 0° C para las plantas de Francia, aumenta lentamente de 0° C a 10° C, y luego, muy rápidamente, hasta la temperatura mortal;

5° *En función de la luz.* La respiración de los hongos es menos intensa a la luz que en la obscuridad.

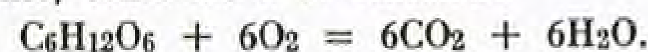
Cociente respiratorio. — Es útil hacer intervenir bajo el nombre de *cociente respiratorio,* la relación CO_2/O, que expresa la proporción de anhídrido carbónico desprendido en comparación al oxígeno absorbido durante el mismo tiempo. Esta relación varía:

1° *En función de la especie vegetal y del órgano considerado;*

2° *En función de la edad de la planta.* Durante el período de vida activa, el cociente respiratorio es superior a la unidad, lo cual indica que la planta desprende una cantidad de oxígeno bajo la forma de CO_2 que es superior a la que escapa como oxígeno libre. En otras palabras: *la planta se reduce.* Durante la vejez, por el contrario, el cociente respiratorio es inferior a la unidad, lo cual significa que una parte del oxígeno absorbido se ha fijado en los tejidos, y que las oxidaciones son más numerosas que las reducciones: *la planta se consume;*

3° *En función de los factores físicos* (temperatura, luz, humedad, etcétera).

Mecanismo de la respiración. — La respiración se parece a una combustión, pero en realidad es una sucesión de fenómenos complejos, la mayoría de los cuales son desconocidos. La glucosa no se quema simplemente, conforme a la reacción:



$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 = 6CO_2 + 6H_2O.$$

Según las plantas, primero se transforma en alcohol o en ácidos orgánicos:

1° *En el caso del alcohol,* la fermentación alcohólica es el primer paso de la respiración:



$$C_6H_{12}O_6 = 2C_2H_6O + 2CO_2.$$

Luego el alcohol se quema:

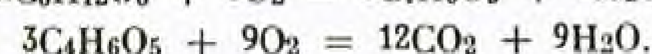


$$2C_2H_6O + 6O_2 = 4CO_2 + 6H_2O.$$

2° *En el caso de los ácidos orgánicos,* si tomamos el ácido málico, por ejemplo, las dos reacciones sucesivas son:



$$2C_6H_{12}O_6 + 3O_2 = 3C_4H_6O_5 + 3H_2O,$$



$$3C_4H_6O_5 + 9O_2 = 12CO_2 + 9H_2O.$$

Estas dos últimas reacciones son particularmente claras en las plantas carnosas, donde ocurren, la primera durante la noche y la segunda durante el día. De todo ello resulta que el cociente respiratorio nocturno de estas plantas es muy débil (0'02), ya que hay absorción de oxígeno, pero no expulsión de anhídrido carbónico. Por el contrario, su cociente diurno es superior a 1, ya que la cantidad que se desprende de CO_2 es superior a la de oxígeno absorbida.

Calor vegetal. — Las numerosas transformaciones químicas (oxidaciones, reducciones, hidrataciones, desdoblamientos, etc.) que tienen lugar en las plantas son, unas *endotérmicas* y consumen calor, otras *exotérmicas* y lo producen. De su suma algebraica resulta un excedente de energía que se desprende y constituye el *calor vegetal,* particularmente sensible durante *la germinación* y, en menor grado, durante la *floración.* Un montón de semillas en germinación puede tener una temperatura superior en 10° C a la del medio ambiente. Del mismo modo, las fermentaciones de un estercolero elevan la temperatura. De todas formas, el calor vegetal es menos notable que el animal, y se debe a que el número de reacciones endotérmicas en las plantas es mayor que en los animales a causa de las múltiples síntesis que tienen lugar en su seno.

Movimientos y sensibilidad de las plantas

Movimientos protoplasmáticos. Tropismos y tactismos. Movimientos nictotrópicos. Movimientos provocados por contactos: Sensitiva. Dionea muscípula o «atrapamoscas». Drosera o «rocío del Sol». Reacciones eléctricas de las plantas

Si las plantas son menos sensibles y menos móviles que los animales, se debe a sus membranas celulósicas y no a una constitución fundamentalmente diferente.

Sus principales movimientos son: 1° los movimientos protoplasmáticos; 2° los tropismos y los tactismos; 3° los movimientos nictotrópicos; 4° los movimientos provocados por contacto.

Movimientos protoplasmáticos. — En la inmensa mayoría de los casos, las células vegetales tienen una membrana celulósica que protege su membrana albuminoide y las hace indeformables. Si se examinan estas células con el microscopio, se ve que *su protoplasma es móvil:* éste se desplaza en el interior de cada célula y sus movimientos están limitados al estrecho espacio que comprende la membrana rígida. Este movimiento es *lento* y *cíclico,* como lo indica el desplazamiento de los plastos, y de otras inclusiones protoplasmáticas, desde el centro hasta la periferia y viceversa.

Tropismos y tactismos. — Se llaman así los movimientos determinados y orientados por el medio exterior. Los *tropismos* sólo afectan a un órgano de la planta. Los *tactismos,* por el contrario, consisten en desplazamientos de toda la planta.



Hojas de mimosa durante el día *(Fot. Boyer)*



Hojas de mimosa durante la noche *(Fot. Boyer)*

En otro lugar se ha estudiado un cierto número de tropismos *(geotropismo, hidrotropismo, fototropismo)* a propósito del crecimiento de la raíz y el tallo. La punta de la raíz, en especial, es un verdadero órgano sensorial que percibe la gravedad y puede compararse en cierto modo con los *estatocistos* u *órganos de equilibrio de los animales.*

También se pueden relacionar con los tropismos los movimientos especiales de las algas azules *(Oscillatoria),* si bien se desconoce realmente su causa.

Si se coloca un cristalizador lleno de algas verdes del grupo de las protococos de modo que sólo esté iluminado por un lado, se ve todas las algas agruparse en dicho lado. Las *zoosporas* se trasladan gracias a sus cilios vibrátiles; con su movimiento demuestran tener un *fototactismo positivo.* Si el cristalizador está cubierto con un papel negro en el que se han abierto pequeños agujeros, se puede comprobar que las algas se agrupan en la pared y coinciden con los citados agujeros. Una luz muy intensa puede, no obstante, provocar un alejamiento de las algas: así, pues, el fototactismo cambia de sentido según la intensidad luminosa.

En una célula verde de alga o de hoja, los cloroplastos demuestran también tener un *fototactis-*

mo al cambiar de lugar según la iluminación (V. FUNCIÓN CLOROFÍLICA, p. 352).

La flor del tanino *(Fuligo septica)*, hongo inferior que se encuentra en la casca de las fábricas de curtidos, se desplaza por medio de *seudópodos*, pero sus *movimientos amiboideos* (semejantes a los de los protozoarios llamados amibas) son influidos por los cambios de temperatura y tienen un termotactismo positivo hasta un cierto máximo (30° C, aproximadamente), a partir del cual su termotactismo es negativo.

Los anterozoides de los helechos están dotados de *quimiotactismo* y se pueden atraer fácilmente por medio de tubos capilares llenos de ácido málico, que es la substancia que precisamente los conduce a los arquegonios. Los anterozoides del musgo son atraídos por la sacarosa. El quimiotactismo hace que las bacterias de las leguminosas se dirijan hacia las radicelas jóvenes, y que el tubo polínico de las fanerógamas acierte con su camino.

Movimientos nictotrópicos. — La mayoría de las plantas de la familia de las *leguminosas* extienden sus hojas durante el día *(posición de vigilia)* y las repliegan durante la noche *(posición de descanso o de sueño)*. Estos movimientos, provocados por la alternación de los días y las noches, son llamados *movimientos nictotrópicos* (del griego *nyx, nyktos*, noche, y *trope*, cambio de dirección).

El trébol y la alfalfa inclinan y aproximan sus folíolos por la cara superior. La judía y la acacia blanca, por el contrario, los acercan por la cara inferior. En ambos casos se puede pensar que la planta disminuye de este modo la superficie expuesta a la radiación nocturna.

En la sensitiva *(Mimosa pudica)*, los movimientos son más acentuados y más curiosos. Esta planta posee hojas compuestas de un pecíolo principal del cual parten cuatro pecíolos secundarios. Cada uno de éstos tiene a su vez una cuarentena de folíolos dispuestos de dos en dos (hojas pinadocompuestas). Al llegar la noche, los pecíolos se inclinan hacia el suelo y se acercan unos a otros, al mismo tiempo que los folíolos de cada pareja lo hacen por sus caras superiores.

Las flores del Don Diego de noche *(Mirabilis jalapa)* también están sometidas a movimientos nictotrópicos.

El mecanismo de producción de estos fenómenos es el siguiente. Hay en la base de los pecíolos o *base foliar* un abultamiento llamado *pulvínula*, vesícula flácida durante el día que rellena de noche el agua, cuyo aflujo considerable y súbito hace pasar la hoja de su posición diurna a la nocturna. Según la forma particular de la vejiga, el movimiento se hace en un sentido o en otro. El aflujo de agua se explica porque la supresión brusca de luz origina una detención inmediata de la transpiración. El agua que se dirigía hacia las hojas para evaporarse se detiene en el abultamiento de la base foliar a causa del azúcar acumulado en su interior, que le confiere un poder osmótico muy considerable.

Durante la noche, el azúcar se consume por la planta, la afluencia de agua disminuye, y poco a poco las hojas recuperan su posición diurna.

Movimientos provocados por contacto. — Los golpes, pinchazos, presiones, e incluso las corrientes de aire, provocan en algunas plantas movimientos muy marcados. Los más interesantes son los de la sensitiva, la dionea (atrapamoscas) y la drosera.

Sensitiva. — Esta planta recupera su posición nocturna tan pronto como recibe un golpe. La excitación de una hoja se transmite a las hojas vecinas por un mecanismo desconocido. En efecto, los abultamientos de las bases foliares permanecen lacios, contrariamente a lo que sucede durante la noche, es decir, aquí se produce el mismo efecto por un mecanismo diferente. En este caso, la función principal queda transferida a la cara inferior de los abultamientos, y basta separar dicha cara con un bisturí para que el movimiento ya no tenga lugar; los movimientos cesan igualmente por la acción de los anestésicos.

Dionea muscípula o "atrapamoscas". — Planta localizada en América del Norte, que tiene sus hojas en forma de roseta basilar, capaces de plegarse en dos a lo largo de su nervadura central, como si fuera un libro. Las hojas son carnívoras y sus bordes poseen *pelos táctiles* que, tocados por un insecto, provocan el pliegue de la hoja. El insecto es capturado y luego digerido por una secreción ácida y rica en pepsina, producida por *pelos secretorios* situados en el limbo.

Drosera o "rocío del Sol". — Frecuente en las marismas francesas y en las montañas de España, esta planta presenta una roseta de hojas basilares cuyo limbo está cubierto por pelos secretorios y táctiles llamados *tentáculos*. El engrosamiento terminal de los mismos está siempre impregnado de una pequeña gota brillante que origina los dos nombres de la planta: *drosera* (del griego *drosos*, rocío y *rossolis* (latín *ros solis*, rocío del Sol). Cuando un insecto se posa sobre una hoja, ésta se excita mecánicamente y provoca un plegamiento del limbo, con lo que el insecto queda fácilmente aprisionado por los tentáculos, que segregan los jugos capaces de digerirlo.

Reacciones eléctricas de las plantas. — Desde 1925 aproximadamente, como consecuencia de los trabajos del investigador indio **Jagadis Chunder Bose**, el conocimiento de la sensibilidad de las plantas ha hecho un progreso considerable gracias al registro de sus reacciones eléctricas.

Un músculo excitado manifiesta su sensibilidad: 1° por una reacción mecánica (contracción); 2° por una reacción eléctrica (corriente inducida). En las plantas, el movimiento, en general, es imposible a causa de la rigidez de las membranas celulósicas, pero la reacción eléctrica subsiste y puede ser medida.

Sin entrar en el detalle de las experiencias, los primeros resultados obtenidos fueron:

1° Todo órgano vegetal golpeado, tocado, quemado o lesionado responde a la excitación por una variación de su potencial eléctrico y por la producción de una *corriente de reacción* que se puede poner de manifiesto con el galvanómetro;

2° Una sola excitación desencadena una corriente de breve duración, mientras que varias excitaciones suficientemente próximas unas de otras determinan una serie de reacciones eléctricas que se superponen y se suman. El efecto es el mismo que el de un tétanos muscular producido por la integración de sacudidas musculares;

3° Un órgano excitado durante un intervalo de tiempo prolongado se fatiga, con lo que las reacciones eléctricas se atenúan, después cesan, y se necesita un cierto tiempo de reposo para que el órgano pueda ser nuevamente excitable;

4° Cada órgano vegetal tiene una temperatura óptima en la cual las reacciones son más intensas; éstas decrecen a medida que la temperatura se aproxima del máximo o mínimo soportable;

5° Los anestésicos y los tóxicos atenúan la sensibilidad de las plantas y, por consiguiente, las reacciones eléctricas.

Por lo tanto, todas las plantas son sensibles y se conducen exactamente como los animales —aparte del movimiento que se presenta sólo en algunas de ellas— con respecto a las excitaciones. Se pueden tetanizar, fatigar, anestesiar o intoxicar. Todos estos fenómenos, que se creían exclusivos de la vida animal, pertenecen también a la vegetal.

Reservas nutritivas

Reservas glucídicas: Azúcares. Almidón. Inulina. Glucógeno. Reservas lipídicas. Reservas nitrogenadas. Aminoácidos. Aleurona. Reservas ácidas. Órganos de reserva. Función de las reservas. Digestión de las reservas

El conjunto de las reacciones químicas que tienen lugar en una planta constituye su metabolismo, con el cual obtiene un doble resultado: 1° producción de energía (calor vegetal, movimiento); 2° producción de materia (protoplasma, reservas nutritivas, secreciones).

Reservas glucídicas. — Entre los glúcidos citaremos los azúcares y las féculas (almidón, inulina, glucógeno).

Azúcares. — La *glucosa* $C_6H_{12}O_6$, uno de los primeros productos originados en la función clorofílica, se acumula en los frutos en compañía de uno de sus isómeros, la *levulosa*, y abunda especialmente en la uva (20%).

La *sacarosa*, $C_{12}H_{22}O_{11}$ es otro azúcar extraordinariamente difundido:

a) En las raíces tuberculosas de la remolacha (15%) y de la zanahoria;

b) En el tallo del arce azucarado, sorgo de azúcar, caña de azúcar (20%);

c) En los frutos, donde coexiste con la glucosa y la levulosa;

d) En los nectarios u órganos productores de néctar.

Almidón. — El *almidón* $(C_6H_{10}O_5)_n$ es la reserva más importante de las plantas verdes, pero hay que distinguir entre el almidón que se forma directamente sobre los cloroplastos durante el día y el almidón que resulta de la condensación de la glucosa en los amiloplastos. Éste se encuentra:

a) En los tubérculos de la patata, donde recibe el nombre de *fécula;*

b) En los rizomas y bulbos;

c) En la raíz de la mandioca, de la que se extrae la tapioca;

d) En el tallo del burí;

e) En las semillas de las leguminosas (judía, guisante, lenteja, haba) y de los cereales (trigo, arroz).

El almidón se presenta bajo forma de *granos* que tienen de una micra a un milímetro de diámetro. Los de mayor tamaño se encuentran en la patata y pueden ser simples o compuestos. Un grano simple suele ser generalmente ovoide y presenta alrededor de un núcleo obscuro, llamado *hilo*, una sucesión de capas *alternativamente claras y obscuras*. El hilo y las capas o zonas obscuras están más hidratadas que las zonas claras. En el alcohol, que es un cuerpo deshidratante, el grano se clarifica, mientras que en una solución de potasa, solución hidratante, se vuelve obscuro.

Bajo la luz polarizada, los granos de almidón se revelan *birrefringentes* y presentan el fenómeno de la *cruz negra*.

El almidón se tiñe de *azul con el yodo*, lo que permite identificarlo claramente en las preparaciones microscópicas. En presencia de agua a 50° C, se hincha y constituye el *engrudo de almidón*.

Inulina. — Esta substancia, semejante químicamente al almidón, difiere, sin embargo, del mismo por encontrarse en forma de solución coloidal en el jugo vacuolar y, por consiguiente, en estado no visible, pero puede conseguirse verla bajo la forma de cristales redondeados o esferocristales con un precipitado de alcohol. La inulina es el

cuerpo que da su gusto característico al aguaturma o tupinambo y a las alcachofas.

Glucógeno. — El glucógeno o almidón animal es la reserva glucídica de los hongos. La trufa contiene glucógeno en un 30% de su peso seco y la levadura de cerveza el 40. Esta substancia se halla en estado de solución coloidal en el jugo vacuolar y se tiñe en castaño caoba con una solución de yodo.

Reservas lipídicas. — *Las semillas oleaginosas* (nuez, colza, ricino) y los *frutos oleaginosos* (olivo) contienen de un 50 a un 80% de aceite, que se puede poner de manifiesto en sus células por medio del ácido ósmico (coloración negra) o del rojo Sudán (coloración roja). Las *mantecas* (manteca de coco, de cacao) se diferencian de los aceites porque sólo son líquidas por encima de 30° C.

Reservas nitrogenadas. — Los cuerpos orgánicos que contienen nitrógeno son los aminoácidos, los albuminoides o prótidos y los alcaloides, aunque las reservas importantes sólo pertenecen a las dos primeras categorías.

Aminoácidos. — Los aminoácidos son, en cierto modo, las "piedras de construcción" de los prótidos complejos. Son solubles en el agua, lo que les permite viajar por las plantas. Así tenemos la *leucina* y la *tirosina*, abundantes en la patata, la *asparragina*, cuyo nombre proviene del espárrago, etc.

Aleurona. — Esta reserva nitrogenada es un prótido que se encuentra especialmente en las semillas, bajo la forma de *granos de aleurona* que suceden siempre a las vacuolas. Un grano de aleurona se compone como máximo de tres partes: *a*) un substrato proteico redondeado u ovalado; *b*) un cristaloide proteico; *c*) uno o varios *globoides* de glicerofosfato de calcio (*fitina*).

La aleurona constituye el *gluten* del trigo y entra, en consecuencia, en la constitución del pan. La aleurona de las legumbres secas (judía, guisante, lenteja) se llama con frecuencia *legumina*.

Reservas ácidas. — Los ácidos orgánicos más difundidos en el reino vegetal son, lo mismo que el almidón y los azúcares, de naturaleza ternaria. Éstos se hallan libres o combinados con bases y se les considera, según se vio antes, como productos intermedios del proceso respiratorio.

El *ácido málico* existe en las grosellas y en las manzanas (*malus*), de donde proviene su nombre.

El *ácido tartárico* y los *tartratos* abundan en las uvas.

El *ácido cítrico* se encuentra sobre todo en los limones y en las naranjas y puede transformarse en azúcar durante el proceso de maduración: una naranja madura es un cuerpo azucarado.

El *ácido oxálico* y los *oxalatos* abundan en las acederas (sal de acederas).

Órganos de reserva. — Las reservas nutritivas pueden acumularse en cualquier parte de la planta, pero los principales órganos de reserva son:

1° Las raíces tuberculosas (zanahoria, nabo, rábano, remolacha);

2° Los rizomas, tubérculos (patatas, aguaturma, batata) y bulbos (cebolla, jacinto, tulipán);

3° Las semillas y los frutos.

Las substancias de reserva sólo pueden acumularse en un órgano si son insolubles (almidón, aleurona); si no, son retenidas por la célula gracias a la impermeabilidad de la membrana celular (azúcares).

Por otra parte, las reservas insolubles no pueden "salir" de las hojas bajo su forma definitiva y deben adoptar, pues, un *estado viajero* definido por su gran solubilidad.

Así, el almidón viaja bajo la forma de glucosa, que se transforma al final de su camino en:



$$nC_6H_{12}O_6 = (C_6H_{10}O_5)n + (H_2O)n.$$

La aleurona y la mayoría de los prótidos viajan bajo la forma de *aminoácidos*.

Función de las reservas. — Las reservas nutritivas de las plantas son utilizadas con frecuencia por el hombre y los animales, pero no es esa su función verdadera; su principal papel es su utilización por la propia planta en alguna de sus fases de desarrollo:

1er EJEMPLO. La remolacha y la zanahoria son plantas bianuales que no tienen tiempo de desarrollarse enteramente en un año. El primer año, la semilla germina y la planta concentra todos sus esfuerzos en acumular reservas. El segundo año, la planta utiliza estas reservas para producir flores, semillas y frutos.

2° EJEMPLO. La patata es anual, pero acumula el almidón en sus tubérculos. Al año siguiente, éstos se separan y reproducen cada uno una nueva planta; así, las reservas sirven para multiplicar la especie.

3er EJEMPLO. Todas las semillas contienen almidón, lípidos o aleurona, utilizados durante la germinación y la pequeña planta digiere esos elementos antes de haber adquirido la clorofila y poder bastarse por sí misma.

4° EJEMPLO. Numerosas flores poseen nectarios que contienen néctar (agua azucarada) que atrae los insectos. Éstos, al chupar el néctar, recogen el polen y lo transportan de una a otra flor, con lo que realizan la fecundación cruzada, siempre ventajosa para las plantas.

Digestión de las reservas. — Las reservas sólo pueden ser utilizadas por la planta después de una *digestión* muy semejante a la que tiene lugar en nuestro tubo digestivo y con intervención de las mismas diastasas: *amilasa* para el almidón, *inulasa* para la inulina, *glucogenasa* para el glucógeno, *invertasa* o sucrasa para la sacarosa, *lipasa* para los lípidos, *pepsina* y *tripsina* para los prótidos, etc.

Secreciones

Sales minerales. Esencias o aceites esenciales. Resinas y oleorresinas. Látex. Glucósidos. Taninos. Alcaloides. Gomas y mucílagos

Las *secreciones* pueden ser útiles o inútiles (desechos) sin que pueda establecerse claramente una separación entre ambas clases. Esto se debe a que las plantas no eliminan sus desechos como lo hacen los animales (excreciones), sino que, en lugar de eliminar sus células muertas, las utilizan de muy diversas maneras (corcho, esclerénquima, leño).

Las secreciones se acumulan en los *tejidos secretorios* estudiados anteriormente bajo los nombres de pelos y epidermis secretorios, vasos laticíferos, canales secretorios, etc. Por otra parte, las secreciones pueden ser *intracelulares* o *extracelulares* y se clasifican según su composición química.

Sales minerales. — Numerosas plantas poseen sus órganos mineralizados y, por consiguiente, endurecidos: algas calizas, tallo silíceo de los equisetos (cola de caballo), de los carrizos, de las gramíneas. En las hojas de la higuera, algunas células contienen concreciones o *cistolitos* (del griego *cystos*, vesícula, y *lithos*, pidra) de carbonato de calcio. Otras plantas (hiedra, cebolla) poseen oxalato de calcio bajo la forma de agujas reunidas en haces (*rafidios*) o aglomeraciones cristalinas, y se admite que el ácido oxálico, producto tóxico, se neutraliza de este modo y deja así de ser perjudicial para la planta.

Esencias o aceites esenciales. — Las *esencias* constituyen los *perfumes*, que se pueden extraer de numerosas especies vegetales. Éstas son ligeras, volátiles y poco solubles en el agua, pero mucho en el alcohol. Sobre el papel, las esencias dejan una mancha que desaparece al cabo de un cierto tiempo, lo que permite diferenciarlas de los aceites ordinarios (cuerpos grasos o lípidos). Químicamente están constituidas por hidrocarburos líquidos, entre los que predomina el *terpeno*, $C_{10}H_{16}$. Las esencias de ajo y mostaza contienen azufre.

Las esencias se encuentran en ciertas epidermis secretorias (pétalos de rosa, de jazmín, de violeta), en pelos (hojas de menta, de lavanda), en glándulas (naranja, limón) y en canales secretorios (coníferas).

Resinas y oleorresinas. — Las *resinas* proceden en su mayoría de la oxidación de una esencia; si el producto es una mezcla de resina y esencia, recibe el nombre de *oleorresina*. Así, la *trementina* es una oleorresina que proporciona por destilación la esencia de trementina y la resina propiamente dicha o *colofonia*. El *succino* o *ámbar amarillo*, que se extrae del suelo en la costa del mar Báltico, es una resina fósil. El *copal* de las leguminosas es una oleorresina. Afines a ellas tenemos el *alcanfor*, el *lentisco*, la *laca*, los *áloes*. Un *bálsamo* es una oleorresina con ácido benzoico: ejemplos, los bálsamos del Perú, de Tolú, de copaiba, de benjuí, etc.

Látex. — El *látex* es una substancia viscosa, generalmente blanca como la leche (higuera, hevea, euforbio) y a veces amarilla (celidonia) o roja (sanguinaria). Es una *emulsión* acuosa que contiene en suspensión gotas y corpúsculos muy diversos: azúcares, almidón, prótidos, alcaloides, resinas, diastasas, sales minerales, pigmentos, todo ello contenido siempre en los tubos laticíferos.

El principal látex es el de los árboles y bejucos de caucho, que se sangran y permiten obtener posteriormente el caucho por coagulación del jugo lechoso en contacto con el aire.

El opio es el látex coagulado de las cápsulas de la adormidera.

Glucósidos. — Los *glucósidos* son combinaciones químicas de la glucosa con una o varias substancias orgánicas que pueden ser hidrolizadas por diastasas especiales.

Así, la *amigdalina* de las almendras amargas es hidrolizada por la *emulsina* en glucosa, esencia de almendras amargas y ácido cianhídrico. La *sinigrina* de las semillas de mostaza se desdobla por acción de la *mirosina* en glucosa, esencia de mostaza y sulfato de potasio. En la planta, el glucósido y su diastasa se encuentran en células diferentes. Por lo tanto, es preciso triturar las semillas de mostaza y tratar la harina obtenida con agua tibia, para que la esencia se desprenda. Así se obtienen los sinapismos, pero si el agua está demasiado caliente la enzima o diastasa se destruye y la reacción no tiene lugar.

Taninos. — Los *taninos* son productos orgánicos ternarios y astringentes, muy difundidos entre los vegetales. En presencia de sales férricas, los taninos forman un precipitado negro empleado en la fabricación de la tinta. El tanino ordinario se extrae del roble (corteza, agallas) y se utiliza, a causa de su propiedad de precipitar los albuminoides, en el curtido de los cueros, a los que hace imputrescibles.

Alcaloides. — Los *alcaloides* son productos orgánicos que se encuentran frecuentemente en los vegetales, actúan como *bases* y se unen a los ácidos para formar *sales* (ejemplo, sulfato de quinina). Estos productos son solubles en el agua, pero precipitables por el yodo y solubles en el alcohol. Se localizan en células especiales. Tales son la *quinina*, extraída de la corteza de ciertos árboles de América de Sur; la *cocaína*, que se extrae de las hojas de coca; la *nicotina* del tabaco; la *morfina*, que, junto con otros alcaloides, constituye el opio de la adormidera; la *cafeína* y la *teína* del café y el té, respectivamente, etc.

Gomas y mucilagos. — Las *gomas* y *mucílagos*, glúcidos derivados de la celulosa por *gelificación*, tienen la propiedad de hincharse si se ponen en contacto con el agua, con la cual forman soluciones coloidales, y figuran entre los pocos productos que pueden ser expulsados por la planta (gomas de los cerezos, de los ciruelos, de los melocotoneros) y en ese sentido se pueden comparar con las excreciones de los animales. Muchos de ellos son utilizados por el hombre: la *goma arábiga*, producida por una acacia, el mucílago de la raíz de malvavisco y de la harina de lino, etc.

Parasitismo y simbiosis

Autotrofismo y heterotrofismo. Grados de parasitismo. Reacciones mutuas del huésped y el parásito. Significado de la simbiosis. Tuberculización

Autotrofismo y heterotrofismo. — Hemos visto que las plantas clorofílicas son capaces de absorber ciertas radiaciones luminosas y realizar, mediante su ayuda energética, gran número de síntesis orgánicas cuyo conjunto constituye la *fotosíntesis*. Análogamente, ciertas bacterias (bacterias nitrosas y nítricas) se procuran por oxidación del amoniaco la suficiente energía para poder realizar la síntesis directa de las substancias orgánicas necesarias. Esta síntesis, que se realiza sin la ayuda de la clorofila, se llama *quimiosíntesis*. En ambos casos, los seres que son capaces de realizarla se desarrollan a expensas de substancias minerales y son llamados *autótrofos*, es decir, capaces de nutrirse por sí mismos.

Por el contrario, los animales y la mayoría de las plantas sin clorofila deben nutrirse de materias orgánicas y dependen, por consiguiente, de los seres precedentes, por cuyo motivo reciben el nombre de *heterótrofos*, es decir, incapaces de nutrirse por sí mismos.

Los seres vivientes heterótrofos se dividen en tres grupos:

1º *Saprofitos*, que se alimentan de materias orgánicas muertas. Tal es el caso del hongo que vive en el estiércol, de los que crecen en el humus, de los mohos, de los microbios que originan las fermentaciones, etc. Incluso el hombre es saprofito;

2º *Parásitos*, que se nutren a expensas de vegetales o animales vivos. Tales son las bacterias patógenas, como el bacilo de la tuberculosis, los hongos parásitos, como el mildeu de la vid *(Plasmopara viticola)*, y la roya del trigo;

3º *Simbióticos*, que viven en asociación con animales o vegetales. Ejemplos: líquenes, micorrizas, nudosidades de las leguminosas.

Grados de parasitismo. — La mayoría de los parásitos son vegetales sin clorofila o animales. No obstante, hay cierto número de plantas verdes que han llegado a ser más o menos parásitas. Unos lo son en parte, y reciben el nombre de *hemiparásitas*, y otras lo son completamente, por lo que merecen el calificativo de *holoparásitas*. He aquí algunos ejemplos:



Penetración de los haustorios de muérdago en una rama de manzano *(Fot. Claire)*

1º El *muérdago*, que vive en los álamos y los manzanos, y cuyos frutos son bayas blancas con un contenido viscoso *(liga)*. Los mirlos y tordos, que gustan muchísimo de estas bayas, las devoran en gran cantidad y expulsan las pepitas con los excrementos, con lo que las semillas del muérdago se diseminan y caen fácilmente sobre los árboles de corteza húmeda, la cual favorece la germinación. Al germinar, la raíz de la pequeña planta penetra en el árbol y digiere a su paso la corteza; en cuanto llega al leño, se extiende sobre su superficie y hunde en él sus haustorios u órganos chupadores. Por este medio, el muérdago se procura la *savia bruta* que luego transforma en sus hojas verdes en savia elaborada. El muérdago es un hemiparásito;

2º La *cuscuta* es una planta voluble que se arrolla alrededor de las leguminosas (trébol, alfalfa, mielga). De trecho en trecho posee raíces chupadoras que se hunden en el tallo de la planta que la sostiene. Si se hace un corte transversal a la altura de una de esas raíces, se ve que penetra hasta el cilindro central y que rodea un hacecillo liberoleñoso. Por consiguiente, la cuscuta es un holoparásito que extrae del huésped la savia elaborada. Por otra parte, esta planta está desprovista de clorofila y presenta la coloración amarilla (xantofila) propia de las plantas ahiladas o marchitas;

3º La *orobanca*, parásita de las leguminosas y del cáñamo, se fija por su base en la raíz de la planta verde y pone en comunicación sus tejidos con los de la planta huésped. El conjunto aparece como una sola planta por la que se esparce la savia nutritiva, con lo que el parasitismo alcanza aquí su más alto grado.



Orobanca

Reacciones mutuas del huésped y el parásito. — El *parásito* determina en el ser que ataca, llamado *huésped*, una *irritación* a la cual corresponde una *reacción* del paciente. La lucha termina con la muerte de uno u otro de los adversarios.

Veamos algunos de estos efectos del parasitismo:

Cecidios. En el caso más frecuente, los tejidos del huésped se hipertrofian y multiplican sus células alrededor del parásito como si quisieran impedir que éste penetre más profundamente. Con ello se origina una *agalla* o *cecidio* que puede degenerar en una especie de *cáncer vegetal*. Una agalla muy conocida es la de los robles, que se debe a la picadura y a la postura de un insecto. Las nudosidades de las leguminosas son cecidios bacterianos;

Castración parasitaria. En ciertos casos, el parásito anula la función reproductora de su huésped, lo que equivale a una castración. Un ejemplo interesante de este fenómeno es la castración del centeno por el hongo llamado *cornezuelo de centeno*. Los ovarios del centeno son reemplazados por masas micelianas compactas, de color pardo obscuro, en forma de espolón de gallo. Otro caso de castración parasitaria es el de una planta común *(Lychnis)*, llamada *flor del cuclillo*, cuyos estambres, invadidos por un hongo, producen las esporas del parásito en lugar de los granos de polen de la propia planta.

Significado de la simbiosis. — La simbiosis se considera de ordinario —por definición— como una asociación entre dos seres con provechos recíprocos. Se admite, por ejemplo, que, en un *liquen*, el alga proporciona el alimento carbónico, mientras que el hongo protege el alga y mantiene alrededor de ella la humedad necesaria. Se supone que las *micorrizas* u hongos que aparecen en las raíces de los árboles permiten a éstos utilizar las substancias orgánicas del suelo y reciben en cambio la glucosa. En una *nudosidad* se admite que los dos asociados comparten la explotación de la atmósfera: anhídrido carbónico absorbido por la leguminosa y nitrógeno por la bacteria.

No obstante, observaciones más profundas tienden a modificar hoy en día esta apreciación. Así, las bacterias que se ven en las nudosidades tienen formas extrañas, irregulares, ramificadas, filamentosas, por lo que se les había llamado *bacteroides*, es decir, bacterias enfermas y degeneradas. La simbiosis, en este caso, es más bien una lucha entablada entre la leguminosa y las bacterias.

Las plantas de la familia de las *orquidáceas* tienen las semillas reducidas a un parénquima en el cual no se distingue ningún embrión. Estas semillas, sembradas en medio estéril, no germinan. Su germinación exige, como ha demostrado **Noël Bernard**, la presencia de un hongo simbiótico que pertenece al género *Rhizoctonia*.

Observando una semilla de orquídea invadida por el hongo, distinguimos con el microscopio tres partes:

a) Una región atacada por el hongo;

b) Otra donde el hongo y la orquídea parecen luchar. En cada célula se ve un micelio apelotonado que el núcleo intenta destruir. La defensa de la orquídea hace intervenir unos *anticuerpos* (aglutininas, lisinas) comparables en todos sentidos con los que los animales producen para defenderse contra las bacterias;

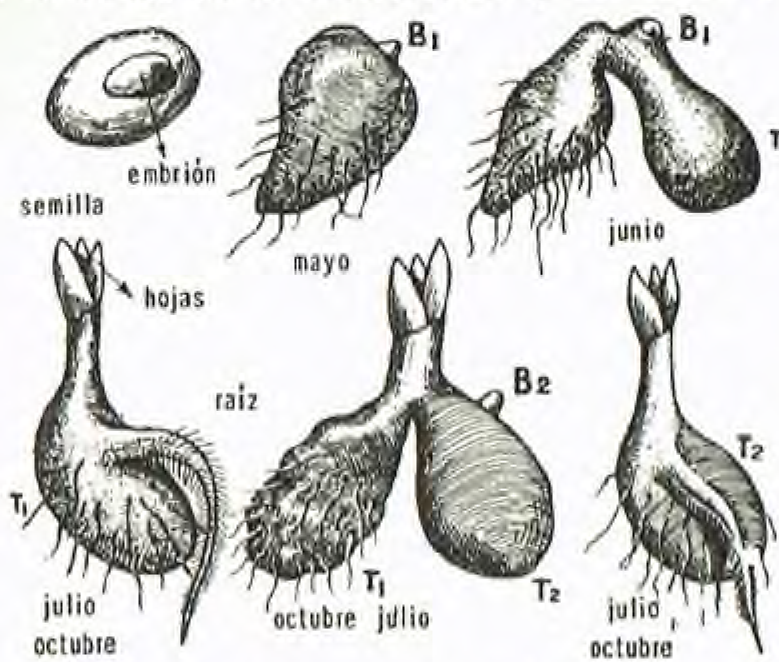
c) Otra, indemne, en la cual se produce la germinación de la orquídea.

La *simbiosis* es, pues, en este caso, una verdadera lucha. Lejos de ser una asociación mutua, es *una infección, una enfermedad crónica que ha llegado a ser necesaria para la planta.*

Se pueden obtener cultivos puros de Rhizoctonia y aumentar o disminuir su virulencia, exactamente como se hace con los cultivos bacterianos. En presencia del hongo virulento, las semillas de orquídeas son destruidas, pero si el hongo está atenuado, son ellas, en cambio, las que matan el hongo. Por lo tanto, sólo en algunos casos llega a establecerse la simbiosis, que puede considerarse como *un estado de equilibrio entre la enfermedad curable y la mortal.* Noël Bernard sólo obtuvo un centenar de germinaciones sobre unos 50 000 ensayos realizados.

Tuberculización. — Si la simbiosis es una enfermedad, su principal síntoma es la *tuberculización* o formación de un tubérculo, de una nudosidad, de un cecidio, etc.

Volvamos a las orquídeas. En unas *(Neottia)*, la simbiosis dura toda la vida. En otras *(Orchis)* sólo una temporada. La semilla parcialmente invadida por los hongos aumenta su volumen hacia los meses de mayo y junio y produce lateralmente una yema B_1 y un tubérculo T_1. En el mes de julio, estas partes indemnes se aislan de la contaminada y producen raíz, hojas y flores. Cuando llega octubre, el tubérculo T_1 se encuentra parcialmente invadido por el hongo. Entonces se forma una nueva yema B_2 y un nuevo tubérculo T_2. En el mes de julio del año siguiente, estas partes se aislan de la contaminada y así sucesivamente, con lo que *la infección por el hongo origina cada año la formación de un nuevo tubérculo.*



Tuberculización de la Orchis

La relación causal entre estos dos fenómenos se ha extendido a otras plantas. **Magrou** demostró que un hongo *(Fusarium)* existe normalmente en la piel de la patata y determina su tuberculización. Las nudosidades de las leguminosas son asimismo tubérculos producidos por infección. Un líquen no es, por último, más que un tubérculo de forma especial donde el hongo interviene como parásito con respecto al alga.

Si aceptamos este punto de vista, la simbiosis no se diferencia demasiado del parasitismo, y habría interés en comparar desde este punto de vista la biología vegetal con la animal.

Órganos y funciones de reproducción

Flores y fecundación: Inflorescencias: Racimos. Cimas. Piezas florales. Origen de las piezas florales. Fórmulas y diagramas florales. Periantio. Estambres y sacos polínicos. Granos de polen. Liberación del polen. Carpelos. Óvulos. Saco embrionario. Polinización: El contacto. La caída. El aire. Los insectos. El hombre. Germinación del polen. Doble fecundación. — **Frutos, semillas, germinación:** Transformación del ovario en fruto. Diferentes clases de frutos: Frutos secos dehiscentes. Frutos secos indehiscentes. Frutos carnosos. Frutos compuestos. Transformación del óvulo en semilla: Formación del embrión. Formación del albumen. Formación de los tegumentos. Clases de semillas: Semillas con albumen y perispermo. Semillas con albumen, pero sin perispermo. Semillas sin albumen. Semillas sin tegumento. Reservas de la semilla. Diseminación. Condiciones de la germinación: Condiciones internas. Condiciones externas. Fenómenos morfológicos de la germinación. Fenómenos fisiológicos de la germinación: Respiración. Transpiración. Absorción. Digestión. Fin de la germinación

Flores y fecundación

A diferencia de los órganos vegetativos (raíces, tallos, hojas), la flor es un *órgano reproductor*, homólogo de la espiga esporífera de las selaginelas. La flor es en realidad un conjunto de hojas modificadas con vistas a la reproducción agrupadas en el extremo de una rama. Estas hojas se llaman *piezas florales*, y la rama que las soporta, *pedicelo.*



Inflorescencias: 1. Uniflora (violeta); 2. Pluriflora (prímula); 3. Terminal (Sedum); 4. Axilar (lupulina); 5. Racimo simple (grosella); 6. Racimo compuesto (vid); 7. Corimbo (cerezo); 8. Espiga (verbena); 9. Amento o espiga unisexual (sauce); 10. Umbela simple (hiedra); 11. Umbela compuesta (comino); 12. Capítulo (margarita); 13. Cima bípara o dicótoma *(Cerastium)*; 14. Cima unípara escorpioide (miosota)

Inflorescencias. — Las flores pueden estar insertas una por una (flores solitarias) o agrupadas en *inflorescencias*. En este caso se distinguen los *racimos* y las *cimas*.

Racimos. — Aquí, el pedicelo principal se ramifica varias veces y soporta la última flor:

1° *Racimo típico* (lilas). A lo largo de la rama o pedicelo principal se forman, a derecha e izquierda, ramificaciones que llevan cada una una flor. La flor más antigua, y por consiguiente la más desarrollada en un momento dado, se encuentra en la base del racimo, mientras que la más nueva está en el ápice. En la base de cada ramificación encontramos una pequeña hoja llamada *bráctea;*

2° *Corimbo* (peral). Esta inflorescencia deriva de la anterior si suponemos que todas las flores, por crecimiento desigual de sus pedicelos, consiguen llegar a la misma altura;

3° *Umbela* (zanahoria). La umbela es un corimbo en el que todas las ramificaciones parten del mismo punto. Las flores más antiguas están en la periferia; la más nueva, en el centro. Todas las brácteas reunidas forman una envoltura llamada *involucro.* Una umbela puede asimismo estar compuesta de umbélulas;

4° *Capítulo* (margarita). Éste se puede considerar derivado de la umbela, si suponemos que las ramificaciones se atrofian. Las flores (llamadas en este caso *cabezuelas)* están insertas directamente en la cima ensanchada *(receptáculo)* del pedicelo principal, mientras que las brácteas forman un *involucro.* Una margarita no es verdaderamente una flor, sino una inflorescencia en la que el conjunto de elementos verdes situado debajo, y que podría tomarse por un cáliz, es en realidad el involucro. En realidad, el conjunto de elementos blancos de la periferia y amarillos del centro son las verdaderas flores;

5° *Espiga* (trigo). La espiga proviene directamente del racimo por acortamiento de los pedicelos secundarios. Las flores parecen fijadas directamente en el pedicelo principal y están protegidas por brácteas.

Cimas. — En esta clase de inflorescencia, el pedicelo principal se ramifica una sola vez y termina con la primera flor:

1° *Cima bípara* (murajes). El pedicelo principal emite simultáneamente dos ramificaciones opuestas que a su vez emiten otras dos y así sucesivamente, con lo que hay una primera flor (en el extremo del pedicelo principal), dos segundas, cuatro terceras, etc.

2° *Cima unípara escorpioide* (miosota). El pedicelo principal emite a derecha, por ejemplo, una ramificación que a su vez se ramifica por el mismo lado y así sucesivamente. La inflorescencia se arrolla como una cola de escorpión;

3° *Cima unípara helicoidal* (gladíolo). Las ramificaciones existen alternativamente a derecha e izquierda, por lo que se produce un arrollamiento helicoidal de la inflorescencia.

Piezas florales. — En una flor completa hay cuatro grupos de piezas florales que se insertan en círculos concéntricos (verticilos), o en forma de hélice, sobre la cima ensanchada (receptáculo) del pedicelo. Vistos desde el exterior hacia el interior tenemos:

1° Los *sépalos*, cuyo conjunto forma el *cáliz;*

2° Los *pétalos*, cuyo conjunto forma la *corola;*

3° Los *estambres* o partes masculinas, cuyo conjunto es el *androceo;*

4° Los *carpelos* o partes hembras, que forman el *gineceo* o *pistilo.*

El cáliz y la corola son las partes protectoras y constituyen el *periantio* (del griego *peri,* alrededor, y *anthos,* flor). Los estambres y los carpelos son las partes encargadas de la reproducción.

Generalmente, una flor comprende a la vez estambres y carpelos: es, pues, *hermafrodita.* No obstante, hay también flores *unisexuales.* Si las flores machos y las flores hembras están en la misma planta, ésta recibe el calificativo de *monoica* (roble), pero es *dioica* si las flores machos y las flores hembras se encuentran en pies diferentes (dátil).

Origen de las piezas florales. — Las piezas florales son hojas más o menos transformadas.

1ª PRUEBA. Las piezas se hallan dispuestas en verticilos o en forma de hélice como las hojas y poseen nervaduras.

2ª PRUEBA. El capullo de una flor se puede comparar con la yema terminal de un tallo.

3ª PRUEBA. En algunas plantas es posible encontrar elementos intermedios entre la verdadera hoja y las piezas florales. Así, el rosal muestra todas las transiciones entre las hojas compuestas y los sépalos; el nenúfar presenta el mismo fenómeno con respecto a los pétalos y los estambres; y la siempreviva lo ofrece con respecto al paso de estambres a carpelos.

4ª PRUEBA. Los horticultores saben transformar los estambres en pétalos y obtener así *flores dobles,* que es lo que ha permitido obtener la rosa (con numerosos pétalos) a partir de la rosa silvestre (con numerosos estambres).


Diagrama de la flor de saúco

Fórmulas y diagramas florales. — Existen dos métodos para representar la constitución de una flor.

Fórmula floral. — Se indica sucesivamente el número de sépalos, de pétalos, de estambres y de carpelos, y se añaden a continuación las iniciales S, P, E, C, separadas por el signo +. El signo ∞ (infinito) sirve para designar un número muy grande, y por lo tanto variable, de estambres o de carpelos. Si varias piezas florales están soldadas entre sí, se indica por medio de corchetes [ ]. Finalmente, cuando todas las piezas florales están unidas en la base y, por consiguiente, el ovario parece situarse bajo la flor (ovario ínfero), la fórmula floral íntegra se pone entre corchetes. Ejemplos:

Ranúnculo = 5S + 5P + ∞ E + ∞ C
Amapola = 2S + 4P + ∞ E + [∞ C]
Alelí = 4S + 4P + 2E + 4E' + [2C]
Zanahoria = [5S + 5P + 5E + 2C].

Diagrama floral. — Se dibujan los sépalos, los pétalos, los estambres y los carpelos en círculos concéntricos. Es interesante observar entonces que las piezas florales *alternan* de un círculo a otro. Cuando las piezas florales están soldadas, es usual unirlas de dos en dos por un arco de círculo.

Periantio. — Se llama así el conjunto del cáliz y la corola, es decir, de las piezas florales periféricas y protectoras. Según que estas piezas estén libres, soldadas o atrofiadas, se dice que la flor es *dialisépala, gamosépala, asépala, dialipétala, gamopétala* o *apétala.*

Los sépalos están teñidos generalmente de verde por la clorofila, mientras que los pétalos tienen por el contrario colores vivos, debido a diversos pigmentos.

Los sépalos excepcionalmente coloreados y semejantes a los pétalos se llaman *petaloides,* y los pétalos verdes, inversamente, *sepaloides.*

Puede existir un segundo cáliz o *calículo,* exterior al primero y de menor talla.

La forma de los pétalos y, en menor grado, la de los sépalos, da un aspecto característico a la flor: flores crucíferas, papilionáceas, labiadas, campanuláceas, etc. Según los casos, la flor tiene una *simetría radiada* o una *simetría bilateral.*

Estambres y sacos polínicos. — Los estambres son los órganos masculinos de la flor y su conjunto constituye el *androceo.* Según que estén libres, soldados o atrofiados, la flor se llama *dialistémona, gamostémona* o *astémona.*

Cada estambre comprende un pequeño tallo, el *filamento,* terminado en una parte hinchada hendida como un pan, llamada *antera* (del griego *anthos,* flor).

Para estudiar la estructura de la antera se hace un corte transversal con un cortaplumas, se colorea por el método habitual, y se examina con el microscopio. Cada una de las dos partes presenta un surco medio y contiene dos sacos *polínicos;* son, pues, en total, cuatro por estambre.

Los sacos polínicos están formados por un conjunto de células fértiles, cada una de las cuales se divide en cuatro por medio de dos cariocinesis, de las que la primera reduce a n el número de cromosomas. De cada célula fértil resultan, por consiguiente, cuatro esporas que forman una tétrada. Se reconoce aquí el modo de formación de las esporas de las criptógamas vasculares.

La pared de los sacos polínicos comprende tres capas de células:

1° La *capa nutricia* o capa interna, en la que las células contienen reservas nutritivas;

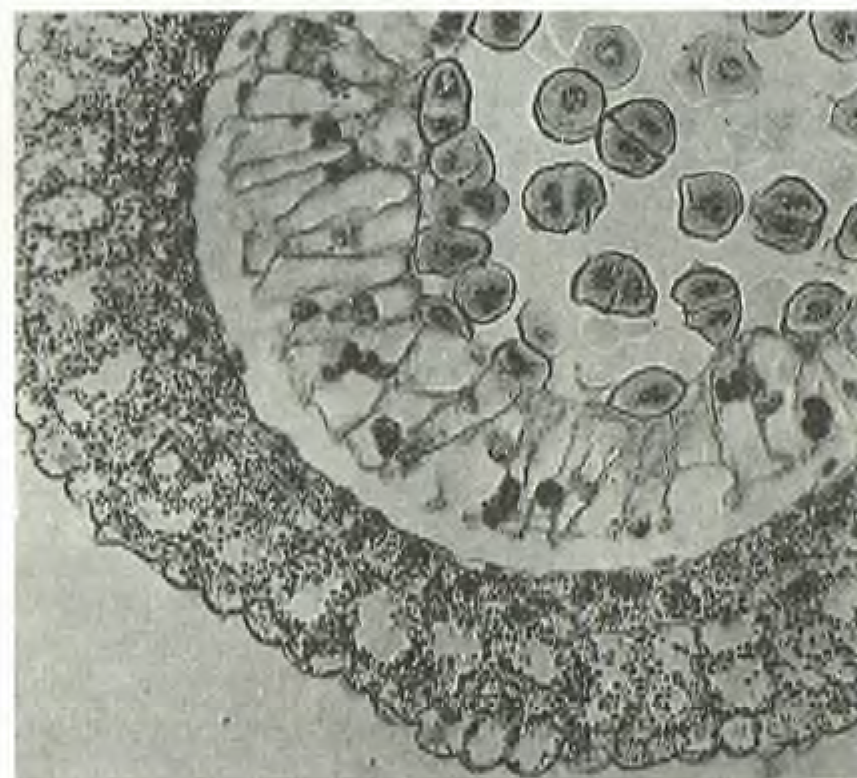

Flor de acanto, muy aumentada. Se distinguen los cinco estambres rodeando los dos estilos *(Fot. R.-H. Noailles)*

2° La *capa mecánica* o capa media, que existe solamente en la cara externa de los sacos y cuyas células tienen sus paredes interna y laterales lignificadas;

3° La *epidermis* o capa externa, que rodea la totalidad del estambre, el resto del cual está constituido por *parénquima* y contiene dorsalmente un *hacecillo liberoleñoso* o nervadura.

Granos de polen. — En estado de madurez, las microsporas, cuyo origen se ha visto anteriormente, digieren la capa nutricia y se transforman en prótalos machos o *granos de polen.*

Un grano de polen es un elemento muy complicado, pese a lo exiguo de sus dimensiones (200 micras como máximo). La pared del polen está formada de una membrana externa o *exina* y otra interna o *intina.* La exina presenta en su superficie unos salientes (crestas, espinas, verrugas, etc.) cuya función se verá al estudiar la polinización. La intina tiene unas dilataciones interiores que corresponden a las depresiones de la exina.

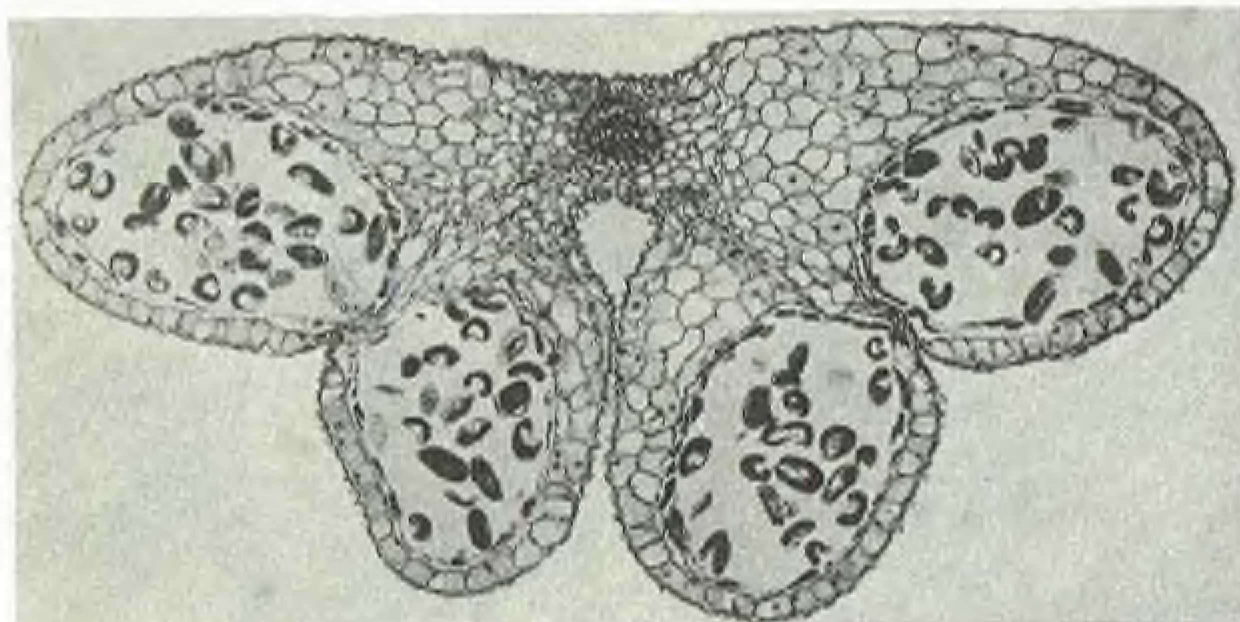

Microfotografía de las células madres del polen. Se ven algunas de estas células en período de cariocinesis *(Fot. Duval-Eymonnet)*

En el protoplasma hay dos núcleos: uno grande, que es el *núcleo vegetativo,* y otro pequeño, que es el *núcleo reproductor.*

Liberación del polen. — Volvamos a *la capa mecanica.* Las células que la componen tienen sus paredes internas y laterales muy espesas y de la misma naturaleza que el leño (lignificadas). Sólo la pared externa permanece fina y celulósica. Bajo la acción del sol. el agua contenida en las células se evapora y éstas disminuyen de volumen. Ahora bien, sólo la pared externa, que ha permanecido celulósica y fina, puede plegarse y disminuir de superficie, con lo cual se produce una tensión en la capa mecánica, que se hiende y se abre en dos valvas en cada una de las dos partes de la antera. La *dehiscencia* consiste en esto: libera los granos de polen. El mecanismo es aquí el mismo que el de la dehiscencia de los esporangios de los helechos.

La dehiscencia de la antera puede presentar diversas modalidades. El caso más frecuente es el que acabamos de estudiar: la abertura se hace por dos hendiduras longitudinales (dehiscencia *longitudinal*). A veces (patata), las hendiduras se reducen a su parte superior y son simples

agujeros o poros (dehiscencia *poricida*). Por último, puede ocurrir (agracejo) que cada una de las dos partes de la antera se abra por medio de una tapadera u opérculo (dehiscencia *operculicida*).



Antera del lirio (corte transversal) [*Fot. C. Bille*]

Carpelos. — Los carpelos son los órganos femeninos de la flor; su conjunto es el *gineceo* o *pistilo*. Según que haya diferentes carpelos libres, varios soldados entre sí, un solo carpelo o ninguno, la flor se llama *dialicarpelar*, *gamocarpelar*, *monocarpelar* o *acarpelar*.

Cada carpelo es una hoja cuyos bordes, llamados *placentas*, llevan, además de una hilera de *óvulos*, una nervadura central y otras dos marginales, visibles con el microscopio.

Examinemos los diferentes casos que pueden presentarse:

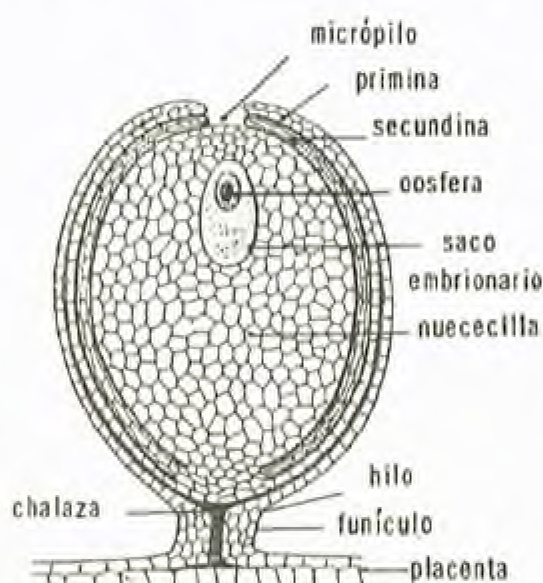
1º *Flor monocarpelar*. El único carpelo aproxima y suelda sus bordes, con lo que resulta un pistilo cerrado (carácter de las angiospermas), que comprende una parte hinchada u *ovario*, otra adelgazada o *estilo* y otra terminal o *estigma*. Los óvulos están contenidos en el ovario;

2º *Flor dialicarpelar*. Los diversos carpelos son idénticos al precedente y están completamente separados unos de otros. Los óvulos están del lado del eje de la flor, lo que se expresa diciendo que la *placentación* o disposición de los óvulos es *axial;*



Corte transversal del ovario de la adormidera en el que se ve una placentación parietal *(Fot. Claire)*

3º *Flor gamocarpelar*. Los diversos carpelos soldados entre sí pueden estar, separadamente, abiertos o cerrados. Si están abiertos, se sueldan por sus placentas y forman un pistilo con una sola cavidad. Los óvulos están entonces en la pared externa: *placentación parietal*. Si están cerrados, o sea soldados por sus caras, y forman un pistilo con varias cavidades, los óvulos se sitúan en ese caso del lado del eje de la flor: *placentación axilar*. A veces, los tabiques que separan las diversas cavidades desaparecen y los óvulos quedan en el centro sobre una especie de columna más o menos corta *(placentación central* o *basilar)*. En todos estos casos, el pistilo, visto desde el exterior, comprende un *ovario*, un *estilo* y tantos *estigmas* como carpelos existen en los órganos femeninos de la flor.



Corte de un óvulo

Óvulos. — Los óvulos corresponden a los sacos polínicos y son una especie de pequeñas mazas que comprenden un pie o *funículo* y una parte vejigosa, que es el óvulo propiamente dicho. Éste tiene dos envolturas: 1º la externa o *primina;* 2º la interna o *secundina*. Primina y secundina se interrumpen en la cúspide del óvulo y forman un pequeño orificio o pequeña puerta *(micrópilo)*, por donde penetrará más tarde el tubo polínico. En el interior del óvulo está la nuececilla que contiene el saco embrionario, del que hablaremos más adelante.

Se distinguen tres clases de óvulos:

1º Los óvulos derechos u *ortotropos*, que tienen el funículo opuesto al micrópilo;

2º Los óvulos invertidos o *anatropos*, cuyo funículo se curva, se aproxima a la pared del óvulo y se confunde en parte con la primina;

3º Los óvulos *curvos* o *campilotropos*, que son intermedios entre los dos anteriores.

Como los óvulos están fijados por su funículo en una placenta, los óvulos anatropos aproximan ésta a su micrópilo, por donde se introducirá el tubo polínico, disposición muy ventajosa para la fecundación.

Saco embrionario. — En la nuececilla se diferencia tempranamente una *célula fértil*, dividida en cuatro por dos cariocinesis, de las cuales la primera es reductora. De las cuatro células así constituidas v que contienen cada una *n* cromosomas, una sola sobrevive y recibe el nombre de *macrospora*. Ésta aumenta enormemente de tamaño al nutrirse de una parte de la nuececilla, y divide su núcleo, por una triple cariocinesis, en ocho partes, que se sitúan de la manera siguiente: en el extremo más próximo al micrópilo se forma una célula central u *oosfera* y dos células laterales o *sinérgidas;* en el extremo opuesto se forman tres células o antípodas; en el intervalo subsiste una gran célula con núcleo doble, a la que llamaremos, para simplificar, célula saco.

El conjunto del saco embrionario es un prótalo femenino cuyas células son todas fértiles, pero más adelante veremos que sólo dos son generalmente fecundadas; la oosfera y la célula saco.



Estilos de una flor de achicoria cubiertos de polen *(Fot. Claire)*

Polinización. — El transporte del polen hasta los estigmas constituye la *polinización*, que se puede efectuar en el interior de una misma flor (polinización *directa*) o entre dos flores (polinización *cruzada)*. Ésta es generalmente más ventajosa para la planta y da origen a semillas más numerosas y gruesas.

Los diferentes factores de polinización son los siguientes:

El contacto. — Hay flores cuyos estambres, ya maduros, se inclinan progresivamente hasta tocar el estigma y depositar su polen (agracejo, capuchina). En otros casos es el pistilo el que se inclina hacia los estambres.

La caída. — El polen cae y encuentra en su caída el estigma de otra flor. Este factor interviene sobre todo en el maíz, planta monoica en que las flores hembras están situadas debajo de los machos y poseen largos estigmas viscosos.

El aire. — Las corrientes de aire son un factor muy importante en la polinización, especialmente en las gramíneas (trigo, cebada, avena) y en las gimnospermas (pino, abeto). En el pino, los granos de polen, como recordaremos, están provistos de dos pequeños globos llenos de aire debidos a la separación de la exina.

Los insectos. — Numerosos insectos aseguran la polinización yendo de flor en flor a la búsqueda del néctar y el polen; son los insectos *antófilos* (del griego *anthos*, flor, y *philos*, amigo), tales como las abejas, los abejorros, las mariposas, las moscas, etc.

Durante largo tiempo se creyó que ciertos insectos eran atraídos por el color vivo y el aroma de las flores. Pero **Bonnier** demostró que lo que buscan en realidad es el néctar y el polen, del cual se nutren, y que sólo son atraídos por el *olor azucarado*. Así el rosal, de flores bellas y perfumadas, pero desprovistas de néctar, no es visitado por los insectos. En cambio, las flores del sauce y el arce, muy ricas en azúcar, se encuentran entre las más visitadas, a pesar de que por su pequeñez apenas se pueden distinguir.

Si colocamos delante de una serie de colmenas cuatro cuadros de tela azul, roja, verde y amarilla sobre los cuales se ha extendido la misma cantidad de miel, las abejas van indiferentemente a uno cualquiera de ellos. Esta experiencia prueba que lo que les atrae es la miel y no el color.

Algunas flores tienen un dispositivo particular que favorece la polinización por los insectos:

a) La *salvia* presenta en la entrada de su corola tubular un estambre basculante, cuya antera se inclina sobre el dorso del insecto para depositar el polen;

b) La *aristoloquia* tiene una larga corola tubular revestida interiormente de pelos tiesos inclinados hacia el fondo. Cuando una mosca la visita, los pelos la impiden salir. Sin embargo, cuando la flor está madura, los pelos caen y la mosca, que puede entrar y salir en la corola libremente, va a polinizar otra flor;

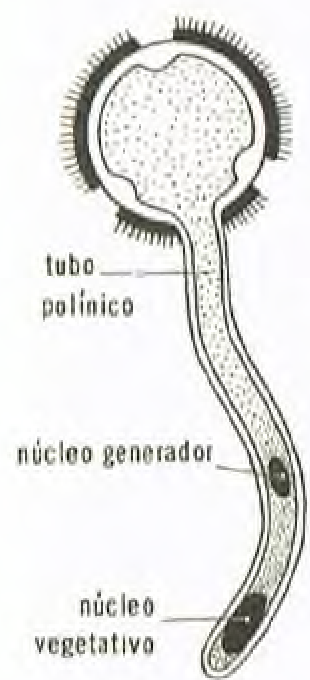
c) La *primavera* presenta dos clases de flores: unas de pistilo corto y largos estambres, otras de pistilo largo y estambres cortos. La longitud de estas diferentes piezas florales es tal que un insecto que ha recibido en un punto de su cuerpo polen de una clase de flor tiene que depositarlo forzosamente sobre el pistilo de las flores de la otra clase si se acerca a ellas, y *viceversa*, con lo que se produce la polinización cruzada;

d) La *salicaria* tiene, en vez de dos, tres clases de flores, y el polen de una flor sólo puede ir a una de las dos otras clases.



Insecto libando en una flor, cuyo polen transportará a otra *(Fot. R.-H. Noailles)*

El hombre. — En ciertos casos es el mismo hombre quien efectúa la polinización: esta práctica recibe el nombre de *fecundación artificial*. Los árabes, que tienen interés en seleccionar para los oasis datileras exclusivamente hembras, que son las que producen frutos, van a buscar el polen de los machos para poder esparcirlo sobre los estigmas. Del mismo modo, los agricultores de la isla de la Reunión, en el océano Indico, se ven obligados a polinizar artificialmente la vainilla, debido a que faltan los insectos que podrían hacerlo.



Grano de polen con su tubo polínico

Germinación del polen. — Si se coloca un grano de polen en una gota de agua sobre un portaobjetos y se observa con el microscopio, se ve cómo se hincha por *ósmosis* hasta reventar; pero si se coloca en agua azucarada, lo hace lentamente y, en lugar de estallar, deja salir su protoplasma por uno de los agujeros de la exina, con lo que se origina el *tubo polínico*, que, alimentado por el agua azucarada, puede alargarse considerablemente. Los dos núcleos se encuentran en el extremo del tubo y dirigen su crecimiento.

Lo mismo sucede en la Naturaleza. El grano de polen que llega a caer sobre un estigma se encuentra en un lugar relativamente templado y húmedo, favorable para su germinación. El tubo polínico se hunde en el estilo y llega hasta el óvulo. Durante este proceso, se nutre de un tejido blando y azucarado situado en el interior del estilo y sobre la pared interna del ovario; su crecimiento dura de unos días a varios meses, según la especie vegetal (de cuatro a cinco meses en el avellano).

Doble fecundación. — Generalmente, el tubo polínico penetra por el micrópilo del óvulo y llega a ponerse en contacto con el saco embrionario. En cuanto a los núcleos, el vegetative desaparece y el reproductor se divide en dos.

Uno de estos núcleos se une al de la oosfera y ésta se convierte en el *primer huevo* o *zigoto*.

El otro núcleo se une al núcleo doble de la célula saco y ésta se transforma en el *segundo huevo*.

En resumen, hay dos huevos producidos simultáneamente, por lo que la fecundación es doble. En cuanto a las sinérgidas y antípodas, en general no son fecundadas y degeneran.

La fecundación doble es una supervivencia de la fecundación múltiple que se efectúa en las criptógamas vasculares.

Frutos, semillas, germinación

Inmediatamente después de la fecundación empieza la *maduración*: 1º transformación del ovario en fruto; 2º transformación de los óvulos en semillas. Al finalizar este proceso se produce la *diseminación* o dispersión de las semillas, que, tras un tiempo variable de vida lenta, inician la *germinación*.

Transformación del ovario en fruto. — Al aumentar el volumen de su pared, el ovario se transforma en un fruto que encierra, en consecuencia, los óvulos transformados en semillas.

La pared del fruto o *pericarpio* (del griego *peri*, alrededor, y *carpos*, fruto) puede ser seca o carnosa, simple o compuesta de varias capas.

Si la flor era monocarpelar o gamocarpelar, el fruto es simple (cereza, manzana), pero si la flor era dialicarpelar, el fruto se compone de tantos frutos simples como carpelos había en la flor (fresa).

Ciertas partes de la flor, tales como los sépalos, las brácteas, etc., pueden subsistir alrededor del fruto y constituyen las *induvias*. Si el receptáculo de la flor se hipertrofia y rodea más o menos el fruto, se llama entonces *cúpula*.

Diferentes clases de frutos. — Los frutos pueden ser simples o compuestos, secos o carnosos, dehiscentes o indehiscentes. Los dos últimos términos indican que se abren o no al madurar para la diseminación.

Frutos secos dehiscentes. — En este grupo se distinguen los folículos, las legumbres, las silicuas, las cápsulas y las píxides.

1º Los *folículos* derivan de un solo carpelo y se abren al madurar por medio de una sola hendidura interplacentaria, es decir, situada entre las dos hileras de semillas (ejempo: eléboro, espuela de galán, aguileña;

2º Las *legumbres* derivan asimismo de un solo carpelo, pero se abren por dos hendiduras opuestas, de las cuales una se encuentra entre las dos hileras de semillas (ejemplo: guisante, judía);

3º Las *silicuas* derivan de dos carpelos unidos por su placenta, separados uno de otro por un tabique, y se abren por cuatro hendiduras, mientras que las cuatro hileras de semillas quedan fijadas al tabique central (ejemplo: col, alelí);

4º Las *cápsulas septicidas* derivan de varios carpelos soldados y se abren por varias hendiduras (ejemplo: lirio, azucena, tulipán, violeta);

5º Las *cápsulas denticidas* se abren en la cima por separación de cierto número de dientes (ejemplo: primavera);

6º Las *cápsulas poricidas* se abren por varios agujeros o poros situados en el reborde de un casquete cónico (ejemplo: adormidera);

7º Las píxides (del griego *pyxis*, caja) se abren por un opérculo (ejemplo: murajes).

Frutos secos indehiscentes. — En este grupo se distinguen los aquenios, las sámaras y los cariópsides.

1º Los *aquenios* (del griego *a*, privativo, y *kainein*, abrirse) se componen únicamente de una semilla envuelta de una membrana (pericarpio). Como tipo podemos citar el aquenio del trigo sarraceno. Con frecuencia, el aquenio lleva induvias en forma de *penachos* o *pelos*, que es lo que ocurre en la clemátide y en la mayor parte de las plantas de la familia de las compuestas. En la colleja, el fruto compuesto es un poliaquenio en forma de esfera plumosa del que los aquenios se separan fácilmente al menor soplo del aire. En las cupulíferas, el aquenio está envuelto por completo, o en parte, por una *cúpula* formada por el receptáculo hipertrofiado de la flor. Tales son los frutos del roble (bellota), haya (hayuco), castaño (castaña). En los dos últimos casos, hay generalmente varios aquenios envueltos por una misma cúpula, que puede ser espinosa; pero no hay que confundir la castaña (aquenios en una cúpula) con el fruto del castaño de Indias, que es un simple aquenio espinoso;

2º Las *sámaras* son aquenios con aleta (ejemplo: fruto del olmo). A veces dos sámaras están unidas y forman una *disámara* que tiene en consecuencia dos aletas que le permiten revolotear en el aire (ejemplo: arce);

3º Los *cariópsides* son frutos cuya semilla está desprovista de tegumento y soldada íntimamente al pericarpio, como ocurre en el llamado "grano de trigo", que no es más que un fruto.

Frutos carnosos. — A diferencia de los frutos secos, los carnosos son entera o parcialmente blandos y están repletos de reservas nutritivas (almidón, azúcar), por lo que tienen una gran importancia para la alimentación. Todos son indehiscentes, pero se pudren en el suelo, lo que facilita la diseminación. En este grupo se distinguen las bayas, los pomos y las drupas.

1º Las *bayas* son frutos enteramente blandos en los que el pericarpio se compone de dos partes: la *piel* o *epicarpio* y la *pulpa* o *endocarpio*. En el centro se encuentran las semillas o *pepitas* (ejemplo: semilla de uva, grosella, melón). Un plátano es una baya en la que las pepitas han abortado; una naranja es otra cuya pulpa está formada en su mayor parte de grandes pelos repletos de agua azucarada;

2º Los *pomos* son bayas cuyas pepitas están envueltas en una materia coriácea (colénquima) [ejemplo: manzana, pera]. Ciertas peras llamadas *pétreas* contienen en el centro unos nódulos de esclerénquima;

3º Las *drupas* son los frutos con hueso, y su pericarpio se compone de tres partes: la *piel* o *epicarpio*, la *pulpa* o *mesocarpio*, y el *hueso* o *endocarpio*, que contiene la semilla o *almendra*. El hueso está formado de esclerénquima (ejemplo: cereza, ciruela, melocotón, albaricoque, nuez). La nuez vendida en el comercio consiste sólo en el hueso que contiene la almendra (piernas de nuez). El coco es también una nuez con una almendra, pero ésta se compone de tres partes: el marfil o albumen sólido, la leche o albumen líquido, y el embrión.

Frutos compuestos. — En una *fresa*, se distingue una parte roja y carnosa cubierta de pequeñas semillas negras, que son aquenios. El con-

junto, es decir, la fresa, es un poliaquenio. La parte roja es el receptáculo de la flor, que se ha hinchado desmesuradamente y se ha cargado de substancias nutritivas.

Un *higo* es análogo a una fresa, con la diferencia de que los aquenios están contenidos en el receptáculo, que es hueco y carnoso *(sicono)*.

Una *mora* —sea el fruto de la zarzamora, sea el del moral— y una *frambuesa* son aglomeraciones de pequeñas drupas.

Una *piña* es un fruto aun más complejo formado por varias bayas y brácteas carnosas soldadas en una sola masa que, por su aspecto exterior, recuerda el fruto del pino.

Transformación del óvulo en semilla. — El huevo principal se convierte en embrión; el huevo accesorio se transforma en albumen; la primina y la secundina se vuelven tegumentos de la semilla.

Formación del embrión. — El primer huevo o huevo principal (oosfera fecundada) se divide en dos. La parte superior origina un filamento o *suspensorio* que hunde el embrión en el interior del saco embrionario y, como ahora veremos, en el interior del albumen. La parte inferior crece y se divide gran número de veces, con lo que se forma el *embrión propiamente dicho*. Una vez definitivamente formado, se pueden distinguir en él cuatro partes:

a) Dos partes laterales anchas, que son los *cotiledones* o primeras hojas;

b) Entre los cotiledones, un pequeño tallo o *plúmula;*

c) Una raíz pequeña o *radícula;*

d) Un rudimento de yema terminal, la *gémula*, situada en el ápice de la plúmula.

El embrión así caracterizado es el típico de las plantas *dicotiledóneas*. En otras no hay más que un solo cotiledón, por aborto del otro y estas plantas reciben el nombre de *monocotiledóneas*.

Formación del albumen. — El segundo huevo o huevo accesorio (célula saco fecundada) produce el albumen. Para ello, su núcleo se divide gran número de veces, cerca de la superficie; después, el protoplasma se divide asimismo en células; hay primero una capa de células, luego dos capas y así sucesivamente; por último, toda la masa del saco embrionario se encuentra convertida en una masa de células con abundantes reservas nutritivas, y con el embrión en el centro del albumen.

Formación de los tegumentos. — Generalmente, la secundina o envoltura interna del óvulo se reabsorbe, y la primina es la que, al espesarse y endurecerse, origina el tegumento de la semilla.

Clases de semillas. — Podemos distinguir cuatro clases de semillas, según su grado de complejidad.

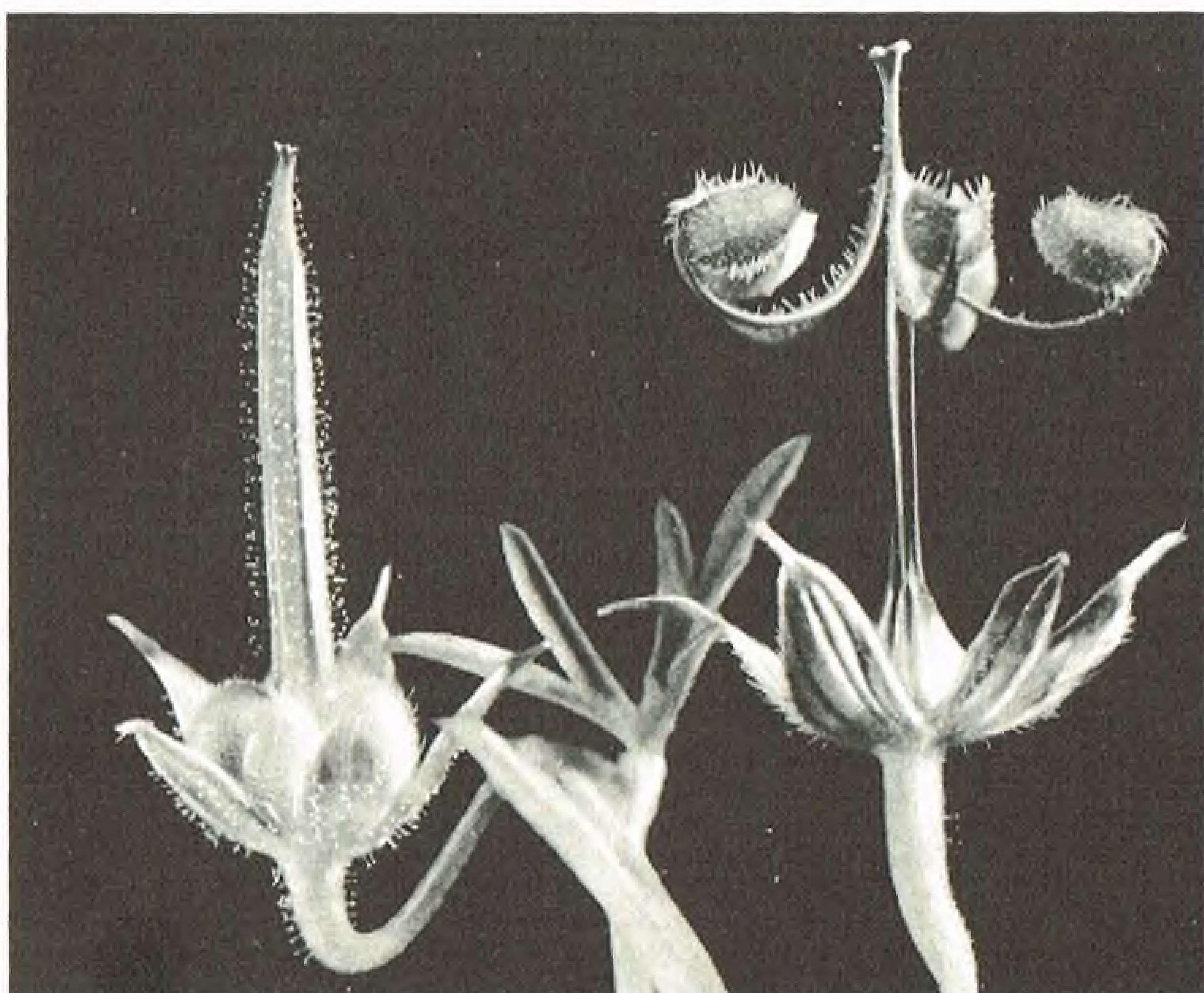
Semillas con albumen y perispermo. — Una semilla de pimienta o de nenúfar se compone de cuatro partes:

a) El *embrión;*

b) El *albumen;*

c) El *perispermo*, que proviene de la nuececilla del óvulo;

d) El *tegumento*.



Geranio: un fruto verde y un fruto sin las semillas, aumentados ocho veces *(Fot. R.-H. Noailles)*

Semillas con albumen, pero sin perispermo. — El perispermo ha sido digerido por el albumen, y así una semilla de ricino sólo comprende tres partes:

a) El *embrión;*

b) El *albumen;*

c) El *tegumento*.

Semillas sin albumen. — El albumen ha sido digerido a su vez por el embrión, cuyos cotiledones han crecido desmesuradamente y contienen las reservas de la semilla, como sucede en la judía, que está formada sólo por dos partes:

a) El *embrión;*

b) El *tegumento*.

Semillas sin tegumento. — Éste es el caso de una semilla de trigo, que, en realidad, es un fruto cariópside. La semilla propiamente dicha se compone sólo del embrión y el albumen, ya que éste ha digerido su tegumento.

Reservas de la semilla. — Las reservas indispensables para la germinación están contenidas, según el caso, en el perispermo, en el albumen o en los cotiledones. Desde el punto de vista químico, pueden ser *amiláceas* (almidón), *oleaginosas* (aceite) o *proteicas* (aleurona). Las palmeras tienen un *albumen coriáceo*, es decir, formado de celulosa endurecida. Las semillas de la *Phytelephas* (del griego *phyton*, planta y *elephas*, elefante) alcanzan el tamaño de un huevo de gallina y proporcionan la materia dura, córnea, empleada bajo el nombre de *corojo* o *marfil vegetal*.

Una semilla puede tener varias clases de reservas nutritivas. Veamos, en detalle, la estructura de un grano de trigo. Bajo el tegumento, que en realidad es el del cariópside, aparece el albumen, compuesto de dos partes:

a) La capa periférica de células, repleta de granos de aleurona, que constituyen el gluten;

b) La masa profunda, que contiene granos de almidón.

En un lado del grano de trigo, separado del albumen, pero adosado estrechamente sobre él, se encuentra el embrión, cuyo cotiledón único tiene la forma de un zueco. En un lado del cotiledón están fijados la radícula, la plúmula y la gémula.

Cuando se muele el trigo, una parte del gluten queda fija al tegumento y se encuentra en el salvado; la otra permanece con el almidón y puede encontrarse en la harina.

Diseminación. — La *diseminación* (del latín *semen*, simiente) consiste en la dispersión de las semillas, y puede efectuarse de diferentes maneras:

a) Los frutos secos dehiscentes proyectan lejos sus semillas, lo que puede comprobarse perfectamente en verano, en un día caluroso, junto a una mata de retama: en efecto, se oye claramente el ruido seco que las vainas de esta planta hacen al abrirse;

b) Los frutos del arce son disámaras cuyas aletas favorecen su transporte por el aire;

c) Los frutos de la colleja son poliaquenios con vilanos que el aire se encarga de disociar;

d) Las bayas del muérdago son viscosas y se adhieren a las patas y picos de los pájaros;

e) Los frutos con garfios de la bardana *(Arctium)* se enganchan a los vellones de los mamíferos;

f) Los frutos del coco pueden ser transportados a gran distancia por los ríos e incluso por las corrientes marinas.

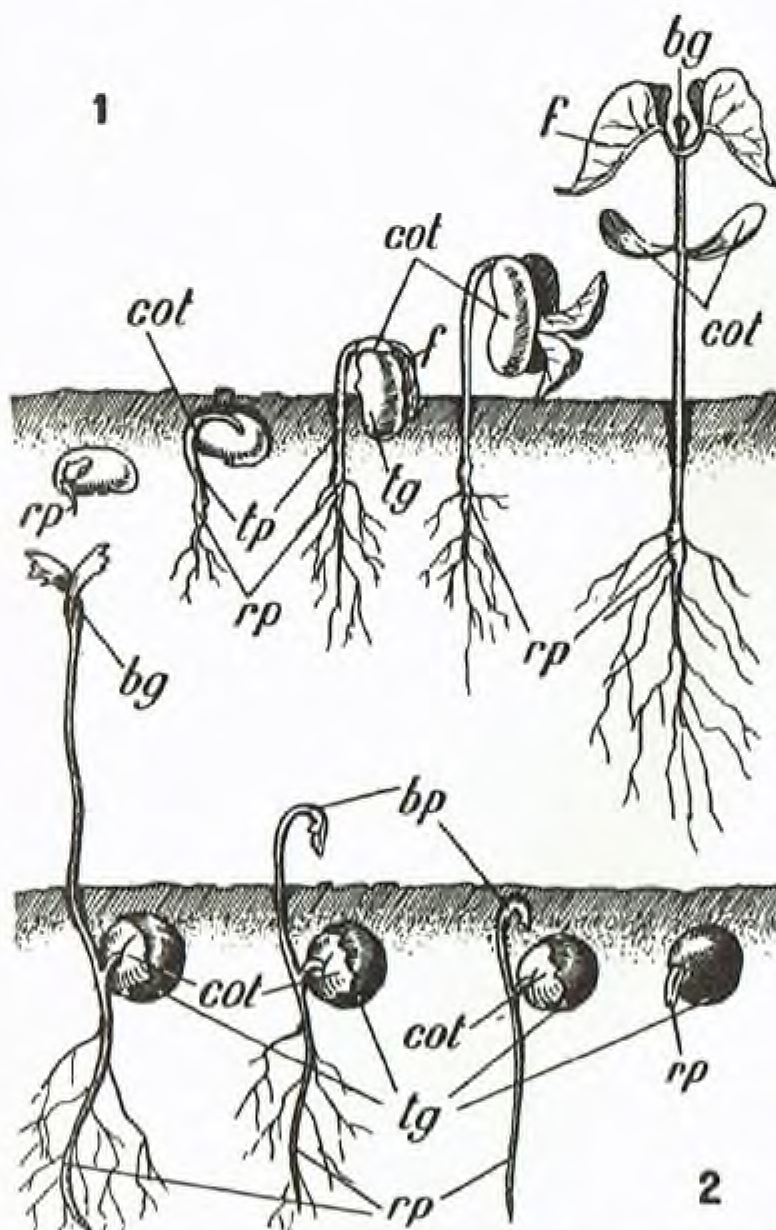
Condiciones de la germinación. — La semilla propia de las espermatofitas puede ser definida como *un embrión cuyo desarrollo se ha detenido y que se separa de la planta con reservas nutritivas propias*. La continuación de su desarrollo, después de un tiempo más o menos largo, constituye la germinación, pero ésta sólo puede efectuarse en condiciones determinadas que pueden dividirse en internas y externas.

Condiciones internas. — a) *Estado de la semilla.* Ésta debe estar bien constituida y sus reservas no deben haberse alterado, condición importante en el caso de las semillas oleaginosas, cuyo aceite tiene tendencia a enranciarse;

b) *Edad de la semilla.* Cuando un fruto está maduro, sus semillas no lo están aún, ya que llevan siempre cierto retraso, y a veces tardan largo tiempo en madurar (dos años para el rosal).

Más de una vez nos hemos preguntado cuánto tiempo puede ser conservada una semilla con su poder de germinación íntegro. Debemos advertir a este respecto que las semillas encontradas en las tumbas egipcias no podían germinar. También diremos que se ha visto

que semillas de trigo de viejos herbarios podían germinar sólo hasta la edad máxima de treinta años. Una leguminosa germinó al cabo de ochenta y siete años, pero la mayor parte de las semillas tienen una resistencia mucho menor.



Germinación: 1, de la judía; 2, del guisante; *bg*, yema terminal; *cot.*, cotiledones; *f*, hojas; *rp.*, raíces primitivas; *tg*, tegumento, *tp*, plúmala; *bp*, yema terminal encorvada

El *poder germinativo* de una cantidad de semillas es el porcentaje que representan las que son capaces de germinar. Y se comprueba que este poder aumenta primero y disminuye luego a medida que las semillas envejecen.

Condiciones externas. — a) *Humedad.* El agua tiene como efecto inmediato hinchar la semilla, ablandarla y hacer estallar su envoltura. La función de la semilla es, ante todo, mecánica, pero más tarde disuelve las substancias solubles y permite que las diastasas puedan realizar la digestión de las reservas: es decir, tiene también una función química. Para cada clase de semillas existe un óptimo de humedad, mientras que el exceso de agua (salvo para las plantas acuáticas) perjudica la germinación; b) *Oxígeno.* En un montón de semillas que germinan, las situadas en la superficie lo hacen primero que las que están más profundas; por lo tanto, y sacando la consecuencia práctica, un terreno debe estar bien aireado, lo que se consigue mediante las labores adecuadas;

c) *Calor.* Hay que distinguir para cada especie una temperatura mínima, otra óptima o la más apropiada y otra máxima de germinación. Para el trigo, por ejemplo, estas temperaturas son de 5, 28 y 37º C. Para el maíz son de 9, 33 y 46º C. La media para las plantas de las regiones templadas es de 30º C.

Fenómenos morfológicos de la germinación. — El *embrión* es una planta pequeña o *plántula* que se desarrolla durante la germinación y se nutre de las reservas de la semilla. En el caso más general (semilla de ricino) se ve primeramente hendirse el tegumento y alargarse la *radícula* hacia abajo. Luego la *plúmula* se alarga asimismo, pero hacia arriba y eleva lentamente la semilla sobre el suelo. La parte del tallo así formado es pequeña y produce raíces adventicias que colaboran con la raíz principal para absorber agua del suelo. Esta parte del tallo se llama *eje hipocótilo,* ya que se encuentra debajo de los *cotiledones.* Éstos se separan uno de otro y se llevan consigo una parte del albumen, la substancia del cual digieren poco a poco. A continuación se transforman en las dos primeras hojas de la planta. La plúmula, por su parte, interviene en este momento y produce el resto del tallo *(eje epicótilo)* con las diferentes hojas.

La germinación de la judía sólo difiere de la anterior en que los cotiledones que contienen las reservas nutritivas se digieren a sí mismos, se marchitan y caen sin llegar a servir de verdaderas hojas.

En los dos casos, la semilla se eleva sobre el suelo gracias a la plúmula, que se convierte en un eje hipocótilo, y por ello se dice que esta germinación es *epigea* (del griego *epi,* encima y *geos,* tierra).

En otras plantas, como el guisante, el tallo aborta y la semilla permanece en el suelo, con lo que el citado tallo es enteramente epicótilo y la germinación *hipogea* (del griego *hypo,* debajo, y *geos,* tierra).



Germinación de un guisante en la arena, aumentado dos veces y media *(Fot. R.-H. Noailles)*

Fenómenos fisiológicos de la germinación. — La planta nueva respira, transpira, absorbe y digiere.

Respiración. — La respiración, que era imperceptible en la semilla, se vuelve de repente muy intensa. Al mismo tiempo, el cociente respiratorio pasa de 0,8 a 0,5 e incluso a veces a 0,3, lo cual demuestra que la planta absorbe más oxígeno que el que puede rechazar bajo la forma de CO_2, es decir, que se oxida. Por consiguiente, hay un desprendimiento de calor, fácil de poner en evidencia por medio de un termómetro hundido en un montón de semillas en germinación.



Desarrollo de la plántula del manzano, aumentada dos veces y media *(Fot. R.-H. Noailles)*

Transpiración. — El desprendimiento de vapor de agua es muy activo y va acompañado de una pérdida de peso de la planta. Precisemos un poco este fenómeno. Si se pesa una cantidad de semillas, se obtiene su *peso fresco.* Si las desecamos en una estufa a 100º C, obtendremos su *peso seco* P_1. Tomemos otra cantidad idéntica de semillas y hagámoslas germinar. Al cabo de cierto tiempo de germinación, como consecuencia de la absorción de agua y del aumento de volumen, el peso fresco habrá aumentado, pero si las desecamos y las pesamos, su peso seco P_2 será inferior a P_1. La conclusión que se puede sacar de esto es que las substancias constitutivas de la semilla se han deshidratado.

Absorción. — La raíz nueva desarrolla muy pronto pelos absorbentes y radicelas que le permiten absorber el agua del suelo y compensar, en cierto modo, la transpiración.

Digestión. — Las reservas nutritivas son digeridas por diastasas análogas a las de nuestro esófago: *amilasa* y *maltasa* para el almidón, que se transforman en glucosa; *lipasa* para los lípidos, que son hidrolizados; *proteasas* (pepsina, tripsina, erepsina) para la aleurona, que se transforma en aminoácidos, y *celulasa* para las reservas córneas.

Cuando las reservas están en los cotiledones, éstos producen por sí mismos las diastasas con las cuales se digieren, pero si las reservas se encuentran en el albumen, se pueden presentar tres casos:

1º El albumen vive y se digiere a sí mismo en provecho del embrión; tal es el caso del albumen oleaginoso de la semilla del ricino;

2º El albumen está muerto y es digerido por la epidermis de los cotiledones;

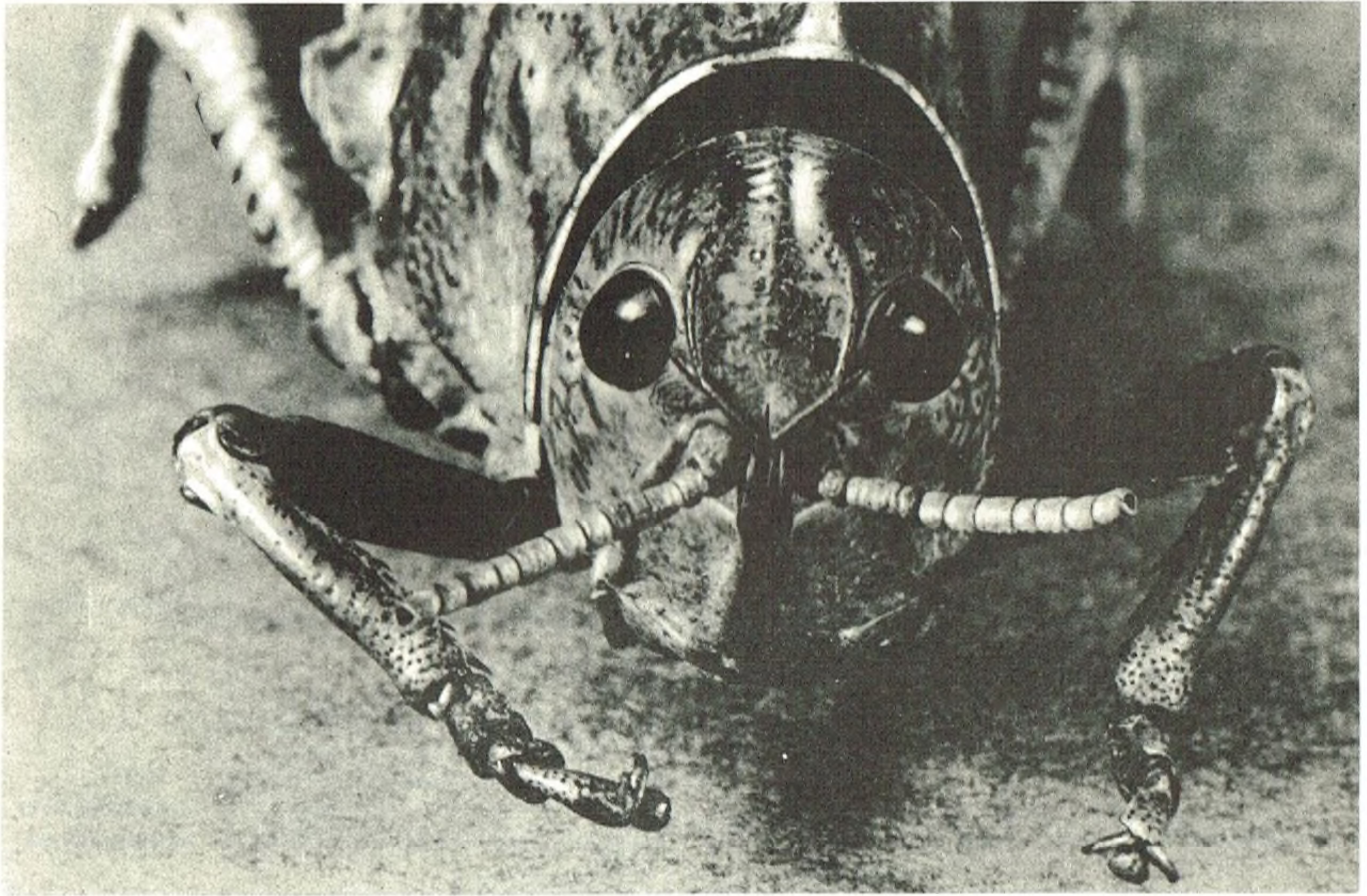
3º El albumen está muerto, salvo por su capa superficial, que contribuye a la secreción de las diastasas. Esto sucede en la germinación del trigo, planta en la que la capa de aleurona que aún vive y la epidermis del cotiledón se encargan de digerir el albumen amiláceo.

Fin de la germinación. — La germinación cesa cuando, agotadas las reservas de la semilla, la planta se vuelve autotrofa gracias a la clorofila que aparece en las hojas.

Léon BERTIN

BIBLIOGRAFÍA. — Ph. VAN TIEGHEM: *Traité de botanique.* 1891. — BONNIER et LECLERC DU SABLON: *Cours de botanique,* 2 vol. — M. MOLLIARD: *Nutrition de la plante.* 1 vol., 1921-1927.— COSTANTIN et FAIDEAU: *les Plantes,* 1930. — *Larousse agricole,* 1953. — LOSA, RIVAS y MUÑOZ MEDINA: *Botánica descriptiva,* 2 vol., 1956.





Cabeza de saltamontes de Cerdeña *(Fot. C. Bille)*

Zoología

Clasificación de los animales

Los animales son infinitamente más variados y más numerosos en especies que los vegetales. En el siglo XVIII, **Linneo** los dividió en seis clases: mamíferos, aves, anfibios, peces, insectos y gusanos. Era conceder excesiva importancia a los vertebrados. En la clasificación de **Cuvier,** éstos aparecen como un tipo opuesto a otros tres. Hoy día se distinguen dos tipos de vertebrados (comprendidos los procordados) y de diez invertebrados:

1° *Tipo de los* **protozoarios** o animales formados de una sola célula, y por consiguiente los más simples, los más primitivos, los primeros aparecidos sobre el globo. Comprenden las clases siguientes: *flagelados, amebas, foraminíferos, radiolarios, esporozoarios* y *ciliados.* Frecuentemente se les oponen todos los demás animales con el nombre de **metazoarios.** En efecto, a partir del tipo siguiente, el cuerpo es pluricelular y las células están más o menos diferenciadas;

2° *Tipo de los* **celentéreos,** animales sin cavidad general ni mesodermo, reducidos a un saco digestivo, defendidos por células urticantes. Se les divide en dos clases: *hidrozoarios* y *escifozoarios;*

3° *Tipo de los* **espongiarios** o esponjas, animales sin cavidad general, pero con mesodermo;

4° *Tipo de los* **equinodermos,** a partir de los cuales aparece una cavidad general, en la que están contenidos los órganos. Sus tegumentos poseen placas calcáreas y se desplazan por medio de un aparato de vasos acuíferos. Son los *crinoideos,* los *esteléridos* o estrellas de mar, los *ofiúridos,* los *equinoideos* o erizos y los *holotúridos;*

Algunas veces se reúnen los tres tipos precedentes bajo el nombre de **fitozoarios** (animales plantas), a causa de su simetría más o menos radiada. Los tipos siguientes constituyen entonces el grupo de los **artiozoarios** (animales bilaterales), así llamados porque tienen un lado derecho y otro izquierdo, o sea una simetría bilateral;

5° *Tipo de los* **anélidos** o gusanos anillados, que comprende los *poliquetos,* los *oligoquetos* y los *hirudíneos* o sanguijuelas;

6° *Tipo de los* **vermídeos** o gusanos aberrantes. Grupo heterogéneo en el que se colocan los *gefíreos,* los *rotíferos,* los *briozoarios* y los *braquiópodos;*

7° *Tipo de los* **platelmintos** o gusanos planos, en su mayoría parásitos: *turbelarios, trematodos* o duelas (saguaipe) y *cestodos* o tenias;

8° *Tipo de los* **nematelmintos** o gusanos cilíndricos y parásitos, divididos en dos clases: *nematodos* y *acantocéfalos;*

9° *Tipo de los* **artrópodos** o **articulados,** vasto grupo dividido en cinco clases: *crustáceos, miriápodos, insectos, merostomas* y *arácnidos;*

10 *Tipo de los* **moluscos,** definidos por sus tegumentos blandos, su concha calcárea y su pie, que se adapta a funciones diversas. Son los *anfineuros,* los *gasterópodos,* los *cefalópodos* y los *lamelibranquios;*

11 *Tipo de los* **procordados,** conjunto de formas más o menos emparentadas con el tipo siguiente;

12 *Tipo de los* **vertebrados,** animales de esqueleto óseo y sistema nervioso dorsal. Se les divide en cinco clases: *peces, batracios, reptiles, aves* y *mamíferos.*

Después de haber estudiado estos tipos independientemente unos de otros, dedicaremos un capítulo final a su anatomía comparada.

◀ Pardillos *(Fot. J. Markham)*

CLASIFICACIÓN ZOOLÓGICA

TIPOS	CLASES	ÓRDENES	GÉNEROS O ESPECIES TIPOS
PROTOZOARIOS	Flagelados	Euflagelados	Tripanosoma de la enfermedad del sueño
		Coanoflagelados	Codosiga
		Dinoflagelados	Peridíneos
		Cistoflagelados	Noctiluca
	Amebas		Ameba
	Foraminíferos	Imperforados	Gromia, miliola
		Perforados	*Polystomella*, globigerina, numalita
	Radiolarios		Talasicólidos, colosféridos
	Esporozoarios	Hematozoarios	Hemameba del paludismo
		Coccidios	Coccidio del conejo
		Gregarínidos	Estilorrínquido, gregarina
	Ciliados	Holotricos	Paramécido, opalina
		Heterotricos	Estentor
		Hipotricos	*Stylonichia*
		Peritricos	Vorticela
CELENTÉREOS	Hidrozoarios	Hidrarios	Hidra de agua dulce, campanularia, plumularia
		Hidrocoralarios	Milépora
		Sifonóforos	Fisalia, porpita, *Velella*
		Hidromedusas	*Geryonia*
	Escifozoarios	Hexacoralarios	Actinias, madréporas *(arrecifes coralinos)*
		Octocoralarios	Coral, gorgonia, *Pennatula*, *Verelillum*
		Acalefos	*Grandes medusas*: *Rhizostoma*, pelagia
ESPONGIARIOS	Calcáreas		*Sycon*
	Corneosilíceas		Esponjila, cliona, *Euplectella*, *Hyalonema*, esponjas de tocador
EQUINODERMOS	Crinoideos		Encrino, comatula
	Esteléridos		Estrellas de mar
	Ofiúridos		Ofiuros
	Equinoideos	Regulares	Erizos comestibles
		Irregulares	Clipeastroides, espatánguidos
	Holotúridos		Holoturias
ANÉLIDOS o GUSANOS ANILLADOS	Poliquetos	Errantes	*Nereis*, *Aphrodite*
		Sedentarios	Arenícola, sérpula, terebela
	Oligoquetos		Lombriz de tierra, *Tubifex*
	Hirudíneos	Gnatobdélidos	Sanguijuela medicinal
		Rincobdélidos	Ictiobdélido
VERMÍDEOS o GUSANOS ABERRANTES	Gefíreos		Equiúridos, sipuncúlidos
	Rotíferos		Hydatina
	Briozoarios		Flustra, *Plumatella*
	Braquiópodos	Articulados	Terebrátula, *Rynchonella*
		Inarticulados	Língula
PLATELMINTOS o GUSANOS APLANADOS	Turbelarios		Planarias
	Trematodos	Fasciólidos	Duela del carnero *(saguaipe)*, enquistosoma
		Polistómidos	Polistomo de la rana
	Cestodos	Teniados	Tenias inerme, armada, cenuro, equinococo
		Botriocefálidos	Botriocéfalo
NEMATELMINTOS o GUSANOS CILÍNDRICOS	Nematodos		Ascáride, oxiuro, tricocéfalo, anquilostoma, triquina
	Acantocéfalos		Equinorrinco
ARTRÓPODOS o ARTICULADOS	Crustáceos	Filópodos	Branquipódido, apus, dafnia
		Copépodos	Cíclope
		Ostrácodos	Cipris
		Cirrípedos	Anatifa, bálano, *Sacculina*
		Isópodos	Cochinilla, asélido, ligia
		Anfípodos	Talitro, caprélido
		Decápodos	*Macruros*: camarón, bogavante, langosta. — *Anomuros*: paguro o ermitaño. — *Braquiuros*: cangrejo
	Miriápodos	Quilópodos	Escolopendra, litóbido
		Diplópodos	Júlido, glomérido
	Insectos	Tisanuros	Lepisma, campodeido
		Arquípteros	Comején, libélula, cachipolla
		Ortópteros	Cucaracha, forfícula, manta religiosa, acridio, langosta, grillo, cortón
		Neurópteros	Frigánea, hormiga león
		Coleópteros	Cárabo, ditíscido, necróforo, escarabajo pelotero, abejorro, *Lucanus*, capricornio, algavaro, gorgojo, *Coccinella*, luciérnaga

CLASIFICACIÓN ZOOLÓGICA

TIPOS	CLASES	ÓRDENES	GÉNEROS O ESPECIES TIPOS
ARTRÓPODOS o ARTICULADOS *(continuación)*	**Insectos** *(continuación)*	**Himenópteros**	*Portataladro*: icneumón, *Cynips*.—*Portaaguijón*: *Solitarios*: amófilo, cerceris. *Sociales*: hormiga, avispa, abeja, abejorro
		Lepidópteros o mariposas	*Diurnas*: pieris, vanesa. *Crepusculares*: Esfinge.—*Nocturnas*: *Bombyx*, noctua, falena, piral, polilla
		Dípteros	*De antenas largas*: mosquito, anofeles.—*De antenas cortas*: moscas, tábano, glossina.—*Sin alas*: pulga
		Hemípteros	*Con élitros*: chinche, nepa, ranatra, notonecta.—*Sin élitros*: cigarra, pulgón, filoxera, cochinilla.—*Sin alas*: piojo
	Merostomas	**Xifosuros**	Límulo
	Arácnidos	**Escorpiones**	Escorpión
		Arañas	Epeira, tegenaria, licosa, migala
		Acaros	*Trombidium*, garrapata, sarcoptes de la sarna
MOLUSCOS	**Anfineuros**		Chiton
	Gasterópodos	**Prosobranquios**	*Dictocardios*: fisurélido, haliótido, patella.—*Monotocardios*: *Littorina*, múrex, púrpura, buccino, triton
		Pulmonados	*Acuáticos*: *Limnaea*, planorbis.—*Aéreos*: caracol, babosa
		Opistobranquios	Aplisia, eolis, doris, pterópodos
	Cefalópodos	**Tetrabranquios**	Nautilo
		Dibranquios	*Decápodos*: espírula, jibia, calamar, argonauta.—*Octópodos*: pulpo
	Lamelibranquios	**Dimiarios**	Almeja, venus, berberecho, solen, *Mya*, anodonta, unio, folas, teredo o broma
		Heteromiarios	Mejillón, perna, *Lithodomus*, ostra perlera
		Monomiarios	Ostra comestible, pecten
PROCORDADOS	**Cefalocordados**		Anfioxo
	Urocordados o tunicados	**Appendicularias**	
		Ascidias	*Simples*: *Cynthia*, falusia.—*Coloniales*: *Botryllus*.—*Pelágicas*: pyrosoma, salpa, doliolum
VERTEBRADOS	**Peces**	**Ciclóstomos**	Lamprea, mixinoideo
		Selacios	Tiburón, raya
		Ganoideos	*Cartilaginosos*: esturión.—*Óseos*: políptero, lepidosteido
		Teleósteos	Carpa, lucio, salmón, arenque, atún, bacalao, platija, caballa, anguila, hipocampo
		Dipnoos	Ceratodo, propotoptérido
	Batracios	**Urodelos**	*Perennibranquios*: proteido. — *Criptobranquios*: salamandra gigante.—*Salamandrinos*: salamandra, tritón, amblistoma
		Anuros	Rana, sapo, rubeta, *rana mugectora*, *cururu*
		Apodos	Cecilia
	Reptiles	**Saurios**	Lagarto, varano, iguana, geco, camaleón, lución, *basilisco*, *anolis*, *tolachini*
		Ofidios	*Aglifos*: culebra, boa, pitón, *anaconda*.—*Opistoglifos*: culebra de Montpellier. — *Proteroglifos*: naja. — *Solenoglifos*: víbora, crótalo, *botrops*
		Quelonios	Tortuga, carey, laúd, *arráu*
		Cocodrílidos	Cocodrilo, gavial, caimán
	Aves	**Rátidas**	Avestruz, *ñandú*, casuario, ápterix
		Rapaces	*Diurnas*: águila, buitre, cernícalo, gavilán, *cóndor*, *gallinazo*, *arpía*.—*Nocturnas*: lechuza, buho
		Trepadoras	Pico, cuclillo, loro, *aní*, *tucán*, *quetzal*, *guacamayo*
		Colúmbidas	Paloma, tórtola
		Gallináceas	Gallo, gallina, pintada, pavo, faisán, perdiz, codorniz, *hocán*, *chachalaca*, *hoatzin*
		Zancudas	Garza, cigüeña, grulla, chocha, polla de agua, *coco*, *maguari*, *agamí*, *cariama*
		Palmípedas	*Longipennes*: gaviota, mergo, pelícano, *anhinga*, *quiulla*.—*Brevipennes*: pájaro bobo, pingüino.—*Lamelirrostros*: pato, oca, flamenco, cisne
		Pájaros	*Dentirrostros*: paro, curruca, reyezuelo, ruiseñor.—*Coracirrostros*: cuervo, mirlo, urraca. — *Conirrostros*: gorrión, pinzón, alondra.—*Fisirrostros*: golondrina, vencejo.—*Tenuirrostros*: abubilla, *colibrí*
	Mamíferos	**Monotremas**	Equidno, ornitorrinco
		Marsupiales	*Zarigüeya*, canguro, tilacino, *marmosa*
		Primates	*Lemúridos*: maki, indri.—*Simios*: *sapajú*, *tití*, *ateles*, magoto, macaco, chimpancé, gorila, orangután.—*Hombres*
		Insectívoros	Erizo, topo, musaraña
		Quirópteros	Murciélago, panique, *vampiro*
		Carnívoros	Gato, león, tigre, perro, lobo, oso, tejón, civeta, comadreja
		Pinnípedos	Foca, morsa, otaria
		Roedores	Rata, ardilla, castor, marmota, *cobayo*, conejo, liebre, *agutí*, *paca*, *chinchilla*, *vizcacha*, *capibara*
		Proboscidios	Elefante
		Perisodáctilos	*Tapir*, rinoceronte, caballo, asno
		Artiodáctilos	*Porcinos*: cerdo, hipopótamo, *pécari*.—*Rumiantes*: toro, carnero, cabra, antílope, ciervo, jirafa, camello, *llama*, *alpaca*, *guanaco*, *vicuña*
		Sirenios	Dugong, *manatí*
		Cetáceos	*Odontocetos*: marsopa, delfín, cachalote.—*Mistacocetos*: ballena, *inia*
		Desdentados	*Tatú*, *pangolín*, *oso hormiguero*, *perezoso*

Tipo de los protozoarios

Clase de los flagelados: Flagelados verdes. Flagelados incoloros. Flagelados parásitos: Enfermedad del sueño. Enfermedad de Chagas. Nagana. Durina. Kala-azar y fiebre dum-dum. Flagelados simbióticos. Reproducción de los flagelados: División. Esporulación. Fecundación. Colonias de flagelados. — **Clase de las amebas:** Estructura de las amebas. Movimiento y sensibilidad. Nutrición de las amebas. Reproducción de las amebas. — **Clase de los foraminíferos:** Estructura de una gromia. Estructura de un polistomélido. Reproducción de los foraminíferos. Principales foraminíferos. — **Clase de los radiolarios:** Estructura de los radiolarios. Fisología de los radiolarios. Reproducción de los radiolarios. — **Clase de los esporozoarios:** Hematozoarios. Papel de los mosquitos. Ciclo evolutivo de la hemameba. Coccidios. Gregarínidos. — **Clase de los ciliados:** Descripción de un paramécido. Multiplicación de los ciliados. Conjugación de los ciliados. Conjugación y fecundación

Los **protozoarios** (del griego *protos*, primero, y *zoon*, animal) *son los animales de organización más simple y, sin duda, los primeros que aparecieron en la superficie del Globo. Su cuerpo se compone de una sola célula. Son, pues, unicelulares. Veremos, sin embargo, que varias células, nacidas unas de otras por división, pueden permanecer asociadas en colonias elementales. Así se produce el paso de los protozoarios a los metazoarios, cuyo cuerpo está siempre compuesto de un gran número de células.*

La clasificación de los protozoarios no está todavía definitivamente establecida. Se discute mucho, en efecto, sobre el encadenamiento de las diferentes formas. La *ameba*, antes considerada como primitiva, parece posterior a los *flagelados*. Éstos no deben ya aproximarse a los *ciliados*. Los *radiolarios* ocupan un lugar aparte y se alejan de los *foraminíferos*. Consideraremos los grupos principales siguientes: *flagelados, amebas, foraminíferos, radiolarios, esporozoarios* y *ciliados*.

Clase de los flagelados

Los **flagelados** *son los más primitivos de todos los animales, puesto que algunos de ellos, los flagelados verdes, pueden ser reivindicados tanto por el zoólogo como por el botánico. Estos pequeños seres constituyen, en suma, el tronco común de los reinos animal y vegetal. Su célula única posee una membrana flexible de la cual se destacan uno o varios "látigos" o flagelos, que permiten la locomoción en un medio líquido. Los flagelados viven, en efecto, en el agua cuando son libres, y en la sangre de otros animales cuando son parásitos.*

Flagelados verdes. — Tomemos como tipo el *Chlamydomonas* de agua dulce. Es una célula ovoide o más bien periforme y de un color verde brillante. Su longitud media es de 20 micras. En el centro se encuentra el *núcleo*. En el extremo posterior, redondeado, la membrana está formada de *celulosa* y *pectina*, materias esencialmente vegetales. También se encuentra allí un enorme *cloroplasto* en forma de campana, cuya clorofila hace posible la síntesis del *almidón*. En la extremidad anterior, encogida, el *Chlamydomonas* posee, por el contrario, órganos sensibles y locomotores y una membrana flexible. En ella están fijados los dos largos flagelos móviles dependientes del núcleo. En la proximidad de su base se distingue un punto rojo sensible a la luz.

Los flagelados verdes tienen por tanto un *polo animal* dotado de locomoción y otro *vegetal* encargado de la asimilación clorofílica. De esta propiedad se deduce que son *autótrofos*. Pueden vivir únicamente de substancias minerales; los nitratos les suministran el nitrógeno, y el gas carbónico les proporciona el carbono.

Flagelados incoloros. — Habría que decir más bien flagelados *sin clorofila*, ya que algunos están teñidos de rojo o pardo por pigmentos diversos. Su carácter esencial es no poder nutrirse exclusivamente de materias minerales. En principio, son heterótrofos como los demás animales. Se ha demostrado, sin embargo, que algunos de ellos pueden ser cultivados en soluciones que no sean de materias orgánicas complejas, sino simples, como las peptonas, los ácidos amínicos, el ácido acético, etc. Parece haber, pues, en definitiva, entre los seres vivientes, tres modos principales de nutrición:

1º El modo *autótrofo* o alimentación a expensas de materias minerales: vegetales verdes, flagelados verdes y ciertas bacterias;

2º El *mesótrofo* o alimentación a expensas de substancias orgánicas simples: flagelados incoloros;

3º El *heterótrofo* o alimentación a expensas de substancias orgánicas complejas; vegetales sin clorofila y la mayoría de los animales.

Muchos flagelados incoloros forman parte del *plancton*, es decir, de esa masa de vegetales y animales flotantes que se puede recoger, por medio de redes de seda fina, en la superficie del mar y de los lagos. Entre ellos se encuentran los *peridíneos*, también llamados *dinoflagelados* (del griego *deinos*, horroroso) a causa de su gran tamaño. Estos organismos pueden tener varios milímetros de longitud. Los *Ceratium* tienen largos cuernos, que les permiten flotar mejor, y dos largos látigos o flagelos, uno de los cuales está alojado en un surco ecuatorial. Su cuerpo está revestido de un caparazón. Las *noctilucas* tienen forma de melocotón y poseen un tentáculo ligeramente móvil. En el interior de su protoplasma están encerradas innumerables gotitas de aceite, que se hacen luminosas por la noche, al ser excitados por las olas. Otro grupo muy interesante es el de los *coanoflagelados* (del griego *phoanos*, embudo), cuyo flagelo está rodeado en su base de una gorguera protoplasmática. Encontraremos, en las esponjas, células *(coanocitos)* que tienen exactamente la misma estructura.

Flagelados parásitos. — Éstos son los *tripanosomas* y sus formas vecinas, que, inoculados por las picaduras de los insectos, se multiplican en la sangre de los vertebrados. Las enfermedades que causan han recibido el nombre general de *tripanosomiasis*.

Enfermedad del sueño. — Aislada, al principio, en las orillas del Congo, se extendió con los progresos de la colonización hasta la región de los grandes lagos. Como el tripanosoma es inoculado por la *Glossina* o mosca *tse-tsé*, se pensó ante todo en destruir la maleza de los alrededores de los poblados para suprimirla o impedirle ser nociva. La mosca tse-tsé vive, en efecto, en los matorrales y follajes húmedos. Después se buscó un medicamento capaz de penetrar en la sangre y de aniquilar el tripanosoma. Se han obtenido excelentes resultados combinando productos arsenicales con ciertas materias colorantes, como el rojo de tripano.

Enfermedad de Chagas o **tripanosomiasis americana.** — El tripanosoma, en este caso, es transmitido por una chinche. Una vez en el cuerpo humano, pierde su flagelo y se multiplica rápidamente en el interior de las células.

Nagana. — En esta tripanosomiasis africana del ganado, el tripanosoma es inoculado por glossinas o moscas tse-tsé como en la enfermedad del sueño.


Mosca tsé-tsé

Durina. — La durina es una tripanosomiasis de los caballos propia de la región mediterránea. Excepcionalmente, el tripanosoma no es inoculado por la picadura de un insecto, sino directamente a través de las mucosas, en el momento del acoplamiento. Este modo de contaminación recuerda el de la sífilis.

Kala-azar y fiebre dum-dum. — Estas dos enfermedades, una propia de la India y la otra del continente africano, son transmitidas por chinches y moscas. Su agente es la *Leishmania*, forma que difiere del tripanosoma por la ausencia de membrana ondulante.

Flagelados simbióticos. — En el intestino de los comejenes viven flagelados con numerosos flagelos, que a veces parecen cilios vibrátiles. Ahora bien, estos organismos, de tan perfeccionados órganos locomotores, se asemejan a las bacterias por su propiedad de digerir la celulosa y la madera de que se nutren los comejenes. Su considerable poder digestivo suple al del comején, que es más restringido y no podría vivir sin ellos. Inversamente, estos flagelados encuentran en el intestino del comején las condiciones más favorables a su desarrollo. Nuevo ejemplo de *simbiosis* (vida en común) después de los que nos han ofrecido los vegetales (líquenes, micorrizas, etc.).

Reproducción de los flagelados. — Los flagelados pueden reproducirse de diferentes modos, de los cuales se conoce, en ciertos casos, el determinismo.

División. — Los flagelados se dividen en el sentido longitudinal. Por cariocinesis sucesivas, una célula primitiva engendra dos, después cuatro, ocho, 16, 32, etc. Todas estas células se separan o quedan a veces asociadas en colonias (v. más adelante).

Esporulación. — En el interior de una célula, el núcleo se divide en cuatro u ocho. Alrededor de cada núcleo, se condensa el protoplasma para formar una *espora* o más bien *una zoospora flagelada*, que se asemeja al flagelado inicial. En un momento dado, éste se abre y pone en libertad las zoosporas.

Fecundación. — Puede ser isógama o heterógama.

1º *Isogamia*. Supongamos que las esporas son producidas en número de 16 ó 32; muy pequeñas para desarrollarse por sí mismas, se unen de dos en dos y se conducen, por consiguiente, como *gametos*. De su unión resulta un *huevo*, que se desarrolla en un nuevo flagelado;

2º *Heterogamia*. Si las esporas se producen en número de 64, su ínfima pequeñez no les permite siquiera unirse entre sí. Entonces se conducen como *gametos machos* y se unen a esporas más grandes que hacen el papel de *gametos hembras*. La esporulación conduce así a la sexualidad.

Colonias de flagelados. — Sucede a veces que células salidas unas de otras por división quedan asociadas en colonias, que comprenden hasta 10 000 células en el caso del "*Volvox globator*". Así, hay protozoarios que llegan a parecer metazoarios. Existe, incluso, una diferenciación entre las células: unas permanecen locomotoras en el polo anterior, otras se convierten en reproductoras en el posterior. Éstas producen gametos machos y hembras. En general, incluso los sexos se separan. Hay colonias machos y colonias hembras. Por este ejemplo se ve que la oposición generalmente admitida entre los protozoarios y los metazoarios no está absolutamente justificada.

Clase de las amebas

Las **amebas** (del griego *amoibe*, cambio) *son células sin membrana y sin forma fija. Su protoplasma presenta prolongaciones o seudópodos gruesos y cortos. Su nutrición es una fagocitosis o absorción de presas vivas.*

NOTA. Otras muchas células, sin ser verdaderamente amebas, pueden parecérseles. Se las llama células *ameboides*. Éstas son ciertos flagelados y ciertos esporozoarios en determinada fase de su existencia, así como también los glóbulos blancos de la sangre.

Estructura de las amebas. — Resulta bastante fácil conseguir amebas. Las aguas estancadas encierran gran número de ellas. También se pueden cultivar como bacterias. Una de las más grandes y más hermosas especies de nuestras aguas dulces alcanza 300 micras.

Una ameba se compone de una *masa protoplasmática* que rodea un *nucleo*, pero que está *desprovista de membrana*. Sólo la capa superficial o *ectoplasma* es más consistente que la parte profunda o *endoplasma*. Su *tensión superficial* —propiedad física— impide al protoplasma disolverse en el medio ambiente, pero no es suficiente, sin embargo, para impedir que se deforme. En la superficie de la ameba nacen sin cesar prolongaciones o *seudópodos* gruesos y cortos, que sirven de órganos de locomoción.

Movimiento y sensibilidad. — Los *movimientos ameboides* se estudian con una claridad particular en la *Amoeba limax*. La célula extiende un seudópodo que se fija en su extremidad y sirve después de centro de atracción al conjunto de la masa protoplasmática. Recuperada su esfericidad, vuelve a extender un nuevo seudópodo y así sucesivamente. Se asemeja al desplazamiento de una babosa. Su velocidad media es de un milímetro por hora.

Los movimientos de la ameba parecen espontáneos, pero en realidad son provocados y dirigidos por el medio exterior. Son *tactismos*. La ameba es muy sensible al oxígeno, que la atrae como el imán atrae el hierro. Reacciona también, mediante movimientos apropiados, a las variaciones de temperatura y de luz. Puede hablarse, respecto a ella, de *quimiotactismo*, de *termotactismo* y de *fototactismo*.

Nutrición de las amebas. — Las amebas viven en el mar, en el agua dulce, en la tierra húmeda e incluso en el intestino de diversos animales. Ciertas especies, parásitas del hombre, son el agente de la disentería amebiana, enfermedad propia de los países cálidos.

En todos esos medios, las amebas se nutren de presas vivas (bacterias, algas, infusorios), que ingieren, digieren, absorben y asimilan.

La *ingestión* se hace del modo siguiente: cuando la ameba alcanza su presa, la rodea de seudópodos, que finalmente se reúnen: la presa queda entonces en el seno del protoplasma en una gota de agua, que constituye una *vacuola digestiva*.

La *digestión* se verifica en la vacuola, que recibe jugos digestivos segregados por el protoplasma. A continuación, las substancias disueltas son absorbidas y asimiladas. Los residuos son evacuados a la superficie del cuerpo por ruptura de la vacuola digestiva, que no es sino un estómago accidental. Todos estos fenómenos de ingestión y digestión corresponden a los que han sido descritos a propósito de los glóbulos blancos bajo el nombre de *fagocitosis*.

La respiración de la ameba se efectúa por toda la superficie de su cuerpo. Su protoplasma está animado interiormente por corrientes. Una o varias vacuolas pulsátiles tienen como función expulsar productos de excreción vecinos de la urea y del ácido úrico.

La ameba presenta, pues, todas las fases de la nutrición humana: *ingestión, secreción, digestión, absorción, asimilación, respiración, circulación* y *excreción*. Su singularidad consiste en que las ofrece bajo una forma simple.

Reproducción de las amebas. — En general, las amebas se reproducen por divisiones sucesivas. Sucede también que la célula se *enquista*, es decir, se rodea de una capa espesa, y después se divide simultáneamente, al abrigo del *quiste*, en varias partes análogas a esporas.

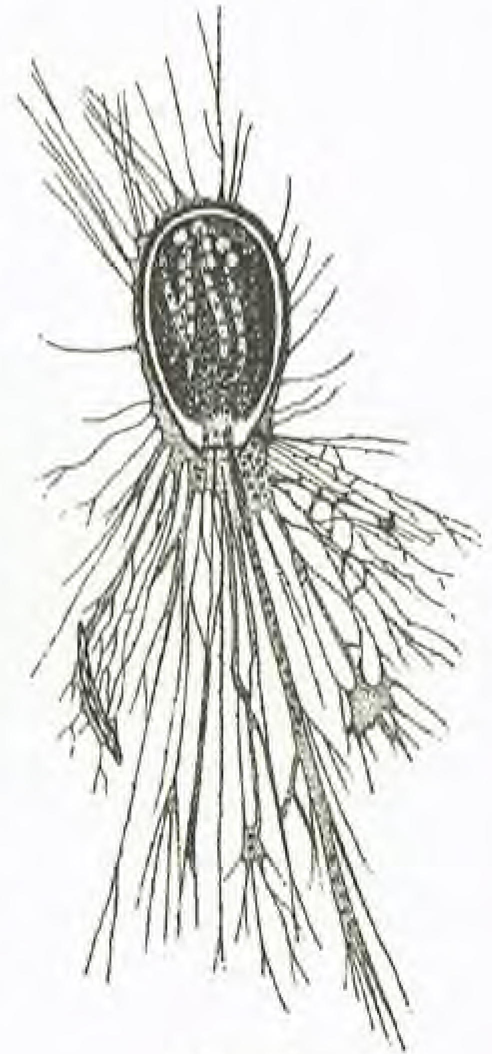
Clase de los foraminíferos

Los **foraminíferos** *se distinguen de las amebas porque tienen un caparazón, generalmente calcáreo, en el interior del cual pueden encogerse. Sus seudópodos son largos, delgados, ramificados y están anastomosados en forma de red.*

Estructura de una gromia. — La *gromia* de agua dulce es el tipo más simple de los foraminíferos.

Su caparazón ovoide, atravesado por un orificio, es de una substancia análoga a la quitina del caparazón de los insectos. En reposo, la gromia está enteramente refugiada en el interior de dicho caparazón. Cuando, por el contrario, siente la necesidad de alimentarse, saca por el orificio gran número de *seudópodos* largos, delgados, ramificados, que pronto se anastomosan en una vasta *red protoplasmática*. Estos caracteres dependen de la débil tensión superficial del protoplasma. Entre los seudópodos de la ameba y los de la gromia existe la misma diferencia que entre las prolongaciones gruesas y cortas de una gota de aceite agitada en el agua y las finas estrías que forma el agua azucarada en el agua pura. La gromia permanece inmóvil y captura, con su red, las presas que le traen las corrientes de agua.

La gromia es un sujeto muy apropiado para experimentar la *merotomía*. Si cuando el protoplasma está bien extendido se corta la red externa del resto del contenido del caparazón, la parte que queda regenera una nueva gromia. Por el contrario, la red protoplasmática separada del núcleo no tarda en morir.


Gromia

Estructura de un polistomélido. — Acabamos de ver que el caparazón quitinoso de una gromia está formado por una sola cavidad con una sola abertura; es, por lo tanto, *unilocular* e *imperforado*. Por el contrario, el caparazón de un polistomélido foraminífero marino es calcáreo, enrollado en forma de espiral y dividido en numerosas cavidades por tabiques transversales. Tiene, además, multitud de poros muy finos, por donde salen los seudópodos. En este caso es un caparazón *plurilocular* y *perforado*. En su centro existe una cavidad inicial, la primera construida, que puede ser grande o pequeña. De ello resultan individuos *macroesféricos* y *microesféricos*. Los macroesféricos tienen varios núcleos y son de pequeño tamaño; los microesféricos no poseen más que un núcleo y son mucho mayores. Esta distinción está en relación con los fenómenos reproductores.

Reproducción de los foraminíferos. — La gromia se reproduce por *división simple*. Una de las células hijas permanece en el caparazón; la otra lo abandona y segrega una nueva.

En las formas pluriloculares, como el polistomélido, la división se hace imposible y es entonces reemplazada por una alternación regular de *esporulación* y *fecundación*. Los individuos microesféricos dividen sus núcleos y sus protoplasmas en gran número de esporas ameboides, que escapan del caparazón y dan individuos macroesféricos. Éstos, en cambio, producen gametos biflagelados. Existe isogamia. Los huevos evolucionan como individuos microesféricos.

Principales foraminíferos. — De la comparación entre gromia y polistomélido resulta una división de la clase de foraminíferos en dos órdenes: el de los *imperforados* y el de los *perforados*.

Entre los **imperforados**, citemos las *gromias*, de caparazón unilocular, y las *miliolas*, de caparazón pluricelular. A los **perforados** pertenecen los *polistomélidos* de arena marina; las *globigerinas*, que forman parte del plancton; las *numulitas* fósiles de los terrenos terciarios; las *fusulinas* fósiles de los terrenos primarios, etc. Varias de estas formas han dado lugar, por acumulación de sus conchas, a barros calcáreos ulteriormente transformados en rocas calizas. Actualmente se encuentran en el fondo del Atlántico y del Pacífico enormes extensiones cubiertas de barro de globigerinas.

Clase de los radiolarios

Los **radiolarios** (del latín *radius*, radio) *son protozoarios planctónicos de los mares calientes. Sus seudópodos largos y delgados se extienden alrededor de la masa protoplasmática. En el interior de ésta se encuentra una cápsula quitinosa. El exterior es un esqueleto silíceo.*

Estructura de los radiolarios. — La célula única de los radiolarios se compone de varias capas concéntricas, que son, del interior al exterior: 1º el *núcleo*; 2º el *endoplasma*, que contiene *gotas de aceite*; 3º la *cápsula quitinosa*, con uno o varios orificios; 4º la primera capa ectoplasmática, horadada por *vacuolas*; 5º la segunda capa ectoplasmática, donde se encuentran pequeñas algas; 6º el *esqueleto silíceo*, con agujeros por donde salen los seudópodos.

Fisiología de los radiolarios. — 1º Gotitas aceitosas y vacuolas aseguran la flotación;

2º El aceite largo tiempo sometido a las radiaciones ultravioleta del sol es un *aceite irradiado* cuyos elementos no saponificables (ergosterol, colesterol) adquieren las propiedades de la *vitamina antirraquítica*.

Absorbiendo enormes cantidades de radiolarios y otros organismos planctónicos acumula el bacalao, a su vez, en su hígado, el aceite irradiado antirraquítico;

3º Las algas o *zooxantelas* (del griego *zoon*, animal, y *xanthos*, amarillo) se presentan bajo forma de células redondeadas, amarillentas, contenidas en el interior del ectoplasma. Gracias a su clorofila, realizan la síntesis de los hidratos de carbono (azúcares) útiles a sus huéspedes; inversamente, éstos les suministran el nitrógeno bajo forma de productos de excreción (sales amoniacales). Se trata, pues, de una simbiosis. Gracias a las zooxantelas, los radiolarios son a la vez heterótrofos y autótrofos;

4º El esqueleto de los radiolarios es de *sílice* (SiO_2). Excepcionalmente, en los de aguas profundas, es de *celestina* o sulfato de estroncio (SO_4Sr). Su complejidad y su belleza hacen de él, en ciertas especies, una verdadera obra de orfebrería digna de inspirar a los artistas decoradores.

Reproducción de los radiolarios. — Se reproducen por *esporulación:* en el interior de la cápsula se forman numerosas zoosporas, que luego escapan a través del ectoplasma y de los huecos del esqueleto. Tal vez, sin embargo, exista también en este caso fecundación.

Clase de los esporozoarios

Todos los **esporozoarios,** *parásitos y agentes de enfermedades temibles, tienen una estructura simplificada, pero un ciclo evolutivo complejo. Su nombre procede de que son transportados pasivamente, de un primero a un segundo huésped, bajo la forma de esporas. En su ciclo evolutivo intervienen siempre, alternativamente, una esporulación y una fecundación.* Se distinguen los hematozoarios, los coccidios y los gregarínidos.

Hematozoarios. — Los *hematozoarios* (del griego *haima,* sangre, y *zoon,* animal) son parásitos de la sangre de los vertebrados. Tienen mucha analogía con las amebas: son las amebas de la sangre. El más conocido es la *hemameba,* que, propagada por un mosquito, es el agente del *paludismo.*

Se sabe que esta enfermedad se manifiesta por accesos de fiebre diarios en los países cálidos *(fiebre perniciosa),* con dos días de reposo o de intervalo entre dos accesos de fiebre en las regiones mediterráneas *(terciana)* y con tres días de reposo en los países templados *(cuartana).* Estos accesos corresponden a determinadas fases de la evolución del parásito.

Papel de los mosquitos. — El *paludismo* (del latín *palus,* pantano) es propio de los lugares pantanosos, donde vive un mosquito especial, el *anofeles,* muy distinto de los demás. La hembra de este mosquito es la que, al picar a un hombre sano después de haber picado a un palúdico, le inocula la hemameba del paludismo.

De esta observación se desprenden varios sistemas de profilaxis:

1° Protección contra las picaduras del anofeles por medio de mosquiteros;

2° Destrucción de los anofeles por insecticidas;

3° Desecación de los pantanos donde los anofeles ponen sus huevos y donde viven sus larvas;

4° Cuando no se puede suprimir una superficie de agua estancada, verter una capa de petróleo que baste para obturar los orificios respiratorios de las larvas de anofeles y producirles la muerte;

5° Absorción por el hombre de una dosis creciente de *quinina,* la cual se opone al desarrollo del hematozoario en su organismo.

Ciclo evolutivo de la hemameba. — Hay que considerar este parásito en sus tres moradas sucesivas:

1° *En la sangre humana.* La hemameba se instala en un glóbulo rojo de manera completamente parecida a una ameba. Alcanzada cierta estatura toma forma redonda. Su núcleo se divide en varios núcleos hijos, que se dirigen a la periferia. Su protoplasma se divide a su vez en otros tantos sectores *(cuerpo en forma de rosetón).* Finalmente, las partes se separan unas de otras y pasan al torrente sanguíneo por estallido del glóbulo rojo. Estas esporas o *merozoítos* van a infectar otros glóbulos. En el momento del estallido (todos los días, cada dos o cada tres) sobreviene un acceso de fiebre, debido a las toxinas arrojadas en el plasma sanguíneo;

2° *En el estómago del mosquito.* — Cuando un anofeles pica a un palúdico, aspira, con la sangre, cierto número de merozoítos. Llegados al estómago, éstos se conducen de dos maneras. Unos crecen pura y simplemente y se convierten en *gametos hembras* u *óvulos.* Otros dividen sus núcleos en varias partes y producen en su superficie otros tantos *gametos machos* o *espermatozoides* filiformes. Se produce una fecundación, y el *huevo* que resulta de ella, que carece de membrana, emigra a la pared del estómago, donde se enquista y produce un abultamiento en la superficie exterior del órgano;

3° *En la cavidad general del mosquito.* — En el *interior del huevo enquistado* se constituyen multitud de esporas o *esporozoítos* alargados y puntiagudos, que, liberados por estallido del quiste, llegan a las glándulas salivares y a la trompa del anofeles. Inoculados a un hombre sano, se instalan en los glóbulos rojos y recuperan la forma ameba. Así queda cerrado el ciclo evolutivo.

Coccidios. — Los *coccidios* (del griego *coccos,* grano, y *cidios,* forma) son esporozoarios redondeados que viven en el interior de las células de los vertebrados y de los moluscos.

El *coccidio del hígado del conejo* está encerrado en las células epiteliales de los canales biliares y de las vellosidades intestinales, cuya tumefacción determina: los *merozoítos,* producidos por simple división, aseguran la contaminación de célula a célula; los *gametos,* liberados en el intestino del conejo producen huevos que se enquistan y son después expulsados con los excrementos. En el interior de esos huevos nacen los *esporozoítos* que, ingeridos por otro conejo, le producen la coccidiosis.

Hay que señalar que, mientras la hemameba debe pasar sucesivamente por dos huéspedes, el coccidio cumple todo su desarrollo en uno solo.

Gregarínidos. — Los *gregarínidos* (del latín *grex,* rebaño), así denominados por su tendencia a la asociación, son esporozoarios alargados, y a veces segmentados, que viven sujetos a células o libres en una cavidad interna de los gusanos y los artrópodos.

Ciertos insectos *(blaps)* tienen, suspendidos en sus paredes intestinales, gregarínidos *(estilorrínquidos)* cuyo cuerpo se compone de un segmento anterior delgado, terminado en rostro, y de un segmento posterior hinchado, en el que se encuentra el núcleo de la célula. El rostro sirve para la fijación.

En el momento de la reproducción, dos individuos se desprenden, se aproximan y forman una pareja en el interior de un *quiste común.* Cada uno de ellos produce entonces en su superficie, por una especie de brote, *gametos machos* uno, y *gametos hembras* el otro, que quedan libres en el interior del quiste y se fecundan de dos en dos. Cada *huevo* produce en su interior ocho *esporozoítos,* destinados, después de su paso por el medio exterior, a contaminar nuevos huéspedes.

Comparemos este ciclo evolutivo con el de los otros esporozoarios:

1° No necesita más que un solo huésped;

2° No lleva consigo merozoítos;

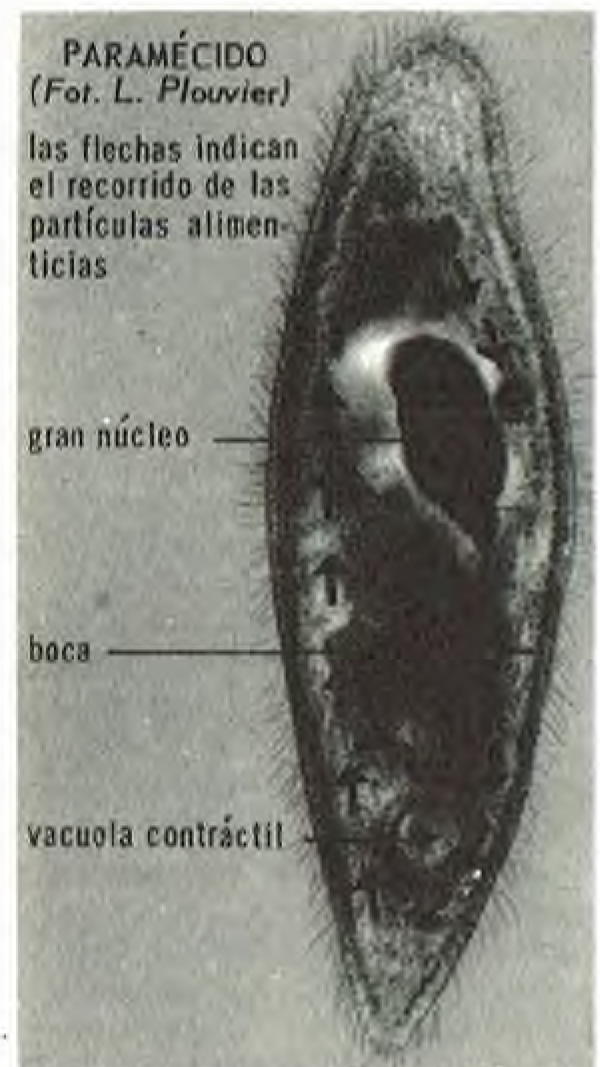
3° El enquistamiento se efectúa *antes de la fecundación,* en vez de producirse en el huevo fecundado.

Clase de los ciliados

Los **ciliados** son más conocidos bajo el nombre vulgar de *infusorios,* que deben a su rápida multiplicación en las infusiones que son las aguas estancadas. Si abandonamos, por ejemplo, flores en un recipiente durante varios días, el agua desprende un mal olor debido a la descomposición de las materias vegetales (fermentación butírica). Observando con el microscopio una gota de ese agua, se ven, además de las bacterias, multitud de infusorios ciliados que se nutren de ella.

La célula única de los ciliados está rodeada de una membrana flexible erizada de cilios vibrátiles, a los cuales deben su nombre. Los ciliados viven generalmente libres. Algunas especies, que viven en el intestino del hombre, provocan una disenteria bastante grave.

Descripción de un paramécido. — Este gran infusorio alcanza una longitud de dos décimas de milímetro, y puede vérsele a simple vista. Su forma recuerda la de un dirigible. Está rodeado de una *membrana* flexible, cubierta de filas longitudinales, ligeramente helicoidales, de cilios *vibrátiles.* Bajo la membrana existen *fibrillas musculares,* de suerte que el animal puede nadar y cambiar de dirección, encorvarse en uno u otro sentido, contraerse, etc.



PARAMÉCIDO (Fot. L. Plouvier)

En la faz ventral se abre un *surco* orlado de cilios vibrátiles más largos que los demás. Una corriente de agua cargada de materias nutritivas es así empujada hacia una especie de *faringe* en el fondo de la cual se abre una *boca celular.* En ella se forman *vacuolas digestivas* análogas a las de las amebas. Un paramécido vivo, coloreado de rojo neutro, muestra varias decenas de vacuolas que, arrastradas por la corriente protoplasmática, se desplazan lentamente en su interior. De esta forma, la digestión se realiza lentamente. Los restos son luego arrojados por un *ano celular.*

Cerca de cada una de las extremidades del paramécido se encuentra una *vacuola pulsátil* rodeada de finos canales radiales, que dirigen hacia ella ciertos productos de excreción (urea, ácido úrico, CO_2). La vacuola se dilata y se contrae alternativamente, y tanto más de prisa cuanto mayor es el calor. A cada contracción, los *excretos* son expulsados.

Señalemos, además, que el paramécido, como todos los infusorios, posee un *gran núcleo* asimilador y un *pequeño núcleo* encargado especialmente de las funciones reproductoras.

En suma, el paramécido es una célula compleja cuyas diversas partes están diferenciadas y especializadas. Todos estos caracteres le hacen evidentemente superior a la ameba.

Multiplicación de los ciliados. — Los ciliados se multiplican por *división* longitudinal o transversal. Cada una de las células hijas salidas de una célula madre completa su organismo con la adquisición de los órganos que le faltan.

En las condiciones más favorables se producen cinco divisiones diarias. Si todas las células hijas vivieran, habría mil a las cuarenta y ocho horas, un millón al cabo de cuatro días, más de mil millones al terminar la semana, y así sucesivamente. En un mes, su masa equivaldría a la de la Tierra. Naturalmente, las más mueren, ya de *muerte accidental* (de hambre, de enfermedad, etc.), ya de *muerte natural.*

Conjugación de los ciliados. — Esa *muerte natural* o muerte por vejez fue descubierta por **Maupas** (1842-1916). Se comprueba que los infusorios, conservados en un caldo de cultivo no renovado, se dividen primero normalmente durante un mes y medio. Después, a partir de la ducentésima división, aparecen signos de vejez: células más pequeñas, arrugadas, encogidas, que pierden sus cilios vibrátiles. Estos caracteres se acentúan y, finalmente, se produce la muerte al cabo de la tricentésima división.

Sin embargo, la vejez y la muerte natural pueden ser evitadas. Basta para ello renovar frecuentemente el caldo de cultivo. Se utilizan, por ejemplo, cristales de reloj que contengan algunas gotas de una infusión de heno esterilizado. En el primer cristal se coloca un paramécido. Al día siguiente, se cuentan sus descendientes, y se conserva uno solo, que se transporta al segundo cristal, y así sucesivamente. Cada día se repite la operación. El método es fastidioso, pero seguro. Se han podido obtener de 4 000 a 5 000 generaciones sin envejecimiento alguno. Es indudable que se habrían obtenido más prolongando las experiencias.

La muerte natural puede también evitarse de otra manera. Basta poner en presencia dos infusorios envejecidos, procedentes de cultivos diferentes. Inmediatamente se conjugan y se rejuvenecen así.

La *conjugación* comprende las fases siguientes:

1° *Reducción nuclear.* Después de la unión de dos individuos y la desaparición de la membrana que los separa, su núcleo mayor respectivo se reduce y los dos pequeños se dividen cada uno en dos y después en cuatro. De las cuatro partes, tres desaparecen y una subsiste;

2° *Cambio nuclear.* La parte que queda se divide en dos, ligeramente diferentes de tamaño. La más grande permanece fija; la más pequeña cambia de célula y va a unirse al núcleo fijo de la otra;

3° *Activación nuclear.* Inmediatamente después de esta fusión se verifican en cada célula tres cariocinesis consecutivas. Cada infusorio adquiere así ocho núcleos, de los cuales cuatro no crecen, mientras que los otros cuatro aumentan. Al final, los infusorios se separan y dan cada uno cuatro infusorios hijos.

La interpretación de estos fenómenos nucleares es bastante difícil. Puede suponerse, por ejemplo, que la eliminación del gran núcleo y de tres cuartos del pequeño tiene por efecto expulsar las toxinas causantes de la vejez. En el cambio de núcleos, puede tratarse de una neutralización de substancias tóxicas.

Conjugación y fecundación. — La conjugación es una falsa fecundación, una fecundación fallida, puesto que las dos células no se unen sino temporalmente y no llegan a la fusión completa. No obstante, hay paso de un fenómeno a otro.

Entre las vorticelas, por ejemplo, pequeños individuos se desprenden de su pedúnculo y van a unirse enteramente a grandes individuos que han quedado fijos. El pequeño infusorio móvil es un gameto *macho;* el gran infusorio inmóvil es un *gameto hembra.*

De este modo, los infusorios ciliados conducen a una forma de reproducción que será la general de todos los metazoarios.

Tipo de los celentéreos

Clase de los hidrozoarios: Hidras de agua dulce. Diferenciación celular. Multiplicación vegetativa: Gemación. Desqueje. Injerto. Reproducción sexual: Glándulas genitales. Gametos machos. Gametos hembras. Fecundación. Segmentación. Colonias fijas: Colonias de hidrarios. Colonias de hidrocoralarios. Colonias flotantes. División del trabajo fisiológico. Hidromedusas. — **Clase de los escifozoarios:** Actinias. Hexacoralarios o madréporas. Arrecifes coralinos. Fauna de los arrecifes. Octocoralarios. Medusas acalefos. Desarrollo de los acalefos

Con los celentéreos comienza el estudio de los *metazoarios* o animales pluricelulares. Su diferencia de los protozoarios es que las células, procedentes unas de otras por división, permanecen asociadas en vez de separarse.

Entre los metazoarios, los celentéreos forman parte de los *fitozoarios* o animales plantas, fáciles de reconocer por su simetría radiada. Sus partes están dispuestas alrededor de un eje como los radios de una rueda alrededor del cubo. Se les puede superponer por rotación.

En fin, entre los fitozoarios, *los celentéreos se caracterizan por su extrema simplicidad orgánica. Su cuerpo está reducido a un saco digestivo con boca y corona de tentáculos peribucales. Su cavidad única, como indica su nombre* (del griego *koilos*, cavidad, y *enteron*, intestino), *es la cavidad intestinal. Su pared comprende sólo dos capas de células: una capa externa o ectodermo y otra interna o endodermo, separadas únicamente por una lámina intermedia de substancia gelatinosa.*

Los celentéreos comprenden formas fijas o *pólipos* (del griego *polys*, varios, y *pous*, pie, tentáculo) y formas libres o *medusas*. Unas y otras pueden ser solitarias o coloniales. Sin embargo, la clasificación de los celentéreos no debe apoyarse en esa distinción.

El tipo está dividido en dos clases: *hidrozoarios* y *escifozoarios*.

Clase de los hidrozoarios

En los **hidrozoarios** (de *hydra* y el griego *zoon*, animal), *la cavidad digestiva no está dividida en celdillas por tabiques radiales. Las medusas son pequeñas y están provistas de un velo.*

Estudiaremos sucesivamente las formas fijas *(hidras, hidrarios, hidrocoralarios)* y las formas flotantes *(hidromedusas, sifonóforos)*.

Hidras de agua dulce. — Las *hidras de agua dulce*, así llamadas en recuerdo de la hidra de Lerna de los antiguos, son en realidad unos animales pequeñísimos y absolutamente inofensivos para el hombre. Su longitud no excede de dos centímetros. Se las encuentra fijas en las plantas acuáticas y en las piedras de los estanques. Su forma es la de un saco cilíndrico, con un solo orificio en su extremidad superior. Un poco más abajo del orificio están insertos varios *tentáculos* extensibles, gracias a los cuales el animal puede apoderarse de pequeñas presas, paralizarlas y llevarlas a su boca. La digestion se verifica en el interior del saco.

Hay que distinguir la *hidra parda*, la *hidra gris* y la *hidra verde*. Ésta posee algas verdes o zooclorelas con las cuales vive en simbiosis. Esta asociación recuerda mucho la que ha sido descrita respecto a los radiolarios.

Las hidras pueden desplazarse por deslizamiento sobre su soporte, por volteretas sucesivas o a la manera de las orugas geómetras.

Diferenciación celular. — El saco digestivo de que se compone la hidra, así como sus tentáculos, que son huecos, están formados por dos capas de células: el *ectodermo* en el exterior y el *endodermo* en el interior, separados por una delgada capa gelatinosa llamada *mesoglea*. Ahora bien, hay diferenciación (polimorfismo) entre las células de esas diversas partes.

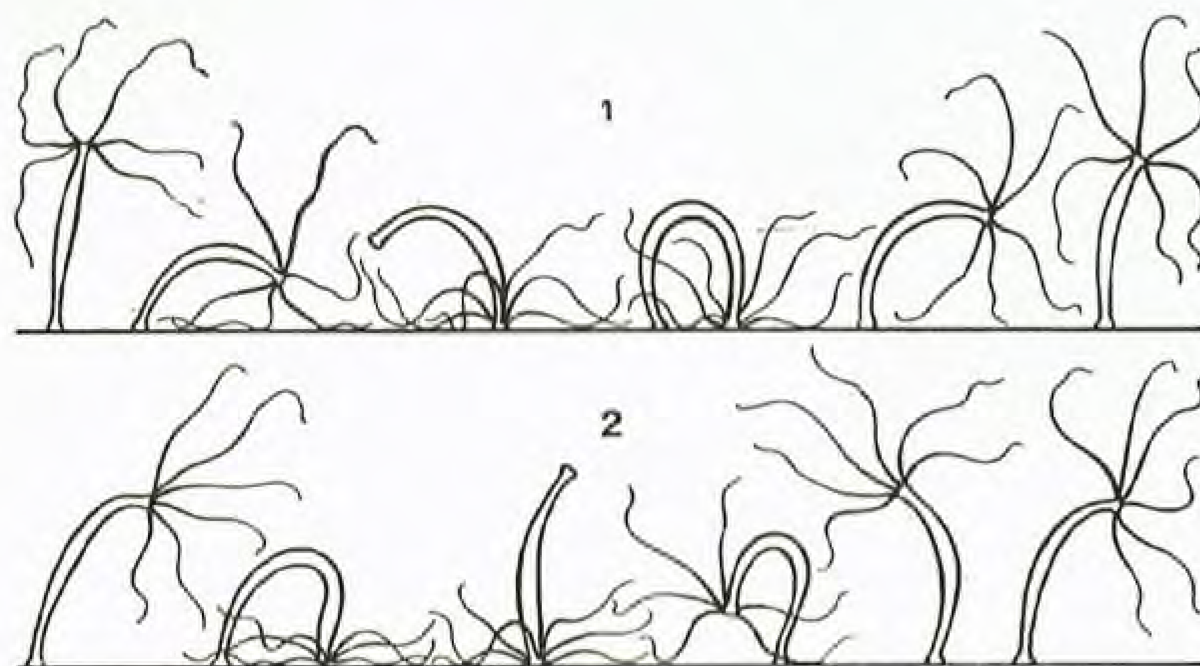
El *ectodermo* comprende ocho clases de células:

1° *Células comunes*, cilíndricas, que no tienen ninguna función particular;

2° *Células glandulares;*

3° *Células urticantes*, características de los celentéreos. Comprenden, además del núcleo y el protoplasma, una especie de cápsula *(nematocisto)* llena de un líquido urticante y que contiene un largo filamento enrollado en forma de espiral. Exteriormente, la célula tiene un cilio sensible que, tocado o simplemente rozado, determina la proyección del filamento, el cual es capaz de paralizar completamente una presa;

4° *Células mioepiteliales*, cilíndricas, que afloran a la superficie del cuerpo, pero prolongadas del lado interno por una fibra muscular;



Movimiento de la hidra: 1. Sin inversión; 2. Con inversión

5° *Células musculares*, reducidas a la parte fibrosa y que no llegan a la superficie;

6° *Células neuroepiteliales*, cilíndricas, que afloran a la superficie del cuerpo, donde se prolongan por un cilio sensible y, del lado interno, por una fibra nerviosa;

7° *Células nerviosas*, parecidas a las neuronas de los animales superiores;

8° *Células intersticiales*, ameboides, que pueden dirigirse a diversos puntos del cuerpo y dar nacimiento a células reproductoras.

El *endodermo* presenta menor diferenciación. La mayor parte de sus células son glandulares y segregan jugos digestivos. Algunas poseen seudópodos o un flagelo. En su interior se forman vacuolas digestivas, como en el caso de los protozoarios.

Multiplicación vegetativa. — Las hidras se propagan por gemación. Se puede también, experimentalmente, desquejarlas o injertarlas como plantas.

Gemación. — Sobre la pared de una hidra aparece un pequeño saliente que se alarga y se abre en el vértice. Luego, alrededor de la boca así constituida, se forma una corona de tentáculos. La hidra hija puede desprenderse de su madre o permanecer unida a ella y engendrar a su vez hidras "nietas". Pueden observarse *colonias de hidras* que comprenden así una veintena de individuos. Todos ellos comunican entre sí por su cavidad digestiva.

La gemación es particularmente intensa durante los meses cálidos. Se calcula que una sola hidra puede producir 200 brotes en el curso del año.

Desqueje. — Los primeros experimentos de este orden fueron hechos por **Trembley,** hacia 1740, y relatados en sus *Memorias para ser-*

ye a la historia de un género de pólipos de agua dulce de brazos en forma de cuernos. Trembley cortó una hidra en cincuenta pedazos y cada uno de ellos regeneró una nueva hidra. Se ha descubierto después que la boca y los tentáculos se forman del lado que estaba vuelto hacia la "cabeza", y el pie del lado que estaba vuelto hacia el pie de la antigua hidra. Así se manifiesta la *polaridad* de la hidra. Su poder de *regeneración* es considerable: una hidra decapitada no tarda en reconstituirse. Suele ocurrir también que una hidra, bajo la influencia del frío o el ayuno, se reduzca a una pequeña masa celular que regenera ulteriormente los diversos órganos.

Injerto. — Es fácil injertar hidras o fragmentos de estos animales en otras hidras.

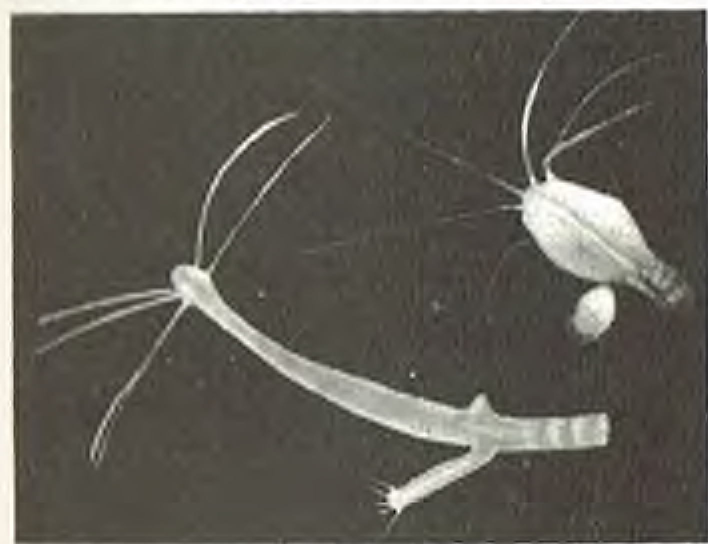
Reproducción sexual. — La hidra es el más simple animal en el cual existe, con caracteres netos, semejante modo de reproducción.

Glándulas genitales. — Con los primeros fríos aparecen glándulas genitales o *gónadas* (del griego *gonos*, reproducción). Unas, situadas hacia la parte superior de la hidra, son gónadas machos o *testículos*; otras, situadas hacia la parte baja, son gónadas hembras u *ovarios*. Todas son una especie de abscesos producidos por la reunión y la multiplicación, entre el endodermo y el ectodermo, de células viajeras desprendidas de éste.

Gametos machos. — Llamamos *espermatocitos* a las células testiculares. Éstas son células de número normal ($2n$) de cromosomas. Su núcleo es diploide. Ahora bien, esas células sufren una doble cariocinesis que transforma cada una de ellas en cuatro células iguales *(espermátidas)* que no tienen más que n cromosomas. Las espermátidas son, en suma, semicélulas o células de núcleo haploide. Su formación por grupos de cuatro recuerda la de las esporas de los helechos, los granos de polen de las flores, etc. Sólo les falta adquirir un flagelo locomotor para convertirse en gametos machos o *espermatozoides*.

Gametos hembras. — Las células ováricas u *oocitos* son también células de $2n$ cromosomas. La doble cariocinesis que sufren las transforma en cuatro células diferentes: tres pequeñas o *glóbulos polares* y una grande u *óvulo*, cada una de las cuales no posee más que n cromosomas. Sólo el óvulo subsiste y constituye el gameto hembra.

Fecundación. — Las gametos (del griego *gamos*, matrimonio) son consortes o, más exactamente, futuros cónyuges. Puestos en libertad por ruptura de la pared testicular, los espermatozoides se dirigen nadando hacia el óvulo, que los atrae químicamente. Uno de ellos penetra en el óvulo y lo fecunda. La unión se efectúa protoplasma con protoplasma y núcleo con núcleo. Los dos núcleos haploides (de n cromosomas) reproducen un núcleo diploide (de $2n$ cromosomas). El óvulo fecundado se convierte en un *huevo* que se rodea inmediatamente con un cascarón espeso.



Hidra contraída *(a la derecha)* y en extensión toral *(a la izquierda)* [*Fot. H. Mugard*]

Segmentación. — El huevo se divide primero en dos, después en cuatro, ocho, 16, 32, etc., células. El número se dobla a cada cariocinesis. El conjunto constituye una *mórula* esférica, la cual puede compararse con una mora.

Más tarde se produce una cavidad en la masa, y todas las células se disponen en capas periféricas. La mórula se convierte en *blástula*.

Células desprendidas de la pared penetran entonces en el interior de la cavidad y se multiplican. La blástula se transforma en *plánula*. Ésta es una masa de células redondeadas y no flageladas (células endodérmicas) que rodea una capa de células cilíndricas y provistas cada una de un flagelo (células ectodérmicas). El progreso realizado a partir de la mórula reside precisamente en este esbozo de diferenciación celular.

En ese momento se produce el *nacimiento*. La plánula sale del cascarón del huevo, que se había agrandado, y es ya libre y móvil. Pronto, por otra parte, se fija y se estira en forma de cilindro. En el centro aparece una cavidad digestiva que se abre al exterior y se agranda por retracción de las células endodérmicas. Alrededor de la boca aparecen tentáculos, y la hidra adquiere poco a poco sus caracteres definitivos.

Colonias fijas. — En las hidras de agua dulce, en general, las yemas no tardan en desprenderse. Las colonias son accidentales. Por el contrario, los hidrozoarios marinos viven siempre en colonias. Éstas pueden ser fijas o flotantes. Las colonias fijas hay que estudiarlas entre los hidrarios y los hidrocoralarios.

Colonias de hidrarios. — Éstas son a manera de césped cuando los pólipos están dispuestos uno al lado de otro y unidos por estolones rastreros. Son *arborescentes* cuando los pólipos se encuentran sobre ramas erectas y ramificadas. La pared externa de la colonia segrega una *capa córnea* que puede incluso formar, alrededor de cada pólipo, una *campánula* o *teca* (del griego *theca*, celdilla) en la cual éste se refugia a la menor alarma. Tales son las *campanularias*, las *plumularias*, etc.

En una colonia, los individuos son en general diferentes unos de otros. Hay que distinguir:

1º *Individuos nutricios*, con boca y tentáculos;

2º *Individuos defensores*, en forma de largos dedos muy móviles, desprovistos de boca y tentáculos, pero armados de baterías de células urticantes;

3º *Individuos defensores*, en forma de espinas, al abrigo de las cuales se retiran los otros en caso de peligro;

4º *Individuos reproductores*, hinchados en la extremidad, encargados de producir los ovarios y los testículos. A veces estos individuos toman la forma de una campana y se desprenden de la colonia para transportar más lejos la simiente. En este caso son *medusas*.

Colonias de hidrocoralarios. — Estas colonias están sostenidas por un *polipero* calcáreo, donde cada individuo tiene cavada su celdilla. Un pólipo nutricio está siempre rodeado de un cerco de pólipos defensores. Las medusas son muy imperfectas y mueren a poca distancia de la colonia de que se han desprendido.

Colonias flotantes. — Estas colonias caracterizan el grupo de los *sifonóforos*. Se componen esencialmente de un *flotador*, especie de vesícula llena de aire, que sostiene una cantidad más o menos grande de pólipos. Éstos pueden estar insertos directamente bajo el flotador, que en este caso es ancho y abocinado como en las *fisalias*, las *porpitas* y las *velellas*. Otras veces están dispuestos a ambos lados de una ramita larga o *estolón* que cuelga por debajo del flotador.

El *polimorfismo* es más acentuado en estas colonias flotantes que en las fijas. Hay individuos *nutricios*; *pescadores*, con numerosas células urticantes; *protectores*, en forma de hoja o de escudo; *locomotores* o *campanas natatorias*, que, con sus impulsiones, determinan los movimientos del conjunto de la colonia, y, por último, individuos *reproductores*, con ovarios y testículos.



Esquema de sifonóforo

En razón de la fuerza de sus células urticantes —tantas veces comprobada por los bañistas que rozan fisalias, porpitas o velellas— estos animales han recibido los nombres vulgares de *fragatas* y *navíos de guerra*. La analogía con los navíos es acrecentada, en las velellas, por la posesión de una vela azulada cuya inserción sigue una diagonal del flotador.

División del trabajo fisiológico. — La célula más simple, la *ameba*, cumple por sí sola todas las funciones necesarias a su existencia.

A partir de los *infusorios* aparecen en la célula partes diferentes unas de otras que cumplen también funciones diferentes: cilios vibrátiles, fibrillas musculares, surco ventral, faringe, boca, vacuolas digestivas, ano, vacuolas pulsátiles, doble núcleo, etc. A partir de las *hidras*, las células se diferencian unas de otras. Hay células protectoras, glandulares, musculares, nerviosas, etc. Por último, a partir de las colonias de *hidrarios*, de *hidrocoralarios* y de *sifonóforos*, la diferenciación aparece entre individuos o pólipos nacidos unos de otros por gemación. En cada etapa, la *diferenciación de las partes tiene como consecuencia la división del trabajo fisiológico*: vasto principio que encontraremos aplicado incluso al hombre, y que fue estudiado por primera vez por **H. Milne-Edwards** (1860).

La división del trabajo en los organismos es comparable con la que vemos en las fábricas modernas, donde numerosos obreros especialistas colaboran en el mismo trabajo.

Esta división tiene ventajas e inconvenientes:

Ventajas, porque el trabajo se hace más de prisa y es mejor.

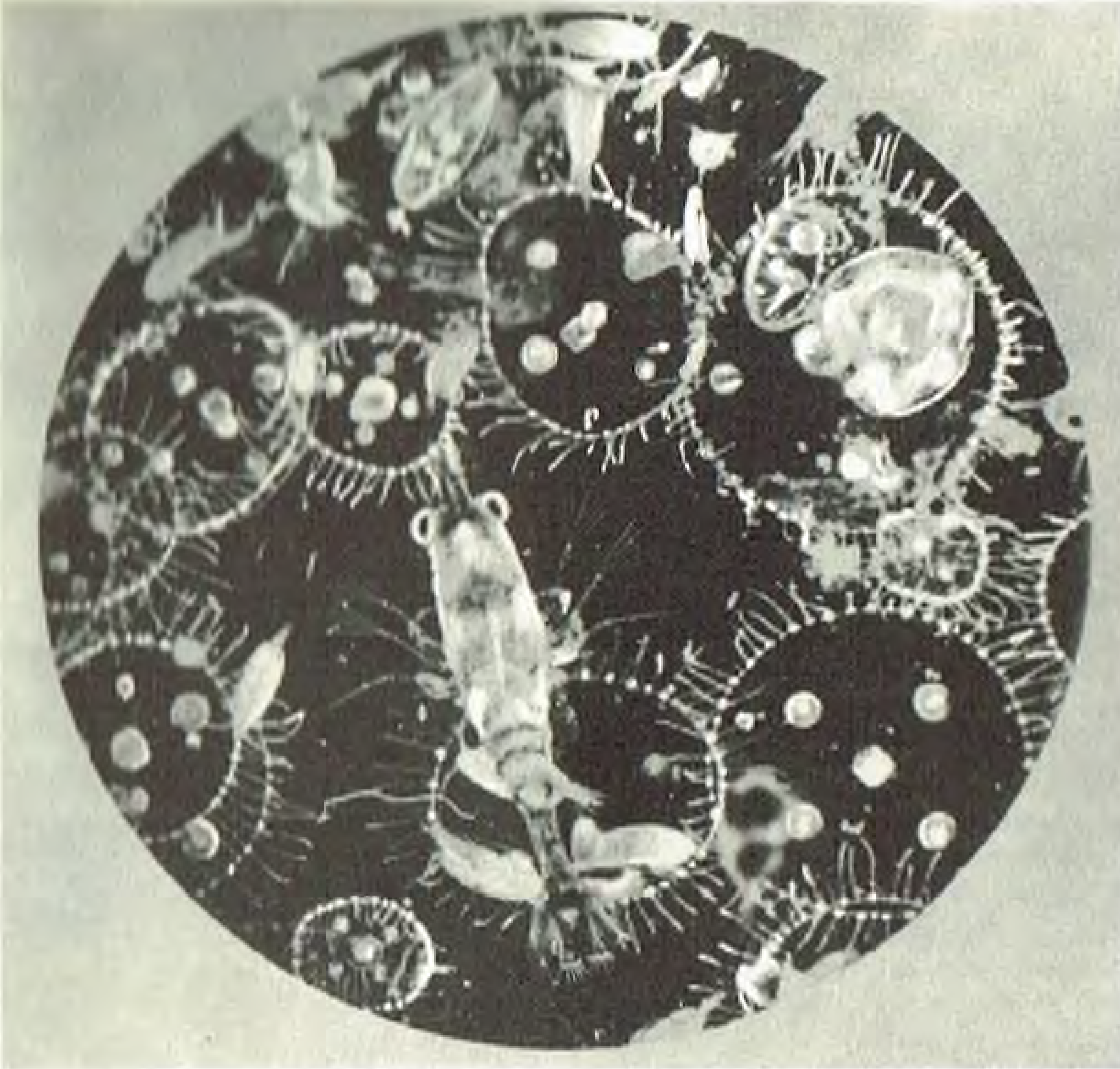
Desventajas, porque las partes dependen unas de otras y no pueden aislarse sin peligro. La muerte de una acarrea la de las demás.

Esta interdependencia, poco acentuada aún en los animales inferiores, aumenta a medida que nos elevamos en la escala zoológica.

Hidromedusas. — Hemos visto que las colonias de hidrarios dejan escapar individuos reproductores en forma de medusas. Hay en este caso *alternancia de generaciones:* hidrarios → medusas → hidrarios → medusas, etc. Otras medusas se reproducen directamente sin pasar por el estadio hidrario.

Una hidromedusa es siempre de pequeño tamaño y excede raramente 10 centímetros de diámetro. Se compara su forma con la de un hongo, la de una sombrilla o la de una campana. La parte inferior es una cavidad más o menos profunda, la *subumbrela*, del centro de la cual pende una especie de cilindro hueco, el *manubrio*, correspondiente al mango de la sombrilla. En el extremo del manubrio se encuentra la *boca*. Del borde de la umbrela salen los *tentáculos*, en número de cuatro o de un múltiplo de cuatro. La cavidad de la subumbrela está cerrada en parte por un diafragma circular, el *velo*, que puede *elevarse* o descender cuando la medusa se contrae. Así, el agua es alternativamente aspirada y expulsada, lo que determina los movimientos de la medusa. Estas pulsaciones son comparadas a veces con las del corazón.

Una medusa, como un pólipo, se compone únicamente de un *ectodermo* y un *endodermo*, pero separados por una espesa capa gelatinosa, la *mesoglea*, que contiene alrededor de un 95 por 100 de agua. En el interior de esta masa se encuentran el *esófago* y el *estómago*, de donde parten los *canales radiales*, unidos entre sí, en el borde de la umbrela, por un *canal circular*. La medusa se nutre de pequeñas presas que pesca a su alrededor.



Plancton compuesto principalmente de medusas *Obelia* (Jellyfish), un pequeño crustáceo (v. p. 385) y varios copépodos (v. p. 384) [*Microfot. Douglas P. Wilson*]

El *sistema nervioso* está particularmente desarrollado en el borde de la umbrela, donde se encuentran también ojos rudimentarios *(ocelos)* y órganos equilibradores *(estatocistos).*

Clase de los escifozoarios

En los **escifozoarios** (del griego *skyphos*, copa, y *zoon*, animal), *la cavidad digestiva está dividida en celdillas por tabiques radiales. Las medusas son grandes y están desprovistas de velo.* Estudiaremos sucesivamente las formas fijas *(actinias, hexacoralarios, octocoralarios)* y las formas flotantes *(medusas acalefos).*

Actinias. — Las *actinias* (del griego *aktis*, radio) son pólipos solitarios y de tamaño bastante grande (varios centímetros) que viven fijos en las rocas o las algas del litoral. Sus bellos coloridos y sus tentáculos semejantes a los pétalos de una flor justifican que se las llame vulgarmente *anemones de mar.* Se componen de una *columna* cilíndrica cuya base *(disco pedio)* está fijada al suelo y cuyo remate *(disco bucal)* está atravesado en el centro por la *boca*. Ésta se halla rodeada de numerosos *tentáculos* y da acceso a una *faringe*, a partir de la cual la cavidad digestiva está dividida en celdillas por tabiques radiales.



Anemone de mar (*Fot. Unger*)

Los *tabiques* son de número variable, pero siempre múltiplo de seis. Hay un mínimo de 12, formando un par anterior, otro posterior y cuatro pares laterales. En este estadio, la simetría es bilateral. Después se añaden 12 tabiques secundarios, 24 terciarios, y así sucesivamente. A la simetría bilateral se superpone entonces una simetría radiada.

Cada tabique es una lámina de mesoglea cubierta por el endodermo. En su espesor se encuentran fibras musculares que permiten la contracción de la actinia. Algunas especies tienen también el poder de esconder sus tentáculos y de cerrar su parte superior, como una bolsa, por medio de un esfínter.

Las actinias son sumamente voraces y pueden captar, ingerir y después digerir presas de tamaño relativamente grande (peces pequeños o crustáceos). Poseen también *algas simbióticas* cuya asimilación clorofílica les suministra un complemento de hidratos de carbono. Algunas actinias buscan un soporte móvil tal como un cangrejo o una concha habitada por un paguro. Se produce así una asociación con beneficios recíprocos, un *comensalismo*, en el cual la actinia representa el papel de defensor por sus células urticantes, y el cangrejo o el paguro el de vehículo.

Las actinias pueden multiplicarse por *división*, aunque es más corriente que se reproduzcan por *huevos*, que nacen en el espesor de los tabiques y quedan libres luego en la cavidad digestiva. Ahí se forman las pequeñas anemones, que son luego expulsadas por la boca de la madre.

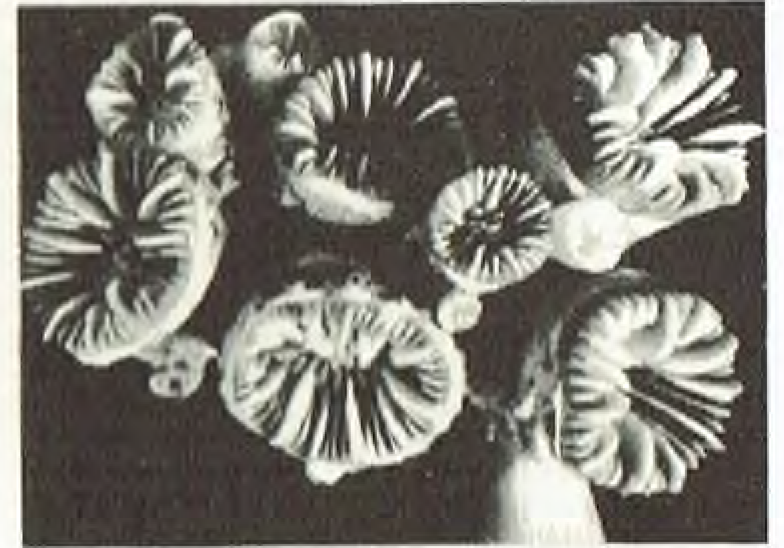
Hexacorolarios o madréporas. — Estos animales difieren de los precedentes por tres caracteres esenciales:

1º Su pequeño tamaño (algunos milímetros);

2º Su facultad de gemación, que hace que un pólipo, recién salido de un huevo, no tarde en engendrar una colonia;

3º Su facultad de calcificación, que tiene por efecto la secreción de un esqueleto o *polípero* que sostiene la colonia.

El hecho esencial que hay que tener en cuenta es que el *polípero es externo.* Se le compara con una mano enguantada. Las relaciones entre el polípero calcáreo y la parte blanda de los pólipos se complican con el crecimiento. Cada pólipo, finalmente, acaba alojado en un *cáliz*, que comprende una base o *sóleo*, una *muralla*, de la que parten *tabiques* radiales, una *columela* o tallo vertical, que se eleva en el eje del pólipo, etc. Si los cálices están apretados entre sí, su forma es poliédrica; si están más o menos separados, su forma es cilíndrica. Pueden también confluir en filas sinuosas que dan a la colonia el aspecto de un cerebro (cerebro de Neptuno, meandrina).



Fragmento de polípero (cálices tabicados)

Existen muchas especies de madréporas cuyas colonias, unidas entre sí en los mares tropicales, constituyen los *arrecifes coralinos.*

Arrecifes coralinos. — Se distinguen tres clases:

1º Los *arrecifes a modo de franja*, dispuestos siguiendo la orilla de una costa;

2º Los *arrecifes a modo de barrera*, situados paralelamente a la costa, pero a cierta distancia. Tal es el caso de una parte de la costa australiana, delante de la cual, a unos 50 ó 100 kilómetros, existe una gran barrera que hace peligrosísimos esos parajes;

3º Los *atolones* o *islas coralinas* anulares. Pueden tener varios kilómetros de diámetro, pero no se elevan a más de tres o cuatro metros sobre el nivel de la bajamar. En su centro existe una laguna de agua tranquila que comunica con el mar por medio de *pasos.*

Para que prospere un arrecife, son necesarias cinco condiciones principales:

a) *La temperatura del agua no debe ser jamás menor de 20º C.* A ello se debe que el dominio de los arrecifes coincida con la zona intertropical;

b) *El agua tiene que ser perfectamente límpida.* Nada es más funesto a los coralarios que las partículas de lodo en suspensión en el agua. Eso explica por qué los arrecifes se interrumpen siempre, en cualquier costa, frente a la desembocadura de un río;

c) *El agua debe estar muy aireada.* El arrecife prospera y crece más del lado de alta mar, donde el viento agita violentamente el agua, que del lado de la costa (o de la laguna si se trata de un atolón);

d) *El agua debe ser luminosa, y la profundidad, por tanto, inferior a 50 metros.* Sabemos que los coralarios viven en simbiosis con algas microscópicas. Ahora bien; éstas necesitan las radiaciones solares para cumplir su función clorofílica;

e) *El fondo debe ser rocoso*, para servir de substrato al arrecife. Aun en esas condiciones favorables, el crecimiento de un arrecife es sumamente lento (algunos milímetros de espesor por año). Por esta razón se les atribuye una edad de varios millares de años, a lo largo de los cuales poco a poco se han elevado hasta la superficie desde profundidades de 30 ó 50 metros.

Fauna de los arrecifes. — Además de los *hexacoralarios*, que constituyen su masa principal, los arrecifes comprenden *hidrocoralarios, octocoralarios, espongiarios, briozoarios* y otros animales fijos. Se encuentran también en ellos hongos y algas incrustantes. Innumerables *estrellas de mar, ofiuros, erizos de mar, holoturias* de colores deslumbrantes ocupan sus fragosidades. Grandes *moluscos*, las tridacnas, entreabren en ellos sus valvas. *Peces* multicolores nadan alrededor. En el interior mismo de la masa calcárea bulle un mundo de gusanos y animales de todas clases. Se da a este conjunto el nombre de *fauna de los arrecifes*, y su estudio es de gran interés.

Octocorolarios. — Semejantes en apariencia a las madréporas, los *octocoralarios* se distinguen de ellas por los caracteres siguientes:

1º No tienen más que *ocho tentáculos;*

2º Estos tentáculos tienen ramificaciones laterales *(tentáculos pinados);*

3º La cavidad digestiva está dividida sólo en *ocho celdillas* por *ocho tabiques* dispuestos en un par anterior, un par posterior y dos pares laterales;

4º El polípero es *interno*, es decir, produce en el interior la mesoglea. Es, según los casos, más o menos consistente: casi nulo en las *pennatulas* y los *Veretillum*, córneo en las *gorgonias*, ligeramente calcificado en los *alciones* y enteramente calcáreo y muy duro en el coral.

Una colonia de corales no es nunca muy extensa. Se presenta bajo el aspecto de una arborescencia de color rojo vivo, con abultamientos discontinuos. Cada hinchazón corresponde a un cáliz, en donde se abre, como

una flor, un pólipo blanquísimo. El polipero mismo es rojo, rosa o blanco, según las variedades a las cuales pertenece; entre éstas, las más bellas son las que se pescan en el Mediterráneo y en el mar Rojo (coral de joyería).

Medusas acalefos. — Se les llama también *escifomedusas*, por oposición a las hidromedusas, de las cuales se distinguen por:

1º Su *gran tamaño*. Tienen por lo menos 10 centímetros de diámetro y alcanzan a veces 2,50 metros;

2º La *carencia de velo* en el orificio de la subumbrela;

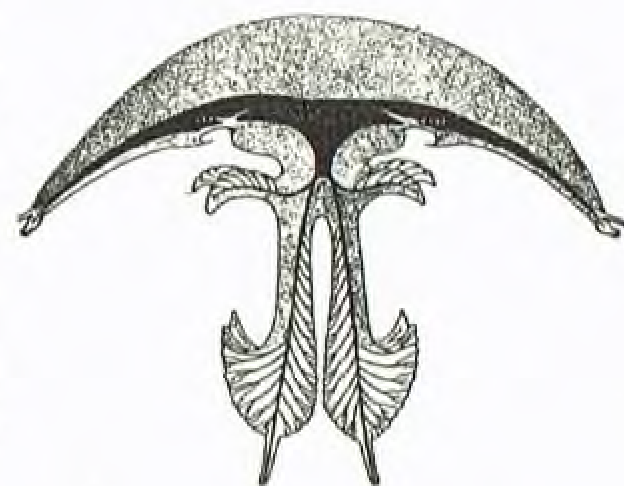
3º Su manubrio, que prolongan *cuatro tentáculos bucales* más o menos ramificados;

4º La carencia frecuente de *tentáculos marginales*, algunos de los cuales son reemplazados por *órganos sensoriales* que comprenden un *ojo* y un *estatocisto;*

5º La *separación por tabiques* y la *división en celdillas* de sus cavidades digestivas.

Los acalefos son las grandes medusas que se ven en verano en grandes bandadas en el mar y que a veces vienen a varar en las playas. Sus cuerpos son completamente gelatinosos. Son carnívoros y se alimentan de peces que pescan por medio de sus tentáculos bucales tras haberlos paralizado con sus células urticantes.

Partiendo del estudio de las actinias, **Richet** y **Portier** descubrieron el fenómeno de la *anafilaxis*. Todas las células urticantes de los celentéreos contienen un veneno que, inyectado por primera vez sin peligro al hombre, le sensibiliza para una segunda inyección que puede resultar mortal. En 1914, en el Yser, más de un soldado murió a causa de las picaduras repetidas de medusas con las que se habían rozado al bañarse. El fenómeno de la anafilaxis se ha extendido después a otros venenos e incluso a substancias alimenticias. En sentido general, es lo contrario de la *inmunidad*.



Rhizostoma

Desarrollo de los acalefos. — El huevo da una *larva ciliada* que se fija rápidamente y se transforma en un pequeño pólipo llamado *escifistoma*. Este pólipo, transparente como la futura medusa y provisto de tentáculos, se nutre abundantemente de pequeñas presas. En cierto momento, se divide por estrobilación. El escifistoma se convierte en *estróbilo*. Por fin, las partes se separan y comienzan a nadar. Éstas son las *efírulas*, que cuando se completen serán medusas.

Los acalefos pasan así por una fase pólipo, en el curso de la cual se efectúa una *multiplicación vegetativa*. Un huevo de medusa engendra finalmente varios individuos.

Hay que señalar que ciertas medusas *(lucernarias)* no pasan jamás del estadio de escifistoma y permanecen sujetas toda su vida por un pedúnculo a las hierbas marinas.

Tipo de los espongiarios

Clase de las esponjas calcáreas: La esponja más simple. Complicación progresiva de las esponjas. — **Clase de las esponjas corneosilíceas:** Complejidad de las esponjas corneosilíceas. Principales esponjas corneosilíceas. Multiplicación vegetativa: Gemación. Gemulación. Desqueje. Reproducción sexual

Los **espongiarios** *o* **esponjas** *son animales generalmente marinos y están siempre sujetos a un soporte. Son asimétricos y sólo se les comprende en el grupo de los fitozoarios en razón de sus afinidades con los celentéreos. Como éstos, se reducen a un saco digestivo, pero con numerosos orificios. No tienen cavidad general. Su pared comprende un ectodermo y un endodermo, a los que se añade un rudimento de mesodermo. Entre sus células se encuentran siempre coanocitos o células flageladas con gorguera.*

Según la naturaleza de su esqueleto, las esponjas se dividen en *calcáreas* y *corneosilíceas*.

Clase de las esponjas calcáreas

En esta clase de esponjas, el esqueleto está formado por finas agujas o espículas de carbonato de calcio.

La esponja más simple. — La esponja calcárea menos compleja *(Ascón)* tiene la forma de una pequeña urna ovoide, sujeta por su base a un soporte cualquiera. A través de sus paredes se abren innumerables *poros inhalantes*, por donde penetra el agua cargada de oxígeno y de materias nutritivas. En el vértice de la urna está situada la *boca* u *ósculo*, llamada también *poro exhalante*, puesto que sirve para la salida del agua.

El *ectodermo* está formado por *células lisas*, algunas de las cuales, en forma de tubo, se extienden hasta el endodermo y constituyen los poros inhalantes.

El *endodermo* está formado por ciertas células muy características de todas las esponjas. Son los *coanocitos* (del griego *khoanos*, embudo, y *kytos*, célula), así llamados porque llevan en su extremidad libre un largo flagelo rodeado de una gorguera en forma de embudo. Su función es provocar una corriente de agua a través de la esponja y apoderarse de las partículas alimenticias, que ceden después a las células digestivas del mesodermo. Hay que señalar la gran semejanza que existe entre los coanocitos y los coanoflagelados.

El *mesodermo* es, en realidad, una capa gelatinosa, una *mesoglea* análoga a la de los celentéreos, pero que contiene diversas variedades de células:

1º *Células estrelladas;*

2º *Células ameboides digestivas;*

3º *Células ameboides reproductoras;*

4º *Células esqueletógenas*, que producen en su interior las *espículas* calcáreas cuyo conjunto constituye el esqueleto de la esponja. Estas espículas son generalmente simples o de tres ejes.

No hay, en las esponjas calcáreas, ni células musculares, ni células nerviosas, ni células sensoriales.

Complicación progresiva de las esponjas. — En la superficie de la esponja que acaba de ser descrita se forman *yemas* análogas a las de la hidra. Éstas se desprenden, caen, se fijan y crecen como nuevos individuos.

Pero, en ciertas especies en que su producción es muy regular, pueden también permanecer unidas a la madre, de la que cubren toda la superficie. Las células flageladas se localizan entonces en las yemas laterales, que toman el nombre de *cestas vibrátiles*. El conjunto de la esponja madre y de sus yemas constituye una esponja compleja del tipo *Sycon*.

Si la gemación se acentúa al mismo tiempo que el mesodermo, entonces, en lugar de permanecer delgada, adquiere un gran desarrollo y rechaza el ectodermo hasta que las yemas no abultan en la superficie. Tenemos así un tipo nuevo de esponjas calcáreas: el tipo *Leucon*, que es extremamente complejo. En estas esponjas, en efecto, en la pared, que es muy espesa, hay excavadas numerosas *cestas vibrátiles* que comunican con el exterior por *canales inhalantes* ramificados, y con el interior por *canales exhalantes* también ramificados. Las expulsiones ectodérmicas y endodérmicas complican aún más la estructura. Sería imposible comprender la organización de tales esponjas prescindiendo de la *concepción colonial* que hasta aquí nos ha guiado.

Clase de las esponjas corneosilíceas

En esta clase, el esqueleto está formado por espículas silíceas o fibras córneas.

Complejidad de las esponjas corneosilíceas. — Estas esponjas son por lo menos tan complejas como las esponjas calcáreas más complicadas.

La diferenciación celular es también más completa. A las células ya descritas se añaden:

1º *Células glandulares;*

2º *Fibras musculares* lisas, dispuestas en forma de esfínter alrededor de ciertos orificios que cierran con su contracción;

3º *Células nerviosas*.

El esqueleto está formado, ya por finas agujas o *espículas* de SiO_2, ya por *fibras* de una materia orgánica *(espongina)* próxima del cuerno y de la seda.

Principales esponjas corneosilíceas. — Entre las esponjas corneosilíceas se clasifican las siguientes, verdaderamente extraordinarias desde muchos puntos de vista:

1º La *esponjila*, única esponja de agua dulce, que forma sobre las piedras y los maderos sumergidos revestimientos de un amarillo verdoso. Su color se debe a algas simbióticas;

2º La *cliona*, que perfora por arrancamiento las conchas de los moluscos. Se encuentran con frecuencia ostras cuya concha está acribillada de agujeritos circulares debidos a la acción de esta esponja;



Hyalonema o esponja de cristal

3º La *Euplectella* (del griego *eu*, bien, y *plektos*, tejido) y la *Hyalonema* (del griego *hyalos*, vidrio, y *nema*, filamento), que son las *esponjas de cristal* de los mares profundos. Su cuerpo parece como tejido de hilos de cristal;

4º La *esponja de tocador*, cuyo esqueleto córneo es particularmente elástico. Esta esponja se encuentra en todos los mares calientes, hasta una profundidad de unos 200 metros. Las variedades del Mediterráneo y el Adriático son superiores a las demás por la finura y elasticidad de su tejido.

Multiplicación vegetativa. — Las esponjas, más aún que los celentéreos, tienen un gran poder de multiplicación.

Gemación. — Generalmente, las yemas permanecen unidas y contribuyen a acrecentar la masa común. Algunas veces, sin embargo, se desprenden y dan nuevos individuos. La *Tethya*, esponja que se parece a una naranja, trepa por el cuerpo de su madre, hace en él verdaderas acrobacias y cae luego al suelo, donde no tarda en fijarse.

Gemulación. — La esponjila de agua dulce, al aproximarse el invierno, está llena de pequeños granos que quedan en libertad por desagregación de la esponja: son *gémulas* formadas por una masa de células ameboides y una envoltura cuyas células disponen entre sí espacios llenos de aire. Así, las gémulas pueden flotar y ser llevadas a gran distancia por las corrientes. Son, además, muy resistentes, y la llegada de la primavera determina su transformación en nuevas esponjas.

Desqueje. — Un pedazo de esponja regenera un nuevo individuo. Incluso se ha podido disociar enteramente una esponja y hacer pasar sus células a través de un matiz extremadamente fino. Reunidas de nuevo, todas las células o parte de ellas, han reconstituido una esponja.

Reproducción sexual. — Ciertas células ameboides se redondean y se convierten en oocitos o espermatocitos. No describiremos nuevamente su transformación en óvulos y espermatozoides, que sucede como en la hidra. La fecundación y la segmentación se efectúan en el mismo lugar, es decir, en el mesodermo, y las nuevas esponjas salen de su madre en un estadio de desarrollo más o menos avanzado. Dicho de otro modo, las esponjas son *vivíparas*.

En las esponjas calcáreas, el nacimiento se realiza en el estadio de *blástula*, es decir, de esfera hueca. Pero, mientras que en la hidra todas las células de la blástula son iguales, en esta esponja existen células flageladas en un polo y no flageladas en el otro. Además, la blástula no se convierte en una plánula, sino en una *gástrula*. Ésta se produce por invaginación o penetración de un hemisferio en el otro. De esta forma se constituyen un ectodermo y un endodermo, entre los cuales aparece ulteriormente un mesodermo. La evolución continúa pasando por los estadios de *Ascon*, *Sycon* y *Leucon*.

Hay que señalar que generalmente, como veremos, el hemisferio no flagelado es el que penetra en el otro y se hace endodérmico. En las esponjas, ocurre al contrario; puede decirse, pues, que en estos animales el ectodermo está en el interior del cuerpo y el endodermo en el exterior.

Las esponjas corneosilíceas tinen un desarrollo equiparable al de la hidra, al menos al principio. Su nacimiento es, en efecto, más tardío que en las esponjas calcáreas y bajo la forma de *plánula*, es decir, de masa plena, cuyas células externas son flageladas mientras las internas están desprovistas de flagelo. Ahora bien, esta larva, después de fijarse, sufre una transformación que equivale a una inversión de las hojas. Las células externas pierden temporalmente su flagelo y penetran en el cuerpo, donde vuelven a hacerse flageladas (coanocitos). Inversamente, hay células internas que emigran hacia la superficie y constituyen el revestimiento definitivo de la esponja.

Constituye un hecho extraordinario que los espongiarios sean los únicos animales cuyo desarrollo permite tal *inversión de las hojas*.

Tipo de los equinodermos

Clase de los crinoideos: Descripción de un encrino. Caso particular de la comatula. Importancia geológica de los crinoideos. — **Clase de los esteléridos y los ofiúridos:** Descripción de una estrella de mar. Aparatos ambulacral y circulatorio. Caracteres particulares de los ofiúridos. Multiplicación vegetativa. — **Clase de los equinoideos:** Descripción de un erizo de mar. Erizos de mar regulares e irregulares. — **Clase de los holotúridos:** Descripción de una holoturia. Reproducción sexual de los equinodermos. Afinidades de los equinodermos.

Los **equinodermos** (del griego *ekinos, erizo, y derma*, piel) *son animales marinos de simetría radiada, cuya piel, siempre incrustada de placas calcáreas, está a veces erizada de espinas.*

Los **equinodermos** (del griego *ekinos*, erizo, y *derma*, piel) *son anicedentes:*

1º *Por su cavidad general o celoma. Sus órganos están perfectamente diferenciados: un aparato digestivo, un aparato circulatorio, un sistema nervioso, etc.;*

2º *Porque poseen un verdadero mesodermo;*

3º *Por su líquido sanguíneo.*

Por otra parte, se distinguen de todos los demás animales por la posesión de un aparato locomotor hidráulico (aparato ambulacral). Su desarrollo comprende una metamorfosis con cambio de simetría.

Hay que distinguir entre ellos los *crinoideos*, los *estelérídos*, los *ofiúridos*, los *equinoideos* y los *holotúridos*.

Clase de los crinoideos

Los **crinoideos** o **encrinos** (del griego *krinon*, lis), *son vulgarmente llamados* lirios de mar *a causa de su parecido con estas flores. Están sujetos al suelo por un pedúnculo y forman verdaderas praderas submarinas.*

Descripción de un encrino. — El pedúnculo está formado por discos calcáreos apilados y tiene ramificaciones laterales o *cirros*. Su longitud puede alcanzar varios metros. En la base poseen garfios semejantes a raíces. En la parte superior, el cuerpo propiamente dicho se ensancha y forma el *cáliz*, especie de caja troncónica limitada por placas calcáreas que contienen los órganos. La cara superior del cáliz está perforada por la boca y el ano. Alrededor de la boca surgen cinco *brazos* inmediatamente bifurcados, por lo que parecen a primera vista ser diez. Estos brazos tienen insertas, en toda su longitud, pequeñas ramificaciones o *pínulas*. Cada brazo posee un canal, ramificado como él, que termina en la boca.

Caso particular de la comatula. — La *comatula* se encuentra frecuentemente en las rocas, en la bajamar, y llama la atención por su bellísimo color rojo vivo. Nada o repta gracias a los movimientos ondulatorios de sus brazos. Ningún pedúnculo la sujeta al suelo. Es, sin embargo, un crinoideo, como lo demuestra el resto de su organización y el hecho de que su larva es pedunculada.

Importancia geológica de los crinoideos. — Aunque hoy ya no existen más que una decena de géneros de crinoideos, se cuentan varios centenares de ellos en los terrenos secundarios. Hay rocas constituidas exclusivamente por la aglomeración de las materias de sus pedúnculos.

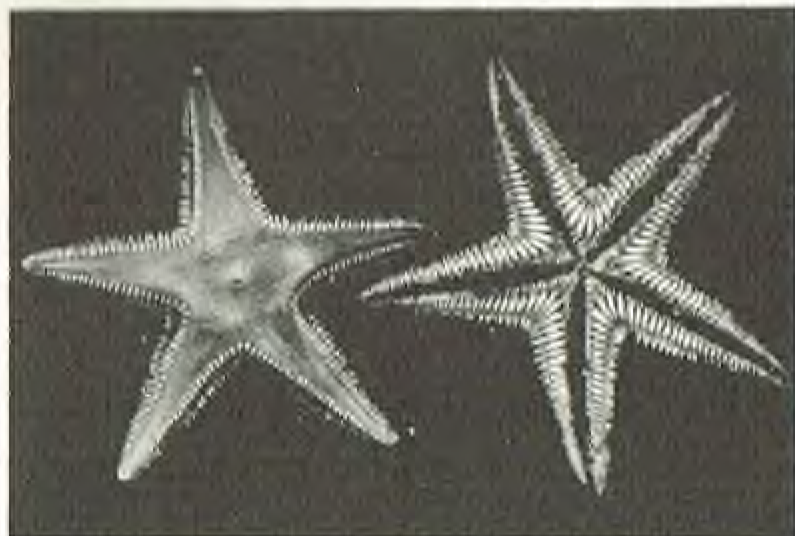
Los crinoideos han sido precedidos, en la Era primaria, por equinodermos más simples: los *blastoideos*, que no tenían brazos, y los *cistoideos*, también privados de brazos, que estaban simplemente sujetos al limo por un corto pedúnculo puntiagudo.

Clase de los esteléridos y los ofiúridos

Los **esteléridos** *o* **estrellas de mar** *y sus cercanos parientes, los* **ofiúridos,** *son libres desde su nacimiento y se componen de cinco brazos que surgen alrededor de un disco central. Se les puede considerar como los equinodermos más típicos.*

Descripción de una estrella de mar. — Los *brazos* son triangulares y parten del *disco* central unos al lado de otros. Supongamos que traspasamos con una aguja una estrella de mar en su centro.

Alrededor del eje así formado podemos hacerla girar como una rueda, lo que tiene por efecto llevar sucesivamente sus cinco brazos al mismo punto. Esto es lo que se expresa diciendo que las estrellas de mar tienen una simetría *radiada* del tipo cinco o pentámero. Los encrinos pueden prestarse a una observación análoga.


Estrella de mar: caras ventral y dorsal

La piel de la estrella es rugosa a causa de las *placas calcáreas* que la forman; a veces está erizada de espinas.

Una cara de la estrella está normalmente posada en el suelo. Es la *cara ventral*. En ella se distinguen la *boca* y cinco *canales* radiales, en los que están insertos unos curiosos órganos, los pies ambulacrales, de los que trataremos más adelante. La *cara dorsal*, vuelta hacia arriba, lleva en su centro el *ano*.

El *tubo digestivo* comprende la boca, el esófago, el estómago, el recto y el ano. Del estómago parten cinco pares de ciegos ramificados que se prolongan por los brazos. Puede suceder que el recto no tenga salida. En este caso, la estrella puede proyectar fuera de su cuerpo el aparato digestivo e introducirlo entre las valvas, previamente abiertas, de una ostra o un mejillón para devorarlos. Las estrellas de mar causan verdaderos estragos en los criaderos de ostras.

Aparatos ambulacral y circulatorio. — El más típico aparato de los equinodermos, y por tanto de las estrellas de mar, es el *aparato ambulacral*, compuesto de un tubo anular alrededor del esófago y de cinco canales radiales que penetran en los brazos. El anillo está en relación, por un *canal hidróforo*, con una placa porosa situada en las proximidades del ano. Así penetra el agua de mar, que llega finalmente a los *pies ambulacrales*, dispuestos en doble fila a derecha e izquierda de los canales radiales. Cada pie es un tubo cilíndrico terminado exteriormente en forma de ventosa e interiormente como una ampolla. Si ésta se contrae, el agua es expulsada hacia el pie, que se alarga al recibirla. Si la ampolla se dilata, el pie, por el contrario, se contrae y se acorta. Como posee millares de pies, la estrella de mar puede progresar en todas direcciones. Le basta alargar algunos de sus pies, fijarlos con sus ventosas y tirar de ellos.


Reconstitución de los brazos de las estrellas de mar

Además del aparato precedente, los equinodermos poseen un *aparato circulatorio* muy primitivo, que es más bien un conjunto de senos y lagunas. Se observa en ellos un *líquido sanguíneo* poco diferente del agua de mar, pero rico en albúmina, que lo hace coagulable, y en glóbulos blancos aptos para la fagocitosis. Sus movimientos están asegurados, a defecto de corazón, por cilios vibrátiles.

El *sistema nervioso* se compone de un collar que envuelve el esófago y de cinco nervios radiales. Las *glándulas genitales*, en número de diez, están dispuestas por pares en el interior del disco y de los brazos.

Caracteres particulares de los ofiúridos. — Los **ofiúridos** difieren de las estrellas de mar sólo por sus brazos, que son delgados, cilíndricos y muy móviles, lo que ha hecho que se les compare con colas de serpientes (del griego *ophis*, serpiente, y *oura*, cola). Las placas calcáreas forman en el interior de cada brazo una especie de columna vertebral.

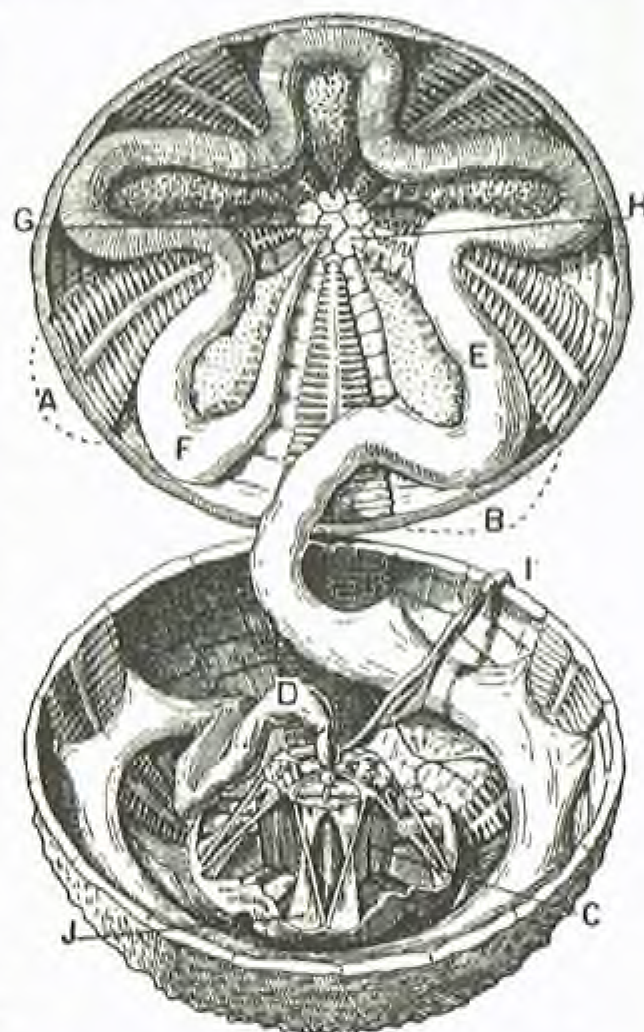
Multiplicación vegetativa. — Además de la reproducción sexuada común a todos los equinodermos, las estrellas y los ofiúridos tienen la propiedad de la *autotomía*. Espontáneamente, se cortan en trozos que comprenden, por lo menos, un brazo y una parte del disco. Cada trozo regenera una nueva estrella. Es corriente encontrar estrellas en vías de *regeneración*. Se las reconoce por la desigualdad de sus brazos: por ejemplo, un brazo grande y cuatro pequeños (forma de cometa). Esta multiplicación vegetativa de las estrellas y de los ofiúridos no deja de tener cierta analogía con la de las plantas por desqueje.

Clase de los equinoideos

Los **equinoideos**, *erizos de mar o castañas de mar, son libres, globulosos, y están protegidos por un caparazón erizado de púas.*

Descripción de un erizo de mar. — El *erizo de mar* está cubierto de largas *púas* articuladas y móviles, que le sirven de zancos. A veces esas púas se hacen enormes y el erizo parece una maza. Entre las púas hay que distinguir los *pies ambulacrales* y las minúsculas pinzas tridáctiles, los *pedicelarios*, con las cuales el erizo realiza su limpieza.

Si quitamos las púas al erizo frotándolo enérgicamente bajo un chorro de agua, aparece su caparazón, formado por pequeñas placas calcáreas dispuestas en forma de mosaico, pero no sin cierta ordenación: esas placas dibujan diez husos alternativamente anchos y estrechos. Los cinco husos estrechos corresponden a los brazos de la estrella de mar. Son los *husos radiales* o *ambulacrales*. Las placas de que se componen, distribuidas en dos filas paralelas, tienen pequeños agujeros para dar paso a los pies ambulacrales. Los cinco husos anchos son llamados *interradiales* o *interambulacrales*. La boca está en el "*polo sur*" o *polo ventral*, y el ano en el "*polo norte*" o *polo dorsal*. Cada uno de estos orificios se encuentra en el centro de una parte blanda.



Erizo de mar abierto: A. Zona ambulacral; B. Zona interambulacral; C. Linterna de Aristóteles; D. Esófago; E. Intestino; F. Recto; G. Ano; H. Placa madrepórica; I. Tubo acuífero; J. Músculos

Alrededor del ano están dispuestas alternativamente cinco grandes *placas genitales* y cinco pequeñas *placas radiales*, de las que parten, respectivamente, los husos interradiales y los husos radiales. Las placas genitales tienen cada una un orificio genital. Una de ellas, la *placa madrepórica*, presenta, además, numerosos poros que, como en la estrella de mar, ponen en relación con el exterior los aparatos ambulacral y circulatorio.

Así, pues, los erizos de mar tienen una *simetría radial* definida. Esta simetría existe igualmente en sus órganos internos. Tienen cinco glándulas genitales, cinco canales ambulacrales, cinco nervios radiales, etc. El aparato masticador o *linterna de Aristóteles* comprende cinco *maxilas* y cinco *dientes*, que pueden separarse o acercarse gracias a poderosos músculos. Sólo el tubo digestivo presenta una disposición asimétrica y describe, en el interior del caparazón, una serie de circunvoluciones.

Los erizos de mar se alimentan de pequeñas presas y de algas, así como de las materias orgánicas contenidas en la arena o el limo.

Erizos de mar regulares e irregulares. — A los *erizos regulares* (tipo precedente), que tienen la boca y el ano diametralmente opuestos y cuyo caparazón es duro, se oponen los *erizos irregulares*, cuyo ano, y a veces la boca, han abandonado su asiento primitivo. En los *clipeastroides* y los *escutélidos*, la boca es todavía central, pero el ano se ha acercado a ella y se encuentra en el borde posterior de la cara ventral. En los *espatánguidos*, la boca está en el borde anterior y el ano en el borde posterior de la misma cara. Así, a la *simetría radial se superpone, por consecuencia, una simetría bilateral*. Los husos ambulacrales parten siempre del "polo norte", pero no llegan ya al "polo sur". Diríanse pétalos de flores aplicados al caparazón. Sus pies ambulacrales se transforman en branquias. Todos estos caracteres están en relación con el género de vida de los erizos irregulares, que viven casi enterrados en la arena y hacen muy pocos movimientos.

Clase de los holotúridos

Los **holotúridos** *o cohombros de mar acentúan aún la simetría bilateral, que en ellos llega a ser predominante. Son libres, cilíndricos y blandos por atrofia del caparazón.*

Descripción de una holoturia. — La forma general de una holoturia es la de un cilindro recorrido en sentido longitudinal por las cinco filas de pies ambulacrales. La *boca* está en un extremo rodeada de cinco *tentáculos respiratorios*. El ano se encuentra en el otro extremo. El animal repta siempre sobre la misma cara, que comprende tres filas de *pies ambulacrales*. La otra cara contiene las otras dos filas de pies, que, como no se posan en el suelo, se han convertido en *palpos táctiles*. Sucede a veces que todos los pies ambulacrales desaparecen *(sináptido)*. El animal se parece entonces completamente a un gusano y vive hundido en la arena.

En las grandes profundidades submarinas existen curiosas holoturias que, primero plegadas en forma de U, han tomado después la forma de una gaita o de una botella.

Reproducción sexual de los equinodermos. — Los sexos están separados. En los machos hay cinco *testículos*, a los cuales corresponden, en las hembras, cinco *ovarios*, que se abren separadamente al exterior en las proximidades del ano. En la época de la reproducción, variable según la temperatura, el esperma y los ovarios son expelidos al agua del mar. Dicho de otro modo, la fecundación es *externa* y se

puede observar fácilmente con el microscopio. La del erizo de mar —junto con la del fuco en botánica— ha sido una de las primeras en ser estudiada.

Como el huevo es *oligolecito* (del griego *oligos*, poco, y *lecithos*, yema de huevo), es decir, pobre en vitelo, la segmentación, no entorpecida por la abundancia de materias nutritivas, es *total* e *igual*. Se constituyen sucesivamente una *mórula* (esfera plena), una *blástula* (esfera hueca) y una *gástrula* (saco de doble pared). Se trata de las formas embrionarias ya descritas a propósito de la hidra y de la esponja.

Después del nacimiento, que se efectúa en el estadio de gástrula, ésta adquiere órganos sensoriales y locomotores altamente característicos de cada grupo: largos brazos ciliados en el *plúteo* de erizo de mar y el *ofioplúteo* de ofiuro, lóbulos ciliados en la *auricularia* de holoturia y la *bipinaria* de estrella de mar, coronas ciliadas que rodean el cuerpo en forma de tonelillo en la *doliolaria* de encrino, etc.

Bajo cualquiera de estas formas, la larva forma parte del plancton marino. No posee aún la vida fija o rastrera ni la simetría radial del adulto. Estos caracteres no aparecen sino después de un restablecimiento o *metamorfosis* completa de su organismo.

Demos aquí algunas definiciones. La mórula, la blástula y la gástrula, que están encerradas en el cascarón del huevo, son estadios embrionarios o *embriones*. El plúteo, el ofiplúteo, la doliolaria, la auricularia y la bipinaria, que tienen una vida libre, son estadios larvarios o *larvas*. Un desarrollo que comprende sucesivamente embriones y larvas es un *desarrollo indirecto*. Esto se debe a que la cantidad de vitelo es muy débil para asegurar la totalidad del desarrollo en el interior del huevo. Los equinodermos, y en menor grado los celentéreos y los espongiarios, poseen ese desarrollo, al cual se opone, como veremos, al *desarrollo directo* de un cangrejo o un pájaro.

En un desarrollo indirecto, las larvas, formas libres, se adaptan a diversas condiciones de existencia y adquieren en consecuencia órganos especiales, que deberán perder ulteriormente. De ahí las *metamorfosis* que sufren. Así, alejadas temporalmente de la vía directa, vuelven a ella por un camino desviado.

Afinidades de los equinodermos. — Hemos visto que la simetría radiada de los equinodermos no es ni primitiva ni inalterable. Las larvas no la tienen aún. Los erizos de mar irregulares y las holoturias tienden a perderla. Se trata claramente de una adquisición secundaria, de una especie de máscara que no debe hacer perder de vista las verdaderas afinidades de los equinodermos. Estas afinidades los colocan más cerca de los gusanos, e incluso de los vertebrados, que de los celentéreos. Sin que puedan darse mayores precisiones, es seguro que los *equinodermos descienden de animales de simetría bilateral.*

Tipo de los anélidos

Clase de los poliquetos: Simetría bilateral. Metamerización. Estructura de un anillo. Nefridios. Cefalización Multiplicación vegetativa. Reproducción sexual. Desarrollo de los poliquetos. Poliquetos errantes y sedentarios. **Clase de los oligoquetos. — Clase de los hirudíneos**

Los **anélidos,** *o gusanos anillados, constituyen sólo una parte del antiguo grupo heterogéneo de los gusanos. Son los gusanos típicos y, por consiguiente, los que es preciso estudiar primero. Los anélidos, libres o apenas degradados por el parasitismo, tienen una neta simetría bilateral. Su cuerpo cilíndrico está formado por una sucesión de anillos semejantes. Poseen un aparato circulatorio cerrado y un sistema nervioso ganglionar. Su aparato excretor se compone de nefridios o riñones primitivos dispuestos por pares en cada anillo.*

El tipo se divide en tres clases: *poliquetos, oligoquetos* e *hirudíneos.*

Clase de los poliquetos

Los **poliquetos** (del griego *polys*, varios, y *khetos*, pelo) *tienen numerosas cerdas locomotoras colocadas lateralmente, en cada anillo, sobre unos muñones o parápodos. Sus órganos genitales son siempre simples y sus sexos están separados. Del huevo sale una larva trocófora, nadadora, que ulteriormente se metamorfosea en adulto.*

Aparte de algunas formas excepcionales, los poliquetos son todos marinos.

Simetría bilateral. — Los anélidos tienen una mitad derecha y una mitad izquierda semejantes, respectivamente, a un objeto y a su imagen en un espejo. En un extremo se encuentra la cabeza, en el otro la cola. La progresión se efectúa de atrás hacia delante.

Estas disposiciones orgánicas vamos a encontrarlas en lo sucesivo en todos los animales, hasta en el hombre. Por ellas los *artiozoarios* (gusanos, artrópodos, moluscos, vertebrados) se distinguen de los *fitozoarios* o animales plantas, estudiados anteriormente.

Metamerización. — Los anélidos tienen el cuerpo formado por una sucesión de *anillos, artejos* o *segmentos* que se repiten más o menos idénticamente unos detrás de otros. En eso consiste la *metamerización*. Los anillos son *metámeros* (del griego *meta*, después, y *meros*, parte: partes que se suceden). Ahora bien, la metamerización, como la simetría bilateral, volveremos a encontrarla ya en todos los animales. El hombre mismo presenta vestigios de metamerización en sus vértebras, costillas, nervios raquídeos, ganglios simpáticos, etc.

Estructura de un anillo. — Como todos los anillos son idénticos, el corte transversal de uno de ellos instruye exactamente sobre la organización de un poliqueto.

Cada segmento está provisto de un par de extensiones laterales, los *parápodos*, subdivididos a su vez en una *rama dorsal y una rama ventral*. Cada rama tiene *cerdas locomotoras* alargadas y rígidas, que ayudan a la reptación. Una de las cerdas, más fuerte que las demás, la *acícula*, penetra en el cuerpo y sirve de inserción a los músculos que mueven el conjunto. Cada rama presenta, además, una prolongación sensorial llamada *cirro*.

La pared del cuerpo está constituida, del exterior al interior, por una epidermis, una dermis, una capa de músculos circulares y cuatro músculos longitudinales.

El *tubo digestivo* ocupa el centro del anillo, recorrido en su longitud dorsal y ventral por dos *vasos sanguíneos* que unen entre sí anastomosis transversales. Los vasos longitudinales son contráctiles y hacen el papel de corazón. La circulación se efectúa de atrás hacia delante en el vaso dorsal e inversamente en el vaso ventral.

El conjunto del aparato circulatorio está completamente cerrado, lo que, fuera de los anélidos, no ocurre más que en los vertebrados o animales superiores. Otro hecho importante es la aparición en la sangre de un pigmento respiratorio encargado del transporte del oxígeno y del gas carbónico: *hemoglobina* roja, *clorocrurina* verde, *hemafeína* parda, etcétera. Pero, mientras que en los vertebrados la hemoglobina está siempre fija en los glóbulos rojos, en los anélidos la materia colorante está disuelta en el plasma.

Debajo del tubo digestivo hay un *sistema nervioso ganglionar* dispuesto en forma de escala o de cuerda de nudos. En el primer caso existe en cada anillo un par de *ganglios* nerviosos unidos transversalmente por una *comisura*. Los ganglios de los pares sucesivos están unidos entre sí por *conectivos* longitudinales y, finalmente, a los ganglios cerebroides, que serán estudiados ulteriormente. Si los ganglios de cada par se fusionan, así como los conectivos, la disposición en forma de escala deja paso a una disposición en forma de cuerda de nudos, indicio de una evolución más acentuada.

Entre el tubo digestivo y la pared del cuerpo se extiende una vasta *cavidad general* o *celoma* llena de linfa. Generalmente, esta cavidad está dividida por tabiques transversales en tantos compartimientos como anillos tiene el poliqueto. En la cavidad general se desarrollan los órganos reproductores *(ovarios, testículos)* y se vierten las células reproductoras *(gametos)*. También se acumulan en ella los productos de excreción antes de ser arrojados al exterior. De cada bolsa celómica parten dos *nefridios* o tubos excretores.

Nefridios. — Estos órganos tienen gran interés en sí mismos, ya que constituyen el origen de los riñones, que estudiaremos en los otros grupos. Hay que distinguir tres clases:

1° *Nefridios de flama vibrátil.* Son tubos metamerizados abiertos en el exterior del cuerpo, hinchados en forma de ampolla y cerrados por el lado interno. En el interior ondula una llama vibrátil hecha de flagelos aglutinados. Los residuos, extraídos por ósmosis de la cavidad general, son arrastrados fuera por la corriente líquida;

2° *Nefridios de solenocitos.* La ampolla está erizada de células de larga gorguera llamadas *solenocitos* (del griego *solen*, canal, y *kytos*, célula). Cada una está provista de un largo flagelo que, pasando a través de la gorguera, se mueve en la cavidad de la ampolla y contribuye, con los demás, a hacer circular el líquido;

3° *Nefridios de pabellón ciliado.* Éstos son ya verdaderos tubos abiertos interiormente, en la cavidad general, por un pabellón ciliado o *nefrostoma* (del griego *nephros*, riñón, y *stoma*, boca), y exteriormente, en la superficie del cuerpo, por un orificio llamado nefridioporo. Con frecuencia se une a ellos un pabellón genital para la expulsión de los productos sexuales.

Cefalización. — Los anillos anteriores de un poliqueto se modifican y agrupan para formar la cabeza. Esta *cefalización* es tanto más acentuada cuanto más elevado en organización es el animal. Alcanza su máximo en el género *Nereis*. La encontraremos, más perfeccionada aún, en los artrópodos.

La cabeza de un *nereis* tiene gran número de órganos sensoriales: un par de *tentáculos* dorsales, un par de *palpos* ventrales que preceden a la boca, cuatro pares de *cirros* situados lateralmente y dos pares de ojos. La boca se prolonga por una *trompa retráctil* provista de ganchos. En el interior de la cabeza se encuentran dos *ganglios cerebroides*

que hacen el papel de cerebro y se unen por nervios a los tentáculos, a los palpos, a los cirros y a los ojos. Todas las sensaciones táctiles, gustativas o visuales tienen en ellos, por consiguiente, su centro. Los ganglios cerebroides están unidos a los *ganglios subesofágicos*, primeros ganglios de la cadena nerviosa ventral, por dos conectivos que encuadran el esófago. Así está constituido el *collar periesofágico*, particularmente típico.

Multiplicación vegetativa. — Como las plantas y los animales inferiores, los poliquetos son capaces de multiplicarse por fraccionamiento.

Si se corta un *nereis* en dos o varias partes, cada una de ellas regenera los órganos que le faltan y reconstituye un nuevo nereis. Sólo la cabeza, a causa de su especialización, es incapaz de hacerlo.

Reproducción sexual. — Independientemente de su multiplicación vegetativa, la mayor parte de los poliquetos tienen una reproducción sexual que da lugar a fenómenos muy extraordinarios.

1° Muchos *nereis*, en el momento de la madurez sexual, se transforman en *heteronereis*. Los ojos y los cirros se hipertrofian, y la parte posterior del cuerpo adquiere largas cerdas natatorias. El animal se lanza entonces en plena agua y sale a danzar a la superficie al claro de luna. Se reúnen millares de machos y hembras, puesto que se trata de una danza nupcial. Los machos vierten su semen mientras las hembras estallan y dejan salir una nube de huevos de color verde esmeralda;

2° Una especie de *eunice*, conocida en las islas Fidji bajo el nombre de *palolo*, se reproduce el día del último cuarto de la luna de octubre-noviembre. Cada gusano abandona la parte posterior de su cuerpo, donde están reunidos los elementos sexuales, y estos fragmentos, liberados por la ruptura, salen a nadar a la superficie del mar antes de expeler su contenido. Los indígenas celebran en ese momento grandes festejos y pescan los palolos, que es para ellos un manjar.

Desarrollo de los poliquetos. — Estos gusanos son siempre *ovíparos*. Los huevos, arrojados al agua del mar, son fecundados por la lechaza de los machos.

El nacimiento se efectúa en el estadio de gástrula, como en los equinodermos. Pero esta gástrula tiene la forma de un trompo y posee una o varias coronas ciliadas. Se la llama *trocófora* (del griego *trochos*, torno, y *phorein*, llevar). Tiene una boca situada lateralmente y un ano en el extremo inferior. En la corona se encuentra un órgano apical compuesto de un mechón de cilios sensoriales y de un ganglio nervioso.

Después de cierto tiempo de vida libre se produce una *metamorfosis*. La parte inferior se alarga y se segmenta. Nuevos segmentos se forman sin cesar en la región preanal y empujan por encima de ellos los segmentos más antiguos. El órgano apical, las coronas ciliadas y muchos otros órganos desaparecen, mientras se forman los órganos definitivos. Estudiaremos estos fenómenos a propósito de los insectos, bajo los nombres de *histolisis* (destrucción de los tejidos) e *histogénesis* (formación de los tejidos). Cuando el animal se ha hecho muy pesado, cae al fondo del mar y comienza a reptar.

Poliquetos errantes y sedentarios. — Los *Nereis, Nephthys, Eunices y Aphrodites* son **poliquetos errantes** que se pueden encontrar, al final de la marea descendente, en los fondos arenosos o de limo. Tienen parápodos y cerdas locomotoras bien desarrollados sobre todos los segmentos. La cabeza, normalmente constituida, posee numerosos órganos sensoriales. Una trompa provista de ganchos les permite alimentarse de animales y de algas. Son, en suma, poliquetos típicos.

Se les opone, bajo el nombre de **poliquetos sedentarios**, un gran número de formas cavadoras, como los *arenícolas*, o que viven en un tubo, como los *terebéidos*, los *sabeláridos*, los *serpúlidos*, etc. En todos estos animales, los parápodos y las cerdas han degenerado, así cómo los órganos sensoriales. La trompa falta y su lugar está ocupado en general por un penacho de branquias plumosas, provistas de cilios vibrátiles, cuyos movimientos llevan a la boca las partículas alimenticias.

Clase de los oligoquetos

Los **oligoquetos** (del griego *oligos*, escaso, y *khetos*, pelo) *sólo tienen un escaso número de cerdas y están desprovistos de parápodos. Su cabeza, poco diferenciada, no posee ningún órgano sensorial. Pero sus órganos genitales alcanzan una complejidad extrema y los individuos son siempre hermafroditas. El desarrollo es directo, sin pasar por el estadio de larva trocófora.*

La mayor parte de los oligoquetos viven en las aguas dulces *(tubifex, nais)* o en la tierra (lombrices).

Es particularmente interesante estudiar la *lombriz de tierra*. La piel de esta lombriz es espesa y reposa sobre una poderosa musculatura. El tubo digestivo está constantemente lleno de tierra, rica en restos orgánicos, de los cuales se nutre el animal, y que son neutralizados por glándulas especiales de secreción básica. Los órganos machos se componen de cuatro testículos y un *receptáculo* seminal en el que se acumula el esperma antes de ser expelido al exterior. Los órganos hembras, situados un poco más atrás, consisten en dos *ovarios* con sus *oviductos*. En el momento de la reproducción, dos individuos se acoplan y permanecen unidos, durante cierto tiempo, por medio de una mucosidad segregada por un rodete glandular. Esta misma cintura fabrica después un *capullo* alrededor de los huevos.

Clase de los hirudíneos

Los **hirudíneos** *o* **sanguijuelas** *son anélidos parásitos, completamente desprovistos de cerdas y de parápodos. Su cabeza, poco diferenciada, posee solamente ojos rudimentarios. En cambio, tienen dos ventosas de fijación y poseen mandíbulas, o bien una trompa para perforar los tegumentos de su huésped. Se alimentan de sangre. Sus órganos genitales están muy desarrollados. Son hermafroditas. Su desarrollo es directo.*

En estado de extensión, la *sanguijuela medicinal* alcanza de 10 a 15 centímetros de longitud. En la superficie de su espesa piel se ven un centenar de anillos superficiales, de los que son necesarios cinco para formar un anillo profundo o verdadero metámero. De éstos hay exactamente 21, más cinco que entran en la constitución de la *ventosa anterior* y siete que constituyen la *ventosa posterior*: 33 segmentos, pues, en total, que se encuentran en todos los hirudíneos.


Sanguijuelas medicinales

Además de la *boca*, que se abre en la ventosa anterior, los orificios de la sanguijuela son los siguientes: el *ano*, situado dorsalmente al borde de la ventosa posterior; los *orificios macho* y *hembra*, situados en el tercio anterior de la cara ventral, y los 17 pares de *orificios excretores*, correspondientes a otros tantos nefridios.

En la boca funcionan tres *maxilas* en forma de sierras semicirculares capaces de entallar hasta la piel de un caballo. La herida que resulta de ello es una estrella de tres brazos que se hace triangular por retracción de sus bordes. La succión de la sangre se hace por medio de una *faringe* musculosa. La sangre es puesta en reserva en un vasto *tubo digestivo* provisto de *intestinos ciegos* laterales. Allí se conserva largo tiempo sin coagularse ni descomponerse gracias a las propiedades anticoagulantes y antisépticas de la saliva de la sanguijuela.

Los *nefridios*, en número de 17 pares, son más complejos que en los poliquetos. Cada uno de ellos se compone de una *glándula en forma de herradura* que comunica con una *vejiga urinaria*.

La *cadena nerviosa* ventral comprende 21 pares de ganglios relacionados, por medio de un minúsculo collar periesofágico, con los ganglios cerebroides.

Los *órganos genitales* son hermafroditas. Poseen dos *ovarios* y nueve pares de *testículos*, un órgano de acoplamiento o *pene* y varios órganos accesorios. En el momento de la reproducción, dos sanguijuelas se acoplan y se fecundan mutuamente. A continuación, los huevos son puestos en el interior de un *capullo*, en el que se desarrollan.

Un carácter muy particular de las sanguijuelas es que su cavidad general está llena de un *tejido conjuntivo*. Todos los órganos están soldados entre sí. Sólo subsiste un *seno* alrededor de la cadena nerviosa, y otro táctil en cada testículo. Esta invasión del cuerpo por un tejido que prolifera no deja de presentar cierta analogía con el desarrollo de los tejidos cancerosos. El mismo carácter volveremos a encontrar en el tipo de los platelmintos.

Sabelas desarrolladas *(Fot. Wintrebert)*



Tipo de los vermídeos

Clase de los gefíreos. — Clase de los rotíferos. —Clase de los briozoarios. — Clase de los braquiópodos.

Los **vermídeos** *son anélidos más o menos degradados, pero tienen nefridios y una larva trocófora.*

Se les divide en *gefíreos, rotíferos, briozoarios* y *braquiópodos.*

Clase de los gefíreos

Su nombre proviene de que se les consideraba en otro tiempo como un puente *(gephyra)* entre los holotúridos y los anélidos. Son grandes gusanos marinos, no segmentados, que viven ocultos en la arena o en las fragosidades de las rocas.

Los *equiúridos* son los menos degradados, pues poseen aún numerosas cerdas hacia la extremidad posterior. Los *sipuncúlidos* tienen la piel completamente desnuda.

La boca está en general en la extremidad de una trompa retráctil.

Los nefridios, poco numerosos, reducidos a veces a un solo par, son de tipo anélido y sirven accesoriamente para la emisión de los productos sexuales.

Los equiúridos tienen un desarrollo indirecto, con larva *trocófora* y un principio de segmentación. Los sipuncúlidos tienen un desarrollo directo.



Equiúrido

Clase de los rotíferos

Los **rotíferos** son microscópicos y, a primera vista, se parecen mucho a los infusorios ciliados, junto a los cuales viven en las aguas estancadas

Las *hembras* tienen alrededor de dos milímetros de longitud y, a pesar de su exigüidad, poseen una multitud de órganos, tales como una doble corona de cilios vibrátiles delante de la boca, esófago, molleja, estómago glandular, intestino, cloaca, nefridios de flama vibrátil, glándula genital y cola con glándula adhesiva, que permite su fijación temporal o definitiva en el suelo. Un millar de células entran aproximadamente en su constitución.

Los *machos son enanos* (1/10 de milímetro) y están profundamente degradados. No tienen tubo digestivo. Apenas nacidos, se acoplan y mueren.

Según su medio de locomoción, los rotíferos se dividen en nadadores, geómetras, saltadores, fijos y parásitos, En todos los casos, atraen hacia su boca las partículas alimenticias de las proximidades mediante un movimiento incesante de sus coronas ciliadas, movimiento comparable al de dos ruedas que giran en sentido contrario. Ante un peligro, esconden su corona ciliada y toman una forma ovoide. Sometidos a la disecación, pasan al estado de vida lenta y pueden así subsistir varios años en el interior de una concha gelatinosa. Otra particularidad de los rotíferos es la *partenogénesis*. En verano, hay solamente hembras, que se reproducen a falta de machos. En otoño y a veces más tarde, según la temperatura, aparecen machos procedentes de los huevos de ciertas hembras. Los machos son, pues, mucho más raros que las hembras, y muy pequeños. No tienen tubo digestivo y sólo viven algunos días consagrados al acoplamiento. Los huevos fecundados tienen más resistencia al frío que los partenogenésicos. De ellos resulta, en la primavera siguiente, la primera generación de hembras partenogenésicas.

Clase de los briozoarios

Los **briozoarios** (del griego *bryon*, espuma, y *zoon*, animal) forman, en el mar o las aguas dulces, *colonias* compuestas de centenares o millares de individuos nacidos unos de otros por gemación. No hay que confundirlos con los celentéreos, de los que se distinguen por una organización muy superior. Su boca está en el centro de una corona tentacular y poseen también un tubo digestivo, un ano, un nefridio, un ganglio nervioso, un ovario y un testículo. Todos estos órganos están suspendidos en una amplia cavidad general, raramente obstruida por tejido conjuntivo.

Los individuos son hermafroditas. Generalmente, la puesta es de un solo huevo, y éste suele ser el origen de una nueva colonia.

La *gemación* da lugar a colonias arborescentes, foliáceas, reticuladas, macizas, pero siempre consistentes gracias a la quitina o calcio que se deposita en sus paredes.

Como los briozoarios son animales fijos, atraen hacia sí el agua que necesitan para respirar y alimentarse mediante incesante agitación de los cilios vibrátiles de sus tentáculos. Si se les roza, se contraen y se cierran como una bolsa. Envenenados por sus residuos, cuando no tienen nefridio, se desprenden periódicamente de sus órganos internos y se renuevan a expensas de su pared.

A estas particularidades, algunas especies añaden otra no menos importante: el huevo, en vez de ser vacuado, se desarrolla en el organismo materno, al cual está unido por una especie de *placenta*. En las demás especies existe una larva *trocófora* nadadora.

Clase de los braquiópodos

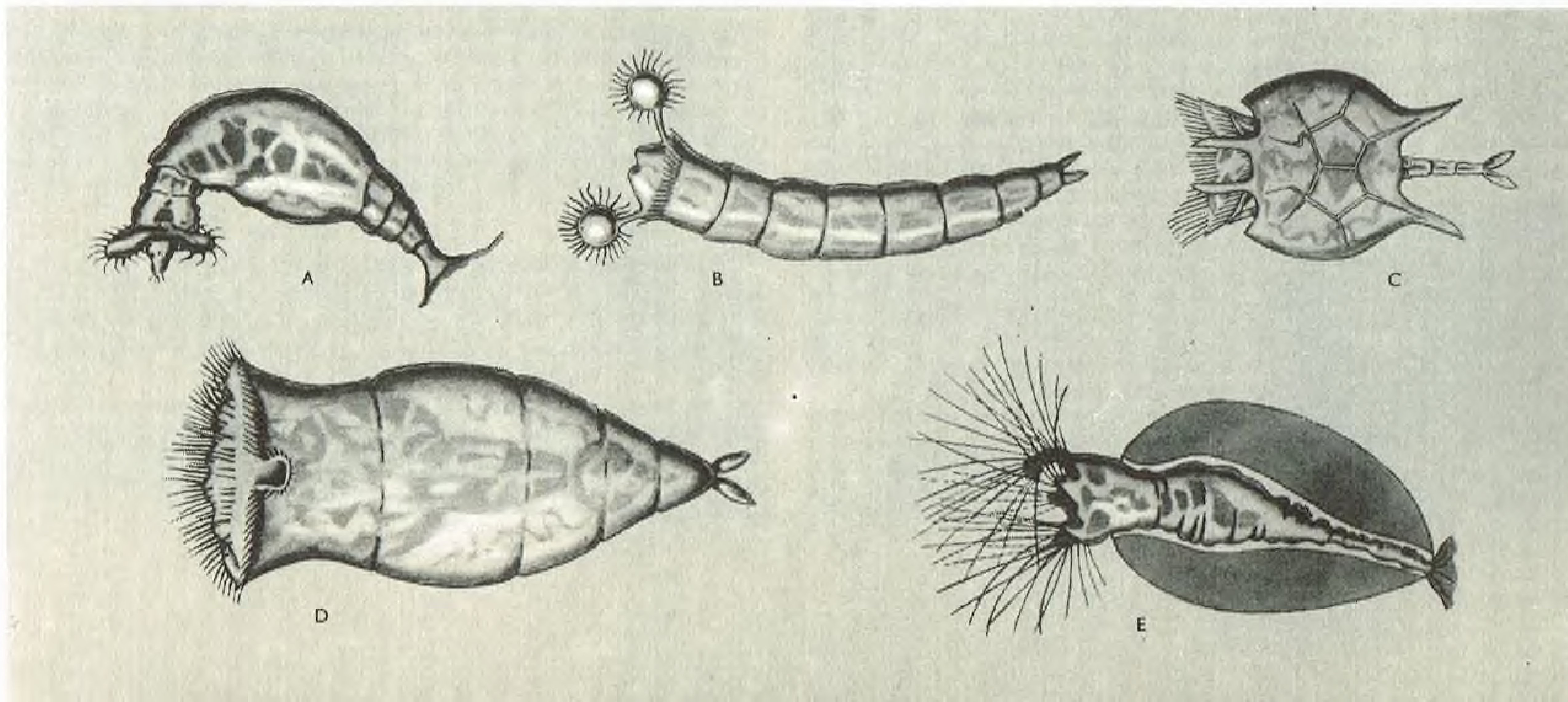
Los **braquiópodos,** otros vermídeos fijos, se parecen a los moluscos por su *concha bivalva* y forman, como ellos, bancos en el fondo del mar.

Las *valvas* pueden estar articuladas entre sí por una *charnela*. Una valva es ventral, la otra dorsal. La ventral presenta una especie de *gancho* atravesado por un agujero que da paso a un *pedúnculo*. El cuerpo del animal no ocupa sino una pequeña parte de la concha, cerca del gancho, pero es precedido por dos pliegues tegumentosos que forran la concha y constituyen el *manto*. Entre estos pliegues se extienden dos largas *branquias* enrolladas en forma de espiral y provistas de cilios vibrátiles. La boca, situada entre sus bases, da acceso a un saco digestivo. Tienen dos nefridios, un corazón, un collar nervioso y glándulas genitales. Unos *músculos* permiten la abertura y el cierre de la concha, a la que el animal está sujeto por su pedúnculo. Una vez entreabiertas las valvas, el braquiópodo determina una corriente de agua con el movimiento ininterrumpido de sus cilios vibrátiles. Si se le inquieta, cierra su concha rápidamente.

Los huevos, que evolucionan siempre en plena agua, dan origen a una larva *trocófora*.

Se dividen los braquiópodos en **articulados** e **inarticulados**. Los primeros se clasifican a su vez según el esqueleto branquial, que puede ser nulo *(productus*, de la Era primaria), formado por dos cortas varillas *(rinconélidos)*, por una cinta plegada *(terebratúlidos)* o por dos hélices calcáreas *(esperiféridos*, de la Era primaria). Todos estos braquiópodos han desempeñado un importante papel geológico. Los inarticulados son las *língulas*, conocidas, en estado fósil, y que viven todavía hoy en el litoral de los mares cálidos.

Varias clases de rotíferos, conservados en un tubo de secreción gelatinosa: Geómetra (A); Nadadores (B, C, D); Sedentario (E). *(Según James)*



Tipo de los platelmintos

Clase de los turbelarios. — Clase de los trematodos: Descripción de la pequeña duela. Ciclo evolutivo de la gran duela. Principales trematodos. — **Clase de los cestodos:** Descripción de un botriocéfalo. Ciclo evolutivo de un botriocéfalo. Descripción y desarrollo de las tenias. Otras especies de tenias

Los **platelmintos** (del griego *platys*, ancho, y *helmins*, gusano) *son todavía llamados* **gusanos aplanados** *a causa de su forma y* **gusanos parenquimatosos** *a causa de la invasión de su cavidad general por un parénquima o tejido conjuntivo. Su cuerpo, segmentado o no, está provisto a veces de cilios vibrátiles. Sus tegumentos son blandos. Su aparato excretor es una red de canalículos con células de flama. Su sistema nervioso es una red de nervios sin otros ganglios que los cerebroides. Sus órganos genitales son hermafroditas y complejos.*

El tipo comprende tres clases: *turbelarios, trematodos* y *cestodos.*

Clase de los turbelarios

Los **turbelarios** o **planarias** son los únicos platelmintos *no parásitos.* Viven en agua dulce o marina, o en la tierra húmedo. Su cuerpo es aplanado, foliáceo, y está revestido de cilios vibrátiles, que determinan en su superficie minúsculos torbellinos (de donde el nombre de *turbelarios).* Algunos no tienen tubo digestivo y viven en simbiosis con algas contenidas en su parénquima, como los *convolutas*, que viven enterrados en la arena de las playas y realizan desplazamientos verticales en relación con las mareas. Otras especies tienen, por el contrario, un saco digestivo y una trompa que les permiten alimentarse con presas vivas. Los turbelarios poseen, además, un sistema excretor con células de flama vibrátil, y una red nerviosa compuesta de algunos nervios. Pero están desprovistos, por el contrario, de aparatos circulatorio y respiratorio. Sus órganos genitales son bastante complejos.

Clase de los trematodos

Los **trematodos** *son gusanos parásitos de cuerpo foliáceo no segmentado y desprovisto de cilios vibrátiles. Tienen un saco digestivo sin ano y poseen dos o varias ventosas. Su ciclo evolutivo es muy complejo.*

Hay dos especies: los **fasciólidos,** que tienen dos ventosas, y los **polistómidos,** que tienen muchas. Los fasciólidos tienen como tipos la grande y la pequeña duela del hígado, que viven en los canales biliares del carnero. Estudiaremos la primera por su estructura relativamente sencilla, y la otra por su desarrollo, que es perfectamente conocido.

Descripción de la pequeña duela. — Es ésta un animal transparente, aplanado, lanceolado, que mide alrededor de un centímetro de longitud. En una extremidad se encuentra la *ventosa bucal*, que da acceso a una *faringe* musculosa, aspiradora, y después a un saco digestivo bifurcado. Posee también una segunda *ventosa ventral.*

La duela es *hermafrodita.* Tiene dos *testículos* y un órgano de acoplamiento o *pene*. Los órganos hembras comprenden un *ovario*, que produce los óvulos; un *ootipo*, donde se perfeccionan después de haber sido fecundados por los espermatozoides acumulados, en el curso de un acoplamiento, en una *bolsa copuladora*; dos *glándulas vitelógenas*, que les suministran reservas nutritivas (vitelo); *glándulas conchíferas*, que los rodean de un cascarón espeso; finalmente, un *útero*, muy largo y contorneado, donde maduran antes de ser evacuados por un orificio de puesta. Por lo que precede vemos que la duela, aun siendo hermafrodita, es también capaz de acoplamiento. Ocurre lo mismo en la mayor parte de los hermafroditas: sanguijuelas, caracoles, etc.

Ciclo evolutivo de la gran duela. — 1° *En el medio exterior.* Una duela produce anualmente hasta cien millones de huevos, que son arrojados con la bilis y los excrementos del cordero. En el suelo, mueren. En el agua de una charca dan origen, por el contrario, a una *larva ciliada* (primera fase), tan móvil como un infusorio, y de su misma talla. Esta larva debe llegar al pulmón de la *Limnaea*, molusco de agua dulce (segunda fase);

2° *En el pulmón de la Limnaea.* La larva se convierte en un saco o *esporocisto*, lugar de formación de nuevas larvas llamadas *redias* (del naturalistas italiano Redi). Estas larvas se parecen ya bastante más a una duela, puesto que poseen una faringe y un saco estomacal. Poco tiempo después salen del pulmón para ir a instalarse en el hígado de la *Limnaea;*


Gran duela en un corte de hígado de vaca (*Fot. L. Plouvier*)

3° *En el hígado de la Limnaea.* La redia se convierte en saco (esporocisto de segundo orden), donde se producen larvas de tercera generación, las *cercarias* (del griego *kerkos*, cola), minúsculas duelas provistas de una cola como los renacuajos;

4° *En el medio exterior.* Las cercarias abandonan la *Limnaea*, nadan unas horas y, perdida la cola, se enquistan y esperan entonces a ser tragadas por un carnero que pazca a orillas del agua (tercera fase);

5° *En el estómago del carnero.* Muchos quistes son digeridos. Los que no lo son dejan escapar su cercaria, que se transforma entonces en una nueva duela (cuarta fase).

Se comprende fácilmente, en el caso de la duela, la necesidad de un ciclo evolutivo complejo. Como para compensar los riesgos debidos a los combios de medio y de huésped, se produce una multiplicación intensiva. Un solo huevo puede dar finalmente cien cercarias; una duela puede tener 100 000 000 × 100 = 10 000 millones de descendientes. Estas reservas formidables compensan las pérdidas producidas por las incidencias de las fases enumeradas antes.

Esto es tan cierto que, durante el invierno, temporada funesta para los trematodos, mueren varias generaciones sucesivas de redias.

En verano:

Huevo → larva ciliada → redias → cercarias → duelas.

En invierno:

Huevo → larva ciliada → redias → redias → redias → cercarias → duelas.

Principales trematodos. — Además de la duela, que implantada en el hígado de los carneros les produce una anemia perniciosa, debemos citar el *enquistosoma*, que vive en el sistema venoso del hombre. Es un parásito de los países cálidos. Por excepción, no es hermafrodita. El macho lleva su hembra en un canal ventral. Después de la fecundación, la hembra emigra y pone sus huevos en la pared de la vejiga o del intestino, de lo que resultan lesiones y úlceras.

Un curioso trematodo habita en el intestino de los pájaros cantores. Los huevos, expulsados con los excrementos, llegan hasta una hoja y son ingeridos por un molusco terrestre. No se producen redias. El esporocito, por el contrario, se ramifica en el cuerpo del molusco. Una rama penetra en los tentáculos o "cuernos" del animal, donde parece una oruga de cuerpo anillado de color verde y amarillo. Cuando un pájaro ve este órgano, lo engulle y se infecta con las cercarias contenidas en el interior.

La vejiga de las ranas contiene con mucha frecuencia *polistomos* o trematodos de numerosas ventosas. Uno es bucal; los otros están agrupados sobre un disco caudal. La infección se efectúa ya en el renacuajo y la evolución del parásito se realiza en el curso de la metamorfosis del huésped.

Clase de los cestodos

Los **cestodos** (del griego *kestos*, cinta) *son gusanos parásitos de cuerpo en forma de cinta, segmentado y desprovisto de cilios vibrátiles. No tienen tubo digestivo, pero poseen ventosas y generalmente ganchos de fijación. Su ciclo evolutivo es complejo.*

Se distinguen los **botriocéfalos** (del griego *bothrion*, fosa), que tienen dos ventosas, y las **tenias** (del latín *taenia*, cinta), que tiene cuatro.

Descripción de un botriocéfalo. — En el intestino delgado del hombre vive un botriocéfalo de una decena de metros de longitud. En uno de sus exremos posee una hinchazón o *escólex*, de apenas el tamaño de una cabeza de alfiler, con dos *ventosas* en forma de ojales. A partir del escólex, el cuerpo, estrecho al principio, se ensancha progresivamente hasta la extremidad caudal y comprende de 3 000 a 4 000 segmentos o *proglotis*. Los primeros son inmaturos. Los últimos, más viejos, han llegado a madurez sexual. Todos ellos tienen la misma constitución. La metamerización es perfecta.

Un proglotis es una especie de trapecio aplanado y translúcido. A cada lado corren un *nervio* y un *canal excretor*. En su mitad se observan dos *testículos* en forma de racimos, un *ovario* en forma de alforja, un *ootipo* rodeado de *glándulas conchíferas*, dos *glándulas vitelógenas* y un *útero* que se termina en el orificio de puesta. Un *pene* y una *vagina* sirven para el acoplamiento entre proglotis del mismo gusano, unidos uno a otro por los pliegues que se forman en el interior del intestino.

Ciclo evolutivo del botriocéfalo. — 1° *En el medio exterior.* Los *huevos* del parásito se mezclan con los extrementos del hombre y llegan a las alcantarillas y después a las aguas de los lagos o los ríos. En su interior se desarrolla una *larva ciliada* que queda libre y nada hasta que es tragada por un pequeño crustáceo del género *Cyclops;*

2° *En la cavidad general del crustáceo.* De la larva ciliada se escapa una nueva larva llamada *hexacanto* (del griego *hex*, seis, y *acantha*, espina) a causa de los seis ganchos de que está provista. Esta larva llega a la cavidad general del crustáceo. Es necesario entonces que éste sea comido por un pez (trucha, perca, lucio, etc.);

3° *En el cuerpo del pez.* La larva precedente pierde sus ganchos y le crecen entonces ventosas. Es exactamente el gusano reducido a su escólex. Se enquista en las vísceras y en los músculos del pez y deberá ser ingerido por el hombre para acabar su evolución;

4° *En el intestino del hombre.* El escólex engendra, en su parte posterior, toda la serie de los proglotis y hace que los nuevos expulsen a los viejos.

En resumen:

Huevo → *larva ciliada* →*hexacanto* → *escólex* → *botriocéfalo.*

La necesidad de huéspedes acuáticos (cíclopes y peces) explica que el botriocéfalo no se extienda más que en las regiones lacustres: litorales del Báltico y orillas de los lagos suizos e italianos.

Cisticercus pisiformis, larva del *tænia serrata* desvaginada. Se encuentra en el mesenterio del perro. Este parasitismo se acompaña generalmente de la regresión y aún de la desaparición completa de los órganos respiratorios y digestivos, y también de los órganos de la vista y de la audición (*Fot. L. Poilpot*)

Descripción y desarrollo de las tenias. — Existen, en el intestino delgado del hombre, dos especies de tenias o gusanos solitarios: 1°, la *tenia inerme* o *saginata*, que es transmitida por el buey y cuyo escólex sólo tiene cuatro ventosas; 2°, la *tenia armada* o *solium*, que es transmitida por el puerco y cuyo escólex posee, además de las cuatro ventosas, un rostro terminal provisto de ganchos.

Las diferencias entre las tenias y los botriocéfalos son las siguientes:

a) Sus ventosas son redondeadas y no longitudinales;

b) El número de sus proglotis no pasa de 1 500;

c) Sus orificios machos y hembras están mezclados y situados al borde de cada proglotis, alternativamente a derecha e izquierda;

d) No tienen orificios de puesta; el útero es un saco cerrado, ramificado, en el que se acumulan los huevos una vez maduros;

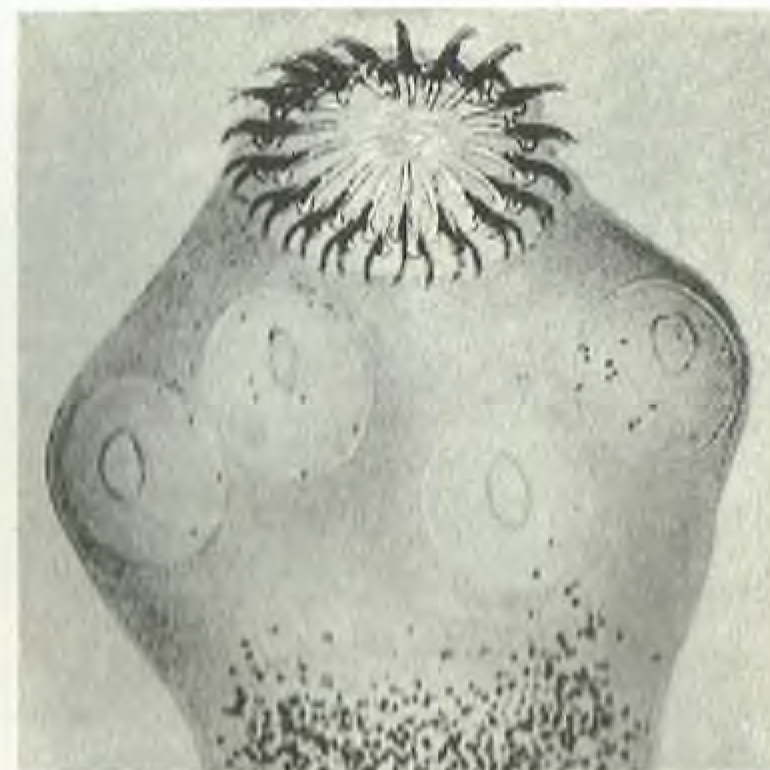
e) Los últimos anillos o *cucurbitinos* (así llamados a causa de su parecido con las pepitas de la calabaza) se desprenden del gusano y son expulsados con los excrementos del hombre. Son verdaderos sacos llenos de huevos. Su expulsión hace las veces de puesta;

f) En el interior del huevo se desarrolla directamente una larva *hexacanto*;

g) Es necesario que el huevo que contiene la larva sea ingerido por un buey o por un cerdo;

h) El hexacanto, puesto en libertad, perfora la piel intestinal de su huésped y llega a un músculo, donde pierde sus ganchos, engorda y se ahueca: una cavidad se llena de líquido. Es entonces, pues, una nueva larva o *cisticerco* (del griego *kystos*, cavidad, y *kerkos*, cola). En el interior brota un escólex (especie de cola);

i) El hombre se infecta comiendo buey o cerdo insuficientemente cocidos. El escólex se desinvagina, se fija en la pared intestinal, pierde su vesícula y los diversos proglotis comienzan su crecimiento.



Cabeza del cisticerco que muestra cuatro ventosas y una corona de ganchos (*Fot. L. Plouvier*)

En resumen:

Huevo → *hexacanto* → *cisticerco* → *escólex* → *tenia.*

Este ciclo evolutivo es más simple que el de un botriocéfalo por la supresión de un huésped intermedio y la carencia de larva ciliada.

Un buey o un cerdo cuya carne contiene cisticercos es llamado *leproso.* La *lepra* es un defecto redhibitorio que los veterinarios descubren mirando si hay cisticercos debajo de la lengua del animal. Pero los ganaderos desaprensivos hacen que fracase esa inspección pinchando con alfileres los cisticercos para hacerlos invisibles. Lo mejor es, pues, abstenerse de comer carne de buey o de cerdo insuficientemente cocida. Si hubiera de comerse carne cruda, ésta debe ser de caballo y no de buey.

Otras especies de tenias. — Los niños de ciertas ciudades tienen en su intestino centenares de pequeñas tenias (*himenolepis*), que jamás pasan de cuatro centímetros de longitud. Todo el desarrollo de estos parásitos se realiza en un solo huésped. Los hexacantos se transforman en cisticercos en las vellosidades intestinales del niño.

La *tenia cenuro* vive en el intestino delgado del perro, donde alcanza una longitud de varios centímetros. Los carneros se contaminan engullendo excrementos de perro de pastor. En ellos, el cisticerco se instala en el cerebro y crece desmesuradamente. En su interior germinan varias centenas de escólex.

La *tenia equinococo* del perro es la causa de una grave enfermedad en el hombre. Su cisticerco se desarrolla, en efecto, en el hígado humano y alcanza a veces el volumen de la cabeza de un niño y un peso de cinco a quince kilogramos. Es un *quiste hidatídico.* Palpando el vientre del enfermo, se percibe un ruido como de cascabeles, debido a que el quiste está formado por varias generaciones de vesículas encajadas unas en otras. Las últimas vesículas producen escólex. Se contrae el quiste hidatídico dejándose lamer por un perro cuya lengua se ha infectado con huevos de tenia en el ano de otro perro.

Tipo de los nematelmintos

Ascáride y tipos vecinos. Anquilostoma. Triquina. Filarias: Filaria de Medina. Filaria de Bancroft. Nematodos parásitos de los vegetales. Equinorrinco. — **Consideraciones generales sobre los gusanos.**

Los **nematelmintos** (del griego *nema*, hilo, y *helmins*, gusano) *son también llamados* **gusanos cilíndricos** *a causa de su forma. Su cuerpo no segmentado y desprovisto de apéndices está cubierto de quitina análoga a la de los insectos. Su cavidad general no está llena de tejido conjuntivo. Pueden a veces poseer aparato digestivo. El aparato excretor está compuesto de varios tubos longitudinales. El sistema nervioso se reduce a unos cuantos nervios unidos entre sí por anastomosis transversales. No poseen aparato respiratorio ni aparato circulatorio. Los sexos están separados.*

El tipo se divide en dos clases: los *nematodos*, que tienen un tubo digestivo, pero no trompa, y los *acantocéfalos*, que tienen una trompa retráctil, provista de ganchos de fijación, pero que están desprovistos de tubo digestivo.

Ascáride y tipos vecinos. — El intestino del hombre alberga una *ascáride* cilíndrica, blancuzca, elástica y adelgazada en sus dos puntas. Las hembras alcanzan 25 centímetros y son rectilíneas; los machos apenas pasan de 15 centímetros y tienen la punta de la cola enrollada en forma de cayado. La *cabeza*, ligeramente abultada, presenta tres *labios* dentados que rodean la *boca.* El *ano* se encuentra en el extremo opuesto. El *tubo digestivo* va de uno a otro extremo y tiene una sola diferenciación: una *faringe* musculosa, aspiradora, que continúa la boca. Introducidas en el quilo intestinal, las lombrices *Ascaris lumbricoide* se nutren de él y no parece que ataquen la pared misma del intestino.

Bajo su piel, endurecida por la *quitina*, se encuentran cuatro *fajas musculares* longitudinales, separadas por cuatro bultos o *campos* de la capa subquitinosa. Se distinguen un *campo dorsal*, un *campo ventral* y dos *campos laterales*. En éstos se encuentran los *canales excretores.*

Las fajas musculares están constituidas por *mioblastos*, células propias de los nematelmintos, que tienen una parte protoplasmática, donde se encuentra el núcleo, y otra fibrosa, más contráctil. Los mioblastos forman salientes en la cavidad general.

Los sexos están separados. Los machos tienen un solo *testículo* que desemboca junto al ano, en una *cloaca terminal*. Las hembras tienen dos ovarios que se prolongan por un doble *útero* y una *vagina.* El orificio genital está situado en el cuarto anterior de la cara ventral.

Después del acoplamiento, las hembras ponen huevos, que se mezclan con los excrementos humanos. Estos huevos llegan a las alcantarillas o a un estercolero. Pueden también ser ingeridos por el hombre (agua sucia, ensalada mal lavada, moscas que transportan los huevos a los alimentos, etc.). Las larvas que salen de ellos no se desarrollan directamente en el intestino. Deben pasar primero por las venas, el corazón, los pulmones, la tráquea, la boca, el esófago, el estómago y el duodeno. Después de este periplo, las ascárides se hacen sedentarias.

El **oxiuro** se parece mucho a la ascáride, pero apenas tiene un centímetro de longitud. Es muy corriente en el intestino de los niños. Las hembras fecundadas emigran al contorno del ano (picores nocturnos) y son después expulsadas con las materias fecales.

El **tricocéfalo** es también una lombriz intestinal. Le viene su nombre de su cabeza deshilachada (del griego *trix*, *trikhos*, pelo), que planta en la pared del intestino para aspirar la sangre. Su desarrollo es análogo al de la ascáride.

Anquilostoma. — Éste es aproximadamente del tamaño del oxiuro, y se diferencia de él por su *armadura bucal*, muy potente y perfeccionada. Instalado en el intestino delgado del hombre, roe su pared y

causa a veces lesiones graves. Pueden encontrarse hasta 1 000 lombrices en el mismo individuo.

Los *huevos*, expulsados con los excrementos, caen al suelo. Salen de ellos *larvas* minúsculas, puntiagudas y muy ágiles, que llegan a la piel del hombre. Penetran inmediatamente en ella y llegan después a la sangre, al corazón, a los pulmones, a la tráquea, a la boca, al esófago, al estómago y finalmente al intestino, donde dan origen a nuevos anquilostomas. En el curso de su recorrido, producen toda clase de enfermedades: picores cutáneos, usagre, anemia, irritación pulmonar, bronquitis, disturbios gastrointestinales, etc. Centenares de millares de personas sucumben cada año víctimas de los anquilostomas, sobre todo entre los mineros, los poceros y los labradores de regiones cálidas y húmedas. Sólo en 1880, cuando se abrió el túnel del San Gotardo, se descubrió la acción de este parásito en lo que se llamaba hasta entonces, sin conocerse su causa, *anemia de los mineros* o *anemia de los países cálidos*.

Triquina. — Las lombrices precedentes tienen un solo huésped. La *triquina*, por el contrario, tiene dos: el cerdo y el hombre.

En la carne del cerdo insuficientemente cocida hay siempre enquistadas gran número de triquinas jóvenes. Llegadas al intestino del hombre, quedan libres y alcanzan un tamaño de cuatro milímetros; son entonces parásitos intestinales. En su madurez, las hembras fecundadas se hunden en la pared del intestino y dejan sus larvas directamente en los vasos linfáticos, pues son vivíparas. Las larvas (unas 1 500 por hembra) se dirigen directamente a los músculos, donde se enquistan a su vez.



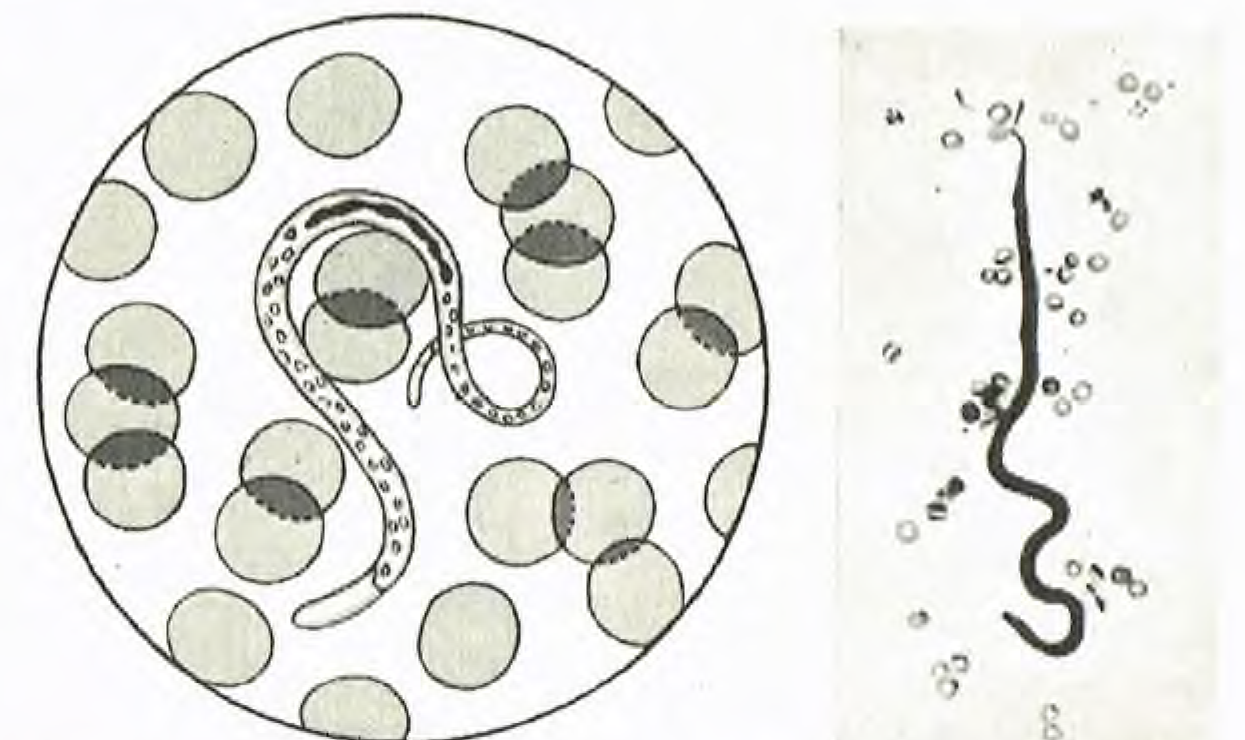
Larva de triquina enquistada en un músculo (*Fot. L. Poilpot*)

Así, el hombre alberga a un tiempo triquinas en su intestino y larvas en su tejido muscular. Lo mismo sucede en el cerdo. Pero mientras las larvas enquistadas en la carne humana no pueden terminar su evolución, las de la carne de cerdo son comidas ya por el hombre, ya por otro cerdo (restos de matanza), y llegan al estado adulto.

Filarias. — Las *filarias*, así llamadas por su semejanza con hilos, pueden tener varios metros de longitud. Las dos especies principales son la filaria de Medina y la llamada de Bancroft.

Filaria de Medina. — Esta lombriz vive en el tejido subcutáneo del hombre y produce abscesos en la piel de las piernas o de los pies, dentro de los cuales la lombriz está enroscada. Cuando llega a la madurez, el absceso se abre y las larvas son arrojadas al agua, por ejemplo, cuando el individuo atraviesa un río. Invaden entonces a pequeños crustáceos de agua dulce y vuelven al hombre si éste engulle esos crustáceos con un agua impura. La *filaria de Medina* hace estragos sobre todo en África y Asia.

Filaria de Bancroft. — Ésta es la filaria más pequeña (sólo unos centímetros). La adulta vive en los vasos linfáticos del hombre; la larva o *microfilaria* vive en la sangre y es transmitida por mosquitos. Hay que señalar, como hecho notable, que las microfilarias viven en la sangre periférica (en la piel) durante la noche y en la sangre de los órganos profundos durante el día. Este hecho constituye una extraordinaria adaptación al ciclo vital de los mosquitos, que son activos durante la noche e inactivos durante el día. La mayor parte de los casos de *elefantiasis* observados en China, el Japón, la India, las Antillas, etc., son atribuidos a la *filaria de Bancroft*. Los órganos infectados se hinchan desmesuradamente.



Microfiliaria en la sangre humana. *A la izquierda*, dibujo; *a la derecha*, fotografía del Instituto Pasteur

Nematodos parásitos de los vegetales. — Varios nematodos viven en la tierra húmeda o en las materias orgánicas en descomposición (*anguilula del vinagre*). Otras especies, vecinas de éstas, trepan en algunas ocasiones a lo largo de los tallos tiernos del trigo y se transforman en sexuadas sobre las espigas en flor. Los granos son reemplazados entonces por *agallas*, donde se cobijan las larvas. Esta enfermedad parasitaria es conocida bajo el nombre de *añublo del trigo*. Otro nematodo de tierra húmeda ataca las raíces de la remolacha.

Equinorrinco. — Éste es el principal representante de la clase de los *acantocéfalos* de trompa espinosa y desprovistos de tubo digestivo. El *equinorrinco* (del griego *echinos*, erizo y *rhyggos*, trompa) vive adherido a la pared intestinal del cerdo y se nutre por ósmosis del quilo que le rodea. Su larva vive en las larvas de las cetonias y de los abejorros.

Consideraciones generales sobre los gusanos

El inmenso grupo de los gusanos comprende, como acabamos de ver, animales muy diferentes unos de otros por su anatomía y su fisiología. Hay que distinguir entre ellos:

1º **Formas primitivas,** libres, regularmente segmentadas y metamerizadas, provistas de cerdas locomotoras y de nefridios dispuestos por pares en cada segmento, de sexos separados y larva trocófora. Éstos son los *anélidos poliquetos;*

2º **Formas aberrantes,** como los oligoquetos y los gefíreos, en los que la metamerización y las cerdas tienden a desaparecer;

3º **Formas microscópicas** (*rotíferos*), que pueden considerarse como detenidas en su desarrollo y más o menos semejantes a la larva trocófora;

4º **Formas fijas y degeneradas.** Unas (*briozoarios*) parecen pólipos y forman colonias compuestas de millares de individuos. Otras (*braquiópodos*) parecen moluscos y tienen una concha bivalva;

5º **Formas parásitas,** como los *hirudíneos*, los *trematodos*, los *cestodos* y los *nematelmintos*. Estos gusanos presentan todos los grados del parasitismo, desde la sanguijuela, que es un *parásito externo*, hasta la filaria, que es un *parásito de la sangre*, pasando por los *parásitos intestinales* (tenia), *hepáticos* (duela [saguaipe] y *musculares* (triquina).

Unos tienen un solo huésped (ascáride, oxiuro); otros cuentan con dos (tenia, duela) o incluso tres (botriocéfalo). Cuando tienen varios, se llama *huésped intermedio* el que alberga la larva y *huésped definitivo* el que aloja el adulto. Para la tenia inerme, el buey es huésped intermedio y el hombre huésped definitivo.

Los nematelmintos no cambian de forma en el curso de su evolución, pero presentan, a causa de su quitina, cierto número de *mudas* comparables, por ejemplo, a las de un cangrejo.

Los platelmintos no sufren mudas, sino *metamorfosis* en relación con los huéspedes sucesivos: una tenia, por ejemplo, pasa sucesivamente por el estado de hexacanto y cisticerco antes de ser escólex y por fin tenia.

Los fenómenos se complican cuando hay *multiplicación vegetativa*. Un huevo de duela da una larva ciliada que engendra varias redias, cada una de las cuales engendra a su vez diferentes cercarias. Del mismo modo, el cisticerco de la tenia cenuro produce gran número de escólex. La multiplicación es aún mayor en la tenia equinococo.

Hemos visto que las *metamorfosis*, la *multiplicación vegetativa* y la *prolijidad genital* constituyen notables adaptaciones de los parásitos a las dificultades de su ciclo evolutivo. Las *ventosas* y los *ganchos* de que están provistos les ayudan mucho en esto, y les permiten fijarse en su huésped o perforar sus tejidos. Sin embargo, los gusanos parásitos ofrecen una notable reducción de sus aparatos digestivos, circulatorio y respiratorio. Su sistema nervioso y sus órganos sensoriales son también muy esquemáticos.

GUSANOS PARÁSITOS	HUÉSPEDES definitivos	HUÉSPEDES intermedios	FORMAS LARVARIAS
Sanguijuela	vertebrado		
Duela (saguaipe)	carnero	limnaea	larva ciliada, esporocisto, redia, cercaria
Botriocéfalo	hombre	crustáceo, pez	larva ciliada, hexacanto, escólex
Tenia inerme	—	buey	hexacanto, cisticerco excólex
Tenia armada	—	cerdo	
Tenia cenuro	perro	carnero	hexacanto, cisticerco múltiple, escólex
Tenia equinococo	—	hombre	hexacanto, quiste hidatídico, escólex
Ascáride	hombre		
Oxiuro	—		
Tricocéfalo	—		
Anquilostoma	—		
Triquina	hombre	hombre, cerdo	
Filaria de Medina	cerdo hombre	crustáceo	
Filaria de Bancroft	—	mosquito	
Equinorrinco	cerdo	abejorro	microfilaria

Tipo de los artrópodos

Caracteres debidos a la quitina. Otros caracteres de los artrópodos. Clasificación de los astrópodos. — **Clase de los onicóforos.** — **Clase de los crustáceos:** Caracteres primitivos de los filópodos. Partenogénesis de los cladóceros. Copépodos libres y parásitos. Consecuencias de la fijación en los cirrípedos. Parasitismo de la sacculina. Isópodos y anfípodos. Superioridad de los decápodos. Apéndices del cangrejo. Principales decápodos. — **Clase de los miriápodos:** Quilópodos. Diplópodos. — **Clase de los insectos:** Segmentación de los insectos. Piezas bucales y regímenes alimenticios: Tipo triturador. Tipo lamedor. Tipo chupador. Tipo picador. Adaptaciones de las patas. Modificaciones de las alas. Aparatos digestivo y excretor. Aparatos respiratorio y circulatorio. Tráqueas de los insectos acuáticos. Perfeccionamiento del sistema nervioso. Variedad de los órganos sensoriales: Pelos sensoriales. Órganos auditivos. Órganos visuales. Dimorfismo sexual. Partenogénesis: Partenogénesis facultativa. Partenogénesis geográfica. Partenogénesis de estación. Poliembrionia. Metamorfosis. Histólisis e histogénesis. Clasificación de los insectos. Tisanuros. Arquípteros. Ortópteros. Neurópteros. Coleópteros. Himenópteros. Lepidópteros. Dípteros. Hemípteros. — **Clase de los merostomas.** — **Clase de los arácnidos:** Escorpiones. Arañas. Ácaros

Los **artrópodos** *o* **articulados** *son animales anillados y metamerizados, como los gusanos, pero están provistos además de apéndices articulados. Las articulaciones se hicieron necesarias como consecuencia de la presencia de quitina, materia coriácea, en la superficie de la piel. Los apéndices articulados se adaptan a las más diversas funciones. La cavidad general se reduce a un conjunto de lagunas por las que circula la sangre. El sistema nervioso es ganglionar. En el curso de su desarrollo se producen mudas y, frecuentemente, metamorfosis.*

Caracteres debidos a la quitina. — La *quitina* (del griego *khiton*, túnica) es una substancia nitrosa segregada por el ectodermo. Flexible al principio, se espesa y endurece después hasta formar un *caparazón* resistente que reviste no sólo el exterior del cuerpo, sino también las partes anterior y posterior del tubo digestivo.

Se considera la presencia de quitina como el carácter dominante, al cual están subordinados los caracteres secundarios siguientes:

1º *Membranas articulares.* Si un caparazón de una sola pieza es admisible en los nematelmintos, animales parásitos y poco móviles, es inconciliable con la movilidad de los artrópodos. Por eso el caparazón se interrumpe, en el límite de sus sucesivos anillos, por membranas articulares flexibles;

2º *Apéndices articulados.* Del mismo modo, los apéndices, so pena de ser sólo varillas rígidas y sin función, deben estar formados por segmentos articulados. De ahí proviene el nombre de los artrópodos (del griego *arthron*, articulación, y *pous*, *podus*, pie);

3º *Carencia de cilios vibrátiles;*

4º *Músculos especializados.* Como los músculos que unieran un punto a otro del segmento rígido no servirían para el movimiento, sólo subsisten los músculos que unen un segmento a otro. No hay, pues, en los artrópodos, una capa muscular extensa como en los gusanos, sino músculos individualizados y especializados;

5º *Mudas.* El crecimiento del cuerpo es impedido por el caparazón. Los artrópodos deben, pues, desprenderse de él de vez en cuando: es el fenómeno de las mudas. En cada muda, los tejidos se dilatan y el ectodermo segrega nueva quitina. Resulta de ello que el crecimiento es discontinuo en vez de ser continuo, como en los demás animales. Es usual representarlo por un gráfico en forma de escalera.

Otros caracteres de los artrópodos. — Otros caracteres están menos directamente ligados a la presencia de quitina.

1º Los *apéndices* se componen típicamente de una base o *protopodito* formado por dos segmentos que tienen cada uno dos segmentos laterales. En el segmento inferior se insertan una *gnatobase* masticadora del lado interno y un *epipodito* respiratorio del lado externo. En el segmento superior se insertan un *endopodito* del lado interno y un *exopodito* del lado externo. Estas diversas partes sólo son simples en los crustáceos inferiores. En todos los demás, se complican y se adaptan a diversas funciones. El resultado de ello son *apéndices sensoriales* (anténulas, antenas), *masticadores* (mandíbulas, maxilas, patas-maxilas), *prensiles* (uñas, pedipalpos), *locomotores* (patas, aletas), *reproductores* (órganos de acoplamiento), etc.;

2º El *aparato circulatorio* es un conjunto de *lagunas*. No hay en él ni capilares ni venas. Las propias arterias son muy reducidas. El *corazón*, situado dorsalmente, está formado por una o varias bolsas dispuestas en serie lineal: cada una de ellas tiene un par de orificios u *ostíolos*. En cada dilatación, la sangre es aspirada a través de los ostíolos; en cada contracción es impelida a las arterias. La sangre es incolora o blanquecina (hemocianina) y sólo contiene glóbulos blancos;

3º El *aparato excretor*, muy variable según los grupos, está formado por glándulas que provienen tal vez de nefridios;

4º El *sistema nervioso* es ganglionar y ventral. Hay siempre un par de *ganglios cerebroides*, y un par de *ganglios subesofágicos* unidos por un *collar periesofágico*. El resto del sistema nervioso tiene forma de escala de cuerda o de cuerda de nudos. Los ganglios de cada par están unidos por una *comisura*. Los pares sucesivos están unidos por *conectivos*. En los tipos superiores de artrópodos, los ganglios tienden a unirse en una o varias grandes masas;

5º Los *ojos* son simples *(ocelos)* o compuestos *(ojos de facetas)*. Un ojo compuesto puede estar formado por varias centenas de *omatidias*. Cada omatidia comprende:

a) Una capa de *células córneas* que constituyen una córnea transparente (una de las facetas del ojo);

b) Una capa de *células cristalinas* que segregan entre sí un cristalino oblongo;

c) Una capa de *células retinianas* que segregan entre sí un bastoncillo sensible a la luz.

Las omatidias están separados unas de otras por células negras.

Los ojos compuestos confieren probablemente a su poseedor una visión panorámica, pero muy imprecisa;

6º Los artrópodos se orientan sobre todo por el tacto y el olfato, que tienen su asiento en *pelos sensoriales*. Éstos son huecos y contienen la prolongación de una neurona sensitiva. Pueden poseer también órganos auditivos y otros de equilibrio;

7º Los sexos están generalmente separados. Los *huevos*, bastante cargados de vitelo *(huevos heterolecitos)*, tienen una segmentación parcial o desigual. Con motivo de las mudas se producen a veces, en el curso del desarrollo, cambios bruscos de forma, o sea *metamorfosis*.

Clasificación de los artrópodos. — Este tipo es el más vasto de todos: 800 000 especies entre un millón conocidas en total. Ciertos artrópodos tienen antenas en la parte anterior de la cabeza, como los **anteníferos**, que se dividen en *crustáceos*, *miriápodos* e *insectos*. Otros no tienen antenas, sino quelíferos en forma de gancho o de uña. Son los **quelíferos**, que se dividen en *merostomas* y *arácnidos*. En la base de los artrópodos se sitúan, además, animales que constituyen la transición entre los anélidos y los artrópodos. Con ellos se forma la clase de los *onicóforos*.

Clase de los onicóforos

Los **onicóforos** (del griego *onyx*, uña, y *phorein*, llevar) cuentan una cincuentena de especies del hemisferio austral. Sus principales representantes son los *peripátidos*, que se parecen a los gusanos y viven en lugares sombríos y húmedos.

Estos animales son artrópodos, puesto que tienen quitina, aunque delgada y blanda; *garras*, que terminan sus patas; *tráqueas* respiratorias, parecidas a las de los insectos; *pelos sensoriales*, etc.

Pero poseen también caracteres de anélidos: *apéndices cortos* y *no segmentados* que parecen parápodos, *capa muscular continua*, *nefridios metamerizados*, etc. Son, en suma, artrópodos imperfectos y vecinos sólo del tronco de este tipo.

Clase de los crustáceos

Los **crustáceos** *son artrópodos anteníferos, acuáticos y que respiran en general por medio de branquias.*

Como su nombre indica, su caparazón está más o menos *incrustado* de carbonato de calcio.

El cuerpo de los crustáceos se compone de una *cabeza*, un *tórax* y un *abdomen;* la cabeza y el tórax pueden estar fundidos en un *cefalotórax*.

La *cabeza* comprende seis segmentos y tiene cinco pares de apéndices: pequeñas antenas, grandes antenas, mandíbulas y primeras y segundas maxilas.

En la extremidad del abdomen se encuentra una lengüeta terminal *(telson)* diversamente dispuesta según la especie.

Las *branquias* están siempre situadas sobre las patas o en su proximidad.

En el curso de su desarrollo, los crustáceos sufren, en general, *metamorfosis*. Su forma larvaria más simple es el *nauplio*, que posee tres pares de apéndices correspondientes a las antenas y las mandíbulas del adulto. Su cuerpo, no segmentado, engendra después segmentos en su parte posterior. Al mismo tiempo, los apéndices se multiplican. Se pasa así del nauplio a otras larvas llamadas, según los casos, *metanauplios*, *cipris*, *zoeas*, *filosomas*, etc.

Los crustáceos viven en el agua o en los lugares húmedos. Algunos se aventuran a salir a tierra. Hay entre ellos parásitos. Otros son fijos.

Los **crustáceos inferiores** *(entomostráceos)* tienen un número variable de segmentos y apéndices. Son los *filópodos*, *cladóceros*, *ostrácodos*, *copépodos y cirrípodos*.

Los **crustáceos superiores** *(malacostráceos)* tienen siempre veinte segmentos y diecinueve pares de apéndices. Se les divide, según la disposición de sus patas, en *isópodos, anfípodos, esquizópodos, estomápodos* y *decápodos.*

Sólo estudiaremos, de los crustáceos, los caracteres morfológicos o biológicos más salientes.

Caracteres primitivos de los filópodos. — 1º Los *filópodos* (del griego *phyllon*, hoja, y *pous, podos*, pie) tienen *apéndices foliáceos* en los que se pueden reconocer todas las partes del miembro primitivo de los artrópodos. Estos apéndices son a la vez masticadores por su *gnatobase* erizada de pelos rígidos, respiratorios por su *epipodito* de quitina delgada, natatorios por su *expodito* aplastado como un remo, etc. Es evidente que esta acumulación de las funciones es un carácter más primitivo que la división del trabajo que encontraremos en los crustáceos superiores;

2º Por algunos de sus caracteres, los *Apus*, que son los principales filópodos actuales, recuerdan los *trilobites* de la Era primaria. Como particularidad, tienen ventralmente un surco que recorre "un salchichón nutritivo". Éste, que está formado por los alimentos masticados por el conjunto de las gnatobases, progresa hacia la boca;

3º El número de segmentos es variable en un mismo grupo, y a veces en una misma especie;

4º La forma misma del cuerpo puede modificarse bajo la influencia del medio. Así, especies antes consideradas como distintas están relacionadas en realidad unas con otras;

5º El sistema nervioso de los filópodos es siempre en forma de escala o de cuerda y no presenta ninguna coalescencia entre sus ganglios.

Partenogénesis de los cladóceros. — Al lado de dos filópodos se colocan los *cladóceros*, y en particular los *dafnias* o *pulgas acuáticas*, que se ven saltar en las charcas gracias a sus antenas ramosas situadas encima de la cabeza. Estos animales están protegidos por un caparazón bivalvo que les deja la cabeza libre. Se ve toda su organización por transparencia, incluso el corazón, cuyo número de pulsaciones varía con la temperatura.

El carácter más notable de los cladóceros es su tipo de reproducción.

En primavera y en verano, no existen machos. Las hembras ponen huevos *(huevos de verano)* que, conservados en una bolsa incubadora dorsal, se desarrollan sin fecundación y producen sólo hembras. Esta reproducción sin fecundación se llama partenogénesis (del griego *parthenos*, virgen, y *génesis*, nacimiento).

En otoño aparecen los machos y, con ellos, los *huevos fecundados* o *huevos de invierno*. Éstos permanecen algún tiempo en la cámara incubadora de la hembra. Arrojados después con una parte del caparazón *(efipio)*, que los protege y les permite flotar, subsisten en estado de vida lenta hasta la primavera siguiente.

Llamemos O a los huevos fecundados, *o* a los no fecundados, P a las hembras partenogénicas, M a los machos y F a las hembras. El ciclo de los cladóceros se resume de la forma siguiente:

$$O - P - o - P - o - P - o - P \begin{matrix} / \; o - M \; \backslash \\ \backslash \; o - F \; / \end{matrix} O.$$

En los grandes lagos, donde la temperatura varía poco en el curso del año, la reproducción sexuada tiende a desaparecer: los machos escasean siempre.

Inversamente, en las pequeñas charcas sujetas a desecación, la reproducción sexuada se intercala varias veces entre las generaciones partenogenésicas: los machos son frecuentes y numerosos.

Copépodos libres y parásitos. — La forma tipo de los copépodos es el *cíclope*, muy extendido en las aguas dulces y del que, por consiguiente, es fácil procurarse numerosos especímenes. La hembra, más grande que el macho, alcanza cuatro milímetros de longitud. El animal se sostiene en el agua gracias a sus *largas antenas* y a su *horquilla caudal*. Nada por medio de sus patas torácicas provistas de cerdas plumosas, a las que deben su nombre los copépodos (del griego *kope*, rama, y *pou podos*, pie). El abdomen de la hembra tiene lateralmente *sacos ovígenos*, donde son incubados los huevos. El nombre de cíclope le ha sido dado a causa de su único ojo, que resalta, por su pigmentación, sobre la transparencia general. Los tegumentos son, en efecto, muy finos y permiten los intercambios respiratorios. Los copépodos, no tienen branquias.

En el *plancton* marino y lacustre existen innumerables copépodos extraordinariamente adaptados a la vida flotante gracias a sus cerdas plumosas y a sus gotitas de aceite. Estos copépodos son la base de la alimentación de los peces. A veces, el mar contiene tantos que se hace opaco (v. *fig.* p. 373).

Otros copépodos son parásitos de la piel o de las branquias de los peces. Tienen forma aplastada, ganchos de fijación y una trompa picadora y chupadora. Suelen fijarse en su huésped mediante unas especies de raíces.

Consecuencias de la fijación en los cirrípedos. — Los *cirrípedos*, muy abundantes, son crustáceos fijos a los que su fijación confiere un aspecto muy especial.

1º Por analogía con una flor, diremos que una *anatifa* se compone de un *pedúnculo*, que sostiene un abultamiento terminal o *capítulo*, compuesto a su vez de piezas, en número de cinco, que hacen las veces de sépalos y pétalos. Pero estas piezas son calcáreas y no tienen simetría radiada: una está adelantada *(carena)* y las otras cuatro son laterales. A veces las piezas calcáreas son más numerosas y el pedúnculo se cubre de escamas. Otras veces *(bálanos)*, el pedúnculo desaparece y el capítulo está adherido a la roca. En este caso comprende una *muralla*, formada por seis frentes, y un *opérculo* o cubierta móvil;

2º Al abrigo de su caparazón, los cirrípedos permanecen inmóviles, y sólo agitan media docena de pares de patas o *cirros* (del latín *cirrus*, filamento) que tienen la forma de largos látigos cubiertos de cerdas. De este modo consiguen crear una corriente de agua que asegura sus necesidades respiratorias y alimencias;

3º El sistema nervioso y los órganos sensoriales son muy reducidos;

4º El *hermafroditismo* es regla en ellos. Existen, sin embargo, en algunas especies, *machos enanos* o *machos complementarios* que viven como parásitos sobre grandes individuos. Estos machos están extraordinariamente simplificados: puede decirse que se reducen a un par de testículos. Suele ocurrir que los grandes individuos parasitíferos se simplifiquen a su vez y se conviertan en hembras. En este caso, las hembras, que son muy grandes, se fijan al suelo y los machos enanos quedan fijos a perpetuidad sobre esas hembras. La separación de los sexos substituye entonces al hermafroditismo.

Parasitismo de la sacculina. — Cierto número de cangrejos, vistos por su parte ventral, presentan una especie de tumor en el límite del abdomen y el tórax. Este tumor es un cirrípedo parásito, al que por su forma de saco se le ha dado el nombre de *sacculina*.

El *saco* es el conjunto de los órganos reproductores. Se prolonga, en el interior del cangrejo, por un sistema ramificado de *raíces* mediante las cuales se alimenta la sacculina. No puede imaginarse degeneración mayor, puesto que todos los órganos, digestivos, excretores, respiratorios, circulatorios, sensoriales y nerviosos, han desaparecido.

Sin embargo, este animal es un cirrípedo. De sus huevos salen, en efecto, larvas *nauplios* bicornes que, una vez transformadas en *cipris*, se fijan en un nuevo cangrejo.

Entonces se produce un fenómeno bastante extraordinario: la larva entera se introduce en el interior del cangrejo. Sólo queda en el exterior el caparazón, que no tarda en caer.

Invisible, la sacculina se extiende y se ramifica como un cáncer por el organismo de su huésped. Luego, al cabo de algunos meses, produce exteriormente su saco reproductor.

Isópodos y anfípodos. — Con estas dos clases pasamos a los crustáceos superiores, fáciles de conocer por sus veinte segmentos y sus diecinueve pares de apéndices. Pero los tegumentos son todavía blandos, están poco calcificados, y los ojos son sésiles en vez de pedunculados como en los decápodos.

La evolución de los isópodos y los anfípodos se realiza por dos vías diferentes.

Los **isópodos** tienen el cuerpo aplanado (ejemplos: *ligias* del borde del mar, *asélidos* de las aguas dulces, *cochinillas* de los lugares húmedos). Sus apéndices, divididos en cefálicos, torácicos y abdominales, se representan por la fórmula $(2 + 1 + 2) + (1 + 7) + 6$. Los siete pares de patas locomotoras son semejantes. De ahí proviene el nombre de isópodos (del griego *isos*, igual, y *pous, podos*, pie). Las branquias están situadas en las patas abdominales. El corazón es también abdominal.

Los **anfípodos** tienen el cuerpo comprimido lateralmente (ejemplos: *talitros* o pulgas de mar, *gámbaros* o camarones de agua dulce, *caprélidos*). Su fórmula apendicular es $(2 + 1 + 2) + (1 + 4 + 3) + 6$. De los siete pares de patas locomotoras, cuatro están dirigidos hacia delante y tres hacia atrás. Esto es lo que significa el nombre de los anfípodos (del griego *amphi*, doble). Las branquias están situadas en las patas torácicas. El corazón es también torácico.

En estos dos grupos se producen curiosos fenómenos de incubación. Los huevos fecundados son guardados en una bolsa incubadora ventral (bolsa marsupial) formada por laminillas pertenecientes a las patas torácicas. Los huevos son grandes y poco numerosos. Las crías se separan de la madre en un estado de desarrollo ya muy avanzado.

Superioridad de los decápodos. — Los decápodos son los crustáceos de organización más elevada.

1º Su cabeza y su tórax enteramente unidos forman un *cefalotórax* de gran resistencia;

2º Su caparazón está muy calcificado;

3º Sus apéndices torácicos comprenden tres pares de patas-maxilas y sólo cinco pares de patas locomotoras. De éstas proviene el nombre de los decápodos (del griego *deca*, diez y *pous, podos*, pie). La fórmula apendicular es $(2 + 1 + 2) + (3 + 5) + 6$. Es el tipo mejor equilibrado;

4º Las branquias, situadas en las patas torácicas, están protegidas, en cada lado del cuerpo, por un pliegue del caparazón que limita una *cámara branquial*. Partes especiales de los miembros aseguran la circulación del agua;

5º El estómago tiene un aparato masticador *(molino gástrico)*, formado por piezas quitinosas muy móviles;

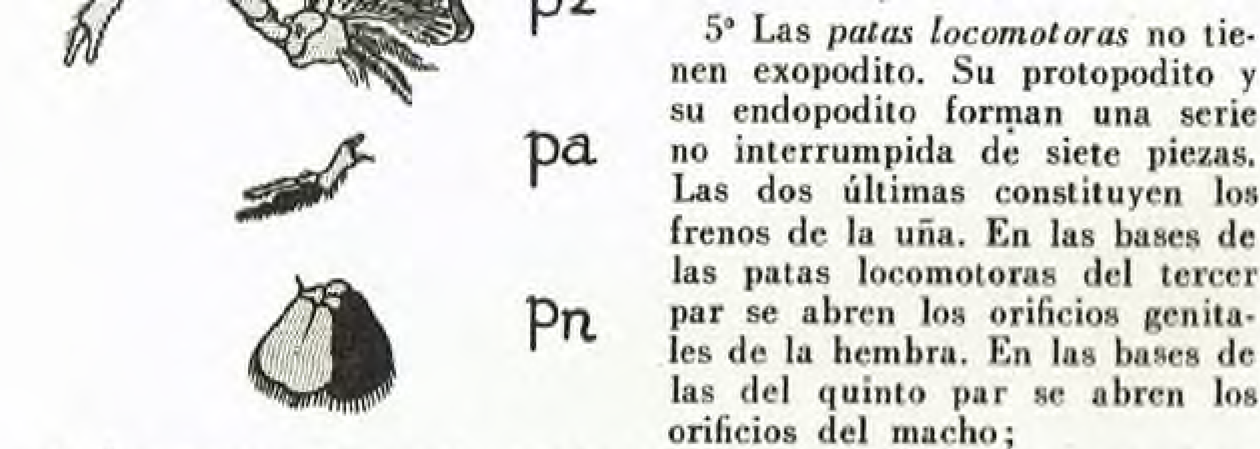
6º El sistema arterial está muy desarrollado;

7º El sistema nervioso, más o menos condensado, está a veces reducido, como en los cangrejos, a una sola masa torácica unida a los ganglios cerebroides;

8º Los ojos son pedunculados y muy móviles en todos sentidos. Los decápodos son *podoftalmos*.

Apéndices del cangrejo. — Es interesante mostrar cómo los diecinueve pares de apéndices de un *decápodo* —de un *cangrejo*, por ejemplo— están adaptados y diferenciados con vista a las diversas funciones que tienen que cumplir.

1° Las *pequeñas antenas* (an) y sobre todo las *grandes antenas* (AN) son como látigos multiarticulados y táctiles. En la base de las pequeñas antenas se abren los órganos de equilibrio *(estatocistos)* constituidos por una cámara con cerdas sensibles y granos de arena. Según la posición del animal, los granos de arena descansan más o menos sobre las cerdas e informan al animal acerca de la índole de su equilibrio a la manera de nuestros canales semicirculares del oído. En la base de las grandes antenas se abren los órganos urinarios (glándulas verdes);



2° Las *mandíbulas* son robustas y dentadas (md);

3° Las *primeras y segundas maxilas* (mx1, mx2), son laminosas;

4° Las *patas-maxilas* (pmx1, pmx2, pmx3) son la transición, como su nombre indica, entre las verdaderas maxilas y las verdaderas patas. Las del tercer par son particularmente interesantes, pues reúnen todas las partes de un miembro típico: una base, o *protopodito*, formada por dos segmentos; una rama externa, o *exopodito*; una rama interna, o *endopodito*, formada por cinco artejos. El protopodito tiene *branquias* laminosas y filamentosas. El exopodito desempeña un papel táctil. El endopodito es la pieza masticadora;

5° Las *patas locomotoras* no tienen exopodito. Su protopodito y su endopodito forman una serie no interrumpida de siete piezas. Las dos últimas constituyen los frenos de la uña. En las bases de las patas locomotoras del tercer par se abren los orificios genitales de la hembra. En las bases de las del quinto par se abren los orificios del macho;

6° Las *patas abdominales* (pa) sirven para la reproducción. Los dos primeros pares del macho son *estiletes de acoplamiento*. Los cuatro últimos de la hembra sirven para sostener los huevos durante la incubación;

7° Completamente al extremo del abdomen se encuentra un par de *patas natatorias* (pn) encuadrando el telson. El conjunto forma el *abanico caudal*, cuyos golpes en el agua tienen por objeto obtener el desplazamiento del cangrejo hacia atrás.

Principales decápodos. — Los decápodos se dividen en tres grupos, según la importancia de su abdomen.

1° Los **macruros** (del griego *makros*, largo, y *ura*, cola) tienen un abdomen bien desarrollado, que constituye su parte comestible. Son los *camarones* (v. *fig.* p. 373), los *cangrejos*, los *bogavantes*, los *langostinos* y las *langostas*. La mayor parte nacen ya provistos de todos sus segmentos y apéndices. La larva *filosomo* de langosta es de un tipo particular. El desarrollo, en el cangrejo, se efectúa enteramente en el huevo;

2° Los **anomuros** (del griego *anomos*, anormal y *ura*, cola) tienen un abdomen bastante bien desarrollado, pero blando. Son los *paguros* o *ermitaños*, de tan curiosas costumbres. Para protegerse, habitan conchas vacías de moluscos gasterópodos y han adquirido, por este hecho, un enrollamiento característico del abdomen. Los apéndices terminales son uñas de fijación. Los paguros viven frecuentemente en compañía de anélidos, de esponjas, de briozoarios, de hidrarios y de actinias. Se trata de verdaderas simbiosis o asociaciones de beneficios recíprocos.

Una especie de paguros, impropiamente llamados *cangrejos de los cocoteros*, está adaptada a la vida terrestre;

3° Los **braquiuros** (del griego *brachus*, corto, y *ura*, cola) tienen un abdomen reducido y replegado bajo el cefalotórax. Son los cangrejos de toda especie *(ucas, centollas, arañas de mar)*. Nacen, como los anomuros, con segmentación y apéndices muy imperfectos aún.

Clase de los miriápodos

Los **miriápodos** (del griego *myrios*, innumerable, y *pous*, *podos*, pie) *son artrópodos anteníferos, terrestres, cuyo cuerpo se compone de una cabeza seguida de numerosos segmentos, todos ellos semejantes.*

La cabeza tiene un par de antenas, un labio superior o labro, un par de mandíbulas y dos pares de maxilas.

Cada uno de los anillos que siguen a la cabeza tiene uno o dos pares de patas, sin que el total pase ordinariamente de un centenar. La expresión inglesa *centipedos*, o la española *ciempiés*, son, pues, bastante justas para designar a estos animales.

En el cuerpo de los miriápodos, todos los órganos se extienden en el sentido de la longitud: el *tubo digestivo*, que es rectilíneo; el *corazón*, que está formado por numerosas cámaras en serie lineal; el *sistema nervioso*, en forma de cuerda de nudos, etc.

El aparato respiratorio se compone de *tráqueas* análogas a las de los insectos y perfectamente metamerizadas.

Los únicos órganos sensoriales son *pelos táctiles* y ojos simples u *ocelos*.

Desde todos los puntos de vista, los miriápodos deben ser considerados como bastante cercanos de los insectos más inferiores.

Se les divide en *quilópodos* y *diplópodos*.

Quilópodos. — Su cuerpo aplastado tiene en cada anillo un solo par de patas, insertas lateralmente. Las maxilas son independientes unas de otras o están un poco soldadas en su base. Tras ellas suele haber un par de dientes venenosos *(forcípulas)*, cuya mordedura, si se trata de grandes especies, es muy peligrosa para el hombre. Los quilópodos son carniceros y tienen movimientos rápidos.

Citemos las *escolopendras*, una de cuyas especies, gigante, habita el centro y sur de América, donde es uno de los animales más temido; los *litóbidos*, muy comunes en todas partes, y los *geófilos*, que producen luz. Todas estas especies viven escondidas durante el día y cazan durante la noche.

Diplópodos. — Su cuerpo cilíndrico o aplastado tiene en cada anillo dos pares de patas, insertas ventralmente. Las maxilas están soldadas entre sí y forman un labio inferior. No tienen dientes venenosos. Son vegetarianos y sus movimientos son muy lentos.

Citemos los *júlilos*, cuyo cuerpo cilíndrico, de un negro brillante, se enrolla en forma de espiral, y los *gloméridos*, que se enrollan en forma de bola, como las cochinillas. Los diplópodos son nocturnos, como los quilópodos, y buscan durante el día el abrigo del musgo, las piedras y las cortezas.

Clase de los insectos

Los **insectos** *o* **hexápodos** (del griego *hexa*, seis, y *pous*, *podos*, pie) *son artrópodos anteníferos, aéreos, cuyo cuerpo se compone de una cabeza, un tórax y un abdomen. La cabeza tiene un par de antenas y varias piezas bucales. El tórax, formado de tres segmentos, posee tres pares de patas y, generalmente, dos pares de alas. El abdomen es ápodo. El aparato respiratorio es un conjunto de branquias. El desarrollo permite en general metamorfosis.*

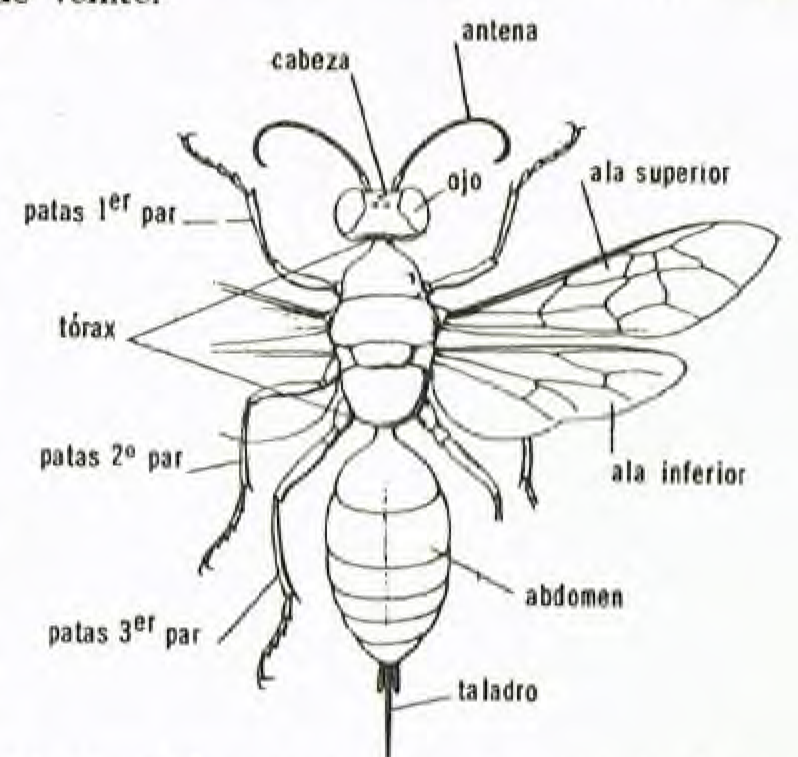
Segmentación de los insectos. — Los insectos (latín *insecta*, griego *entoma*) son, etimológicamente, animales segmentados. Antiguamente se designaba con el nombre de insectos, además de éstos, cuyo estudio constituye la *entomología*, otros animales tales como los miriápodos, crustáceos, arañas, gusanos, etc.

En los verdaderos insectos, igual que en los crustáceos superiores, el número de segmentos es de veinte.

La *cabeza* tiene seis, pero sólo posee cuatro pares de apéndices: antenas, mandíbulas, primeras maxilas, segundas maxilas, soldadas en su base.

El *tórax* comprende tres segmentos, llamados *protórax*, *mesotórax* y *metatórax*. Cada uno de ellos tiene un par de patas. Los dos últimos pueden tener alas.

El *abdomen* cuenta en principio once segmentos, pero este número puede estar reducido a ocho, cinco, cuatro o tres en algunos insectos.

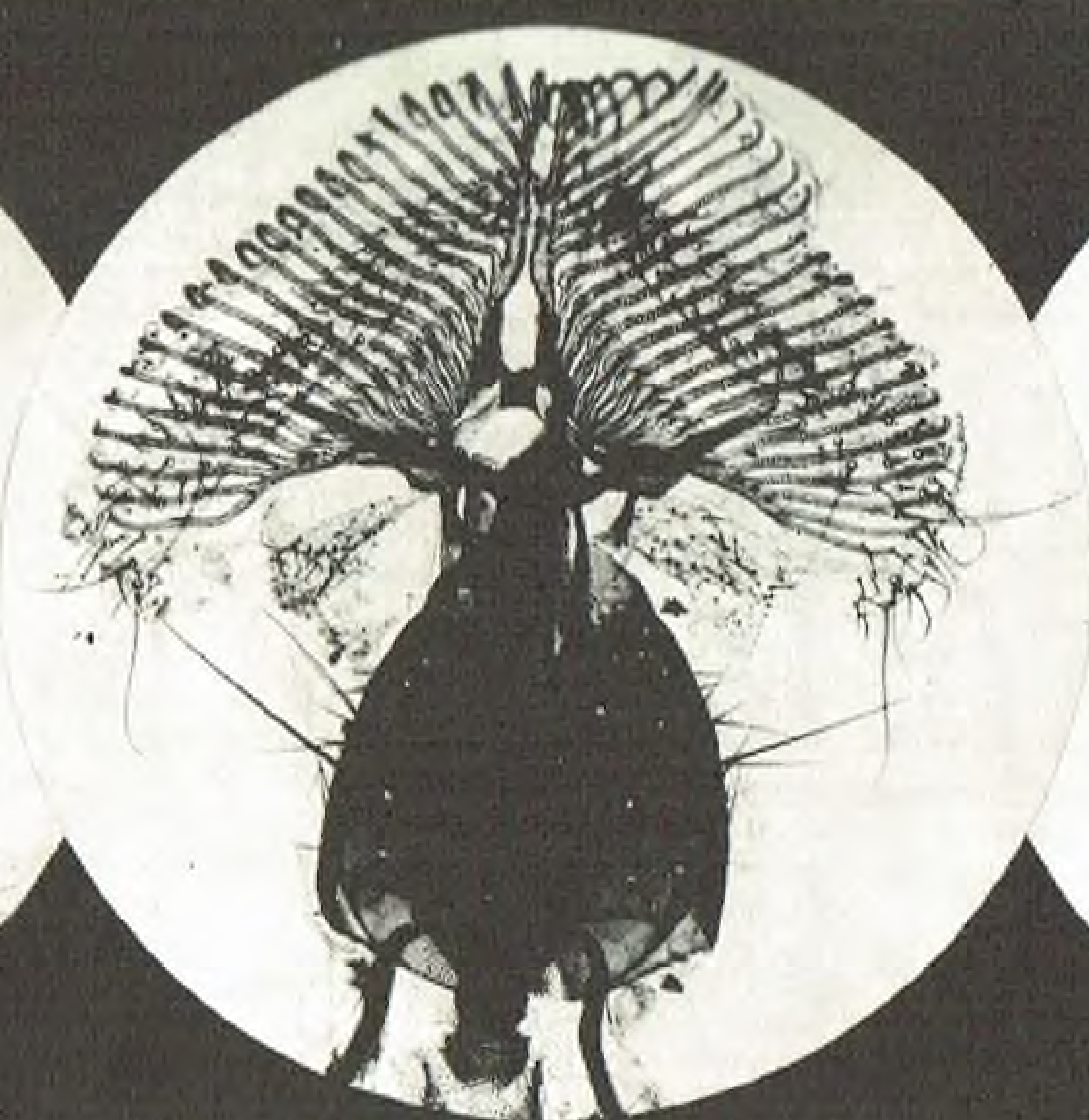
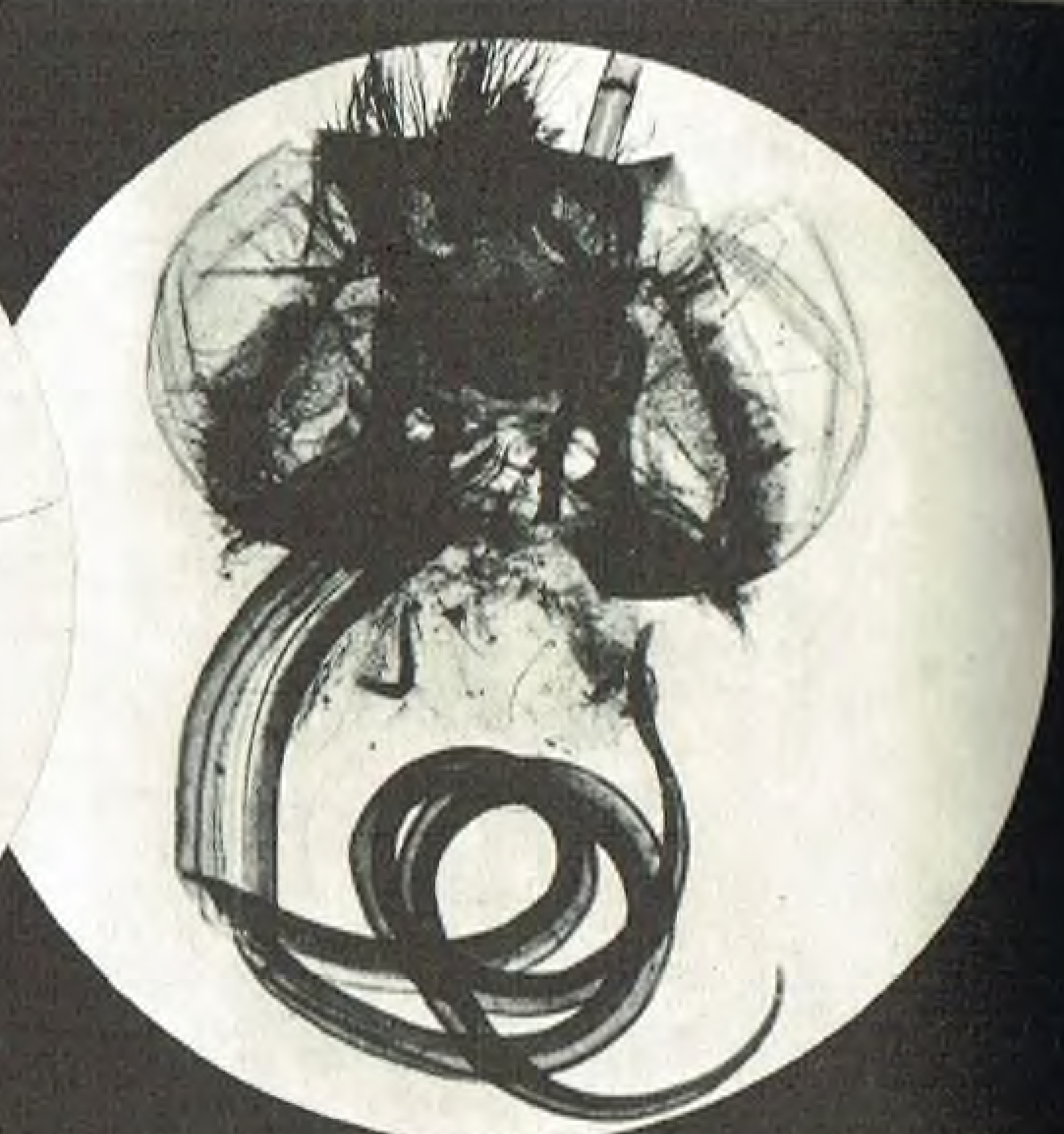


Partes del cuerpo de un insecto (avispa

No existen patas abdominales, salvo si consideramos como tales, y en ese caso profundamente modificadas, los *estilos*, *pinzas*, *oviscaptos*, *aguijones*, etc., que se encuentran en el extremo del cuerpo.

Piezas bucales y regímenes alimenticios. — El carpintero, el cerrajero y el albañil no se sirven de las mismas herramientas. Del mismo modo, los insectos tienen diferentes piezas bucales según se nutran de cuerpos duros *(insectos trituradores)*, de substancias blandas *(lamedores)*, de líquidos *(chupadores)* o de sangre y savia que extraen del cuerpo de los animales y los vegetales *(picadores)*. A cada régimen alimenticio, pues, corresponden piezas bucales apropiadas.

Tipo triturador. — Los insectos que comen alimentos coriáceos son, por ejemplo, la *cucaracha* y la *langosta*. Sus piezas bucales son las siguientes:

Boca de abeja (lamedor) [*Microfot. C. Bille*]

Trompa de mosca (picador) [*Microfot. C. Bille*]

Cabeza y trompa de mariposa (chupador) [*Microfot. J. L. Laporte*]

Un *labio superior* o *labro*, pieza mediana sin relación con los verdaderos apéndices;

Un par de *mandíbulas* robustas, dentadas, sin indicio de segmentación;

Un par de *maxilas* en las que se descubren las diversas partes del miembro primitivo de los artrópodos: una *base* o protopodito de dos segmentos, una branquia externa o exopodito que forma *palpo maxilar*, una branquia interna o endropodito que constituye una doble *lámina masticadora*. Como las mandíbulas, las maxilas están a derecha e izquierda y funcionan como verdaderas cizallas;

Un *labio inferior* formado por la soldadura de otras dos maxilas. Las bases, confundidas, forman el *mentón*. Los exopoditos son *palpos labiales*, y los endopoditos constituyen una cuádruple *lámina masticadora*.

Tipo lamedor. — Habría que decir triturador-lamedor. Las *abejas* tienen, en efecto, un *labro* y *mandíbulas* análogas a los del tipo precedente. Las diferencias no aparecen sino en las maxilas y en el labio inferior.

Las *maxilas* son muy alargadas y consisten esencialmente en una base, un palpo rudimentario y una lámina semejante a un sable, pero provista de pelos y que sirve de raedera.

El *labio inferior* está aún más modificado. Sus palpos son muy largos. Sus láminas masticadoras internas están soldadas en una *lengua*, la cual posee hileras transversales de pelos y se termina en un botón gustativo. Sus láminas masticadoras externas, que son muy cortas, acompañan a la lengua y merecen por ello el nombre de *paraglotis*.

Detalle de una pata de araña *(a la izquierda)* y de una pata de abeja obrera *(a la derecha)* [*Microfot. C. Bille y L. Plouvier*]




El conjunto de maxilas y el labio inferior forma la *trompa*, con la cual la abeja explora las flores en que recoge néctar y polen.

Tipo chupador. — Los insectos de este tipo son las *mariposas*, que aspiran el néctar por medio de una trompa enrollada en forma de espiral *(espiritrompa)*, pero que pueden ser desenrollada. Algunas esfinges tienen una trompa de 20 centímetros.

En corte transversal, se ven sólo dos canales, uno a derecha y otro a izquierda, formando tubo aspirador. No pueden ser otra cosa que maxilas, dado que tienen un pequeño palpo. Las mandíbulas y el labro han desaparecido en ellas. El labio inferior es rudimentario.

Tipo picador. — Para traspasar la piel de los animales, o la corteza de los árboles, se necesitan *estiletes acerados*. Para aspirar después la sangre o la savia, hace falta un *tubo aspirador*, como existe en la trompa de las *chinches*, los *mosquitos* y las *moscas*.

En todos ellos, el tubo de la trompa está constituido por el *labro* y el *labio inferior*, transformados en canales. Por su parte, los estiletes son las mandíbulas y las maxilas, a las cuales se añaden dos piezas suplementarias llamadas *epifaringe* e *hipofaringe*.

Según tenga seis estiletes (tábano), cinco (mosquito), cuatro (chinche) o dos (glossina), la trompa es llamada *hexaqueta, pentaqueta, tetraqueta* o *diqueta*.

En la mosca ordinaria, por último, los estiletes han desaparecido completamente (trompa *aqueta*). El labio inferior, terminado por dos tapones carnosos que forman ventosas, permiten al insecto aspirar toda clase de jugos orgánicos.

Yendo alternativamente del estiércol a las substancias alimenticias, las moscas transportan los huevos de ascárides y de oxiuros y toda clase de bacterias. Su papel es tan nefasto como el de los insectos picadores, a los cuales se debe la transmisión del paludismo, de la fiebre amarilla, de la lepra, de la enfermedad del sueño, del carbunclo, de la peste, del tifus, etc.

Adaptaciones de las patas. — Las *patas ambulatorias* o patas ordinarias se componen de una serie de articulaciones que corresponden al protopodito y el endopodito del apéndice típico de los artrópodos: la *cadera* o coxa, el *trocánter*, el *muslo* o fémur, la *pierna* o tibia y el *tarso*, formado a su vez de una a cinco articulaciones.

Partiendo de este tipo primitivo, que podemos ver, por ejemplo, en una cucaracha, hallaremos el origen de todas las adaptaciones que sufren las patas según las funciones que tienen que cumplir. Así, las *patas saltadoras* de la langosta son las patas posteriores, cuyo muslo está extremadamente desarrollado; las *patas excavadoras* de la cigarra son, por el contrario, las patas anteriores, ensanchadas y provistas de espolones laterales; las *patas nadadoras* del ditíscido son las patas posteriores alargadas, aplanadas y guarnecidas de largas cerdas que aumentan su superficie; las *patas prensiles* de la manta religiosa o *predicador*, cuyo muslo y pierna, cada uno con una doble sierra, se pliegan uno sobre otro después de haber sido lanzados a lo lejos por la cadera, son terribles instrumentos mortíferos.

En la abeja obrera, las patas posteriores están dispuestas para la recolección del polen y la manipulación de la cera. La pierna triangular y la primera articulación ensanchada del tarso forman *cepillo* con sus hileras de pelos, y *pinzas* al acercarse una a otra. La pierna tiene también el hueco llamado *cesta*.

Se observan, por último, modificaciones de las patas según los sexos. Así, los ditíscidos machos tienen sus tarsos anteriores ensanchados y provistos de pelos especiales y de ventosas para asirse a la espalda de la hembra durante el acoplamiento.

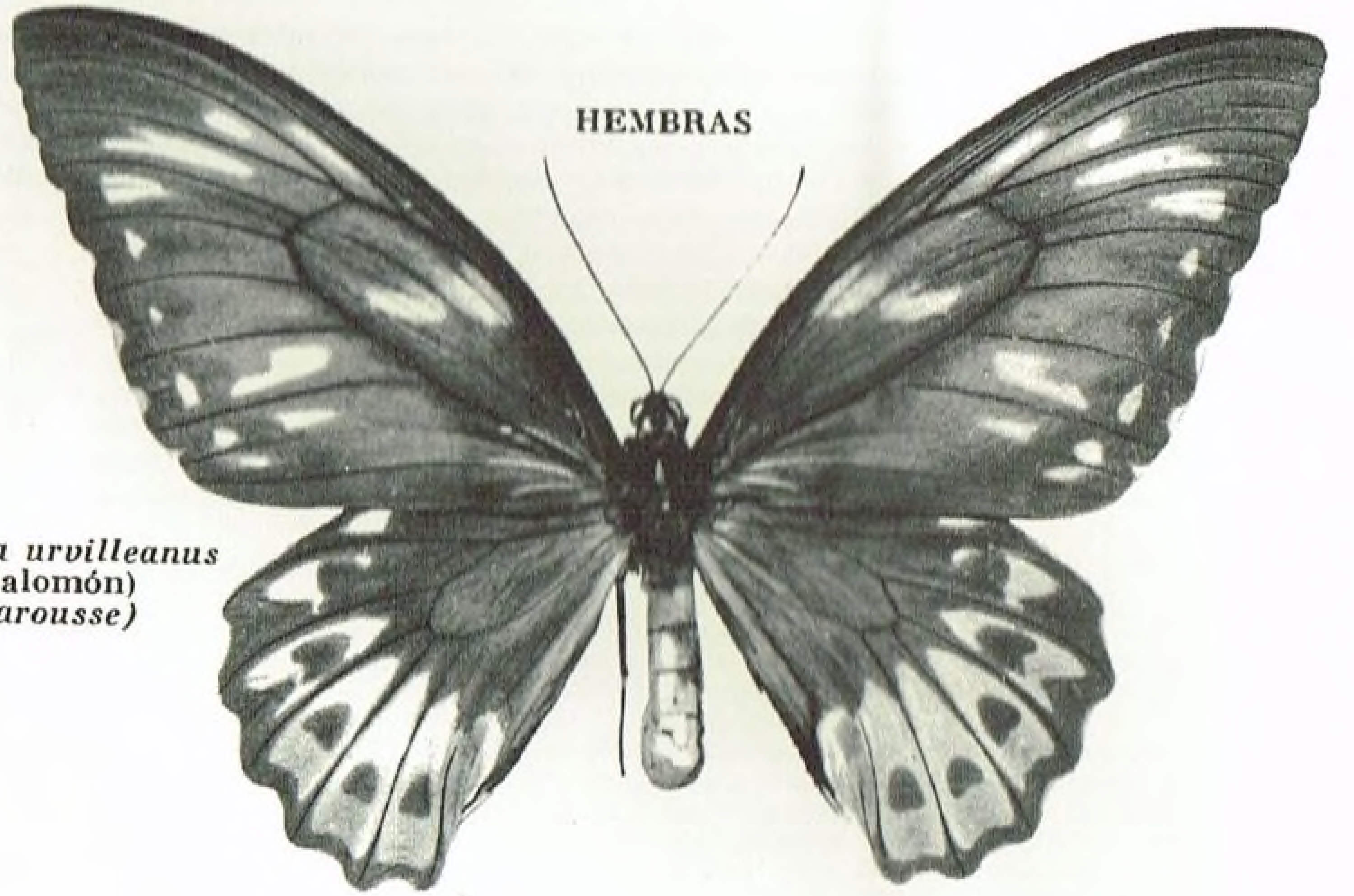
Modificaciones de las alas. — En los terrenos carboníferos se han encontrado insectos con seis alas. La mayor parte de los insectos actuales tienen sólo cuatro, insertas en el mesotórax y el metatórax. Algu-

DIMORFISMO SEXUAL

MACHOS

HEMBRAS





Ornithoptera urvilleanus
(Islas Salomón)
(Fot. Larousse)



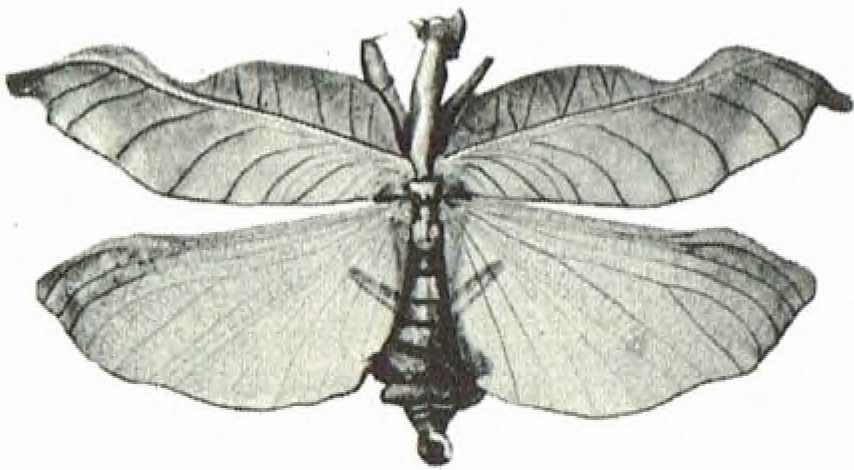


Lymantria dispar
(Según Goldschmidt)





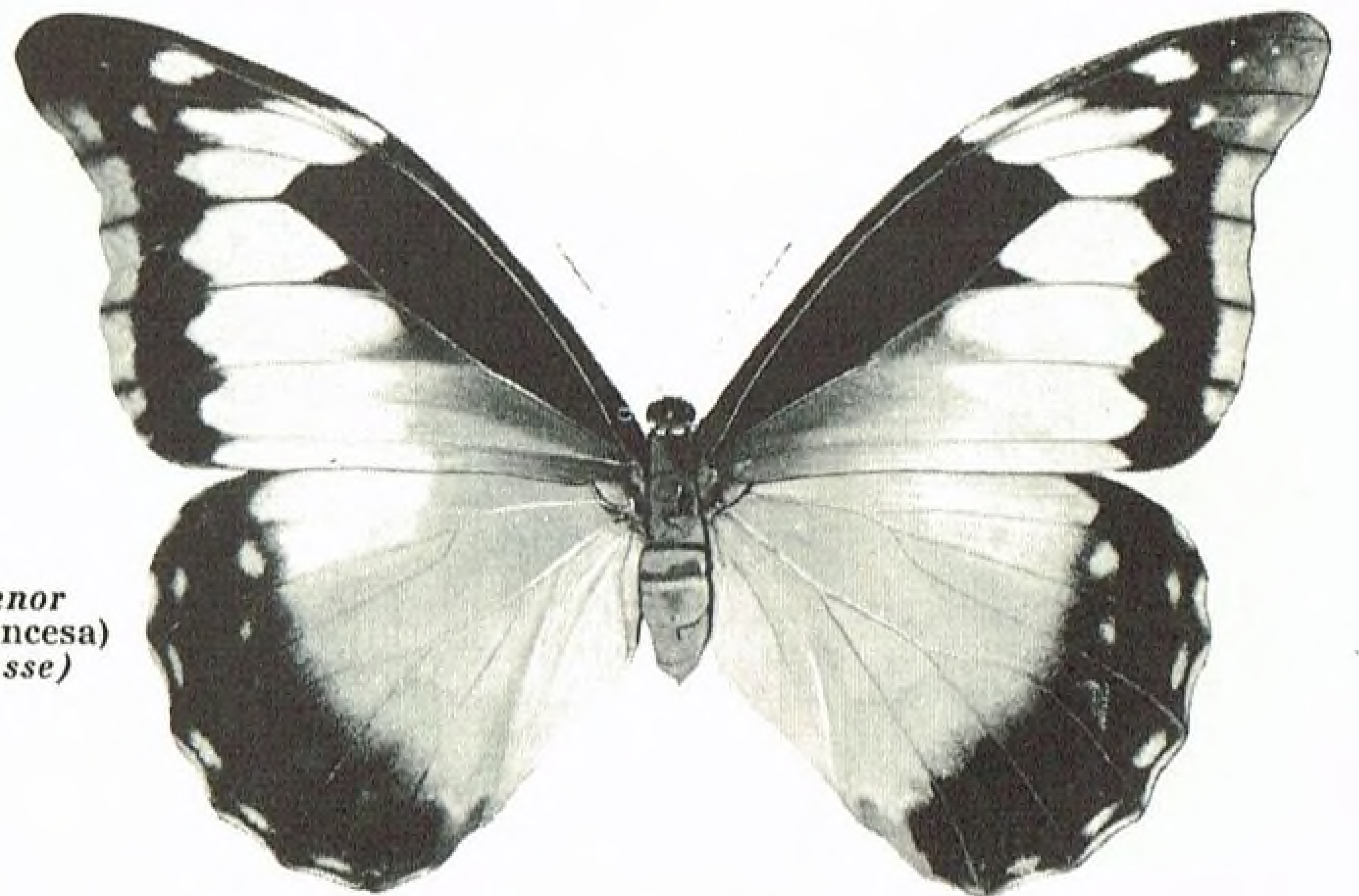
Cheimathoia brumata
(Fot. L. Charles)
La hembra es áptera





Acanthops falcatoria
(Guayana)





Morpho retenor
(Guayana Francesa)
(Fot. Larousse)

nos tienen sólo dos y por ello se les llama *dípteros* (del griego *di*, dos, y *pteron*, ala). En este caso, las alas metatorácicas han sido reemplazadas por *balancines*. Hay también insectos sin alas, ya porque no las han tenido nunca *(apterigotos)*, ya porque las han perdido por diversas razones *(ápteros)*. Tales son los piojos, las pulgas, las chinches, etc.

Cuando hay cuatro alas, pueden ser todas ellas membranosas *(arquípteros, himenópteros)*, o estar cubiertas de minúsculas escamas *(lepidópteros)*. Las dos alas anteriores, mesotorácicas, pueden también ser coriáceas y servir de estuches o *élitros* para las alas posteriores *(ortópteros, coleópteros)*. Los *hemípteros* sólo tienen *semiélitros*. Todos estos caracteres sirven para el establecimiento de la clasificación de los insectos.

Podemos preguntarnos por qué los ápteros han perdido sus alas. Darwin y Lamarck han interpretado este fenómeno a la luz de sus respectivas teorías. Pero es muy probable, en definitiva, que se trate de un problema químico. Se han obtenido insectos sin alas sometiendo



Ala de mosca (*Microfot. C. Bille*)

sus larvas a la acción del ácido cianhídrico. Inversamente, es posible hacerlas crecer en el pulgón del rosal regándolo con sales de magnesio.

Cualquiera que sea su número y su aspecto exterior, las alas están siempre formadas por dos láminas delgadas de quitina, aplicadas una contra otra y sostenidas por *nervaduras*. La disposición de las nervaduras y de los espacios o *células* situados entre ellas sirven para la determinación de las especies.

Aparatos digestivo y excretor. — El tubo digestivo, muy corto en los carnívoros, alcanza su máximum de longitud en los escarabajos. Sus partes constituyentes son: una *faringe* musculosa y aspiradora, propia de los insectos chupadores y picadores; un *esófago*, con buche o sin él, donde se acumulan las substancias alimenticias; una *molleja* de dientes quitinosos que sirve más bien de filtro que de órgano triturador; un *estómago glandular*, cuyas glándulas, sobre todo en los carnívoros, resaltan exteriormente como dedos de guante, y por último, un *intestino* terminal o *recto*.

Este tubo digestivo posee varias glándulas anejas.

En la boca se vierte la secreción de las *glándulas salivales*, secreción unas veces venenosa (mosquitos, chinches), otras coagulable al contacto del aire y que se transforma en seda (orugas, gusanos de seda).

En la parte anterior del intestino hay varios *tubos de Malpighi*, cuyas células contienen ácido úrico y uratos. Son los órganos excretores de los insectos. El excedente de ácido úrico que no puede ser eliminado por los tubos de Malpighi se acumula en las células de un tejido especial, el *cuerpo adiposo*, situado bajo la piel y en la superficie de los órganos. Se trata de un *riñón de acumulación*. Además, y siempre como consecuencia de la insuficiencia renal, el ácido úrico puede acumularse en los tegumentos y dar lugar a los colores brillantes de ciertos insectos.

Junto al ano desembocan las *glándulas anales*. Pueden ser glándulas venenosas relacionadas con un aguijón (abeja) o glándulas asfixiantes cuyo contenido, rico en ácido butírico, proyecta el insecto (*escopetero*) hacia sus enemigos.

Aparatos respiratorio y circulatorio. — Los insectos respiran por medio de *tráqueas*, que llevan el aire a todas las partes del cuerpo. La tráquea es un tubo ramificado que se abre al exterior por un orificio o *estigma*. Su pared está formada por dos capas: una *capa protoplasmática externa*, con numerosos núcleos, y una capa *quitinosa interna*, de la cual una parte está condensada en una *espiral* que mantiene la tráquea abierta.

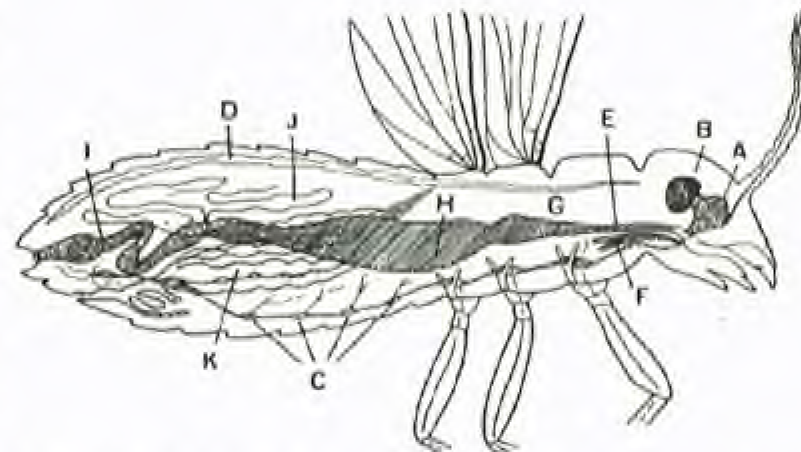
Las últimas ramificaciones o *traquéolas* se terminan en el interior de células que poseen una función respiratoria propia.

Los estigmas son ojales abiertos lateralmente en el límite de los diversos segmentos torácicos y abdominales. Dispositivos especiales (pelos, válvulas) impiden entrar al polvo del aire, y a veces también a los gases tóxicos.

En los insectos inferiores, como en los miriápodos, las tráqueas están metamerizadas. En cada segmento hay un par de *ramificaciones traqueales*. En los insectos superiores se producen anastomosis transversales y longitudinales. Dos gruesos *troncos traqueales*, dilatados a veces en forma de *sacos aéreos* (moscas, abejas, mariposas), reúnen el aire de las diferentes tráqueas y lo reparten por toda la extensión del cuerpo. Al mismo tiempo, el número de estigmas disminuye. La mayor parte de los insectos sólo tienen diez pares: dos en el tórax y ocho en el abdomen.

Como las tráqueas llevan el aire hasta lo más profundo de los tejidos, el aparato circulatorio de los insectos es extremamente rudimentario. Comprende sólo un *corazón* dorsal y un bosquejo de aorta. El corazón es una serie de cámaras separadas unas de otras por válvulas y traspasadas por *ostíolos*. A cada dilatación, debida a *músculos aliformes* exteriores al corazón, la sangre de las lagunas circundantes penetra por los ostíolos. A cada contracción, los ostíolos se cierran y la sangre es impulsada de atrás hacia delante hasta la aorta. Ésta es muy corta y vierte la sangre en las lagunas.

La *sangre* es un líquido generalmente incoloro. A veces (larvas de *Chironomus* o gusanos de cieno) contiene hemoglobina disuelta.



Sección de un insecto (según Kolbe): A, cerebro; B, ocelo; C, cadena nerviosa; D, vaso dorsal; E, esófago; F, glándulas salivales; G, buche; H, estómago; I, intestino; J, tubos de Malpighi; K, ovario

Tráqueas de los insectos acuáticos. — La respiración de los insectos acuáticos se efectúa a expensas del aire atmosférico o del oxígeno que está disuelto en el agua. En cada caso se pueden distinguir diversas modalidades.

1° El *ditíscido* sale de vez en cuando a la superficie del agua y levanta un poco sus élitros para almacenar debajo de ellos una provisión de aire. El *hidrófilo* retiene aire gracias a los pelos que cubren la cara ventral de su tórax;

2° Las *nepas* y las *ranatras*, vulgarmente llamadas *chinches de agua*, disponen de dos estigmas situados en la extremidad posterior del abdomen y prolongados por un largo *tubo respiratorio* que es el que el insecto pone al nivel de la superficie del agua. Las *larvas de mosquitos* y de muchas moscas tienen un tubo análogo que termina en láminas foliáceas o cerdas plumosas. Éstas, extendiéndose en la superficie del agua, aseguran la flotación de esa especie de periscopio;

3° En la *larva de Eristalis*, vulgar gusano de cola de los pozos negros, toda la extremidad de su abdomen se prolonga como tubo respiratorio. Los segmentos de este tubo pueden entrar unos en otros como los elementos de un catalejo;

4° Las *larvas de Chironomus (gusanos de cieno)* tienen una respiración cutánea acrecentada por la presencia, hacia la extremidad posterior del cuerpo, de apéndices digitados que sirven de branquias;

5° Muchas larvas acuáticas tienen *branquias traqueales*, es decir, salientes dorsales o laterales de pared delgada que encierran ramificaciones traqueales. Los intercambios gaseosos se efectúan a través de la pared. Las branquias son filamentosas en las *larvas de friganos*, y foliáceas en las de *efímeras* o *cachipollas*.

6° Las larvas de *libélulas* tienen *branquias rectales*, especie de repliegues foliáceos, que contienen ramificaciones traqueales, situados en el interior de su intestino. El animal aspira y expulsa alternativamente el agua por esa parte de su tubo digestivo.

Perfeccionamiento del sistema nervioso. — El sistema nervioso de los insectos, como el de todos los artrópodos, es ganglionar, pero presenta en ellos notables perfeccionamientos.

Los insectos inferiores y las larvas tienen una *cadena ventral* doble (escala de cuerda) o simple (cuerda de nudos) unida a los *ganglios cerebroides* por un *collar periesofágico*.

A medida que la organización del insecto es más elevada, se asiste a la soldadura de los ganglios de cada par, y después a la coligación de los pares sucesivos. Una abeja tiene sólo dos ganglios torácicos y cuatro ganglios abdominales. Una mosca tiene todos sus ganglios unidos en una masa torácica.

Al mismo tiempo, los ganglios cerebroides se amplían y se convierten en un verdadero *cerebro*, en el cual se distinguen un *cerebro anterior*, un *cerebro medio* y un *cerebro posterior*.

Las piezas bucales son inervadas por el *ganglio subesofágico*, que es a veces una parte del cerebro.

Variedad de los órganos sensoriales. — Los insectos poseen una gran variedad de órganos sensoriales.

Pelos sensoriales. — Estos pelos difieren de los pelos ordinarios en que son huecos y en que se relacionan con una neurona sensitiva situada en su base. Algunos están implantados en un hoyuelo. Otras veces, sólo existe el hoyuelo. Así se pasa de los pelos *táctiles* a los *hoyuelos olfativos* y *gustativos*.

Los pelos táctiles pueden encontrarse en toda la superficie del cuerpo, pero generalmente están en los palpos, las patas y las alas.

Los hoyuelos gustativos están en las piezas bucales.

Los hoyuelos olfativos están localizados en las *antenas*. Pueden contarse hasta 17 000 en una antena de mosca. Ahora bien, las antenas son infinitamente variadas en longitud y forma. Hay antenas filamentosas, plumosas, pectinadas, etc. Grupos enteros son definidos por sus antenas. Por ejemplo, los *lamelicornios*, los *clavicornios* y los *longicornios*. Muchas veces, los machos tienen antenas más desarrolladas que las hembras y reconocen a éstas por el olfato. También las hormigas de una tribu se reconocen por el olfato. La olfación desempeña un papel importantísimo en los insectos.

Órganos auditivos. — Los órganos auditivos son de dos clases: órganos *cordotonales*, especie de cuerdas tirantes relacionadas con células sensitivas, y *órganos timpánicos*, más perfeccionados, que consisten en una membrana dispuesta en el orificio de una caja de resonancia de cuyo fondo parte un nervio. Hay una gran analogía entre estos órganos y la oreja humana. Los acridios tienen un par de órganos timpánicos en el primer segmento abdominal. Los grillos y las langostas tienen un par en cada una de sus patas anteriores.

Órganos visuales. — Los órganos visuales son los *ocelos* o bien los *ojos de facetas*. Los ocelos existen sólo en las larvas, así como en las pulgas y los piojos. Los ojos de facetas existen en la mayor parte de los adultos y pueden estar formados por varios millares de *omatidias* u ojos simples. Un ojo de esfinge tiene 25 000 facetas. En los tábanos, las libélulas, etc., los ojos ocupan casi toda la cabeza. Una abeja tiene dos grandes ojos de facetas y tres ocelos frontales.

Al lado de los órganos sensoriales, que son verdaderos receptores, pueden ser estudiados órganos emisores de sonidos o de luz.

Los **órganos sonoros** son muy diversos. El zumbido de las moscas, las abejas y los abejorros es debido a las vibraciones rápidas de las alas y las válvulas que cubren los estigmas. La estridulación de los grillos y las langostas es producida por el frotamiento de los élitros. En los acridios este mismo resultado es obtenido por el frotamiento de los muslos posteriores dentados contra crestas igualmente dentadas del abdomen. Las cigarras, por último, poseen verdaderos *timbales* cuya membrana vibra bajo la acción de un músculo.

Los **órganos luminosos** existen en algunos insectos: los *Lampyris* o luciérnagas, los piróforos, etc., que los tienen en el tórax o en el abdomen. Las luciérnagas hembras tienen los suyos en la cara ventral de los tres últimos segmentos abdominales. Son éstos cúmulos de células donde se ha descubierto la existencia de dos substancias: una *luciferina* y otra *luciferasa*, que actúa como diastasa oxidante.

Dimorfismo sexual.

— En todas las especies, machos y hembras difieren fundamentalmente por sus glándulas genitales y sus órganos de acoplamiento. Pero pueden también distinguirse por *caracteres sexuales secundarios*, que permiten reconocerlos a primera vista. En este caso, hay una forma macho y otra hembra, o sea un *dimorfismo sexual*, del que los insectos ofrecen ejemplos característicos. Las diferencias pueden manifestarse por:

1º *El tamaño*. Los machos suelen ser más pequeños que las hembras. Hay, sin embargo, que exceptuar los lucanos, los dinastes y géneros vecinos, en los que se produce precisamente lo contrario;

2º *La coloración*. Los machos tienen generalmente colores más vivos que los de las hembras. Así ocurre en el caso de muchas mariposas;

3º *La ornamentación de la cabeza y el tórax*. Estas partes del cuerpo presentan con frecuencia (en los coleópteros) tubérculos, espinas, cuernos más desarrollados en un sexo que en otro;

4º *Los órganos locomotores*. Frecuentemente, sólo los machos tienen alas; las hembras son ápteras (cucaracha, luciérnaga). En el ditíscido, los élitros de la hembra están ornados de estrías sobre las cuales vienen a adherirse las ventosas de las patas anteriores del macho. Muchas mariposas machos tienen las patas delanteras más o menos reducidas;

5º *Las piezas bucales*. En el lucano o ciervo volante, los machos tienen enormes mandíbulas semejantes a cuernos. Los mosquitos hembras tienen una trompa picadora y se abrevan de sangre. Los machos no tienen estilete y viven sobre las flores;

6º *Los órganos sensoriales*. Los ojos y las antenas u órganos olfativos, suelen estar más desarrollados en los machos que en las hembras. Así, los ojos de una mosca macho se tocan en la línea media, y están separados en el otro sexo. En una especie de hormigas se cuentan 400 facetas en el ojo de los machos, 200 en el de las hembras y una docena solamente en el de las obreras;

7º *Los órganos sonoros y luminosos*. Los sonoros están siempre muy desarrollados en los machos. Los luminosos, por lo menos en el gusano de luz, pertenecen sólo a las hembras.

Partenogénesis.

— Hemos estudiado ya la partenogénesis o reproducción virginal en los rotíferos y los cladóceros. Los insectos ofrecen muchos ejemplos que se pueden clasificar como partenogénesis *facultativa*, partenogénesis *geográfica* y partenogénesis de la *estación*.

Partenogénesis facultativa. — La reina de una colmena de *abejas* no se acopla más que una sola vez en el curso de su vida (durante el vuelo nupcial) y hace provisión de espermatozoides en una bolsa copuladora que depende de su vagina. Los óvulos, en el momento de la puesta, serán fecundados o no. Si son fecundados dan hembras. Si no son fecundados (huevos partenogenésicos), sólo dan machos. Eso explica que éstos no sean jamás híbridos y conserven íntegramente los caracteres de la rama materna. Como tienen menos cromosomas que las hembras, tienen también menos vitalidad y representan en la colmena el papel de perezosos o parásitos.

Partenogénesis geográfica. — Los *fasmas* son partenogenésicos en el mediodía de Francia, donde escasean los machos, pero no en África del Norte, donde son tan numerosos como las hembras.

Partenogénesis de estación. — En el *pulgón del rosal*, los individuos de verano son exclusivamente hembras ápteras que se reproducen partenogenésicamente. En otoño aparecen machos alados y hembras ápteras que se acoplan. Los huevos fecundados dejan pasar el invierno para dar nacimiento, en la primavera siguiente, a nuevas hembras partenogenésicas.

Puede resumirse este ciclo de la manera siguiente, designando O los huevos fecundados, *o* los no fecundados, P las hembras partenogenésicas, M los machos y F las hembras:

$$O - P - o - P - o - P - o - P \left\langle \begin{matrix} o - M \\ o - F \end{matrix} \right\rangle O.$$

El ciclo de la *filoxera* es más complejo. En primavera, y durante una parte del verano, se suceden varias generaciones de hembras ápteras, llamadas *galícolas* porque pican las hojas de la vid y determinan la formación de excrecencias o agallas. Al final del verano, las hembras galícolas emigran a las raíces de la vid y se hacen *radicícolas*. En ese momento provocan tumores que pueden ser mortales para la planta. Pero, en otoño, aparecen hembras aladas que salen de tierra y diseminan la especie. Son *emigrantes*. Sus huevos dan machos y hembras ápteras. En fin, éstas ponen huevos que, después de haber sido fecundados y pasado el invierno bajo la corteza de las cepas, dan en la primavera siguiente hembras galícolas.

Tal es al menos el ciclo completo de la filoxera en América del Norte, su país de origen. Llamemos PG a las hembras partenogenésicas galícolas, PR a las radicícolas, PE a las emigrantes. El ciclo se resume del modo siguiente:

$$O - PG - o - PG - o - PG - o - PR - o -$$

$$- PR - o - PE \left\langle \begin{matrix} o - M \\ o - F \end{matrix} \right\rangle O.$$

En Europa, el ciclo es más sencillo. Sólo hay hembras radicícolas y, de vez en cuando, a muy largos intervalos, individuos sexuados. La partenogénesis es prácticamente indefinida.

Poliembrionía.

— Algunos himenópteros ponen sus huevos, con ayuda de un fino aguijón, en el interior de los huevos de otros insectos. Si un huevo de *Encyrtus* es puesto en un huevo de *iponomeuta* las células que provienen de aquél, por cariocinesis, no tardan en aislarse y evolucionar cada una por su cuenta. Tenemos finalmente varios embriones, y después varias larvas, procedentes de un solo huevo. Esto es la *poliembrionía*. Al mismo tiempo, el huevo de iponomeuta se ha convertido en oruga. Ésta contiene las larvas de *Encyrtus*, que le devoran progresivamente las vísceras y no dejan por último sino un despojo.

Metamorfosis.

— Los insectos, de ordinario *ovíparos*, pueden también ser *vivíparos* o, mejor aún, *larvíparos*. Así es como las hembras partenogenésicas de los pulgones dan sus crías vivientes. Muchas moscas, especialmente la glossina o *tse-tsé*, transmisora de la enfermedad del sueño, dan igualmente larvas, que se transforman en ninfas apenas nacidas. Pero, sea cual fuere el caso de que se trate, los insectos no vienen generalmente al mundo bajo su forma definitiva, y deben sufrir *metamorfosis* más o menos complejas. Distinguiremos cuatro casos:

Metamorfosis del gusano de seda: 1. Nacimiento del gusano; 2. Gusano adulto; 3, 4, 5. Formación del capullo; 6. Corte del capullo con crisálida; 7. (*página siguiente*). Nacimiento de la mariposa. (*Fot. R.-H. Noailles*)





1º *Insectos sin metamorfosis.* Ciertos insectos desprovistos de alas en estado adulto (tisanuros, piojos, chinches de las camas) nacen con su forma definitiva y crecen sólo mediante una serie de mudas de su envoltura exterior;

2º *Insectos de metamorfosis incompletas.* Éstos nacen con la forma adulta, pero sin alas. Las partes que les faltan crecen en cada muda o sólo durante las últimas mudas. Tal es el caso en los acridios y las cucarachas. Por otra parte, la larva puede tener un modo de vida diferente al del adulto. Cuando es acuática (libélula, cachipolla), los órganos adecuados a este género de vida deben desaparecer y la metamorfosis es un poco más completa. Pero, en todos los casos, el animal no deja de ser activo y de alimentarse;

3º *Insectos de metamorfosis completas.* Hay en este caso tres estados sucesivos y muy distintos: el *estado larvatorio*, el *ninfal* y el *adulto*.

Se distinguen cuatro tipos de larvas:

a) Las *larvas campodeiformes* (en forma de campodeidos, insectos primitivos), que tienen el cuerpo alargado, aplanado, provisto de seis patas abdominales. Poseen ocelos, piezas bucales trituradoras y son muy móviles y carniceras. Ejemplo, la larva de cárabo;

b) Las *larvas eruciformes* u *orugas* (del latín *erucae*), que tienen el cuerpo alargado, cilíndrico, provisto de seis patas torácicas y de falsas patas abdominales. Tienen ocelos, piezas bucales trituradoras y son vegetarianas;

c) Las *larvas melolontiformes*, cuyo tipo es el gusano blanco del abejorro. Estas larvas viven en la tierra o en los bosques y se sirven poco de sus patas, que son cortas. Su régimen es vegetariano;

d) Las *larvas vermiformes* o *ápodas*, que están desprovistas de patas y parecen gusanos. Son parásitas (larva de moscardón) o viven en medios orgánicos (larva de moscarda).

La vida larvaria puede ser de larga duración (cinco años en el lucanus y tres en el abejorro). Llegada a su fin, la larva, que ha alcanzado su tamaño máximo, evacúa el contenido de su tubo digestivo y se transforma en *ninfa*. A veces arroja, previamente, su piel larvaria. Otras, se envuelve en un *capullo* o se cuelga por medio de un hilo de seda que segregan sus glándulas salivales. Se distinguen:

a) Las *ninfas propiamente dichas*, de las que todas las partes son visibles y libres. Algunas son móviles (mosquito). La mayor parte son inmóviles.

b) Las *crisálidas* o ninfas de mariposa, cuyas partes son visibles, pero que están fajadas y son incapaces de cualquier movimiento.

c) Las *papas* o ninfas de mosca, cuyas partes son invisibles por estar encerradas en la piel larvaria.

El período ninfal dura generalmente unas semanas, en el curso de las cuales se produce una modificación completa de la organización del insecto. A su terminación, la ninfa se abre y deja salir el *adulto* o *imago* (imagen de sus ascendientes), que es inmediatamente apto para la reproducción;

4º *Insectos de hipermetamorfosis.* Los estados sucesivos son los mismos que en el caso precedente, pero con la complicación de que hay varias formas larvarias sucesivas, adaptadas a diferentes modos de existencia, y separadas a veces por cortos períodos de reposo (seudoninfas). Esto es lo que sucede en los melaes y los sitaris.

Los sitaris ponen sus huevos a la entrada de una madriguera de abejas cavadoras. La primera larva que sale es el *triungulino*, así llamada a causa de las tres garras que terminan sus patas. Esta larva se engancha a los pelos de una abeja y se deja llevar así durante varios días. Cuando sobreviene el acoplamiento y después la puesta de la abeja, el triungulino se adhiere a uno de los huevos y de este modo llega a un alvéolo lleno de miel. Se transforma entonces en *larva ápoda* y se nutre abundantemente durante varias semanas. Terminados los festines, la larva se vuelve inmóvil *(seudoninfa)* y luego se transforma en una *nueva larva ápoda*, antes de ser ninfa *verdadera* y por fin *imago*.

Histólisis e histogénesis. — Durante el período ninfal, ciertos tejidos y órganos desaparecen *(histólisis)*, y otros tejidos y órganos se forman *(histogénesis)*. Es una crisis de crecimiento de cuya especie no se encuentra otra en parte alguna.

Con la **histólisis**, los órganos que más han funcionado en la larva desaparecen para dar paso a otros. Éstos son los músculos, el tubo digestivo, las tráqueas, etc. Se ve, por ejemplo, reunirse los glóbulos blancos en la superficie de los músculos, y penetrar después en el interior por efracción. Cada fibra es entonces abierta, despedazada, ingerida y después digerida. Se trata de una *fogocitosis* clásica.

La **histogénesis** es lo contrario de la histólisis. Se forman nuevos órganos; otros se reforman. En esto intervienen los *discos imaginales* o *nidos de regeneración*, grupos de células que han permanecido jóvenes e intactas en el curso de la vida larval sin ser alteradas por la histólisis. Alrededor del intestino, por ejemplo, existen tales células, que no tienen sino que multiplicarse para formar un nuevo epitelio intestinal exterior al antiguo. Evidentemente, los materiales procedentes de la histólisis pueden ser utilizados también y colaboran a la histogénesis.

Ciertos órganos no son modificados y se transmiten directamente de la larva al adulto. Así sucede con el corazón y los ganglios nerviosos. Éstos pueden simplemente unirse, como se ha indicado antes.

Para apreciar la importancia de las metamorfosis en los insectos, basta comparar una oruga con una mariposa.

ORUGA	MARIPOSA
No hay alas	Cuatro alas
Falsas patas	No hay falsas patas
Ocelos	Ojos de facetas
Piezas bucales trituradoras	Piezas bucales chupadoras

Clasificación de los insectos. — Hay que distinguir primero dos subclases: la de los **apterigotos** o insectos primitivos, desprovistos de alas, y la de los **pterigotos**, que comprende los insectos alados o que son ápteros por regresión de las alas. La primera subclase encierra el orden único de los *tisanuros*, insectos trituradores que no sufren metamorfosis. La segunda subclase comprende ocho órdenes, divididos en la forma que indica el cuadro:

CLASIFICACIÓN DE LOS INSECTOS

Piezas bucales trituradoras	Metamorfosis incompletas	Cuatro alas blandas	**Arquípteros**
		Dos élitros y dos alas blandas ...	**Ortópteros**
	Metamorfosis completas ...	Cuatro alas blandas	**Neurópteros**
		Dos élitros y dos alas blandas ...	**Coleópteros**
Piezas bucales trituradoras-lamedoras	Metamorfosis completas ...	Cuatro alas blandas	**Himenópteros**
Piezas bucales chupadoras	Metamorfosis completas ...	Cuatro alas escamosas	**Lepidópteros**
Piezas bucales picadoras-chupadoras ...	Metamorfosis completas ...	Dos alas solamente	**Dípteros**
	Metamorfosis incompletas	Cuatro alas	**Hemípteros**

Tisanuros. — Además de su carencia primitiva de alas, los *tisanuros* tienen varios caracteres que los asemejan a los ciempiés: pequeña separación entre tórax y abdomen, existencia frecuente de apéndices abdominales, piezas bucales trituradoras, ramificaciones traqueales metamerizadas, ocelos, ausencia de metamorfosis, etc.

Los *tisanuros* viven debajo de las hojas y el musgo, y corren o brincan con agilidad. Los *lepismas* o *pececillos de plata* viven en las casas y se nutren de azúcar, papel, etc.

Arquípteros. — Los *arquípteros* (del griego *arkhe*, origen) son, a su vez, los insectos alados más primitivos. En efecto, sus piezas bucales son del tipo triturador, sus cuatro alas son semejantes, blandas y recorridas por nervaduras simples, y sus metamorfosis son incompletas. Son los termes o comejenes, las libélulas, las cachipollas y las perlas.

Los *comejenes* u *hormigas blancas* no deben confundirse con las verdaderas hormigas. Su cuerpo es más pesado y su tórax está más ampliamente unido al abdomen. Además, sus metamorfosis son casi nulas.

Viven en *sociedades* que cuentan varios millares de individuos y fabrican, en los países cálidos, grandes construcciones llamadas *termiteros* o *comejeneras*.

Una comejenera puede alcanzar hasta cinco metros de altura y su construcción típica comprende: en la cumbre, una vasta cámara que sirve de regulador térmico; debajo, cámaras de incubación y de cría de los comejenes jóvenes; más abajo, cámaras de aire; en el piso bajo, por último, la cámara real, rodeada de pasillos de servicio que se prolongan bajo tierra a gran distancia.

La sociedad comprende cuatro especies de individuos: primero el *rey* y la *reina*, que, alados en su juventud, se desprenden de las alas después del vuelo nupcial. Habitan permanentemente la cámara real y se consagran a la reproducción. La reina presenta la más monstruosa hipertrofia abdominal que pueda imaginarse. Alcanza el volumen de una salchicha y pone sin parar, día y noche, un huevo por segundo, o sea alrededor de 30 millones por año y 150 millones en el curso de su vida. Esta prodigiosa fecundidad le permite tener un número considerable de súbditos. Éstos se afanan alrededor de la *pareja real*. Unos son *obreros*, individuos estériles, que cuidan los huevos y las larvas, alimentan y limpian a la pareja real, construyen la comejenera y realizan todos los trabajos. Los otros son *soldados*, también estériles, pero provistos de enormes mandíbulas. Su papel es defender a la pareja real, así como a las obreras en sus expediciones. Hay, por lo general, dos clases de obreros y tres clases de soldados especializados en diferentes trabajos. Volvemos a encontrar aquí —y esta vez como en las sociedades humanas— el principio fundamental de la división del trabajo.

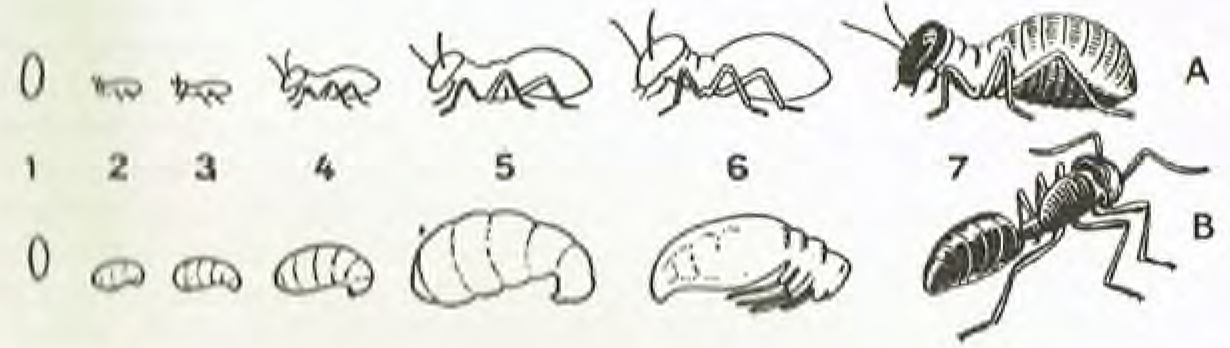
Los comejenes se nutren de madera, que digieren gracias a flagelados simbióticos que viven en su intestino. Atacan las construcciones del hombre y causan estragos incalculables.

Las *libélulas* o *caballitos del diablo* suelen ser incluidas en un grupo especial (odonatos) a causa de sus grandes ojos y de sus larvas acuáticas, que respiran por branquias rectales. Son animales rapaces y carniceros, de vuelo sumamente rápido.

Las *efímeras* (cachipollas), así llamadas por la brevedad de su vida adulta, tienen larvas también acuáticas. La imago no vive más que para reproducirse y morir: sus piezas bucales y su tubo digestivo están atrofiados. La larva, por el contrario, vive de dos a tres años en las charcas y respira por medio de branquias abdominales. A su lado se clasifican las *perlas*, que, incluso adultos, tienen sólo rudimentos de branquias.

Ortópteros. — Se distinguen de los arquípteros por la diferenciación de sus alas: las anteriores son coriáceas y constituyen estuches u *élitros* bajo los cuales se resguardan, durante el reposo, las alas posteriores: éstas son blandas y apropiadas para volar. Los *ortópteros* se distinguen por su adaptación a diversos géneros de locomoción.

El tipo primitivo es la *cucaracha* o *curiana*, cuyas seis patas son idénticas. Estos insectos vivían en los bosques carboníferos y no han cambiado su tipo en el curso de los tiempos geológicos. Se les encuentra actualmente en las habitaciones humanas (cocinas, panaderías), donde se nutren de desperdicios. Las *forfículas* o *tijeretas* se encuentran en los huertos y penetran en el interior de los frutos. Su abdomen se termina por una pinza absolutamente inofensiva.



Desarrollo comparado de un comején A y de una hormiga B: 1. Huevo; de 2 a 6. Desarrollo del comején joven y de la larva de hormiga; 7. Insectos adultos *(según Fuller)*

El *mimetismo* de los *fasmas* es extraordinario. Parecen hojas secas (filios) o ramillas (bacilos), hasta el punto de pasar como tales cuando están inmóviles. Se ha querido ver en este mimetismo una protección contra los pájaros. En realidad, éstos son poco sensibles a las formas y a los colores y distinguen sobre todo el movimiento. Un bacilo que se mueva es visto antes que un insecto no mimético que esté inmóvil.

La *manta religiosa* o *predicador* debe su nombre a sus patas prensiles anteriores, formidables armas de combate, que durante el reposo mantiene en actitud de rezo. Durante el acoplamiento, la hembra devora al macho.

Los *acridios* tienen las patas posteriores acomodadas para el salto. Sus antenas son cortas. Sus órganos timpánicos están en el primer anillo abdominal. Ciertas especies son sedentarias; otras son migratorias y se arrojan en nubes inmensas sobre los territorios agrícolas de los países cálidos, donde hacen enormes destrozos. Los huevos, puestos en tierra (unos 500 por hembra), dan nacimiento, al cabo de un mes, a una multitud de larvas andadoras y saltadoras que lo devoran todo a su paso. Más de la mitad de la superficie del globo está, cada año, amenazada por las invasiones de acridios.

Las *Locustas* o *langostas* se diferencian de los acridios por sus largas antenas, sus órganos timpánicos, que tienen en las piernas delanteras, y su largo oviscapto en forma de espada. Lo más conocido es la *langosta verde* de los prados. La de la vid se distingue por la atrofia de las alas y la placa en forma de silla de montar que tiene en la espalda. La langosta devora la uva.

Los *grillos* saltan pesadamente y viven sea en los campos o en las casas. El *grillo real* es un grillo adaptado a la vida subterranea gracias a sus patas anteriores cavadoras. Como corta las raíces de las plantas, causa grandes estragos en los jardines.

Neurópteros. — Mientras los ortópteros se distinguen de los arquípteros por sus salas, los *neurópteros* se diferencian de ellos por sus metamorfosis completas.

Las larvas de la *hormiga león* parecen gruesas chinches velludas y están provistas de fuertes mandíbulas que forman pinzas. Hacen en la arena un hoyo, en forma de embudo, cerca del paso de las hormigas, y se esconden en el fondo en espera de su presa. Cuando ésta aparece, recibe una verdadera granizada de arena y rueda hasta el fondo, donde es devorada por su enemigo.

Las larvas de *frígano* son acuáticas y tienen branquias abdominales.

Coleópteros. — Este importante orden de insectos (más de 80 000 especies) es también uno de los más homogéneos. Se reconoce inmediatamente un *coleóptero* (del griego *koléos*, estuche, y *pterón*, ala) por sus alas anteriores, convertidas en *élitros coriáceos*, que son las únicas visibles cuando el animal no vuela. Las alas posteriores, blandas, replegadas bajo los élitros, no se despliegan sino en el momento de servir. El protórax es llamado *coselete*. Las piezas bucales son trituradoras. Las metamorfosis, completas. Las larvas son campodeiformes o melolontiformes. Las ninfas tienen los miembros libres.

Los coleópteros pueden dividirse según lo que comen.

Los **carnívoros** se alimentan de otros insectos, de gusanos, de moluscos. Tienen larvas campodeiformes, de iguales costumbres que el insecto adulto. Son insectos útiles. Citaremos los *cárabos*, las *cicindelas* y los *estafilinos* de alas atrofiadas; las *coccinellas*, que producen verdaderas hecatombes de pulgones; los *lampyris* o *gusanos de luz*, cuya hembra es áptera y luminosa; los *ditíscidos*, que son acuáticos, y los *necróforos*, que se alimentan de cadáveres de otros insectos y los entierran para poner en ellos sus huevos.

Los **vesicantes**, considerados aparte a causa de sus hipermetamorfosis y de la substancia irritante que segregan, son las *cantáridas*, que se arrojan sobre los fresnos y las lilas, los *sitaris* y los *meloes*, cuyas larvas viven a expensas de ciertas especies de abejas.

Los **herbívoros** se alimentan de las materias vegetales más diversas y causan grandes estragos en los cultivos. Tales son los *gorgojos*, de cabeza en forma de rostro y cuyas larvas ápodas ocasionan grandes daños; los *saltones*, cuyas larvas roen los granos y las raíces; los *tenebriones*, y sus larvas o *gusanos de la harina*; los *erisomélidos*, de los que una especie es la tristemente famosa *dorífora* de la patata; los *abejorros*, que aparecen a mediados de junio y cuyas larvas (gusanos blancos) viven dos o tres años bajo tierra antes de su metamorfosis; los *lucanos* o *ciervos volantes* de las regiones forestales, fáciles de reconocer por las largas y fuertes mandíbulas de los machos; las *cetonias* o *abejorros de las rosas*; los *hidrófilos*, que son acuáticos; etc.

Los **escarabajos**, especializados en la consumición de los excrementos, con los que unos hacen pelotillas *(escarabajo pelotero)*, otros tortas



Detalle de una libélula (*Microfot. C. Bille*)

(Copris) o morcillas nutritivas *(geotrupos)*, en las que ponen sus huevos. Los escarabajos forman parte, con los abejorros, los lucanos y las cetonias, del grupo de los *lamelicornios*, así llamados a causa de sus antenas, cuyos artejos terminales son laminosos y pueden desplegarse en forma de abanico.

Los **xilófagos** atacan la madera y roen, principalmente en su estado larval, el interior de los árboles, de los muebles y del maderaje de las casas. Tales son la *carcoma*, que horada los viejos muebles; los *escolitos* y los *capricornios*, que producen destrozos en los distritos forestales. Los coleópteros más comunes de esta especie en América tropical son los llamados *bichos de azúcar*, que destruyen la madera después de derribar árboles de gran tamaño. Tienen el tórax musculoso y ancho y el abdomen deprimido, y sus patas, anchas y fuertes, son verdaderas palas cavadoras. Sus poderosas mandíbulas, que actúan como sierras, les permiten taladrar las maderas más duras. Los gigantes de la especie son los *dinastes (Dynaste herculae)*, cuyo macho alcanza 15 centímetros y difiere mucho en forma y dimensión de la hembra, que carece completamente de cuernos. Los *bupréstidos*, tan abundantes en los trópicos americanos, son verdaderas piedras preciosas: parecen esmeraldas vivientes.

Himenópteros. — Los *himenópteros* (del griego *hymen*, membrana) tienen las cuatro alas blandas, membranosas, recorridas por un pequeño número de nervaduras cuya disposición general es constante. Las alas de un mismo lado están unidas por pelos ganchudos. El conjunto funciona como un solo par de alas. El tórax está unido al abdomen por un estrecho *pedículo*. Las piezas bucales son unas trituradoras (mandíbulas), otras lamedoras (trompa formada por las maxilas y el labio inferior). Las metamorfosis son completas. Las larvas son ápodas.

Se dividen los himenópteros en dos grupos, según que las hembras tengan un taladro o un agujero en la extremidad del abdomen.

Los **portataladro** o **terebrantes** se dividen a su vez en *entomófagos* y *galícolas*.

Los *entomófagos* ponen sus huevos en los huevos o las larvas de otros insectos. El huésped es exterminado sólo al término del desarrollo del parásito. A veces se produce poliembrionía. A este grupo pertenecen los *icneumones*, de cuerpo delgado y largo taladro formado por tres cerdas divergentes, los *Encyrtus*, etc.

Los *galícolas* ponen sus huevos en los tejidos vegetales y determinan en ellos, por la acción irritante de su picadura, la formación de tumores o *agallas*, en el interior de las cuales se desarrollan las larvas. Citemos los *Cynips*, minúsculos insectos que producen la agalla tintórea y tanífera de las hojas de la encina.

Los **portaaguijón** comprenden los paralizadores, las avispas, las abejas y las hormigas, todos extraordinariamente interesantes por sus instintos y costumbres.

Los **paralizadores** (amófilos, *Rompilus, Sphex, Cerceris)* se dedican a la caza de arañas o insectos, que paralizan inyectándoles su veneno. Inmovilizadas e imputrescibles por efecto del veneno, esas presas son depositadas en una madriguera, donde sirven de alimento a las larvas.

Las *avispas* y los *abejones* viven en sociedades numerosas, que comprenden una sola *reina* y *obreras* (hembras infecundas). El acoplamiento se efectúa solamente en otoño, después del cual los machos mueren, mientras que las hembras, pasado el invierno, fundan una nueva colonia cada una. Los nidos o *avisperos* están alojados en tierra o en un tronco de árbol. Comprenden una envoltura y *panales* paralelos construidos con una especie de *cartón*. Los panales están formados de *alvéolos*, donde las larvas son nutridas con substancias azucaradas.

Las *abejas* son sociales. Sin embargo, hay algunas que viven solitarias o en pequeños grupos *(antóforos, calicodomas, xylocopas, abejorros)*. Tienen el carácter común de producir *miel* con el *néctar* que extraen de las flores. Son, pues, melíferas. La miel es una secreción de su buche. También utilizan el *polen* y el *propóleos* o resina que destilan los brotes. De su abdomen exuda la *cera*. Una *colmena* se compone de *panales* formados a su vez por *alvéolos* hexagonales. Éstos contienen una mezcla de agua, miel y polen destinada al alimento de las larvas. Algunos alvéolos, más grandes que los demás, contienen una papilla destinada a la alimentación de las jóvenes reinas.

La población de una colmena mediana comprende una *reina*, una centena de *machos* o *zánganos*, y alrededor de 50 000 *obreras*. La reina es fecundada una sola vez durante su *vuelo nupcial*, y pone unos 3 000 huevos al día durante cinco años. Los huevos fecundados dan obreras o nuevas reinas. Los huevos partenogenésicos engendran sólo machos. Éstos, después del acoplamiento, no tienen ya misión alguna y son un estorbo en la colmena. Las obreras, hembras estériles, realizan por el contrario todos los trabajos. Hay que distinguir las *abastecedoras*, que hacen la recolección; las *careras*, que construyen los alvéolos; las *nodrizas*, que se ocupan de las carrochas; las *centinelas*; las *ventiladoras*; las *limpiadoras*, etc.

En verano, las colmenas superpobladas forman nuevos enjambres. Se ve entonces salir una multitud de obreras y de machos acompañando a una nueva reina, que se alejan para fundar una nueva colmena.

Las *hormigas* son himenópteros sociales cuyas costumbres se parecen a las de los comejenes. Un *hormiguero* comprende, en efecto, una *reina ponedora*, *obreras* y a veces *soldados*. La única diferencia es que la fecundación se efectúa en el curso del *vuelo nupcial*, entre *hormigas aladas*, y que los machos mueren inmediatamente después del acoplamiento. Las hormigas son extraordinarias por su industriosidad, ejercida en todos los dominios: son mineros, cavadores, albañiles y costureras cuando se trata de construir su nido. Recogen los granos, cultivan los hongos, crían los pulgones, etc.

Existe en América, desde México hasta la Argentina, una especie de hormigas gigantes, de gran cabeza, conocidas bajo el nombre de *arrieras* o *saúbas*, que son una verdadera plaga para las plantaciones. Con sus potentes mandíbulas cortan rápidamente las hojas de las plantas y las transportan a sus madrigueras, donde otras obreras las trituran y forman una papilla que, extendida por el suelo, constituye el terreno de cultivo de minúsculos hongos, sustento de la colonia. La *hormiga melera* o *mochilera*, que se encuentra en las regiones secas de México y en el Colorado, tiene la particularidad de recoger enormes cantidades de miel en el buche y de colgarse del techo del hormiguero para ser ordeñada por sus compañeras obreras. Las *hormigas de fuego* de América del Sur habitan en ordenadas bandadas en los lugares arenosos. Son excelentes mineros y llegan a socavar ciudades enteras, devorando víveres, papeles y ropa. Su color es rojo brillante, y su picadura, muy dolorosa, puede producir fiebres. Las *hormigas militares*, expedicionarias carniceras, son muy abundantes en el centro y el sur de América. Como son casi ciegas, tienen que marchar en apretadas columnas, flanqueadas por obreras que hacen de guías u oficiales. Tienen aguijones y enormes tenazas mandibulares. Devoran cuanto encuentran a su paso, incluso aves y mamíferos pequeños.

Existe una curiosa asociación entre ciertas hormigas y dos plantas muy corrientes en los trópicos del sur y el centro de América: el *guarumo*, del género *Cecropia*, y el *cuernecillo*, del género *Acacia*. En el primero, entre los nudos de su alto tallo, se albergan unas hormigas muy valerosas, llamadas *aztecas*, que lo defienden contra los ataques de las arrieras. El mismo fenómeno se produce con el *cuernecillo*, en cuyas púas vacías, que parecen cuernos, se alojan unas hormigas pequeñas, pero muy combativas, que lo defienden asimismo contra los ataques de las arrieras. Tanto una como otra planta, que carecen de protección natural, perecerían sin esta defensa.

Lepidópteros. — Los *lepidópteros* (del griego *lepis*, escama, y *pteron*, ala) son las mariposas, cuyas cuatro alas membranosas están cubiertas de innumerables y minúsculas *escamas*. Sus piezas bucales son chupadoras: su *trompa* está compuesta por maxilas en forma de canalón. Las metamorfosis son completas. Las larvas son cruciformes *(orugas)*. las ninfas están envueltas *(crisálidas)*. Se las encuentra en tierra, suspendidas por su extremidad posterior, sostenidas por un cinturón de seda o encerradas en un capullo.

La seda es una secreción de las glándulas salivares de la oruga.

Las mariposas se dividen prácticamente en cuatro grupos:

1° Las **mariposas diurnas**, que son fáciles de conocer por sus antenas en forma de maza y por sus alas, levantadas verticalmente durante el reposo. Citemos las *pieris* de la col; las *vanesas*, de brillantes colores; los *sátiros*, con manchas oceliformes, etc.;

2° Las **mariposas crepusculares**, de antenas prismáticas y alas que permanecen horizontales durante el reposo. Las principales son la *esfinge*, y sobre todo la *esfinge calavera*, cuya larva vive en la patata, y las *sesias*, que imitan a otros insectos (moscardones, típulas), de los cuales tienen la forma y el color. Entre las esfinges se encuentran las mariposas que mejor vuelan;

3° Las **mariposas nocturnas**, de antenas filiformes, pectinadas o plumosas, y de alas que permanecen horizontales durante el reposo. Estas mariposas son las más nocivas, a causa de sus orugas, que devoran toda clase de plantas. Citemos las *procesionarias* del roble y el pino, cuyas orugas, reunidas durante el día en bolsas sedosas, salen por la noche en largas filas; las *noctuas*, que tienen larvas subterráneas muy perjudiciales para la agricultura, y las *falenas*, cuyas larvas son llamadas *medidoras* o *geómetras* por su forma de marchar. Varias especies comen los brotes y las hojas de los árboles. Las orugas de los *tortrícidos* enrollan las hojas sosteniéndolas por medio de hilos.

Hay que considerar aparte los bómbices *(Bombyx)*, cuyas larvas se envuelven en seda *(capullo)* en el momento de la metamorfosis. El *bómbice de la morera*, originario de China, fue introducido en Europa en el siglo VI. Su cría o *sericultura* se efectúa en *cámaras de seda*. Las orugas o *gusanos de seda* alcanzan en un mes una longitud de seis centímetros y tejen un capullo en el cual entra alrededor de un kilómetro de hilo de seda. Para extraer la seda, se mata al gusano hirviendo el capullo y se devana después;

4° Los **microlepidópteros**, grupo en el cual se colocan bastante arbitrariamente las mariposas muy pequeñas como las polillas y las pirales. Las principales especies son: la *polilla de las casas;* la *polilla de los frutos*, cuya oruga es el gusano de la fruta; la *polilla de la vid* o *cochilis*, que rodea los racimos con una red de seda. Citemos aún las *pirales de la harina, de la grasa, de las colmenas*, etc. La *piral de la vid* es en realidad un tortrícido.

Entre las mariposas pequeñas de América del Sur figuran la *carpocapsa (Carpocapsa pomonella)*, introducida en Chile y el Perú desde California, cuyas larvas penetran en las manzanas, y la *macroglosa (Macroglossa stellarum)*, que día y noche se acerca a las corolas de las flores en vuelo muy rápido que produce el mismo ruido que las alas del colibrí, con el que es confundido frecuentemente por su forma y tamaño. Su trompa llega a medir 20 ó 25 centímetros.

Dípteros. — Éstos son los insectos más fáciles de conocer, puesto que no tienen más que dos alas. Las posteriores se han convertido en pequeños órganos en forma de maza, los *halterios*, que desempeñan sin duda un papel sensorial. Las piezas bucales son picadoras y consisten en una *trompa labial* con seis, cinco, cuatro o dos estiletes. Las metamorfosis son completas. Las larvas son ápodas.

Se distinguen tres subórdenes principales:

1° Los **dípteros de antenas largas**, vulgarmente llamados *mosquitos*. Las antenas tienen más de seis articulaciones y son plumosas en los machos. El cuerpo es delgado y alargado y las patas largas y finas. Las ninfas están envueltas como las crisálidas. A este grupo pertenecen las inofensivas *típulas;* los *cecidómidos*, que pican las plantas y producen agallas de tipos diversos; los *mosquitos*, cuyas hembras zumbadoras y picadoras son un azote de los lugares húmedos; los *anofeles*, que añaden a esos daños el de transmitir el paludismo; las *estegomias*, que propagan la fiebre amarilla en las regiones tropicales. Mosquitos, anofeles y estegomias tienen larvas ápodas, provistas de una cabeza con piezas

bucales, ocelos y antenas. Estas larvas son acuáticas, muy móviles, y suben a respirar a la superficie por medio de estigmas situados en la parte posterior del abdomen. En la larva del mosquito existe un tubo respiratorio. Las ninfas tienen una enorme cabeza y son móviles;

2º Los **dípteros de antenas cortas,** vulgarmente llamados *moscas*. Las antenas tienen tres articulaciones. El cuerpo es rechoncho y las patas cortas. Las ninfas están encerradas en la piel larvaria y se llaman *pupas*. Las especies de este grupo son innumerables. He aquí las principales: las *Volucella* y los *Eristalis*, que viven en las flores (las larvas de los eristalis son los gusanos con cola de los pozos negros y el cieno); los *tábanos*, que pican a los bueyes y los caballos y cuyas larvas son subterráneas; los *estros*, que ponen sus huevos en la piel de los caballos y causan grandes estragos en las manadas que pacen en las pampas (el animal lame y engulle esos huevos, cuyas larvas se instalan en su tubo digestivo); las *Hypoderma*, que viven de la misma forma en el buey; las *moscas comunes*, cuya trompa, dilatada en la punta, está desprovista de estiletes; las *moscas carbuncosas (Stomoxys)*; las *moscas azules* de la carne; las *moscas verdes* o *lucilias* de los excrementos; las *Glossina* o *tse-tsé*, que propagan en el Congo la enfermedad del sueño. Éstas son larvíparas. Hay también moscas que son pupíparas: las *Hippobosca* del caballo y las *Melophagus* del carnero;

3º Los **dípteros sin alas,** grupo en el cual se colocan las *pulgas*, cuyas patas posteriores están adaptadas al salto. Sus larvas vermiformes viven en las rendijas del entarimado. Sus ninfas están envueltas en un capullo. La *pulga de la rata* transmite la peste. Otra especie es la *nigua* de los países cálidos, cuya hembra fecundada se introduce en la piel del hombre y adquiere allí el tamaño de una avellana.

Hemípteros. — Estos insectos se parecen a los dípteros por sus piezas bucales picadoras: trompa labial con cuatro estiletes. Pero tienen cuatro alas y metamorfosis incompletas.

Se les divide en tres subórdenes principales:

1º Los **hemípteros de hemiélitros,** que son los verdaderos hemípteros (del griego *hemi*, mitad, y *pteron*, ala). En efecto, sus alas anteriores son en parte coriáceas. La mayor parte tienen un olor nauseabundo. Tales son las *chinches de campo*. Sobre el agua nadan las *nepas*, las *notonectas*, las *argironetas* y las *ranatras*.

2º Los **hemípteros de cuatro alas blandas,** grupo al cual pertenecen las *cigarras*, cuyos machos poseen unos timbales sonoros; los *pulgones* y las *filoxeras*, de las que hemos estudiado la partenogénesis, y las *cochinillas*, que resguardan su progenitura bajo un escudo ceroso que resiste a todos los agentes de destrucción. Para destruir la cochinilla de los naranjos ha sido necesario aclimatar, en las regiones en que hacía estragos, una coccinella que la ataca. Algunas especies de cochinillas, como la oriunda de México, que vive en las pencas del nopal, aclimatada hoy en Canarias, la India, etc., producen el carmín y la laca.

3º Los **hemípteros sin alas,** que son las *chinches de las camas* y los *piojos*. De éstos existen tres especies: piojo del cuerpo, piojo de la cabeza y piojo del pubis o ladilla. Las chinches transmiten la fiebre recurrente, el kala-azar y el botón de Oriente. Los piojos propagan el tifus.

Clase de los merostomas

Con esta clase comienza el subtipo de los artrópodos *quelíferos*, es decir, desprovistos de antenas, pero con *quelíceros* (del griego *khele*, pinzas, y *keras*, cuerno), en forma de pinzas o de ganchos, delante de la boca.

Los **merostomas** son acuáticos y respiran mediante branquias foliáceas. Muy comunes en la Era primaria *(gigantostráceos)*, sólo están representados actualmente por el género *Limulus*, que constituye el orden de los *xifosuros*.

Los *límulos* no se encuentran más que en las Antillas y en las islas de la Sonda (cangrejo de las Molucas). Los americanos los llaman "sartenes". Tienen, en efecto, la forma de este utensilio, con su *cefalotórax* y su *abdomen* anchos prolongados por un *telson* en forma de mango. En el cefalotórax se encuentran dos *ojos de facetas* y dos *ocelos*. Debajo está situada la *boca*, que preceden los *quelíceros* y rodean cinco pares de *patas locomotoras y masticadoras*. El abdomen, articulado al cefalotórax, tiene seis pares de *patas laminosas* cubiertas a su vez de *láminas branquiales*.

Clase de los arácnidos

Los **arácnidos** son *quelíferos* adaptados a la vida aérea. Manifiestamente, proceden de los merostomas. Las branquias laminosas se han transformado en tráqueas laminosas o *filotráqueas*. Las patas abdominales han desaparecido. El cuerpo es más o menos compacto según se trate de los *escorpiones*, de las *arañas* o de los *ácaros*.

Escorpiones. — Vistos por el dorso, los *escorpiones* se muestran formados por tres partes: el *cefalotórax*, el *preabdomen* y el *postabdomen*. En el cefalotórax están los *ocelos*, los *quelíceros*, las *maxilas*, en forma de pinzas, y cuatro pares de *patas locomotoras*: o sea el mismo número de apéndices que en un límulo. El preabdomen comprende siete segmentos. El postabdomen tiene seis, el último de los cuales es un *gancho venenoso*. El número de segmentos abdominales es por tanto superior al del límulo, pero recuerda asombrosamente la segmentación de los gigantostráceos de la Era primaria.

Examinemos ahora un escorpión por la cara ventral. Las patas se tocan por sus bases en la línea media, salvo los dos últimos pares, que dejan sitio al *esternón* y al *orificio genital*, cubierto por una *válvula*. En sus proximidades se encuentran los *peines*, que tienen efectivamente esa forma y desempeñan un papel en el acoplamiento. Cada peine tiene unas 20 ó 25 púas. Los dos primeros segmentos abdominales son invisibles por la cara ventral. En ellos están el orificio genital y los peines. Los cuatro siguientes poseen cada uno un par de *estigmas* en forma de ranura. El *ano* está situado entre los quinto y sexto segmentos del postabdomen.

La organización interior es interesante sobre todo por los *pulmones* o *filotráqueas*, especie de bolsas que se abren al exterior por los estigmas y que contienen una serie de láminas paralelas, de pared delgada, a través de las cuales se efectúan los intercambios gaseosos. El *corazón*, situado al nivel de las filotráqueas, se parece al de los insectos. Sin embargo, el sistema arterial es más completo. La sangre pasa en seguida a las *lagunas* o *senos*, uno de los cuales rodea el *sistema nervioso*, el cual es en forma de *cuerda de nudos*.

Los escorpiones viven sobre todo en los países cálidos, donde alcanzan 20 centímetros de longitud. Pican volviendo su postabdomen. Su veneno puede ser mortal para el hombre. Estos animales viven escondidos durante el día y salen por la noche para cazar o acoplarse. Después del acoplamiento la hembra devora al macho.

Arañas. — Las *arañas* se diferencian de los escorpiones por su abdomen globuloso y no segmentado. Pero existen formas de transición: el *quelífero* o *alacrancillo de los libros*, que se ve a veces correr entre los libros viejos y cuyo abdomen comprende once anillos bien visibles; el *segador* o araña de largas patas, cuyos diez segmentos abdominales están en parte unidos.


Epeira inmovilizando una abeja (*Fot. J. Boyer*)

Las arañas difieren también de los escorpiones por:

1º Sus *quelíceros*, en forma de garras y que comunican con glándulas de veneno;

2º Sus *maxilas*, que no tienen forma de pinzas, sino de palpos;

3º Sus *pulmones* o *filotráqueas*, que son cuatro o dos solamente;

4º Sus *hileras*, especie de apéndices abdominales que segregan por múltiples orificios una substancia que, al contacto con el aire, se cuaja en un hilo de seda. Con sus patas posteriores, provistas de peines, la araña une varios hilos elementales para hacer de ellos uno compuesto, que utiliza para fabricar su tela, entapizar su morada, envolver su puesta en un capullo, etcétera;

5º Su boca, prolongada por un pequeño *rostro* chupador; la aspiración es producida por el buche;

6º Su *sistema nervioso*, condensado en una sola masa que rodea el esófago.

Las principales arañas son las enormes *migalas* de los países cálidos, algunas de las cuales tienen 10 centímetros de longitud; las *licosas* o *tarántulas* de las regiones mediterráneas, que no tejen tela y andan a la caza de insectos; las *epeiras*, cuya tela es vertical; las *tegenarias* o arañas domésticas, cuya tela es horizontal; las *argironetas* o arañas acuáticas, cuya tela hace oficio de campana de inmersión.

Acaros. — Los *ácaros* (del griego *akari*, arador) son arácnidos pequeños cuyo cuerpo es de una sola pieza. Sus quelíceros son de formas muy diversas; terminan ya en una especie de arpón, ya en una pinza. En algunos (los parásitos), la articulación terminal de las patas tiene, además de las garras, una ventosa. La organización interna está muy simplificada. Las crías nacen en estado de *larvas hexápodas* y no adquieren su cuarto par de patas hasta después de tres o cuatro mudas. Luego pasan al estado de ninfa inmóvil. Hay, pues, histólisis e histogénesis. Estas *metamorfosis* diferencian a los ácaros de los escorpiones y las arañas, en los que el desarrollo es directo.


Trombidium (*Fot. L. Poilpot*)

Hay alrededor de 6 000 especies de ácaros, unos libres *(ácaros de agua, ácaro del queso)*, otros parásitos *(larva de Trombidium*, garrapata, *Demodex*, *Sarcoptes)*.

La larva de *trombidión* produce con sus picaduras una viva comezón.

La *garrapata* tiene quelíceros en forma de arpón y maxilas que forman un rostro arpado. Adherida a la piel y saciada de sangre, se hace globulosa.

El *Demodex* vive en las glándulas sebáceas.

El *Sarcoptes* hace galerías debajo de la piel y produce la *sarna*. En cada galería vive una hembra que va poniendo huevos a medida que avanza por ella. Las larvas hexápodas salen para vivir a la superficie de la piel. Al crecer se metamorfosean en individuos sexuados. Después del acoplamiento, las hembras fecundadas abren nuevas galerías o emigran, durante la noche, y aseguran así la transmisión de la sarna de una persona a otra.

Tipo de los moluscos

Caracteres generales de los moluscos. Clasificación de los moluscos. — **Clase de los anfineuros.** — **Clase de los gasterópodos:** Torsión, enrollamiento y desenrollamiento. Prosobranquios. Pulmonados. Opistobranquios.— **Clase de los cefalópodos:** Perfeccionamientos orgánicos de los cefalópodos. Reducción progresiva de la concha. Clasificación de los cefalópodos: Tetrabranquios. Dibranquios. — **Clase de los lamelibranquios:** Organización de un lamelibranquio. Sifones. Concha y músculos aductores. Nácar y perlas finas. Clasificación de los lamelibranquios

Los **moluscos** *son animales no segmentados, de simetría bilateral (algunas veces alterada), cuyo cuerpo se compone de una cabeza, una masa visceral y un pie. La masa visceral está cubierta en parte o del todo por un manto que segrega una concha. El sistema nervioso comprende un doble collar esofágico. La cavidad general está más o menos reducida al pericardio y los nefridios.*

Caracteres generales de los moluscos. — 1° Aunque son descendientes, probablemente, de los anélidos, los moluscos no presentan ningún vestigio de segmentación ni de metamerización;

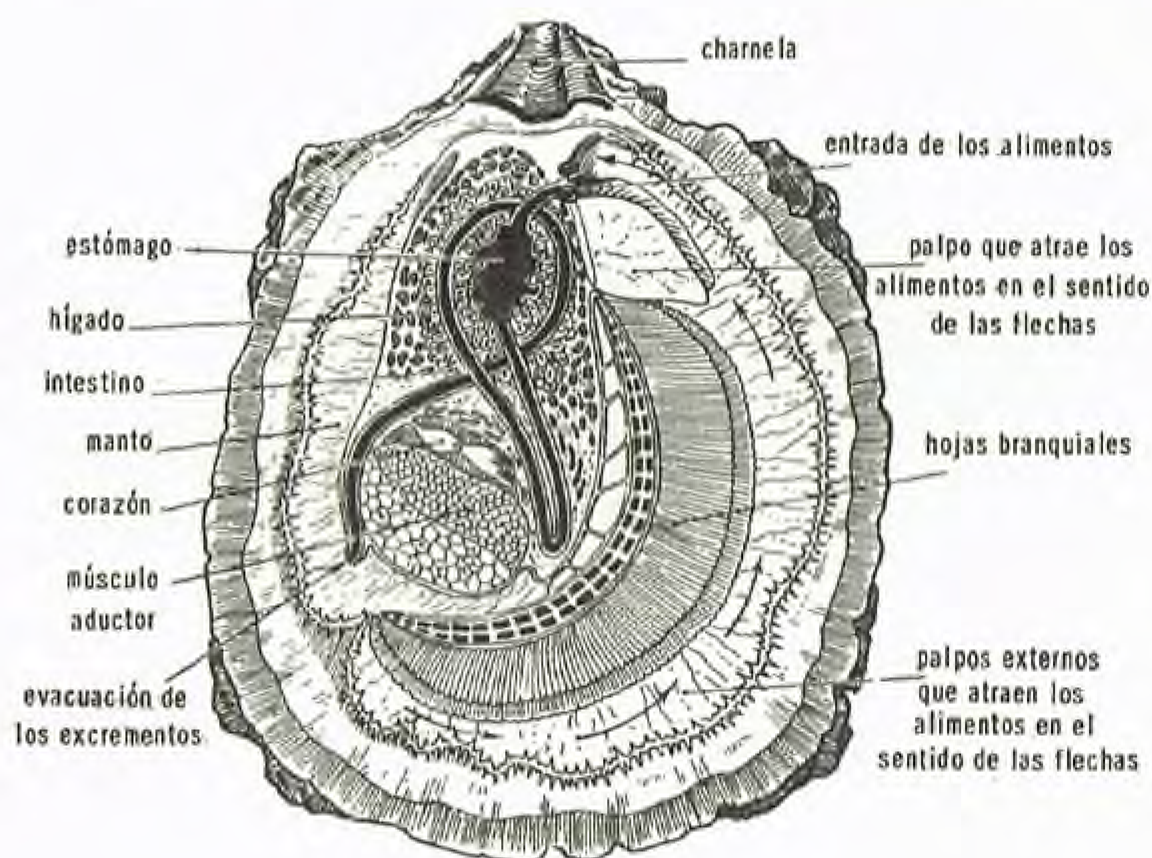
2° Tienen una *simetría bilateral*, pero que puede ser alterada como consecuencia de la torsión;

3° Su cuerpo se compone de una *cabeza*, una *masa visceral* y un *pie*. La cabeza puede faltar. El pie tiene estructuras y funciones muy diversas según los grupos;

4° Los tegumentos son *blandos* y ricos en células glandulares, que segregan *mucus;*

5° La masa visceral está cubierta parcial o totalmente por un pliegue de los tegumentos que constituyen el *manto*. Entre éste y la masa visceral se encuentra la *cavidad paleal* (del latín *pallium*, manto), donde están colocadas las branquias, el ano y el orificio urinario;

6° El manto segrega generalmente una *concha calcárea*, que comprende, del exterior hacia el interior: una *cutícula* diversamente coloreada, una *capa en forma de prisma* compuesta de prismas calcáreos



Anatomía de la ostra

perpendiculares a la superficie y, por último, una *capa luminosa* formada de laminillas alternantes de CO_3Ca y substancia orgánica. Esta capa interna, cuando las laminillas son suficientemente delgadas para difractar la luz, constituye el *nácar* y, de modo indirecto, contribuye a la formación de las *perlas finas;*

7° La cavidad general de los moluscos está más o menos obliterada por tejido conjuntivo, a excepción de una parte que envuelve el corazón *(pericardio)* y otra que forma los órganos excretores *(nefridios);*

8° La circulación es incompleta, *lagunaria*. Del corazón parten cortas arterias. No hay venas ni vasos capilares. La sangre es incolora o está ligeramente coloreada por hemoglobina o hemocianina disueltas;

9° El sistema nervioso, particularmente típico, comprende *ganglios cerebroides* unidos, por una parte a *ganglios pedios*, por otra a *ganglios viscerales*, mediante un *doble collar esofágico;*

10° Los sexos están generalmente separados. Los huevos son más o menos ricos en vitelo y la salida del huevo se efectúa después de un estadio más o menos avanzado de desarrollo. Cuando hay larva libre *(trocófora, velíger)*, ésta se parece mucho a la trocófora de los anélidos.

Clasificación de los moluscos. — El tipo se divide en cinco clases: *anfineuros, gasterópodos, escafópodos, cefalópodos* y *lamelibranquios*.

La primera es interesante por sus caracteres arcaicos. La segunda es aberrante por la torsión de la masa visceral y sus repercusiones sobre todo el organismo. La tercera engloba un solo género *(Dentalium)* y la dejaremos aparte. La cuarta comprende los moluscos más perfeccionados en todos los aspectos. La quinta, por último, es notable por su degeneración: desaparición de la cabeza y atrofia del pie.

Clase de los anfineuros

Los principales representantes de esta clase son los *chitón*, que se encuentran, en la bajamar, sobre las rocas. Aplanados como cochinillas, pueden también enrollarse en forma de bola. Su dorso está protegido por una serie de placas calcáreas dispuestas como las tejas de un tejado. La simetría bilateral es perfecta. El tubo digestivo va de la boca, en la parte anterior, al ano, en la parte posterior. Las branquias plumosas, en número de unas treinta, están dispuestas simétricamente en dos surcos laterales. El corazón es dorsal y está acompañado lateralmente por dos nefridios típicos. El sistema nervioso, muy primitivo, comprende sólo dos ganglios cerebroides, de donde parten cuatro nervios longitudinales.

El parecido con los anélidos es todavía más acentuado en otros anfineuros que son vermiformes y están desprovisos de placas calcáreas.

Clase de los gasterópodos

Los **gasterópodos** *son moluscos transformados en asimétricos por efectos de torsión y enrollamiento. Su cabeza, separada de la masa visceral, consta de ojos y de una rádula. Su pie es aplanado como un suelo ventral de reptación. Su manto es dorsal, y su concha univalva.*

Torsión, enrollamiento y desenrollamiento. — La evolución de los gasterópodos se ha efectuado en varias etapas:

1° Los gasterópodos primitivos, más o menos derivados de los anfineuros, debían tener una masa visceral y una concha cónica, dispuestas verticalmente encima de la región cefalopedia. Pero esta disposición, que podía convenir a animales cavadores, ha debido modificarse para permitir la reptación. La masa visceral y la concha se han rebajado hacia atrás.

En ese estadio, el gasterópodo tenía aún una *simetría bilateral normal:* tubo digestivo rectilíneo, corazón formado por un ventrículo mediano y dos aurículas, un par de branquias situadas en la parte de atrás del corazón y que flotaban en una cavidad paleal posterior, un par de riñones que se abrían en esa misma cavidad paleal, y nervios paralelos que unían las glándulas cerebroides con los ganglios viscerales;

2° Esta disposición se hizo a su vez incómoda como consecuencia de la compresión de la cavidad paleal entre la masa visceral y el pie. Entonces se produjo una torsión de 180° en sentido inverso al de las agujas del reloj que volvió la cavidad paleal hacia delante (o sea hacia detrás de la cabeza). Consecuencias de esta torsión: doblamiento en forma de U del tubo digestivo, ano más cerca de la boca, branquias delante del corazón, órganos de la derecha pasados a la izquierda y viceversa, sistema nervioso cruzado en forma de 8. La *simetría bilateral* es *invertida*, pero no está destruida. En este estadio se detuvieron los *prosobranquios* (branquias delante del corazón) del grupo de los *diotocardios* (de dos aurículas);

3° En general, las etapas continúan. Como la masa visceral y la concha no pueden alargarse indefinidamente en línea recta, se enrollan en forma de espiral o de hélice. El *enrollamiento* se efectúa siempre hacia el pie y, generalmente, sobresale por el lado derecho. Se trata del enrollamiento *diestro*. Consecuencias de este enrollamiento: atrofia y después desaparición de la aurícula, el riñón y la branquia del lado derecho. El animal se vuelve *asimétrico*. Tal es el estadio en que se encuentran los *prosobranquios monotocardios* (de una aurícula) y los *pulmonados*, que se derivan de ellos por adaptación a la vida terrestre;

4° Puede, por último, producirse una *destorcedura y un desenrollamiento* que hacen volver la cavidad paleal hacia atrás del cuerpo, etc. Pero los órganos desaparecidos no reaparecen. La simetría subsiste interiormente, si bien no exteriormente. Tal es el último estadio alcanzado por los *opistobranquios* (de branquia hacia atrás del corazón).

Así, la evolución conduce a la división de los gasterópodos en tres órdenes: *prosobranquios, pulmonados* y *opistobranquios*.

Prosobranquios. — Desde el punto de vista anatómico, los *prosobranquios* son los gasterópodos más típicos. Pero, como hemos indicado, sus estadios de evolución son distintos:

1° Los *diotocardios* están torcidos, pero no enrollados; tienen aún dos branquias laminosas, dos riñones y dos aurículas. Su concha es cónica o está apenas enrollada. Tales son los fisurélidos, los haliótidos, los tróquidos, etc.

2° Los *monotocardios* están a la vez torcidos y enrollados: sólo tienen una branquia, una aurícola y un riñón. Su concha es generalmente helicoidal. Alrededor de un eje en forma de *columela* están enrolladas las diferentes vueltas de la *espira*, la última de las cuales se abre por el peristoma. Éste es redondo, escotado, o prolongado por un pico. Muy frecuentemente, cuando el animal se contrae cierra su concha por medio de un *opérculo* que tiene en el pie. A los monotocardios pertenecen la mayor parte de los gasterópodos marinos (púrpuras, múrex, bucci-

nos, etc.). Algunos solamente viven en agua dulce o adaptados a la vida aérea (paludinas, ciclostómidos).

Hay que señalar que los prosobranquios, así como los pulmonados que se derivan de ellos por adaptación a la vida aérea, tienen órganos cefálicos bastante perfeccionados: *tentáculos táctiles; ojos* colocados en la base de esos tentáculos; *órganos olfativos*, que parecen branquias modificadas; *órganos de equilibrio* o *estatocistos*, colocados cerca de los ganglios cerebroides; *trompa retráctil; rádula* u órgano masticador, especie de larga cinta quitinosa cubierta de asperezas, que la hacen parecerse a una lima.

Pulmonados. — Los pulmonados son monotocardios que se han hecho aéreos. Viven en el agua *(Limnaea, Planorbis)* o en tierra (caracol, babosa) y respiran todos el aire natural por medio de su cavidad paleal, transformada en *pulmón*. Con este fin se ha desarrollado en la pared una red vascular y el orificio se ha estrechado en forma de *neumostoma* para atenuar la desecación.



Caracol *(Fot. R.-H. Noailles)*

El sistema nervioso está condensado en una sola masa que rodea el esófago.

Los órganos genitales son *hermafroditas*. Hay típicamente una glándula que produce a la vez óvulos y espermatozoides. El oviducto y el espermiducto están confundidos en su arranque, unidos en la parte mediana y separados en la parte terminal, pero acaban finalmente en un solo orificio. La concha, de forma variable, carece siempre de sifón. Puede ser cerrada en invierno por el *epifragma*, que es un tabique membranoso o papiráceo que protege igualmente al animal durante los grandes calores. Este epifragma no tiene nada de común con el *opérculo* de los prosobranquios, jamás adherido al animal, sino pegado a los bordes de la concha. Varias glándulas los completan. Durante el acoplamiento, que es recíproco, los espermatozoides de cada uno de los animales van a acumularse en la bolsa copuladora del otro. Después del acoplamiento, los dos individuos se separan y comienzan la puesta.

La mayor parte de los pulmonados se alimentan de vegetales, y son por tanto muy funestos para los cultivos (babosas).

Opistobranquios. — Como consecuencia del proceso de desenrollamiento, la cavidad paleal se encuentra en la parte posterior del cuerpo, la aurícula está detrás del ventrículo, la branquia detrás del corazón y el sistema nervioso no es ya cruzado. Estos caracteres, en apariencia primitivos, son en realidad regresivos, como lo indica la existencia de una sola aurícula, un solo riñón y una sola branquia. Sucede incluso que la regresión es mayor aún: la masa visceral, la cavidad paleal, el manto, la concha y la branquia desaparecen. Así llegamos a los *nudibranquios (Doris, Eolis)*, que parecen grandes babosas. En su dorso aparecen branquias de nueva formación, sin relación alguna con las primitivas.

Algunos opistobranquios *(pterópodos)* y algunos prosobranquios *(heterópodos)* están adaptados a la vida pelágica o flotante: la concha se reduce, el cuerpo se vuelve transparente como el cristal y el pie se ensancha en forma de espadilla o de alas que permiten al animal nadar.

Clase de los cefalópodos

Los **cefalópodos** *son moluscos netamente superiores a todos los demás de su tipo por su perfección orgánica. Su cabeza, separada de la masa visceral, comprende un verdadero cerebro encerrado en una especie de cráneo, ojos muy perfeccionados, un pico córneo, etc. Su pie es cefálico y está dividido en tentáculos provistos de ventosas. Su manto es ventral, contráctil, y constituye, con el embudo que lo completa, un potente órgano de locomoción. Su concha, muy desarrollada en tiempos pasados, es actualmente muy reducida o nula.*

Perfeccionamientos orgánicos de los cefalópodos. — Aunque conservan la simetría bilateral y algunos otros caracteres primitivos, los cefalópodos (nautilos, jibias, pulpos) son muy superiores a los demás moluscos:

1º El *pie*, a consecuencia de una flexión, se encuentra encima de la cabeza (de aquí el nombre de *cefalópodos*) y está dividido en *tentáculos*, que, generalmente provistos de ventosas, constituyen órganos prensores de gran potencia. Cada ventosa es un instrumento perfeccionado que se aplica y hace el vacío en su interior gracias a una especie de émbolo;

2º En el centro de la corona tentacular, la *boca* lleva delante una especie de *pico* de loro que contiene una potente *rádula;*

3º Los *ojos*, situados a cada lado de la cabeza, son casi tan perfectos como los del hombre;

4º La masa visceral tiene ventralmente una especie de bolsa de delantal, que no es sino la *cavidad paleal* limitada por el *manto*. Esa bolsa está abierta por una ancha hendidura que interrumpe, en su centro, un *embudo* carnoso. El manto tiene contracciones rítmicas y muy enérgicas. Cada vez que se dilata, el agua entra por la abertura de la bolsa, y a cada contracción, es arrojada bruscamente por el embudo. De ello resulta, por reacción, un desplazamiento del animal en sentido contrario al de la corriente de agua. Ésta es la manera de nadar de los cefalópodos;

5º La corriente de agua que atraviesa la cavidad paleal baña las *branquias* y asegura una intensa respiración. La circulación misma es bastante perfecta: hay arterias, venas y capilares. Sólo una parte de la sangre pasa por lagunas antes de volver al corazón. La sangre está teñida de azul por la *hemocianina*, substancia a base de cobre, que desempeña un papel análogo al de la hemoglobina en lo que se refiere al transporte del oxígeno;

6º El sistema nervioso está sumamente condensado. De la unión de los ganglios cerebroides, paleales y pedios resulta un verdadero *cerebro* encerrado en un *cráneo cartilaginoso* y del que parten los más de los nervios;

7º En la piel existen particularmente *células pigmentadas (cromatóforos)* que cambian de volumen y forma bajo la acción del cerebro. Esto permite al animal tomar el color del fondo en que se encuentra y disimularse fácilmente. La sección de los nervios ópticos suprime esta homocromía. Debajo de las células pigmentadas existen *células irisadas* que reflejan la luz;

8º Para librarse mejor de sus enemigos, los cefalópodos tienen cerca del ano una *bolsa de tinta*, cuyo contenido vierten en el agua al ser atacados;

9º La reproducción de los cefalópodos está también muy perfeccionada. Los espermatozoides están agrupados en sacos o *espermatóforos* que el macho toma con uno de sus brazos e introduce en la cavidad paleal de la hembra. A veces el *brazo copulador* se desprende, lo que dio lugar a que los antiguos naturalistas lo creyesen erróneamente un parásito. Los huevos son ricos en vitelo *(huevos telolecitos)*. Generalmente son puestos por racimos (uvas de mar). En el argonauta, la hembra segrega una especie de cestilla calcárea para contenerlos. La segmentación del huevo es *parcial* y el desarrollo *directo*.

Los cefalópodos, que son exclusivamente carniceros, se nutren de moluscos, peces y crustáceos. Sostienen la presa con los tentáculos y la despedazan con su pico córneo.

Reducción progresiva de la concha. — Para hacerse una idea completa sobre esta cuestión, es necesario estudiar a la vez los cefalópodos actuales y los fósiles.

1º *Nautilos*. Estos animales no han cambiado nada desde la Era primaria, y hoy viven en los mares cálidos. Su concha es lo bastante grande para poder contenerlos cuando se contraen. Está enrollada en forma de espiral, del lado dorsal, y dividida por *tabiques* en celdillas sucesivas. Se distinguen la *celdilla inicial*, situada en el centro, las *celdillas intermedias* y la *celdilla habitación*, en la que se encuentra el molusco. Éste, por otra parte, se halla sujeto al fondo de la celdilla inicial por una especie de cola o *sifón* que atraviesa cada tabique por su centro;



Corte de un nautilo que muestra el enrollamiento y los tabiques *(Fot. Larousse)*

2º *Amonitas*. No se conoce de estos fósiles secundarios más que su concha, bastante parecida a la de los nautilos;

3º *Espírulas*. Estos cefalópodos de los mares cálidos tienen una concha parecida a las precedentes, pero muy pequeña para su tamaño. Además está cubierta por el manto y es casi invisible sin disección;

4º *Belemnitas*. Estos fósiles secundarios tenían aparentemente la concha en el interior. Ésta se componía de un *fragmocono* o concha propiamente dicha, con tabiques y sifón, un *rostro* terminal en forma de cigarro y una lámina que prolonga el borde dorsal del fragmocono;

5º *Jibias*. Aquí la concha es el *hueso de jibia* o *jibión* que se pone en las jaulas de los pájaros. Está en el interior del cuerpo del animal. Comprende una placa calcárea blanda que corresponde a la lámina de las belemnitas; en ella se descubren restos de tabiques. Una pequeña punta, situada en la extremidad inferior, equivale al rostro;

6º *Calamares*. La concha está reducida a una hoja córnea en forma de pluma;

7º *Pulpos*. La concha se reduce a estiletes cartilaginosos situados en el espesor del manto.

Clasificación de los cefalópodos. — Según el número de branquias, se dividen en *tetrabranquios* y *dibranquios*.

Tetrabranquios. — Éstos son los cefalópodos más antiguos y primitivos. Tienen cuatro branquias, cuatro riñones y cuatro aurículas en el corazón. Sus ojos están poco perfeccionados. Sus numerosos tentáculos no tienen ventosas, y su concha es grande. Son los *nautilos* actuales de los mares cálidos y sus numerosos antepasados primarios.

Dibranquios. —Caracterizados por tener dos branquias, dos riñones y dos aurículas en el corazón. Los ojos están perfeccionados, y los tentáculos, poco numerosos, tienen ventosas.

A este grupo pertenecían probablemente las *amonitas* y las *belemnitas* de la Era secundaria.

Los dibranquios actuales se dividen, según el número de sus tentáculos, en decápodos y octópodos.

Los **decápodos** tienen ocho brazos que forman una corona y, además, dos más largos, ensanchados en el extremo. Las *espírulas*, las *jibias* y los *calamares* pertenecen a este grupo. En alta mar y en las profundidades,

sus afines alcanzan dimensiones considerables (decenas de metros) o tienen garras, órganos luminosos, etc.

Los **octópodos** sólo tienen ocho brazos, reunidos en su base por una membrana, los cuales contribuyen a la natación. Son éstos los *pulpos*. El *argonauta*, del mismo grupo, es notable por la cestilla calcárea que segrega la hembra para depositar sus huevos.

Clase de los lamelibranquios

Los **lamelibranquios, acéfalos** *o* **bivalvos** *son moluscos degradados y adaptados a la vida sedentaria. No tienen cabeza, ni ojos, ni órganos masticadores, ni glándulas salivales. Su pie es generalmente en forma de tallo o de hacha. Su masa visceral está envuelta en un amplio manto de dos lóbulos, que segrega una concha bivalva. Sus branquias, muy desarrolladas, son laminosas.*

Organización de un lamelibranquio. — Objeto usual de disección, el mejillón puede ser tomado como tipo de los lamelibranquios. En corte transversal aparece claramente la *simetría bilateral perfecta*, que es uno de los caracteres primitivos de este grupo. A derecha e izquierda se ve la concha, formada por dos *valvas* reunidas por una *charnela*, y el *manto*, igualmente formado por dos *lóbulos*. La *masa visceral* y *el pie* están suspendidos en el centro, como el badajo de una campana. Entre el manto y la masa visceropedia se encuentra la *cavidad paleal*, que contiene las *branquias*. Éstas, en número de dos, están formadas cada una por cuatro laminillas. Se suele comparar el conjunto de estos órganos con un libro cuya cubierta fuera la concha; las hojas serían entonces los lóbulos paleales y las laminillas branquiales.

Supongamos ahora que colocamos el mejillón como un libro abierto sobre una mesa. Comparadas con el *manto*, que es de un blanco amarillento, las *branquias* se distinguen por su coloración amarillo anaranjada. Se ve que están formadas por *filamentos* dispuestos unos junto a otros. El microscopio permite ver que están cubiertos de *cilios vibrátiles*. Delante, y hacia atrás, se distingue un músculo aductor que va de una valva a la otra y permite el cierre de la concha. La *boca* está detrás del *músculo aductor anterior;* el *ano* está dispuesto del mismo modo respecto al *músculo aductor posterior*. A cada lado de la boca, que está abierta, se extienden dos *palpos labiales* triangulares cuyos cilios vibrátiles provocan una corriente de agua dirigida hacia ella.

Detrás de los palpos labiales se extienden los *músculos del pie*. Éste es un tronco cilíndrico negruzco, cuyo papel parece poco importante en el mejillón. En cambio, está seguido del *biso*, conjunto de filamentos amarillos, segregados por una glándula bisógena, que sirve para fijar el animal a su base.

Entre el biso y el músculo aductor posterior se encuentra una giba ventral que encierra las glándulas reproductoras machos o hembras. En su madurez, las glándulas se hinchan enormemente e invaden incluso el manto. Cada una de ellas se abre en la punta de una papila genital.

El *sistema nervioso* del mejillón es en parte visible porque se encuentra a flor de piel. Comprende un par de *ganglios cerebroides*, un par de *ganglios pedios* y un par de *ganglios viscerales*. Unas comisuras unen los ganglios de cada par, y unos conectivos unen los ganglios cerebroides a los demás.

Los otros órganos deben buscarse en el interior de la masa visceral. Éstos son: un *tubo digestivo* casi rectilíneo, un enorme *hígado*, un *corazón* formado por un ventrículo y dos aurículas, un *pericardio* que lo envuelve y dos *riñones* que se abren en el pericardio y en el exterior del cuerpo.

Sifones. — Se ha visto que la *masa visceral* está envuelta en un vasto *manto* de dos lóbulos que segrega la concha. La protección es, por tanto, perfecta. El animal entreabre sus valvas sólo para dejar pasar el agua necesaria a su alimentación y respiración.

Mya

En el caso más simple *(ostra)*, los bordes del manto son libres. En el *mejillón* se unen en un punto: hay un ancho *orificio pedio* y otro *anal*. En la *almeja*, están soldados en dos puntos, lo que hace que existan un *orificio pedio*, otro *branquial* para la entrada del agua y otro *anal* para su salida. En fin, en el *pecten*, los dos últimos orificios se hallan en la extremidad de tubos o *sifones* dependientes del manto. Estos sifones son retráctiles. Uno sirve para la entrada del agua y el otro para la salida. A veces los sifones son extremadamente largos. Son las únicas partes que emergen de la arena en al que se entierra el molusco. Las *Myas*, que viven en el limo, tienen los sifones muy largos y soldados, salvo en la extremidad terminal.

Concha y músculos aductores. — La concha es *bivalva*. Tiene una *valva derecha* y otra *izquierda* articuladas por una *charnela*. Ésta puede ser más o menos perfeccionada. Cuando es ya muy complicada, se compone de un *ligamento* elástico destinado a abrir la concha y de un conjunto de *dientes* a los cuales corresponden *alvéolos*. En las formas primitivas, los dientes son numerosos y todos iguales. En las más perfeccionadas, los dientes son poco numerosos y desiguales. Hay que distinguir los *dientes cardinales*, situados en medio de la charnela, de los *laterales*, colocados a los dos extremos. Cada especie tiene una *fórmula dental*, cuyo numerador y denominador indican, respectivamente, los dientes de la valva izquierda y los de la derecha. Ejemplo:

$$\text{Almeja } \frac{1+2+1}{2+1+2} \qquad \text{Pecten } \frac{0+3+0}{0+3+0}.$$

Los lamelibranquios más evolucionados (ostra, mejillón) tienen dientes muy reducidos o nulos.

Mientras que la abertura de la concha depende del ligamento, el cierre exige la intervención de los *músculos aductores*. En los *dimiarios* (almeja, venus), los dos músculos, anterior y posterior, son iguales. En los *heteromiarios* (mejillón), el músculo anterior es más pequeño que el otro. En los *monomiarios* (ostra), sólo el músculo posterior subsiste. De ordinario, los músculos son lisos y de lenta contracción. Sólo los pecten y las limas tienen su músculo estriado en parte. No hay nada tan curioso como ver a estos moluscos desplazarse, gracias al cierre rápido de su concha, saltando o volando en el agua.

Nácar y perlas finas. — El nácar es la capa interna y laminosa de la concha, cuando adquiere un espesor suficiente. Su característico aspecto y rara belleza hacen que sea utilizado como materia de ornamentación. Muchos moluscos lo poseen, tanto entre los gasterópodos como entre los cefalópodos y los lamelibranquios.

Desde el punto de vista químico, el nácar se compone de un esqueleto o red de *conquiolina* (materia orgánica) entre cuyas mallas se encuentra *caliza*, que representa el 85 por 100 del total. La conquiolina es segregada por el manto. La caliza proviene de las células migradoras que se introducen entre las células del manto. Esto es lo que ha hecho decir que "la construcción del nácar exige dos obreros de distinto oficio, un carpintero y un albañil".

En principio, todos los moluscos que producen nácar pueden también producir perlas. Por ello se encuentran a veces perlas en las ostras comestibles, o en los mejillones de mar o río, etc. Sin embargo, las verdaderas productoras de perlas finas son las grandes ostras perleras *(Meleagrina)* de los mares cálidos.

Una *perla* encierra siempre en su centro un cuerpo extraño (un trozo de nácar, un grano de arena, un gusano parásito), alrededor del cual se deposita el nácar en capas concéntricas. Para que la perla sea bien redonda, es preciso que el cuerpo extraño, introducido entre la concha y el manto, haya producido en éste una depresión que forme un *saco perlero* completamente *cerrado*. Esto es lo que se realiza artificialmente en el Japón para la producción de *perlas de cultivo*. Éstas no difieren en nada de las *perlas naturales*. Tienen la misma *agua*, es decir, el mismo *lustre*, y el mismo *oriente*.

En definitiva, las perlas finas tienen el mismo origen que una agalla en la superficie de una hoja o un tubérculo alrededor de un montón de bacilos de Koch. En todos los casos, se trata de la defensa del organismo contra un cuerpo extraño que intenta introducirse en él. "La más bella perla, se ha dicho, no es sino el brillante sarcófago de un gusano."

Clasificación de los lamelibranquios. — Una clasificación cómoda, si no perfecta, de estos animales se funda en el número de sus músculos aductores y en la presencia o ausencia de sifones. Estos diversos caracteres se manifiestan por las huellas que dejan en la cara interior de las valvas.

1° Los **dimiarios** tienen dos músculos iguales. Unos no poseen sifones, pero otros cuentan con dos sifones libres o soldados entre sí;

2° Los **heteromiarios** tienen dos músculos desiguales. Tal es la disposición que presentan las formas siguientes: los *mejillones*, fijados por su biso sobre las rocas de las costas europeas, y cuyo fomento recibe el nombre de mitilicultura: las enormes *pernas*, cuyo biso es bastante fino para ser tejido; las *ostras perleras* o *meleagrinas*; los *Lithodomus*, que abren agujeros en las rocas.

3° Los **monomiarios** tienen un solo músculo. A este grupo pertenecen los *pecten* y las *limas*, tan notables por los saltos que dan en el agua abriendo y cerrando las valvas bruscamente, y las *ostras planas* y *portuguesas*, cuya cría es la ostricultura. En su estado natural, las ostras viven en sociedad o bancos. Los huevos, puestos en inmenso número, son incubados entre las laminillas branquiales (ostras lechosas). Después, las crías u ostras nuevas se fijan a un soporte. El crecimiento es lento. La ostra comestible necesita por lo menos seis años para alcanzar su tamaño comercial. La portuguesa, más prolífica, reemplaza cada día más a la ostra plana de las costas de Europa.

Tipo de los procordados

Descripción del anfioxo. Descripción de una ascidia simple. Desarrollo de una ascidia. Ascidias coloniales. Ascidias pelágicas

Los **procordados** *son animales bastante emparentados con los vertebrados porque poseen una cuerda dorsal, más o menos extensa, que les sirve de esqueleto; por su sistema nervioso dorsal semejante, y, por último, porque sus hendiduras branquiales se abren en la pared faríngea. Se distinguen de los vertebrados, no obstante, porque no tienen jamás columna vertebral ni cráneo.*

Se les divide en *cefalocordados* (anfioxos), cuya cuerda va de un extremo a otro del cuerpo, y *urocordados* o *tunicados*, en los que la cuerda está confinada en la cola. En éstos la cuerda puede subsistir toda la vida *(Appendicularia)* o desaparecer en el estado adulto (ascidias).

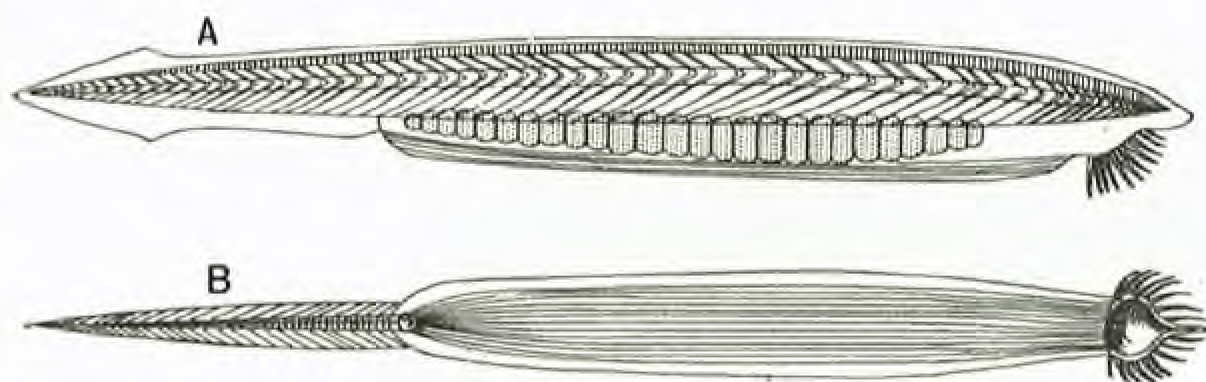
Además de esta regresión de la cuerda, tan curiosa, las ascidias presentan una organización muy especial debida a la vida fija o flotante. Tienen también una aptitud especial para la formación de colonias.

Descripción del anfioxo. — Este animal goza de justa celebridad por el papel que se le atribuye en las teorías de la evolución. Se le considera una forma de transición de los anélidos a los vertebrados, una especie de "gusano vuelto del revés" cuyo sistema nervioso se hubiera hecho dorsal y el tubo digestivo hubiese cesado de pasar por un collar periesofágico. Incluso si no se acepta esta ascendencia anélida, el anfioxo es el prototipo de los vertebrados, y en esto reside su gran interés. Vive en los fondos arenosos submarinos de la mayor parte de nuestras costas. El tamaño de los adultos es de cinco a ocho centímetros. Las crías miden un centímetro como máximo y son lo bastante transparentes para revelar al microscopio todos los detalles de su anatomía.

El cuerpo es puntiagudo en sus dos extremidades. A lo largo de todo su dorso y de una parte de la cola corre una aleta impar en la que se descubre el esbozo de los radios.

Dos rodetes lateroventrales ensanchan el cuerpo en su parte anterior, y son considerados como un esbozo abortado de aletas pares. Su presencia da a una sección transversal del anfioxo la forma de un triángulo.

En la cara ventral, y sólo algo hacia atrás respecto al *rostro* anterior, se abre la *cavidad bucal*, provista de *cirros* táctiles. Después hay una voluminosa *faringe*, perforada lateralmente por *hendiduras branquiales*. Pero estas hendiduras no se abren directamente al exterior del cuerpo como en los peces, sino a una *bolsa perifaríngea*. Esta bolsa comunica a su vez con el exterior por el *poro abdominal*. El agua entra por la boca y sale por el poro abdominal gracias a los cilios vibrátiles de que está revestida la pared faríngea.



Anfioxo: A, lado derecho; B, cara ventral

Las partículas alimenticias que lleva el agua siguen su camino por el *intestino*, que se extiende en línea recta hasta el *ano*. Una dependencia hepática del intestino se dirige hacia adelante y se aloja en el lado izquierdo, en la cavidad perifaríngea.

El aparato excretor se compone de gran número de pequeños tubos metamerizados, ramificados, que se abren en la cavidad perifaríngea y terminan en su extremidad libre en ramos de *solenocitos*. Se trata, por consiguiente, de verdaderos *nefridios* análogos a los de los anélidos.

El aparato circulatorio es cerrado, pero comprende sólo arterias, venas y capilares. No existe verdadero corazón. La sangre es incolora. Todos estos caracteres son, evidentemente, propios de los anélidos.

La *metamerización* es también muy clara. Los nefridios están, como hemos visto, metamerizados. Lo mismo ocurre con las glándulas genitales, los músculos, la cavidad general, etc. Los músculos son conos encajados unos detrás de otros en toda la extensión del cuerpo. Hay *segmentos musculares* separados por tabiques intermusculares. La cavidad general está dividida, por lo menos en su origen, en cavidades sucesivas, como en los anélidos.

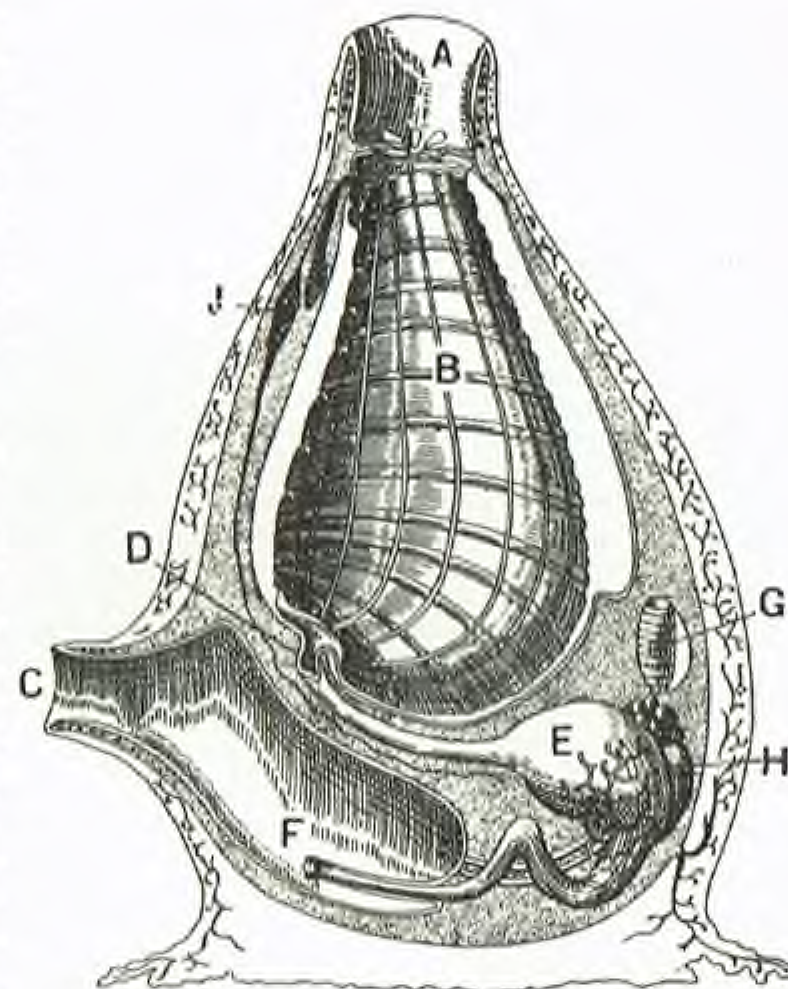
Ahora llegamos a dos caracteres esenciales de los procordados: la cuerda dorsal y el sistema nervioso dorsal.

La *cuerda dorsal* es una especie de varilla semirrígida, formada por células vacuolares (caso muy raro en los animales), y rodeada de una vaina fibrosa. Junto a ella y colocado dorsalmente hay un *tubo nervioso* que equivale a la medula espinal y al encéfalo de los vertebrados. Pero aquí no existe diferencia: el tubo nervioso conserva el mismo calibre en toda su longitud. En el canal del epéndimo existe una línea de manchas negras consideradas como *manchas sensoriales*. La mayor, situada en la extremidad anterior, parece ser una mancha ocular. Del tubo nervioso se destacan *nervios* perfectamente metamerizados.

Descripción de una ascidia simple. — Las ascidias (del griego *ascon*, saco) son fijas y en forma de saco. Su cuerpo está envuelto en una *túnica* espesa, poco adherente, segregada por el ectodermo. Puede sacarse fácilmente al animal de su túnica, compuesta de *celulosa*, caso curioso, puesto que esta substancia se considera generalmente como propia de los vegetales.

En lo alto del saco se abre un tubo o *sifón bucal* para la entrada del agua. A un lado se halla un *sifón cloacal* para la salida del agua. Ambos son retráctiles.

El sifón bucal conduce a una enorme *faringe* de pared enrejada. El agua atraviesa esta pared, que hace las veces de branquia, y llega a una *cavidad perifaríngea*. Las partículas alimenticias pasan, por su parte, al *esófago*, luego al *estómago* y al *intestino*, antes de desembocar en la misma cavidad perifaríngea, que ha recibido, por consiguiente, el nombre de *cloaca*.



Esquema de una ascidia (según Delage y Hérouard): A, sifón de entrada del agua; B, branquia; C, sifón de salida; D, boca; E, estómago; F, ano; G, corazón; H, ovario; J, ganglio nervioso

El aparato circulatorio es un conjunto de lagunas sin paredes propias. Otro detalle curioso: el sentido de la circulación se invierte periódicamente, caso único en el reino animal.

El sistema nervioso se reduce a un *ganglio nervioso* colocado entre los dos sifones. Los órganos sensoriales son rudimentaris o nulos.

Desarrollo de una ascidia. — Constituidas así, las ascidias tienen gran parecido, al menos exterior, con los moluscos, y se parecen muy poco, al contrario, a los anfioxos. Pero veamos cómo se desarrollan.

Las ascidias son hermafroditas. Aparte de está diferencia con los *anfioxos*, su desarrollo es completamente el mismo al principio. Se forman, especialmente, una *cuerda dorsal* y un *tubo nervioso*. Éste es incluso más perfecto que el del anfioxo, puesto que está hinchado en su parte anterior como si fuera a dar origen a un encéfalo.

En esa fase, la ascidia joven se parece a un *renacuajo*. Tiene una "cabeza" gorda o más bien un *tronco* voluminoso, que encierra, con los futuros órganos del adulto, un esbozo de encéfalo. Hacia atrás, se prolonga por una *cola* en la que se encuentran la cuerda dorsal y la parte estrecha del tubo nervioso.

Esta larva tiene solamente unos milímetros de longitud. Después de haber nadado algún tiempo, se fija por su parte frontal y sufre una *metamorfosis* comparable a la de la rana. Toda la cola, comprendidos la cuerda y el tubo nervioso, se resorbe por fagocitosis. El esbozo encefálico degenera en ganglio nervioso, y el animal, degradado así profundamente, adquiere entonces sus caracteres definitivos.

Ascidias coloniales. — La fijación no sólo impone a las ascidias una degeneración respecto a sus formas larvarias y ancestrales, sino que también les da cierta semejanza con otros animales fijos, como los moluscos, los cirrípedos, los briozoarios, los celentéreos, etc. Esta *convergencia de caracteres* se manifiesta, en ciertas especies, por una gran aptitud para la gemación y la formación de colonias.

Éstas son siempre semejantes a un césped, pero presentan dos grados en la asociación de los individuos.

En las *ascidias sociales*, los individuos están simplemente dispuestos unos al lado de otros y reunidos por tubos o estolones basilares.

En las *ascidias compuestas* forman una masa común y están divididos en grupos estrellados en los que, si bien conservan orificios bucales distintos, no tienen más que un solo orificio cloacal.

Ascidias pelágicas. — Otras ascidias se han adaptado a la vida flotante y forman parte del plancton marino. Citemas las *Appendicularia*, las *Pyrosoma*, las *Salpa* y las *Doliolum*.

Las *apendiculares* tienen casi la estructura de las larvas y conservan toda su vida el apéndice caudal con cuerda y tubo nervioso.

Las *pirosomas*, así llamadas a causa de su fosforescencia, son colonias en forma de manguitos.

Las *salpas* son minúsculos tonelillos transparentes a los que una media docena de anillos musculares imprimen contracciones que les hacen

avanzar. Los sifones ocupan las extremidades del tonelillo, mientras que la mayor parte de las vísceras están reunidas en un núcleo vivamente coloreado. En las proximidades de este núcleo se forma un largo tubo o estolón cilíndrico en el cual nacen por gemación, en doble fila, individuos reproductores. Una vez adultos, éstos se desprenden en *cadenas* más o menos largas y producen óvulos y espermatozoides. Hay, pues, la salpa primitiva o *salpa solitaria*, que es estéril, y las *salpas agregadas*, que son fértiles.

Las *Doliolum* o barriletes, parientes de las salpas, forman colonias polimorfas comparables con las de los sifonóforos. Hay individuos nutricios e individuos reproductores. Sólo éstos se desprenden y aseguran la diseminación de la especie.

Tipo de los vertebrados

Caracteres generales de los vertebrados. Clasificación de los vertebrados. — **Clase de los peces:** Forma del cuerpo. Aletas. Escamas y dientes. Tubo digestivo. Aparato respiratorio. Aparato circulatorio. Órganos genitourinarios. Columna vertebral. Cráneo. Esqueleto visceral. Sistema nervioso y órganos sensoriales. Desarrollo y metamorfosis. Migraciones. Clasificación de los peces: Ciclóstomos. Selacios. Ganoideos. Teleósteos. Dipnoos. — **Clase de los batracios:** Forma del cuerpo y patas. Piel desnuda. Dientes y tubo digestivo. Aparato respiratorio. Aparato circulatorio. Órganos genitourinarios. Esqueleto. Sistema nervioso y órganos sensoriales. Desarrollo y metamorfosis. Clasificación de los batracios. Historia del ajolote. — **Clase de los reptiles:** Forma del cuerpo y patas. Escamas y huesos dérmicos. Tubo digestivo. Aparato respiratorio. Aparato circulatorio. Órganos genitourinarios. Esqueleto. Sistema nervioso y órganos sensoriales. Desarrollo. Clasificación de los reptiles: Lagartos o saurios. Serpientes u ofidios. Tortugas o quelonios: Cocodrílidos. — **Clase de las aves:** Caracteres de reptil y ave. Tegumentos y plumas. Tubo digestivo. Aparato respiratorio. Aparato circulatorio. Órganos genitourinarios. Esqueleto. Sistema nervioso y órganos sensoriales. Desarrollo. Clasificación de las aves. Migraciones de las aves. Nidificación. Algunas aves características de América. — **Clase de los mamíferos:** Tegumentos y pelo. Esqueleto. Patas. Dientes. Vísceras. Sistema nervioso y órganos sensoriales. Mamas y lactación. Mamíferos inferiores. Mamíferos superiores o placentarios. Primates. Insectívoros. Quirópteros. Carnívoros. Pinnípedos. Roedores. Proboscidios. Perisodáctilos. Artiodáctilos. Sirenios. Cetáceos. Desdentados

Los **vertebrados** *son animales de esqueleto interno, cartilaginoso u óseo, que comprende una columna vertebral, un cráneo y sus anexos. La columna vertebral se forma alrededor de una cuerda dorsal primitiva. En el sistema nervioso, igualmente dorsal, se distinguen un encéfalo y una medula espinal. El aparato respiratorio (branquias o pulmones) está siempre anexado a la faringe. El aparato circulatorio comprende un corazón ventral y un sistema completo de arterias, venas y capilares. La sangre está coloreada de rojo por la hemoglobina fijada por los hematíes. El aparato excretor comprende dos riñones, formados por tubos uriníferos más o menos parecidos a nefridios.*

Caracteres generales de los vertebrados. — Antes de abordar el estudio de las clases de vertebrados, importa precisar cierto número de sus caracteres generales.

1° Aparte de algunas raras excepciones, los vertebrados tienen una *simetría bilateral* externa. Tienen un lado derecho y un lado izquierdo. Su simetría interna está, por el contrario, más o menos alterada por la disposición de las vísceras;

2° Las vértebras muestran indicios de *metamerización*. Su cuerpo está formado por una *cabeza*, un *tronco* y una *cola*, que se suceden de delante hacia atrás. La cabeza es la parte anterior, donde se encuentran la boca, el cráneo, el encéfalo y los órganos sensoriales. El tronco es la parte media, que comprende casi todas las vísceras. La cola es la parte posterior del ano, a la que no se extiende la cavidad general. Por el contrario, dominan en ella los músculos y están claramente dispuestos en segmentos sucesivos o *miómeros*, que recuerdan los del anfioxo. Las vértebras y sus anexos, especialmente las costillas, están metamerizados. Igual sucede con los nervios raquídeos y los ganglios simpáticos;

3° La metamerización es menos sensible en la cabeza a causa de una *cefalización* intensa. Un número más o menos grande de segmentos, difíciles de distinguir, se encuentran en ella confundidos entre sí;

4° Los *tegumentos*, o sea la piel, comprenden siempre una *epidermis estratificada* y una *dermis* formada por tejido conjuntivo. La estratificación epidérmica es propia de los vertebrados. En la mayor parte de ellos, la protección es además acrecentada por *faneras* tales como las escamas de los peces, las escamas y las placas óseas de los reptiles, las plumas de las aves, los pelos de los mamíferos, etc. Estas faneras son de origen dérmico o epidérmico. En la epidermis puede haber también *glándulas* anejas;

5° El *esqueleto* está formado sucesiva o simultáneamente por tres tejidos: *tejido conjuntivo*, *tejido cartilaginoso* y *tejido óseo*. Los *huesos de membrana* pasan directamente del estado conjuntivo al estado óseo. Los *huesos de cartílago* son sucesivamente conjuntivos, cartilaginosos y óseos. Se llama *osificación* a la destrucción del cartílago *(condrólisis)* y su reemplazamiento por el hueso *(osteogénesis)*. Estos fenómenos tienen perfecta semejanza con la histolisis y la histogénesis de la metamorfosis de los insectos. La formación del tejido óseo procede por grados a partir de centros de osificación que acaban por unirse;

6° El *esqueleto* de los vertebrados se descompone en columna vertebral, cráneo, esqueleto visceral y esqueleto apendicular;

7° La *columna vertebral* o *raquis* está formada por una serie de *vértebras* dispuestas primitivamente, como las cuentas de un rosario, alrededor de una cuerda dorsal. Más tarde, ésta desaparece y el *cuerpo* de la vértebra cesa de estar perforado. Al cuerpo están anexados, dorsalmente, un *arco neural*, que rodea la medula espinal, y ventralmente, un *arco henal*, que protege el aparato circulatorio;

8° El *cráneo* o caja craneana encierra el encéfalo. Tiene lateralmente, como anexos, tres pares de cápsulas sensoriales, que albergan los órganos de los sentidos: un par de *cápsulas olfativas*, un par de *cápsulas ópticas* y un par de *cápsulas auditivas*. Mientras que las primeras y las últimas terminan por soldarse al cráneo, las cápsulas ópticas quedan independientes y constituyen los globos oculares;

9° El *esqueleto visceral* está constituido por una serie de *arcos* unidos al cráneo y a las primeras vértebras. Estos arcos están alojados en la pared del cuello y sostienen las hendiduras bucal y branquiales;

10 El *esqueleto apendicular* es el de los miembros. Se distinguen los *miembros impares*, situados en el plano de simetría del cuerpo, ya dorsal, ya ventralmente, y los *miembros pares*, situados lateralmente. Hay como máximo cuatro miembros pares, que corresponden a nuestros brazos y piernas. El esqueleto de estos miembros difiere según se trate de *aletas* o de *patas*;

11 *El aparato digestivo* es un tubo cuyas partes están más o menos diferenciadas. En él vierten sus productos de secreción glándulas salivales, un páncreas y un hígado voluminoso. Hay que señalar la importancia del *hígado* como órgano de defensa;

12 La *cavidad bucal* está generalmente provista de *dientes*, que tienen un papel prensil o masticador. Estos dientes son producidos por la dermis y la epidermis de la mucosa gingival. Se componen de tres tejidos de mineralización y dureza crecientes: el *cemento*, que se parece al hueso, el *marfil* y el *esmalte*. Están soldados a los maxilares o implantados en alvéolos. En este caso, tienen una raíz, un cuello y una corona. En su interior se encuentra la pulpa dental;

13 Los *vertebrados* tienen una respiración *cutánea*, *branquial* o *pulmonar*. Branquias y pulmones son dependencias de la faringe y recuerdan, desde este punto de vista, las hendiduras branquiales de los procordados;

14 El *aparato circulatorio* consta siempre de un *corazón* situado ventralmente en el cuello, a la altura de las branquias, o en el tronco, al nivel de los pulmones. La sangre expulsada del corazón pasa por una serie de *arcos aórticos* metamerizados, pero más o menos modificados según la función que realizan. Una arteria *aorta* conduce la sangre a todos los órganos. *Vasos capilares* y *venas* la devuelven al corazón. El aparato circulatorio está, por tanto, completamente cerrado. La sangre comunica con los tejidos únicamente al nivel de los capilares: intercambios de glóbulos blancos *(diapédesis)*, intercambios de gas y de substancias alimenticias *(ósmosis)*;

15 La *sangre* contiene siempre glóbulos rojos o *hematíes*. La *hemoglobina* está siempre fijada en ellos en lugar de hallarse disuelta en el plasma, como en los invertebrados que la poseen. Es un pigmento respiratorio a base de hierro;

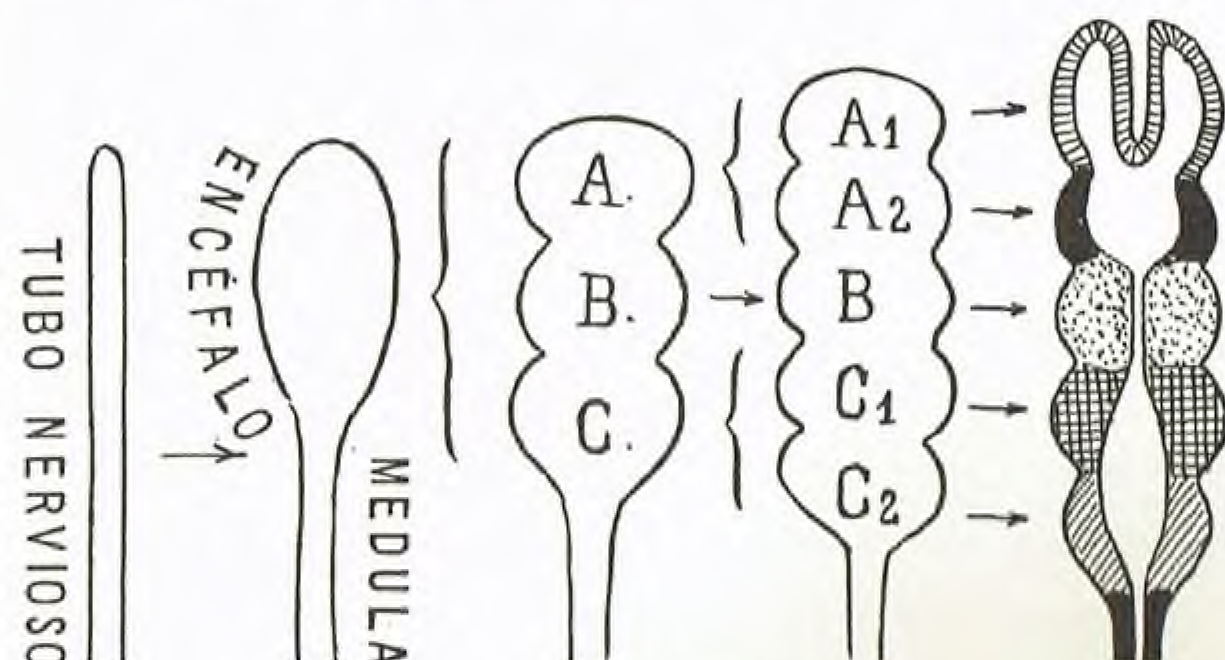
16 El *aparato excretor* está formado por *tubos uriníferos* que dimanan de *nefridios* semejantes a los de los anélidos. Pero, en lugar de desembocar separadamente en el exterior, estos tubos desembocan en dos canales colectores o *uréteres primitivos* que terminan en la cloaca. Por otra parte, en vez de formarse simultáneamente en toda la longitud del tronco, aparecen sucesivamente de delante hacia atrás. Agrupados proporcionalmente a su crecimiento, constituyen tres pares de riñones sucesivos llamados *pronefros*, *mesonefros* y *metanefros*.

Los mesonefros establecen generalmente, en el macho, estrechas relaciones con las glándulas genitales; los uréteres primitivos se convierten en *uroespermiductos*. Más tarde, cuando los metanefros adquieren *uréteres definitivos*, completamente distintos de los primitivos, éstos sólo sirven de conductos para el esperma. Así, los uroespermiductos se especializan en las funciones de *espermiductos*. No ocurre esto en la hembra, en la que las glándulas genitales tienen simpre *oviductos* independientes de los uréteres;

17 El *sistema nervioso* de los vertebrados tiene como partes esenciales el *encéfalo*, contenido en el cráneo, y la *medula espinal*, contenida en el raquis. Estas dos partes, así como los nervios que de ellas se derivan, provienen del *ectodermo*. Aparece, en efecto, muy pronto, en la

espalda del embrion, un *canal nervioso* que se transforma luego en *tubo nervioso* por acercamiento y soldadura de sus bordes.

El tubo nervioso, primitivamente semejante al del anfioxo, tiene el mismo calibre en toda su longitud. Después, su parte anterior se abulta



Desarrollo del encéfalo

y forma una vesícula hueca que es el origen del encéfalo. El resto del tubo da la medula espinal.

Pero volvamos a la vesícula. Dos, y luego cuatro compresiones transversales la dividen en cinco vesículas metamerizadas que son: el *cerebro anterior* (A_1), el *cerebro intermedio* (A_2), el *cerebro medio* (B), el *cerebro posterior* (C_1) y el *poscerebro* (C_2). Cada una de estas partes se complica después por la desigual condensación de su pared, diferenciación de substancia gris y de substancia blanca, flexiones, etc. El resultado de esta evolución será estudiado en cada grupo;

18 Los *órganos sensoriales* de los vertebrados son, como en el hombre: la *piel*, órgano del tacto; la *nariz*, órgano del *olfato*; la *lengua*, órgano del gusto; los *ojos*, órganos de la visión, y los *oídos*, órganos de la audición y el equilibrio;

19 Salvo raras excepciones, los vertebrados tienen los sexos separados. Su fecundación es externa o interna. Son *ovíparos*, *ovovivíparos* o *vivíparos*. La segmentación es total y desigual cuando el huevo es *heterolecito*, es decir, cuando contiene una cantidad media de vitelo. Es parcial cuando el huevo, atestado de reservas, es *telolecito*. En los peces y los batracios, el desarrollo es generalmente *indirecto*: a los estadios embrionarios suceden estadios larvarios. En los reptiles, las aves y los mamíferos, el desarrollo es, por el contrario, *directo*, y el embrión, contenido en el huevo hasta su completo desarrollo, posee anexos llamados *amnios* y *alantoides*.

Clasificación de los vertebrados. — Según tengan o no un amnio o una alantoides, se divide a los vertebrados en dos subtipos:

1° Los **anamniotas** o **analantoideos**, que comprenden los *peces* y los *batracios*. Son vertebrados acuáticos, al menos durante una parte de su existencia. Se les llama con frecuencia vertebrados inferiores con relación a los siguientes;

2° Los **amniotas** o **alantoideos**, que comprenden los *reptiles*, las *aves* y los *mamíferos*. Son siempre vertebrados aéreos y superiores a los otros por toda su organización.

Si se tiene en cuenta la temperatura del cuerpo, ello nos lleva a reunir los peces, los batracios y los reptiles en un grupo de **heterotermos**, lo que significa de temperatura variable. Las aves y los mamíferos les son opuestos bajo el nombre de **homeotermos**.

Por último, los mamíferos, en su mayoría **vivíparos**, pueden ser opuestos a los demás vertebrados, que son en general **ovíparos**.

Clase de los peces

Los **peces** *son vertebrados acuáticos con piel cubierta de escamas y cuyos miembros son aletas. Respiran por medio de branquias. Su corazón sólo contiene sangre impura. Sus riñones son mesonefros. Su encéfalo y sobre todo su cerebro están poco desarrollados. Sus principales órganos sensoriales están en líneas laterales situadas en los flancos. Son ovíparos, anamniotas y analantoideos. Desde el punto de vista fisiológico, son heterotermos.*

Forma del cuerpo. — La forma de los peces es esencialmente característica por su compresión lateral y su encogimiento caudal. Se demuestra experimentalmente que su forma les ha sido impuesta por los remolinos y las vibraciones que determinan al desplazarse en el agua. En suma, es el medio acuático el que los ha modelado. Sólo los peces sedentarios o malos nadadores, como las rayas, los lenguados, las anguilas, los hipocampos, etc., pueden separarse del tipo morfológico.

Aletas. — La disposición misma de las aletas es consecuencia de los remolinos engendrados por la traslación en el agua. Varía según si el pez es buen o mal nadador.

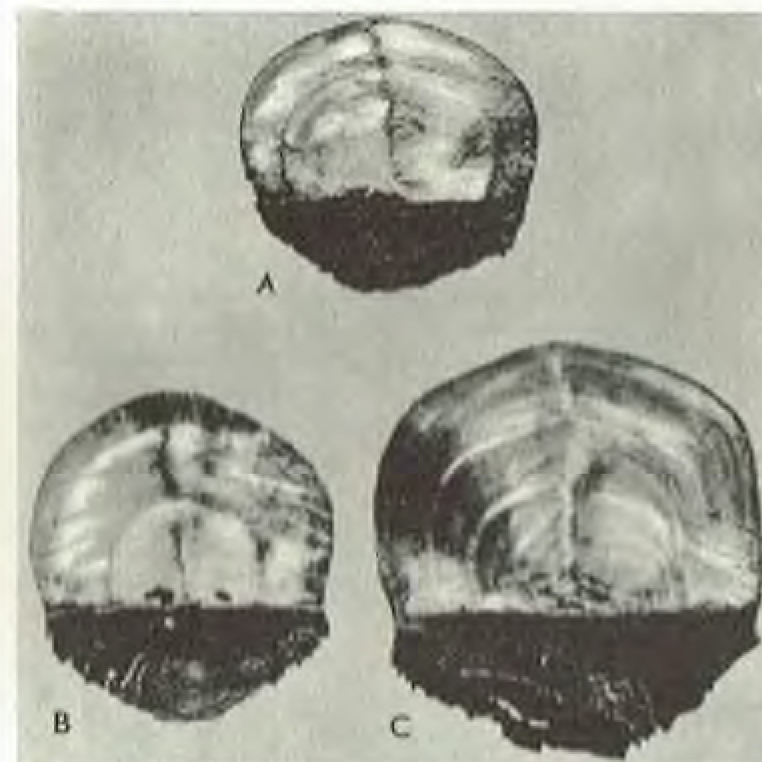
Hay que distinguir las *aletas impares* y *las aletas pares*. Las impares están situadas en la espalda *(dorsales)*, en la extremidad de la cola *(caudal)* y bajo el vientre, detrás del ano *(anales)*. Las pares están situadas lateralmente y corresponden a nuestros brazos *(pectorales)* y a nuestras piernas *(pélvicas)*.

El esqueleto de las aletas está constituido por *radios* articulados con piezas basilares. Los radios son cartilaginosos u óseos. En este caso, son espinosos o blandos y ramificados. Las piezas basilares de las aletas impares están en relación con las vértebras. Las de las aletas pares constituyen una *cintura escapular* y otra *pelviana*.

La aleta caudal puede estar formada según dos tipos: o bien la columna vertebral se prolonga en el lóbulo superior, que es más largo que el inferior *(caudal heterocerco)*, o bien se detiene en la base de los dos lóbulos, que son iguales o están confundidos *(caudal homocerco)*.

Escamas y dientes. — La epidermis no tiene capa córnea, pero contiene gran número de células de mucus. En la dermis se forman escamas salientes, que levantan la epidermis.

Las *escamas placoideas* de los tiburones y las rayas se componen de una pequeña placa ósea que sostiene una punta de marfil. Están cubiertas de esmalte segregado por la epidermis y contienen una pulpa rica en vasos y nervios. Estas escamas tienen, pues, la misma estructura que los dientes. En el borde de las mandíbulas de algunos tiburones se observa la transición de las verdaderas escamas a los verdaderos dientes, en forma de puñal. Las rayas tienen escamas y dientes en forma de adoquín.



Escamas de arenques de diferente edad: A. Una zona invernal; B. Dos zonas invernales; C. Tres zonas invernales

De la soldadura de gran número de escamas placoideas resultan las llamadas *escamas ganoideas* de los esturiones.

Cuando, por el contrario, son delgadas laminillas flexibles y no cubiertas de esmalte, las escamas son llamadas *cicloideas*, si son de contorno redondeado, y *ctenoideas* cuando están provistas de púas en su borde libre. Estas escamas se cubren en parte unas a otras y de delante hacia atrás, como las piezas de un tejado. Su crecimiento, activo en verano, lento o casi nulo en invierno, produce en la superficie una alternancia de zonas anchas y estrechas. De este modo puede conocerse la edad de un pez.

Tubo digestivo. — Las partes de este conducto están poco diferenciadas. El esófago, el estómago y el intestino no tienen límites precisos. Las glándulas salivales faltan, como en la mayor parte de los animales acuáticos. Al píloro están con frecuencia anexados *apéndices pilóricos* tubulares, más o menos numerosos, cuya misión no es suficientemente conocida. En los tiburones, las rayas y los esturiones, el intestino encierra un *pliegue espiral* que tiene por efecto aumentar la superficie de absorción.

La *vejiga natatoria* es una dependencia del tubo digestivo, con el cual comunica a veces por un conducto neumático. A veces, también, se separa de él completamente y se convierte en un saco cerrado. El gas que contiene es oxígeno casi puro segregado por una verdadera *glándula de gas*, ricamente vascularizada, de la pared interna. La función de la vejiga es muy discutida. No sirve para la respiración y no parece tener un papel considerable en la ascensión y el descenso del pez en el agua. Sus cambios de volumen, por falta de músculos, sólo pueden ser pasivos. En ciertas especies, la vejiga natatoria está en relación con los oídos mediante una cadena de huesecillos. En este caso viene a ser como una caja de resonancia.

Aparato respiratorio. — Todos los peces tienen *branquias*, pero la disposición de éstas varía según los grupos. Se distinguen tres tipos principales:

1° En todos los embriones de vertebrados, la pared interna de la faringe crece más de prisa que la externa y se pliega. De ello resulta una serie de *bolsas faríngeas* metamerizadas. Estas bolsas hacen retroceder el mesodermo y acaban por alcanzar el ectodermo, que puede perforarse. Así aparecen hendiduras dispuestas por pares, unas detrás de otras. La primera de todas se convierte en la *hendidura bucal*, limitada hacia atrás por el *arco mandibular*. La segunda es el origen de los *orificios nasales* en los tiburones y de las *trompas de Eustaquio* en los *vertebrados aéreos*. El arco que la limita posteriormente se llama *arco hioideo*. Las hendiduras que vienen a continuación no se abren más que en los peces y constituyen las *hendiduras branquiales*. Los tiburones y las rayas tienen cinco pares, separadas unas de otras por cuatro *arcos branquiales*. Ésta es una disposición primitiva. La pared interna de las hendiduras está provista de *laminillas branquiales* vascularizadas; a su nivel se hacen los cambios de oxígeno y gas carbónico. El agua entra por la boca y sale por las hendiduras branquiales;

2° En las lampreas, las hendiduras branquiales están reducidas a orificios circulares en número de siete pares. Cada orificio da acceso a un tubo dilatado en su centro, donde contiene las laminillas vascularizadas. La otra extremidad del tubo no se abre directamente en la faringe, sino en un tubo colector paralelo a la misma y en comunicación con ella;

3° En los teleósteos o peces óseos, los cuatro tabiques interbranquiales, sostenidos por los arcos branquiales, se reducen en provecho de las

laminillas vascularizadas. De ello resultan cuatro *branquias* de cada lado que flotan en una *cavidad branquial* cubierta por una especie de válvula móvil llamada *opérculo* (impropiamente, *oído*). Una *branquia* se compone del *arco branquial óseo* y de dos filas de *laminillas branquiales* dispuestas, sobre su borde convexo, como los dientes de un doble peine.

Los dipnoos tienen branquias análogas a las precedentes y, además, uno o dos *pulmones* que comunican con el esófago.

Aparato circulatorio. — El *corazón*, alojado en un *pericardio*, está situado al nivel de las branquias y está formado por cuatro cámaras, que son, de atrás hacia delante: el *seno*, la *aurícula*, el *ventrículo* y el *bulbo*. Unas válvulas las separan y permiten a la sangre ir de atrás hacia delante. Este corazón contiene únicamente sangre impura, y corresponde a la mitad derecha del corazón humano.

El sistema arterial comprende un *tronco aórtico* que parte del bulbo y se divide luego en cuatro o cinco pares de *arcos aórticos*. Éstos se capilarizan en las laminillas branquiales y confluyen después dorsalmente, a cada lado, en una *raíz aórtica*. Las dos raíces comunican en la cabeza por un *círculo cefálico*, de donde parten las carótidas. Por otra parte, se unen detrás del corazón para formar la *aorta*. Ésta conduce la sangre a todos los órganos: en especial al hígado, por una *arteria hepática*; al intestino, por una *arteria mesentérica*, y a los riñones, por *arterias renales*.

El sistema venoso comprende dos *venas cardinales anteriores* y dos *venas cardinales posteriores* reunidas, al nivel del corazón, en *canales de Cuvier*, que desembocan en el seno. El conjunto tiene la forma de una H. Hay, además, dos *sistemas porta:*

1º *Sistema porta hepático*. La sangre que viene del intestino, donde se ha llenado de materias nutritivas, llega al hígado por una *vena porta*. Ésta tiene la particularidad de estar capilarizada por los dos extremos: primero en la pared intestinal y después en el tejido hepático. El hígado detiene las substancias en exceso o tóxicas, reserva unas, neutraliza las otras, y envía luego la sangre al seno;

2º *Sistema porta renal*. Toda la sangre de la cola, llevada por las *venas caudales*, pasa a los riñones antes de volver al corazón por medio de las venas cardinales. Las venas caudales tienen también, por tanto, capilares en cada uno de sus extremos.

Órganos genitourinarios. — Los peces tienen dos pares sucesivos de riñones.

1º Los **pronefros,** riñones primitivos existentes en todos los embriones, pero que no persisten sino en los peces completamente inferiores. Se componen de *pronefridios*, especie de tubos contorneados que se abren, del lado externo, en un *uréter primitivo* o *canal de Wolff*; están divididos, del lado interno, en un *pabellón ciliado* y una copa de doble pared *(cápsula de Bowmann)*. En esta pared está alojado un conglomerado vascular que recibe la sangre de la arteria renal;

2º Los **mesonefros,** que son los riñones definitivos de los peces. Los *mesonefridios* que los constituyen difieren de los pronefridios por varios caracteres: *a*), se hallan más alejados de la cabeza; *b*), se encuentran más cerca de la línea media; *c*), están menos claramente metamerizados; *d*), no tienen pabellón ciliado; *e*), poseen un gran número de ramificaciones, terminadas cada una por una cápsula de Bowmann; *f*), están sumergidos en tejido conjuntivo.

Aparte los mixinoideos y los raños, los peces tienen los *sexos separados*. Pero hay que distinguir varios casos, en lo que se refiere a las relaciones de sus glándulas genitales con sus órganos urinarios:

1º En los teleósteos o peces óseos, los *ovarios y los testículos* tienen conductos independientes de los uréteres y se abren separadamente en el exterior del cuerpo;

2º En los tiburones y las rayas, los *ovarios* tienen también conductos independientes, o sea los *oviductos* o *canales de Muller*, procedentes de una división longitudinal de los uréteres primitivos. Estos conductos comienzan por un *pabellón* o trompa ciliada que recibe los óvulos. Se terminan posteriormente en una *cloaca*, bolsa común donde desembocan también los uréteres y el intestino;

3º En los tiburones y las rayas, los testículos vierten su lecha, por medio de *canalículos espermáticos*, en la parte anterior, separada, de los mesonefros. Los uréteres o *canales de Wolff* sirven entonces de *uroespermiductos* y conducen a la vez la orina y el esperma a la cloaca.

Columna vertebral. — Las diferentes etapas de su realización son las siguientes:

1º En un mixinoideo, como en el anfioxo, el esqueleto está reducido a la *cuerda dorsal*, que rodea una faja fibrosa o *manguito esqueletógeno*. Este manguito está abierto dorsalmente por un *arco neural* que aloja la medula espinal, y ventralmente por un *arco hemal* que protege la aorta;

2º En una lamprea aparecen en el arco neural, encima de la medula espinal, nódulos cartilaginosos metamerizados;

3º En los esturiones se añaden a los nódulos precedentes nódulos laterodorsales y lateroventrales;

4º En los tiburones y las rayas hay además, en contacto inmediato con la cuerda dorsal, anillos cartilaginosos que pueden calcificarse parcialmente. En tal fase, los vertebrados están completos, pero formados por piezas sueltas;

5º En los peces óseos, todas las piezas precedentes se osifican y se sueldan. Una vértebra comprende entonces un *cuerpo* y dos *arcos*, uno *neural* y otro *hemal*. El cuerpo es bicóncavo. La cuerda se estrecha para atravesarlo y se dilata entre las vértebras sucesivas. El arco neural es completo en todas las vértebras. El arco hemal, por el contrario, sólo es completo en las vértebras de la cola. En las del tronco, está ampliamente abierto y se anexa las *costillas* o *espinas* formadas en los tabiques intermusculares.

Cráneo. — 1º El de las lampreas, los tiburones y las rayas es una *caja cartilaginosa*, flanqueada de sus tres pares de *cápsulas sensoriales*, con orificios solamente para la medula espinal y los nervios craneanos;

2º El de los esturiones tiene un doble techo: el *techo cartilaginoso* del tipo precedente y un *techo óseo* desarrollado en la dermis, que constituye, evidentemente, una protección superflua;

3º El de los peces óseos está reducida en su origen a una *cubeta cartilaginosa*. En ésta se forman los *huesos de cartílago* que constituyen la base del cráneo definitivo. Al mismo tiempo se forma una bóveda por medio de *huesos de membrana*.

Hay que señalar que los huesos del cráneo son mucho más numerosos en los peces que en el hombre. Hay, por ejemplo, cinco occipitales, seis temporales, seis esfenoides, etc.

Esqueleto visceral. — Se da este nombre a una serie de arcos cartilaginosos, metamerizados, situados en la pared del cuello, suspendidos del cráneo y de las primeras vértebras y que sirven esencialmente de sostén de las branquias. Hay que distinguir, de delante hacia atrás:

1º Un *arco mandibular*, compuesto del *palatocuadrado* (mandíbula superior) y el *cartílago de Meckel* (mandíbula inferior). La hendidura que le precede se convierte en boca;

2º Un *arco hioideo*, formado también por una pieza superior o *hiomandibular*, y una pieza inferior o *hioides*. La primera sirve generalmente para articular las *mandíbulas*. La segunda refuerza el cartílago de Meckel. La hendiduda que precede al arco hioideo es la nasal, que generalmente desaparece;

3º Un número variable de arcos branquiales, que sostienen las branquias.

En los peces óseos, los arcos, primitivamente cartilaginosos, se osifican y se asocian huesos de membrana. Además se constituye el *aparato opercular*, que comprende el *opérculo* propiamente dicho y los *radios branquiostegos*. Estos huesos de membrana se articulan con el arco hioideo.

Sistema nervioso y órganos sensoriales. — Los caracteres principales del *encéfalo* de los peces son: *a*), un débil desarrollo general; *b*), una atrofia del *cerebro*, que jamás tiene corteza ni hemisferios; *c*), un aumento de volumen o un alargamiento de los *lóbulos olfativos; d*), un gran desarrollo de los *tubérculos bigéminos* y del *cerebelo*. Este órgano de coordinación de los movimientos está, naturalmente muy bien definido en animales que son tan buenos nadadores.

En los peces, el olfato y el gusto están confundidos en la *olfatogustación*, que tiene su asiento en dos fosas nasales rudimentarias, así como en la boca y su contorno.

Los órganos auditivos se reducen al *oído interno*, que comprende, como en el hombre, un *utrículo*, un *sáculo* y tres *canales semicirculares*. En el interior se hallan varias concreciones calcáreas *(otolitos)* que sirven al sentido del equilibrio. La parte propiamente auditiva, el caracol, es, por el contrario, muy reducida.

Los *ojos* encierran un *cristalino* esférico sobre el cual viene a apoyarse, hacia atrás, un *pliegue falciforme* desprendido de la coroides. Este pliegue sirve para la nutrición del cuerpo vítreo y la acomodación del cristalino.

En todos los peces existe sobre cada flanco una *línea lateral*, ya simple surco, ya canal que comunica con el exterior por orificios y que contiene ramos de células sensitivas. Una rama del nervio auditivo le envía ramificaciones nerviosas. Este órgano hace percibir al pez los movimientos, las vibraciones y las trepidaciones del agua.

Desarrollo y metamorfosis. — La mayor parte de los peces son *ovíparos* y de fecundación externa. Algunos, sin embargo, se acoplan y son *vivíparos*. Los huevos, fecundados en el interior de los oviductos, pasan en ellos una fase de su desarrollo. De este modo, los torpedos y algunas especies de tiburones dan nacimiento a crías vivientes después de haberlas nutrido por medio de una verdadera placenta.

En los ovíparos, el número y volumen de los huevos son muy variables. Se cuentan 1 000 huevos en la trucha, 50 000 en el arenque, 500 000 en la carpa, 5 000 000 en el esturión, y más aún en el bacalao. El volumen está en razón inversa del número y va de algunos milímetros a una fracción de milímetro.

Generalmente, los huevos son abandonados a su suerte, ya pegados a las hierbas acuáticas, ya flotantes en plena agua. Raramente son cuidados por los progenitores.

Por lo común, los peces nacen en estado de *alevino vesiculado*. Luego se resorbe la vesícula a medida que sus reservas se consumen. El alevino o larva de pez adquiere progresivamente los caracteres del adulto.

A veces, la larva es muy diferente del adulto y llega a ser como él solamente por *metamorfosis*. Los peces planos tienen larva normal, simétrica, con ojos laterales. Durante la metamorfosis, el cuerpo se aplana lateralmente y se inclina sobre un flanco; los dos ojos pasan al mismo lado.

Migraciones. — Muchos peces realizan migraciones temporales relacionadas con su reproducción. Reunidos por millones de individuos


Canusia signata


Licus Leveillei


Cerambycidae


calima


sesia


insecto palo
Caransus morusus


Haploenemia nebulosa
sobre corteza de roble


avispa


Acanthoderes claviceps
sobre corteza de haya


camaleón


Gasterocerius depressirostris
sobre las encinas muertas


rana de zarzal
Hyla arborea


Acanthocinus ædilis
sobre corteza de pino


Lycidae umbonia
orizombo

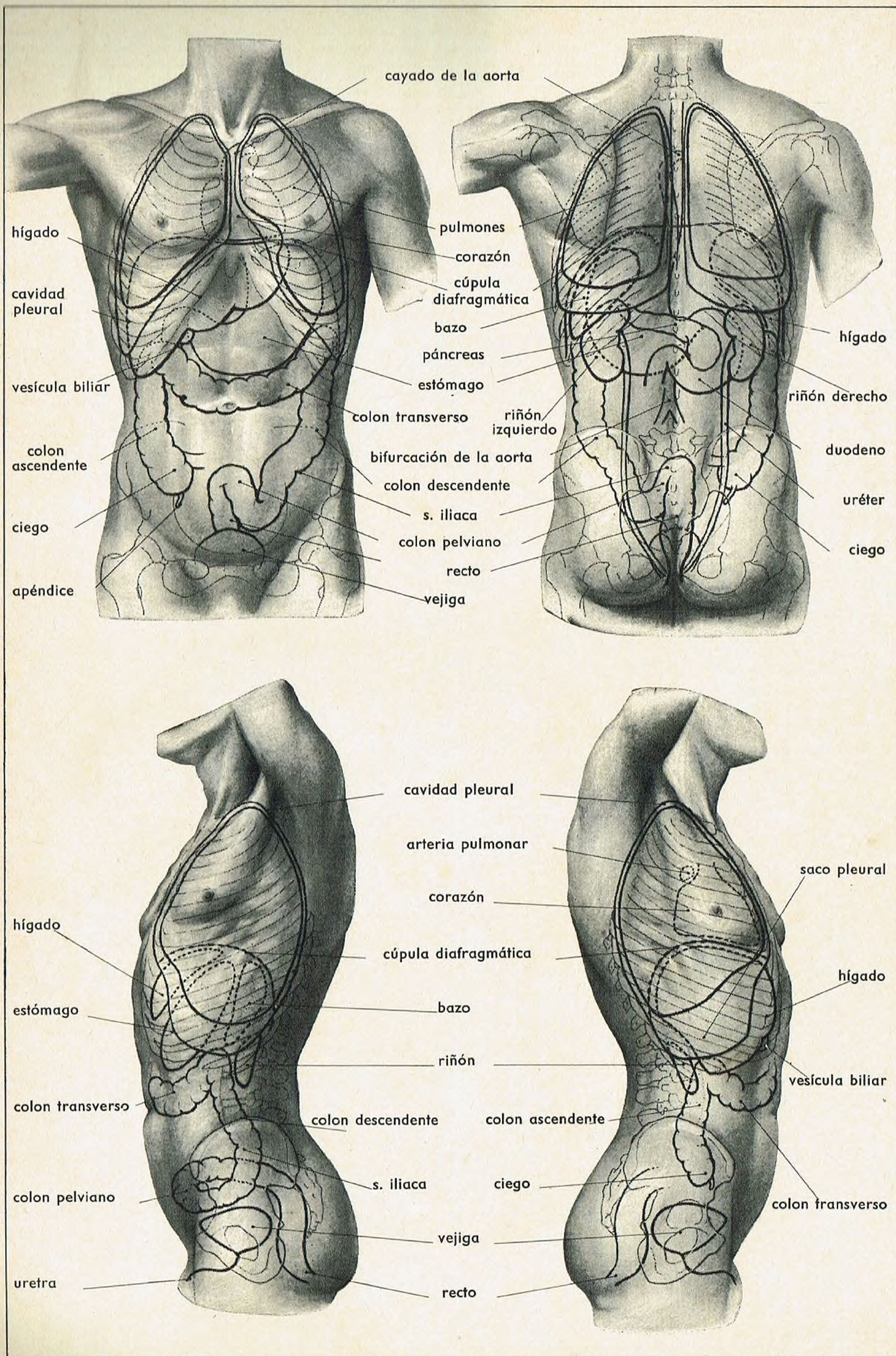

insecto hoja
(Phyllium scicifolium)


Lycidae


sicomorfo


mimética


sapo de agua
(Bufo marinus)



Situación de los diferentes órganos internos

de ambos sexos, unos dejan las aguas dulces para ir a poner en el mar, otros, al contrario abandonan el mar y penetran en los ríos para poner en ellos.

Al primer grupo pertenece la anguila. Todas las anguilas de Europa van a reproducirse al mar de los Sargazos. Cuando llegan a la madurez, descienden los ríos en otoño y recorren millares de kilómetros para dirigirse a su área de puesta. Después no se vuelve a saber de ellas. Los jóvenes leptocéfalos, salidos de sus huevos, hacen a su vez el viaje inverso y, transformados en *angulas* o anguilas transparentes, penetran en los ríos. Al segundo grupo pertenecen el **salmón**, el **sábalo**, el **esturión** y la **lamprea**. El salmón deja el mar en otoño y por ríos y torrentes llega hasta las cercanías de los manantiales, donde se reproduce. Los jóvenes salmones hacen luego el viaje inverso.

Clasificación de los peces. — La clase de los peces está dividida en cinco órdenes principales: *ciclóstomos, selacios, ganoideos, teleósteos* y *dipnoos.*

Ciclóstomos. — Los ciclóstomos, en otros tiempos acorazados, son hoy peces de piel desnuda. Su cuerpo es cilíndrico y está desprovisto de aletas pares. No tienen mandíbulas. Su boca, siempre abierta, posee salientes córneos *(odontoides)*, y una lengua en forma de émbolo que le permite hacer de ventosa. Con ella se adhieren a la piel de otros peces, de cuya carne se alimentan. A los lados del cuello tienen de siete a catorce pares de orificios branquiales que dan acceso a cámaras branquiales. El esqueleto, muy rudimentario, es en parte fibroso (columna vertebral) y en parte cartilaginoso (cráneo, esqueleto visceral).

Los ciclóstomos son marinos o fluviales y, más o menos, parásitos.

Selacios. — Aparte de los *holocéfalos*, que son formas aberrantes, los selacios actuales comprenden los *tiburones* o *escualos*, que tienen forma alargada y son buenos nadadores, y las *rayas*, que tienen forma aplanada y viven asentadas en el fondo del mar.

Fuera de estas diferencias de aspecto, todos estos peces tienen en común los caracteres siguientes: esqueleto cartilaginoso, boca ventral, aletas pares e impares (la caudal heterocerca), cinco pares de hendiduras branquiales y a veces orificios nasales, escamas placoideas que pasan a ser verdaderos dientes, válvula espiral en el intestino, órganos genitales más o menos relacionados con los riñones y una cloaca.

La mayor parte son ovíparos y tienen huevos grandes y de cáscara córnea, terminada a veces por filamentos. Algunas especies son vivíparas e incluso placentarias. Entre éstas es célebre el *torpedo*, especie de raya que posee órganos eléctricos dispuestos como pilas de Volta.

Ganoideos. — Estos peces reliquia, últimos supervivientes de grupos fósiles, presentan a la vez caracteres de selacios (orificios nasales, válvula espiral, escamas ganoideas procedentes de la fusión de escamas placoideas y revestidas de esmalte, relación entre los órganos genitales y urinarios) y caracteres de teleósteos (branquias con opérculos, apéndices pilóricos, vejiga natatoria).



Raya leopardo (alrededor de 300 kg de peso y 2,75 m de envergadura) y su pez piloto [*Fot. Isy-Schwart*]

Se les divide en dos grupos:

1º Los *condroganoideos* (esturión), de esqueleto cartilaginoso, boca ventral y aleta caudal heterocerca.

2º Los *osteoganoideos* (políptero del Nilo, lepidósteo del Misisipí) de esqueleto óseo, boca terminal y caudal homocerca.

Tenemos aquí dos estadios evolutivos que conducen a los teleósteos.

Teleósteos. — Éstos son los peces más diversos y numerosos de la época actual. Sus caracteres generales son los siguientes: esqueleto óseo, boca terminal, aletas pares e impares (las primeras pueden desaparecer), caudal homocerca, cuatro pares de branquias cubiertas por opérculos, escamas delgadas y sin esmalte, carencia de válvula espiral, pero a veces apéndices pilóricos, órganos genitales sin relación con los riñones, falta de cloaca y, a menudo, una vejiga natatoria.

La mayor parte son ovíparos y abandonan los huevos.

Dipnoos. — Estos otros peces reliquia interesan sobremanera como descendientes de un grupo fósil (crosopterigios) que ha debido ser la transición de los vertebrados acuáticos a los vertebrados aéreos. Hoy sólo se conocen el ceratodo de Australia, el protoptero de África y el lepidosirena de América del Sur. Todos viven en estanques o ríos que se secan durante el verano. Por eso tienen branquias operculadas y uno o dos pulmones que no carecen de analogía con una vejiga natatoria. Su corazón está igualmente modificado y tiene dos aurículas como el de los batracios.

Clase de los batracios

Los **batracios** (*del griego batrakos, rana*) *son vertebrados aéreos de piel desnuda y cuyos miembros son patas. Su respiración es cutánea y, accesoriamente, pulmonar. Su corazón tiene dos aurículas y un solo ventrículo, donde la sangre pura e impura se mezclan. Tienen uno o dos pares de cayados aórticos. Sus riñones son mesonefros. Su cerebelo está poco desarrollado. Son ovíparos, anamniotas y analantoideos. Desde el punto de vista fisiológico, son heterotermos.*

También se les llama **anfibios** (*del griego amphi,* doble, *y bios,* vida), *porque son acuáticos en su primera edad. Sus larvas o renacuajos tienen un corazón y branquias. El paso de renacuajo a adulto es una metamorfosis.*

Forma del cuerpo y patas. — Las ranas, desprovistas de cola, tienen el cuerpo rechoncho. Los tritones y las salamandras tienen, por el contrario, una cola larga. Las cecilias de América del Sur parecen gusanos. Las patas han desaparecido. En todos los demás batracios, el número de patas es de cuatro. Las de las ranas son desiguales: cortas las de delante y largas las de detrás, que sirven para el salto.

El *esqueleto* de las patas es el que nos encontraremos en todos los vertebrados aéreos. Desde su base a su extremidad comprenden: una *media cintura* formada por tres huesos (omóplato, clavícula, coracoides para las patas delanteras; ilion, pubis, isquion para los miembros posteriores), un *primer segmento* formado por un hueso (húmero o fémur), un *segundo segmento* formado por dos huesos (radio, cúbito o tibia y peroné) y una extremidad que comprende huesos carpianos o tarsianos, huesos metacarpianos o metatarsianos y dedos.

Piel desnuda. — Aparte de ciertas especies que tienen escamas y una especie de pelos, los batracios tienen la *piel desnuda* y siempre viscosa a causa del *mucus* que segregan por numerosas *glándulas*. Su piel es muy rica en *vasos sanguíneos* y sirve para la respiración. *Cromatóforos*, capaces de dilatarse y contraerse, pueden cambiar de color. Incrustados en su epidermis tienen vastos *sacos linfáticos*, e incluso *corazones linfáticos* dotados de pulsaciones.

Algunas glándulas muy grandes que tienen en la nuca segregan un *veneno* que, naturalmente, no puede ser inyectado por el animal. Se trata, al parecer, de una secreción interna, útil para el batracio mismo, y que sólo secundariamente se hace externa.

Dientes y tubo digestivo. — Los *dientes* son rudimentarios o nulos. La rana no tiene más que tres dientecillos soldados a su mandíbula superior y a su vómer. El sapo no tiene dientes. La *lengua* puede faltar. La de la rana no está ligada hacia delante y puede ser lanzada fuera para la captura de las presas. El *tubo digestivo* no tiene ninguna particularidad, salvo que se termina por una *cloaca.*

Aparato respiratorio. — Los *pulmones* son rudimentarios o nulos. Son simples sacos de pared interna ligeramente plegada. Por falta de costillas y de diafragma, el aire es aspirado por movimientos de deglución, que son muy visibles en una rana.

La *laringe* no tiene cartílago tiroideo (nuez), pero es, sin embargo, un potente órgano vocal, reforzado, en los machos de algunas especies, por uno o dos sacos vocales que sirven de caja de resonancia (croar del sapo, la rana y la rubeta).

La actividad de los pulmones, en estado embrionario, es suplida por la *piel*, delgada, vascularizada, siempre húmeda y muy apropiada para los cambios gaseosos.

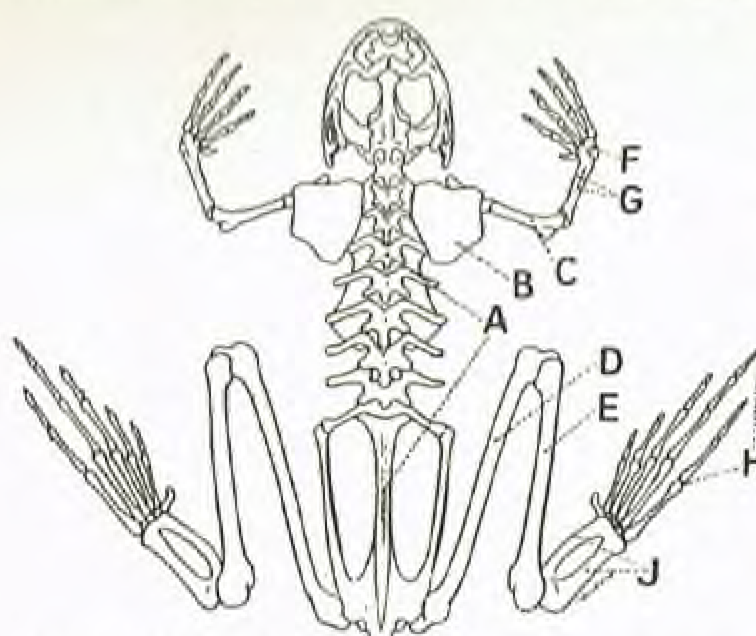
Aparato circulatorio. — El *corazón*, alojado en un *pericardio*, está formado por un *ventrículo* y un *bulbo*, que encuadran una aurícula derecha y una aurícula izquierda. Ésta recibe la sangre pura que viene de los pulmones y de la piel. La sangre pasa a continuación al ventrículo y a la mitad izquierda del bulbo, que divide longitudinalmente un tabique espiral. Uno o dos pares de *cayados aórticos* la llevan finalmente a la *aorta* y, por consiguiente, a todos los órganos. La sangre impura vuelve a la aurícula derecha por una *vena cava superior* y una *vena cava inferior*, cuyo orificio común corresponde al seno de los peces. De ahí pasa al ventrículo, después a la mitad derecha del bulbo, y por último a las *arterias pulmonares* y *cutáneas.*

Gracias a la estructura esponjosa del ventrículo, las sangres pura e impura no se mezclan en él completamente y la circulación, por tanto, no es muy imperfecta.

Un importante problema de anatomía comparada consiste en saber si los vasos sanguíneos de los batracios se derivan de los de los peces. Se admite casi que las carótidas de los batracios corresponden al primer arco aórtico de los peces, que los cayados aórticos corresponden a los arcos aórticos segundo y tercero (o segundo solamente), que las arterias pulmonares o cutáneas corresponden al cuarto arco aórtico. La vena cava superior y sus anexos se derivan de las venas cardinales. La vena cava inferior es, por el contrario, una neoformación procedente de la vena hepática.

Órganos genitourinarios. — Estos órganos están formados del mismo modo que los de los selacios.

Los riñones son *mesonefros* rojizos, alargados y están circundados exteriormente por un canal de Wolff o *uréter* primitivo.



Esqueleto de rana: A, columna vertebral; B, omóplato; C, húmero; D, fémur; E, tibia y peroné; F, hueso de la muñeca; G, radio y cúbito; H, dedos; J, hueso del talón

En la hembra, los *ovarios* son independientes de los riñones y tienen un conducto propio, el canal de Muller u *oviducto*, que se abre por un pabellón ciliado.

En el macho, los *testículos* comunican con la parte anterior de los riñones por canículos espermáticos. El canal de Wolff sirve de *uroespermiducto*.

En suma: hay uréteres y oviductos en la hembra, y uroespermiductos en el macho.

Los conductos genitales y urinarios desembocan en la cloaca.

Esqueleto. — Las *vértebras* están osificadas y comprenden un cuerpo y dos arcos, uno neural y otro hemal. El cuerpo es bicóncavo *(anfícélico)* o cóncavo-convexo. En el último caso, la concavidad es hacia delante *(procélica)* o hacia atrás *(opistocélica)*. Se comprende que una vértebra cóncava-convexa se articule mejor con las otras que una vértebra bicóncava. Por eso encontramos este tipo en los batracios superiores.

La cuerda subsiste cuando las vértebras son bicóncavas y desaparece cuando son cóncavas-convexas.

El número de vértebras varía entre 300 en los batracios vermiformes y 10 en los batracios sin cola: una cervical, siete dorsolumbares, una sacra y una coccígea.

El *cráneo* es relativamente sencillo y en parte cartilaginoso.

El *esqueleto visceral*, completo en la larva branquial, sólo forma en el adulto las mandíbulas, la columela y el hioides.

Sistema nervioso y órganos sensoriales. — El encéfalo se diferencia del de los peces por la existencia de un verdadero cerebro y la pequeñez del cerebelo.

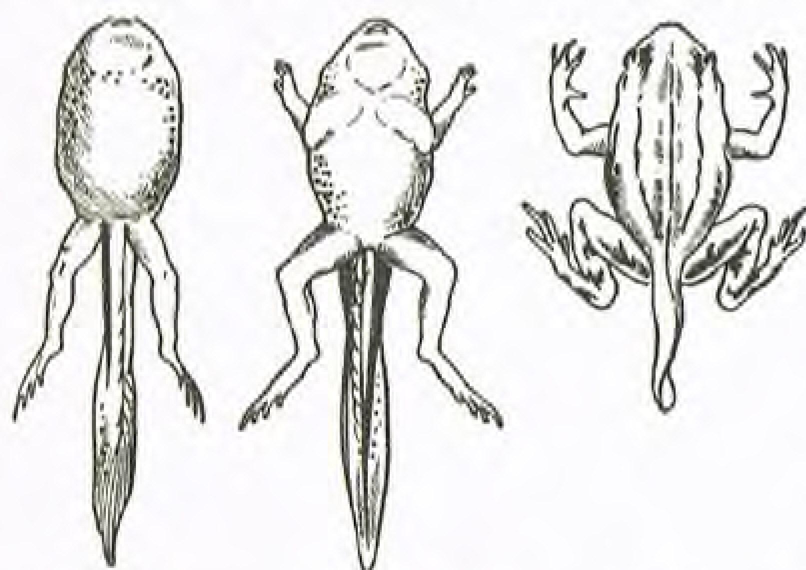
Hay que notar dos progresos en los órganos sensoriales:

1º Las fosas nasales comunican con la boca por ventanas internas y sirven para respirar. En ellas se constituyen cornetes;

2º Los órganos auditivos comprenden un oído interno semejante al de los peces y un *oído medio*: trompa de Eustaquio, caja del tímpano, ventana oval y columela que los une.

Desarrollo y metamorfosis. — La mayor parte de los batracios son *ovíparos* y de fecundación externa: el macho, montado sobre la hembra, vierte su lecha sobre los óvulos que salen de la cloaca. Sin embargo, algunos se acoplan y pueden ser *vivíparos*. Los huevos, fecundados en el interior de los oviductos maternos, realizan en ellos todo o parte de su desarrollo. Así es como algunas especies de salamandras dan nacimiento a crías vivas.

En los ovíparos, el número de los huevos es muy diverso: la rana pone 10 000, en montón; el sapo, 6 000, en forma de rosarios; el sapo partero, sólo 50, que enrolla alrededor de sus patas y cuida hasta que se abren. Se conocen otros casos de incubación, ya en la boca, ya en la espalda (donde cada huevo se abre un alvéolo), ya en una bolsa dorsal incubadora. Existen también casos de *nidificación*.


Transformación del renacuajo en rana

El nacimiento se efectúa generalmente en el estadio de *renacuajo de branquias externas*. Esta pequeña larva se parece a un pez por su forma, su aleta impar, sus líneas laterales y sus hendiduras branquiales. Pero está cubierta de cilios vibrátiles y tiene en su "cabeza", conjunto de la verdadera cabeza y el tronco, tres pares de papilas branquiales. Un órgano adhesivo le permite fijarse en las plantas acuáticas.

Primera metamorfosis: la larva precedente se transforma en renacuajo de branquias internas. Las papilas branquiales desaparecen, mientras que pliegues operculares vienen a tapar las hendiduras branquiales. Las branquias internas, semejantes a las de los peces, pero en número de tres pares, están alojadas en una cámara branquial, que se abre hacia atrás por uno o dos espiráculos (uno sólo, del lado izquierdo, en el renacuajo de rana). En esta fase, el corazón es el de un pez, la boca está provista de un pico córneo, el intestino, muy largo, está enrollado en forma de espiral y el régimen es herbívoro.

Segunda metamorfosis: las branquias se resorben y los pulmones aparecen. Se forman los miembros posteriores y después los anteriores. Salen los dientes. Se acorta el intestino. El régimen se hace carnívoro. Finalmente, desaparece la cola. En todos estos fenómenos, hay histolisis e histogénesis, como en los insectos.

Tales son las etapas evolutivas de una rana o un sapo: fase *fanerobranquia* (de branquias visibles), fase *criptobranquia* (de branquias ocultas), fase *abranquia* (sin branquias) y fase *anura* (sin cola).

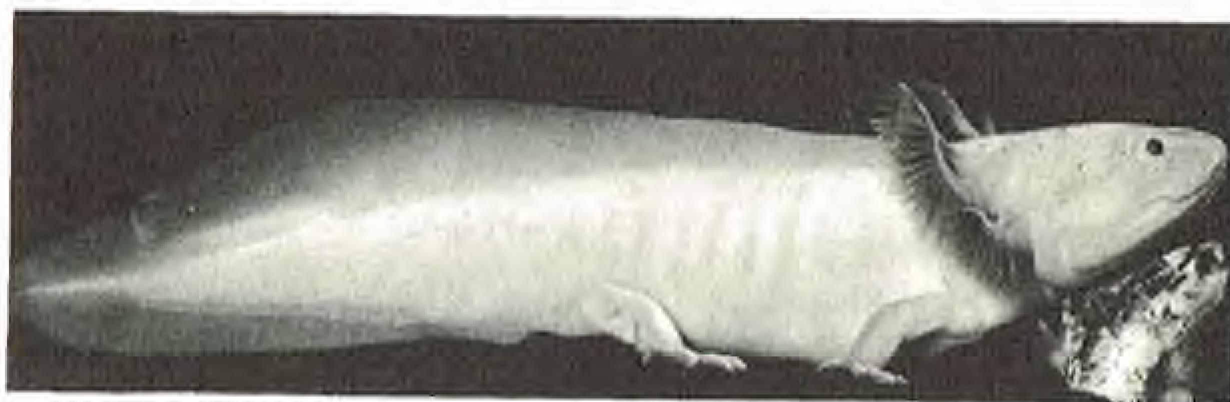
Pero no todos los batracios tienen metamorfosis tan completas. Hay algunos que conservan las branquias o la cola en el estado adulto.

Clasificación de los batracios. — Las formas adultas de los batracios constituyen una serie que es exactamente paralela a la de las formas larvales de la rana. Hay que distinguir ante todo los *urodelos*, que tienen cola larga y patas cortas; los *anuros*, que no tienen cola y cuyas patas sirven para saltar; los *ápodos*, que son vermiformes. Es preciso añadir los *estegocéfalos*, grupo fósil. Los urodelos se dividen en perennibranquios, criptobranquios y salamandrinos.

Los **perennibranquios** son los menos evolucionados, puesto que conservan sus branquias externas y su cola. Se han detenido en la fase fanerobranquia de la rana. Sin embargo, adquieren pulmones y pueden respirar el aire puro. El proteido, a causa de su vida subterránea, es incoloro y ciego.

Los **criptobranquios** están un poco más evolucionados, puesto que conservan, además de la cola, sus branquias internas y su espiráculo. Por otra parte, adquieren pulmones. Son las *salamandras gigantes* del Japón y China. Pasan de un metro de longitud.

Los **salamandrinos** marcan un nuevo progreso. No tienen ya branquias, pero poseen aún una larga cola. Se les llamaba antiguamente *lagartos desnudos*. Son las *salamandras* terrestres, los *tritones* acuáticos, los *amblistomas* de México, cuya larva es el ajolote.


Amblístoma (mutante albinos) [*Fot. Larousse*]

Los **anuros** son los más evolucionados. Como su nombre indica (del griego *a*, sin, y *ura*, cola), se oponen a los urodelos (del griego *ura*, cola, y *dêlos*, aparente) porque pierden su cola al llegar a adultos. Sus patas están también dispuestas para el salto. Son las *ranas*, los *sapos*, y las *rubetas*. Puede decirse que recapitulan, en el curso de su desarrollo, la serie de formas por las cuales han pasado los batracios.

Entre los anuros americanos hay que citar la rana **mugidora** o *rana catesbiana*, una de las más grandes que existen, que puede pesar hasta dos kilogramos, y el *cururú*, que lleva los hijos sobre la espalda, en cuya piel forman alvéolos donde se desarrollan hasta que pueden vivir libres.

Los **ápodos** son batracios aberrantes, vermiformes, sin cola ni miembros, cuya organización ha conservado muchísimos caracteres primitivos. Los principales son las *cecilias* ciegas de América del Sur. Recuerdan en cierto modo (estructura del cráneo, huesos dérmicos) a los *estegocéfalos* del Pérmico y el Triásico.

Historia del ajolote. — Existen en los lagos de México dos animales que se consideraban en otro tiempo como distintos: el *ajolote*, provisto de branquias externas y parecido al *Proteus* de las grutas de Carniola, y el *amblístoma*, desprovisto de branquias y parecido a una salamandra. Ambos, llegados a plenitud sexual, engendran animales semejantes a ellos. Ahora bien, algunos ajolotes, expedidos a París durante la guerra de México de 1864, se transformaron en amblístomas. Se trataba, pues, de larvas que se reproducían en estado larvario. Se da el nombre de *neotenia* (del griego *neos*, joven, y *teinein*, retener) a este fenómeno de conservación de los caracteres infantiles en animales aptos ya para la reproducción.

La neotenia del ajolote no tienen ya nada de misterioso. Hoy se sabe que es debida a una insuficiencia tiroidea. Basta inyectar extracto de tiroides, o simplemente una proteina iodea, a un ajolote para que se metamorfosee en amblístoma. También se puede conseguir el mismo resultado haciendo ingerir al animal extracto de tiroides.

Apliquemos esto a los renacuajos de rana. Un renacuajo al que se le extrae la glándula tiroides continúa creciendo sin metamorfosearse (renacuajo gigante). Un renacuajo al cual se injerta un fragmento suplementario de tiroides, o se le inyecta extracto tiroideo, se metamorfosea, por el contrario, inmediatamente, en rana (rana enana). La metamorfosis puede ser tan acelerada que el encéfalo, adelantándose al cráneo en su crecimiento, llega a hacerle estallar.

Vemos así el gran interés que presentan los batracios, tanto desde el punto de vista de la anatomía comparada (paso de peces a vertebrados aéreos) como desde los de la embriología y la fisiología.

Clase de los reptiles

Los **reptiles** *son vertebrados aéreos cuya piel está cubierta de escamas a las cuales se añaden a veces huesos dérmicos. La atrofia o desapari-*

ción de sus miembros les obliga a la reptación. Respiran por medio de pulmones. Su circulación es siempre imperfecta. Sus riñones son metanefros, y su cerebelo está poco desarrollado. Son ovíparos, amniotas y alantoideos. Su desarrollo completo se realiza en el huevo, gracias a las abundantes reservas que éste contiene. Por estos caracteres los reptiles se emparentan con los pájaros y los mamíferos, de los cuales se diferencian por ser heterotermos.

Forma del cuerpo y patas. — La mayor parte de los reptiles son *lacertiformes* (lagartos, cocodrilos) o *serpentiformes* (serpientes). La diferencia reside en el grado de alargamiento del cuerpo y en la presencia o ausencia de patas. Éstas son robustas en los cocodrilos, pero incapaces de levantar el cuerpo del suelo por estar insertas lateralmente. Relativamente más débiles en los lagartos, se reducen a muñones en los seps y se vuelven subcutáneas en los luciones. En las serpientes no existen ya. Sin embargo, el pitón conserva aún rudimentos de patas posteriores, y la boa un vestigio de pelvis.

La reptación hace intervenir como puntos de apoyo las patas, o, a falta de ellas, las escamas y las costillas. Las tortugas no reptan verdaderamente: andan. Cuando son acuáticas, sus miembros se ensanchan en forma de aletas. Una adaptación especial es la del dragón volador, especie de lagarto cuyas costillas libres y móviles se separan del tronco y sirven de armazón a un doble paracaídas.

Escamas y huesos dérmicos. — A diferencia de los peces y los batracios, los reptiles tienen la piel córnea en la superficie y desprovista de glándulas. Éstas se hallan localizadas en los muslos (lagartos) o en las proximidades de la cloaca.

En los lagartos y las serpientes, la capa córnea de la epidermis forma un revestimiento continuo de pequeñas *escamas*. No hay que confundirlas con las escamas de los peces, que son de origen dérmico y están separadas unas de otras. Las de los reptiles se unen y están sujetas, por consiguiente, a *mudas*, como el caparazón quitinoso de los insectos.



Escamas de serpiente

En los cocodrilos aparecen *huesos dérmicos* sobre los cuales se moldea el revestimiento córneo. Esto es lo que se llama un *exosqueleto*. Muy desarrollado en las tortugas, forma un *caparazón* que comprende *espaldar y peto*. El espaldar está soldado a la columna vertebral y a las costillas. El exosqueleto, en este caso, tiene adherencias con el endoesqueleto. En la superficie del caparazón, las capas córneas están dispuestas en forma de mosaico. Son las que se utilizan bajo el nombre de concha.

Tubo digestivo. — Las tortugas tienen un pico córneo, análogo al de los pájaros. Los lagartos y las serpientes tienen *dientes* soldados a los maxilares y a otros huesos de la boca. En las serpientes esos dientes pueden ser *venenosos*. En los cocodrilos, además, los dientes están insertos en alvéolos y se parecen a los de los mamíferos.



Escamas de tortuga

En los reptiles, sobre todo en los cocodrilos, se desarrolla un *paladar* que separa la boca de las fosas nasales.

La *lengua* es corta y carnosa, vermiforme, o también larga y hendida. Es un órgano gustativo y táctil.

El tubo digestivo se termina en una *cloaca*, en la que desembocan los conductos genitales y urinarios.

Aparato respiratorio. — La respiración es exclusivamente pulmonar. La *tráquea* y los *bronquios* están bien desarrollados y los mantienen abiertos los anillos cartilaginosos. Pero los *pulmones* no son a veces más que simples sacos de pared interna plegada sencillamente. Tal es el caso de los lagartos, que tienen dos pulmones, y las serpientes, que sólo tienen uno. Los pulmones de los cocodrilos y las tortugas son un poco más perfectos. Están divididos por tabiques completos en varias cámaras, a las que llegan ramificaciones bronquiales.

Aparato circulatorio. — El corazón de los reptiles está constituido según dos tipos completamente diferentes:

1º *Corazón de los lagartos, las serpientes y las tortugas.* Tiene dos aurículas, pero un solo ventrículo, dividido incompletamente por dos medios tabiques. Éstos restringen parcialmente la mezcla de las sangres pura e impura. Hay uno o dos pares de cayados aórticos, que corresponden, como en los batracios, a los arcos segundo y tercero de los peces. Las arterias carótidas parten del cayado derecho, que, procedente de la mitad izquierda del ventrículo, encierra sobre todo sangre pura. La arteria pulmonar (arco cuarto de los peces) parte, por el contrario, de la mitad derecha del ventrículo y contiene sobre todo sangre impura;

2º *Corazón de los cocodrilos.* En éstos, el ventrículo está totalmente dividido; las sangres pura e impura no se mezclan ya en el interior del corazón; la circulación parece perfecta. Pero hay dos cayados aórticos, de los cuales uno parte del ventrículo derecho y otro del izquierdo. Toda la ventaja de la división ventricular se perdería así si no existiesen dos correctivos para esta malhadada disposición: 1º, el cayado izquierdo, que contiene sangre impura, es más estrecho que el otro; 2º, entre los dos cayados existe una comunicación *(foramen de Panizza)* que permite a la sangre pura pasar del cayado derecho al izquierdo, y no al contrario. Así, la aorta contiene principalmente sangre pura.

Órganos genitourinarios. — Los riñones definitivos son *metanefros* análogos a los del hombre y con uréteres independientes. Los *testículos* utilizan como espermiductos los uréteres primitivos o *canales de Wolff*. Los *ovarios* tienen oviductos o *canales de Muller* que empiezan en sus proximidades por un pabellón ciliado. Uréteres, espermiductos y oviductos terminan en la cloaca.

Hay que señalar que la orina de los reptiles es sumamente rica en *ácido úrico*, carácter que encontraremos también en los pájaros.

Esqueleto. — La osificación es muy marcada en los reptiles. Hemos visto que existe a veces un exosqueleto (huesos dérmicos) superpuesto al endoesqueleto. El cráneo es también enteramente óseo.

El número de vértebras varía de 60 en los cocodrilos a unas 400 en las boas. Existen *costillas* sobre las vértebras cervicales, dorsales y lumbares. Las de las serpientes, redondeadas en su extremidad y movidas por potentes músculos intercostales, intervienen en la reptación.

Los lagartos y las serpientes tienen su mandíbula inferior doblemente articulada con el cráneo por medio de huesos cuadrados. Por ello pueden abrir la boca desmesuradamente.

Sistema nervioso y órganos sensoriales. — En el encéfalo se manifiestan nuevos perfeccionamientos: aumento del cerebro con la aparición de la *hendidura de Silvio* y el *trígono*.

La *epífisis* de la hateria, especie de lagarto de Nueva Zelandia, y la del lagarto ocelado de Francia, muestra claramente la estructura de un ojo situado en un orificio de la bóveda craneana. Este *ojo parietal* u ojo impar está, pues, a flor de piel. Si bien no funciona como órgano visual, informa por lo menos al animal acerca de las variaciones de la temperatura.

Las considerables dimensiones del orificio pariental en muchos reptiles, anfibios y peces fósiles, permiten creer que el ojo parietal desempeñaba un importante papel sensorial en esos animales pero que ha degenerado mucho en el curso de la evolución. La hateria y el lagarto ocelado nos lo muestran bajo su aspecto arcaico.

Los demás órganos sensoriales de los reptiles no ofrecen nada de particular y se parecen mucho a los de las aves.

Desarrollo. — Los sexos están siempre separados. El macho introduce su lecha, por medio de una *verga* o *pene* en el interior de la cloaca de la hembra. La fecundación es, por tanto, *interna*. Generalmente, los huevos son puestos inmediatamente después de la fecundación. Algunas veces permanecen en los oviductos maternos y se abren en ellos, en cuyo caso las crías vienen vivas al mundo. Hay, pues, reptiles *ovíparos* y *vivíparos* u *ovovivíparos*. Citemos, entre éstos, las víboras y los luciones.

En todos los casos los huevos son *telolecitos*, es decir, voluminosos y ricos en materias nutritivas. Éstas aseguran la totalidad del desarrollo, que es, por consiguiente, *directo* y no pasa por fases larvarias.

Clasificación de los reptiles. — Los reptiles actuales comprenden cuatro órdenes: los lagartos o **saurios**, las serpientes u **ofidios**, las tortugas o **quelonios** y los cocodrilos o **cocodrílidos.** Los dos primeros se reúnen a veces bajo el nombre de *saurofidios*.

A estos reptiles hay que añadir los grupos fósiles, que han representado un papel importantísimo durante la era secundaria. Existían entonces *dinosauros* o reptiles terrestres de gran tamaño (diplodoco, estegosaurio, triceratops, iguanodonte); *ictiosáuridos* o reptiles acuáticos (ictiosauro, plesiosauro); *pterosaurios* o reptiles voladores (pterodáctilo) *teromorfos*, vecinos de los mamíferos, y *rincocéfalos* o tipos primitivos, de los cuales la hateria actual de Nueva Zelandia es el último representante.

Cuando se consideran estas formas fósiles tan grandes y diversas, se tiene la impresión de que la clase de los reptiles está actualmente en decadencia.

Lagartos o saurios. Son éstos reptiles lacertiformes o serpentiformes que no suelen pasar de dos metros de longitud; poseen en general *patas* y tienen el cuerpo completamente revestido de pequeñas *escamas*. Tienen dientes pequeños y numerosos, soldados a diversos huesos de la boca; una cloaca abierta por una hendidura transversal; un corazón de tres cavidades; dos pares de cayados aórticos; párpados libres y móviles; un oído mediano, etc.

A este grupo pertenecen los *gecos*, notables por sus vértebras anficélicas y sus dedos adhesivos; los *dragones voladores* de la región indomalaya; los *seps* del sur de Francia, que tienen patas rudimentarias, y los *luciones* o serpientes de cristal, cuyas patas están ocultas bajo la piel. Todos estos saurios tienen la lengua corta. Frente a ellos se coloca a los verdaderos *lagartos* y los *varanos* gigantes del Nilo, cuya lengua es larga y hendida. La de los *camaleones* de África es cilíndrica y viscosa. El animal la proyecta con una increíble velocidad sobre los insectos que pasan a su alcance. Los camaleones son conocidos sobre todo por sus cambios de color, debidos a que poseen en la piel cromatóforos rojos, negros y amarillos capaces de dilatarse o de contraerse bajo influencias nerviosas.

Entre los saurios más característicos de América Latina se encuentran el **basilisco,** de aspecto y costumbres semejantes a la iguana, pero de cuerpo más esbelto; tiene además en el lomo y la cola una cresta, y sobre la cabeza una especie de capucha o casquete membranoso; los **anolis,** de cuerpo elegante y colores muy vivos, que cambian repentinamente; tienen una gran agilidad y sus dedos adhesivos pueden trepar aun por la superficie de un cristal; el **tolachini,** que es cilíndrico desde la cabeza a la cola, es el único saurio venenoso.

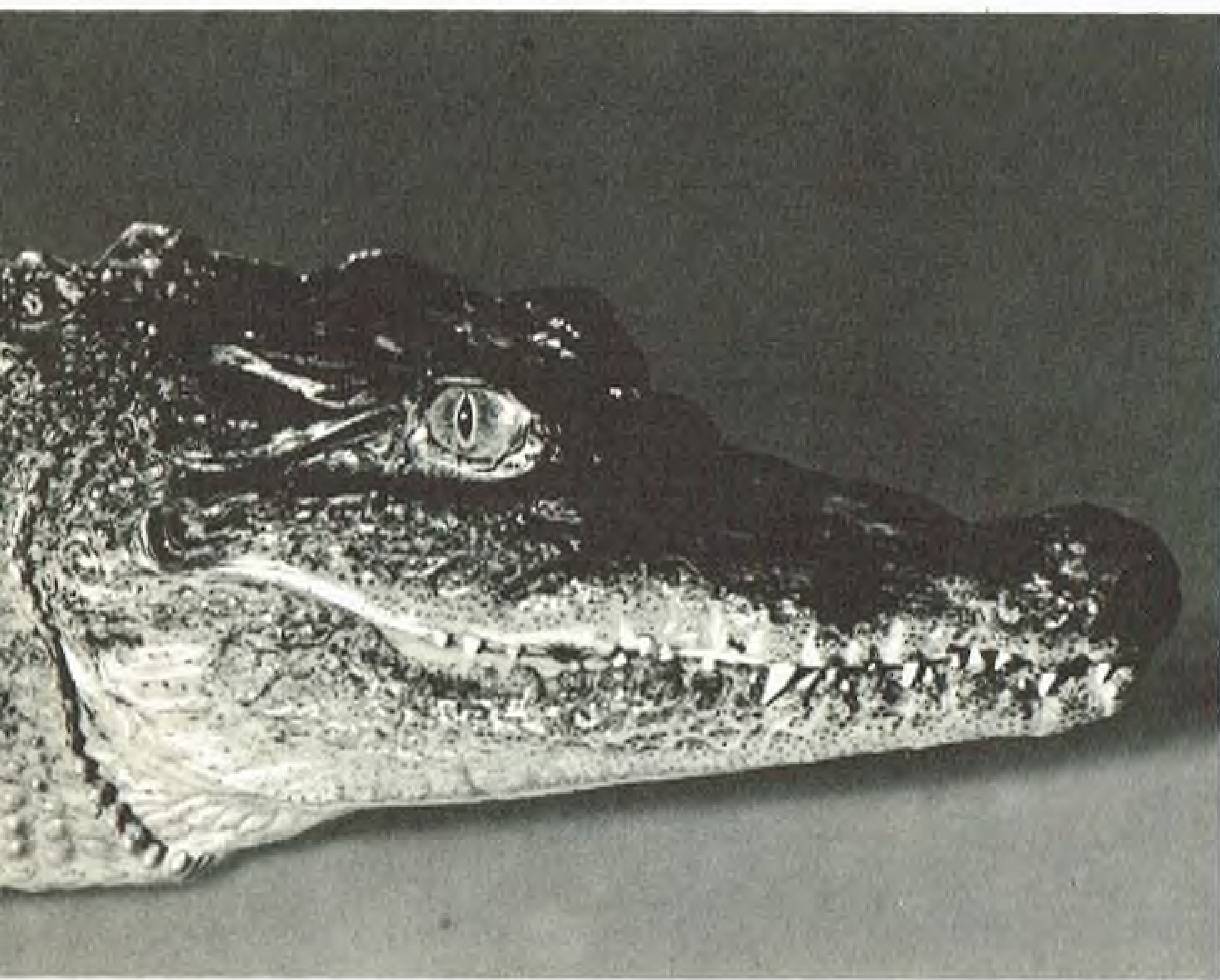
Serpientes u ofidios. — Las serpientes no tienen *patas jamás*, sino sus rudimentos en las proximidades de la cloaca. Su cuerpo está completamente revestido de *escamas*, mayores en el vientre que en el dorso.

Sus dientes, muy variables, están soldados a los huesos subyacentes. Su cloaca es una hendidura transversal. Tienen un corazón de tres cavidades, como los saurios, pero sólo un par de cayados aórticos. Como consecuencia del alargamiento de su cuerpo, tienen un solo pulmón, un solo ovario y un solo testículo. Las particularidades de su esqueleto son: ausencia del esternón; numerosas costillas, redondeadas en su extremidad, muy móviles y aptas para la reptación; las mitades izquierda y derecha de cada mandíbula pueden separarse una de otra. Este carácter, unido a la articulación de la mandíbula inferior con el cráneo por medio de los huesos cuadrados, les permite engullir presas voluminosas. Su lengua es larga y hendida. Sus párpados están soldados y son transparentes: las serpientes ven a través de sus párpados; esto es lo que les da una mirada fija y fascinante. Los oídos están reducidos a la parte interna.

Las serpientes se dividen en cuatro grupos:

1º Las *aglifos*, que no tienen ni veneno ni colmillos. Sus dientes son numerosos y todos iguales. A este grupo pertenecen las culebras de Europa, las boas de América del Sur y los pitones de Asia ecuatorial, los cuales alcanzan de seis a nueve metros de longitud;

2º Las *opistoglifos*, que tienen colmillos venenosos en el fondo de la boca. No pueden, pues, servirse de ellos más que para paralizar la presa en el curso de la deglución. Tales son las *culebras de Montpellier* (Francia), que alcanzan dos metros de longitud;



Cabeza de yacaré (*Fot. X.*)

3º Las *proteroglifos*, que poseen colmillos venenosos en la parte anterior de la boca. El veneno, producto de las glándulas salivares, corre por una ranura de los colmillos y puede así ser inyectado en el momento de la mordedura. Se trata, pues, de serpientes muy peligrosas, como las *serpientes marinas* de las costas del océano Índico y el Pacífico, y sobre todo como las *najas* o *cobras* de la India y de África. Se calculan en unas 20 000 las muertes causadas solamente en la India por la naja;

4º Las *solenoglifos*, que tienen también los colmillos en la parte anterior de la boca. En estos colmillos hay un canal por el que corre el veneno. Además, por efecto de un movimiento bascular del maxilar superior en que están, se dirigen hacia adelante en el momento del ataque. La serpiente no muerde: golpea e hinca los colmillos. Forman parte de este grupo las *víboras* de Europa; los *crótalos* o *serpientes de cascabel* de las dos Américas; los *botrops* de las Antillas, etc.

Entre las serpientes americanas hay que citar, aparte de las ya mencionadas, la **anaconda,** que llega a medir nueve metros, vive cerca del agua y es la más gigantesca de la familia de las boas; la **mussurana,** de tres metros de largo y color pardo obscuro, con el abdomen más claro y pintas amarillas, que se alimenta de serpientes venenosas, por lo que es muy apreciada; la **surucucú,** una de las más grandes serpientes venenosas, pues alcanza dos metros y medio de longitud y su mordedura es mortal, y la **coralillo,** también venenosa, que se distingue por sus anillos rojos, amarillos y negros alternativamente.

Tortugas o quelonios. — Las tortugas se distinguen de todos los demás reptiles por su *caparazón* y su *pico córneo*. El caparazón tiene un espaldar, soldado a las vértebras y a las costillas, y un peto ventral. Al menos, así sucede en el caso de los *tecóforos* o verdaderas tortugas. Existen, en cambio, tortugas *atecadas*, cuyo caparazón, compuesto de piezas separadas y no soldadas al endoesqueleto, está incluso desprovisto de escamas.

Tortuga (*Fot. Wide World*)

Pertenecen a los tecóforos, los *carey* y las *tortugas francas* de los mares calientes, que se cazan para obtener la concha; las *trionyx* de los ríos de las regiones cálidas; las *tortugas de agua dulce* de los estanques y los pantanos; las *tortugas griegas* o tortuga común y las *tortugas gigantes* de Madagascar y las islas Galápagos, que alcanzan un peso de varios centenares de kilogramos.

Las *atecadas* son las *tortugas laúd* que a veces vienen a varar en las costas de Europa.

En América del Sur, la tortuga **arrau,** del Orinoco, tiene gran importancia por su carne y sus huevos.

Cocodrílidos. — Desde todos los puntos de vista, los *cocodrilos* de África, los *aligátores* o *caimanes* de América y los *gaviales* de la India son los reptiles superiores de la naturaleza actual. Enumeremos sus perfecciones orgánicas: dientes montados en alvéolos, paladar completamente desarrollado, pulmones esponjosos, corazón de cuatro cavidades y oídos con esbozo de caracol y de órgano de Conti. Sus placas óseas cutáneas les hacen prácticamente invulnerables, y su cola es un poderoso órgano de natación, de ataque y de defensa.

Entre las diversas especies americanas se encuentran el *Caimán sclerops*, el *caimán negro*, característico por un listón transversal que une sus párpados, y el *aligátor de Misisipí*, que comienza a escasear y es objeto de explotación en criaderos.

El *gavial*, que vive en los grandes ríos de la India, especialmente en el Ganges, se diferencia de los demás cocodrilos por su largo hocico estrecho y a manera de pico. Su tamaño es de cinco a seis metros de longitud.

Clase de las aves

*Las **aves** son vertebrados aéreos, bípedos, cuyos miembros anteriores, transformados en alas, les sirven para volar. Su piel es seca y está cubierta de plumas. Su tubo digestivo, de partes bien diferenciadas, comienza por un pico y se termina por una cloaca. Su aparato respiratorio comprende dos pulmones esponjosos y dos sacos aéreos. Tiene un corazón con cuatro cavidades y un solo cayado aórtico, encorvado a la derecha. Sus riñones son metanefros. Su cerebro y su cerebelo están bien desarrollados. Son animales ovíparos, amniotas y alantoideos. Los huevos, puestos en un nido, son incubados hasta que se abren, lo que es necesario dada la homeotermia de estos animales.*

Caracteres de reptil y ave. — Existen tantas afinidades entre las aves y los reptiles que se les reúne a veces bajo el nombre de *sauroideos* (de aspecto de lagartos). La anatomía comparada y la paleontología demuestran que las aves descienden de los reptiles. Se ha encontrado en los terrenos jurásicos un animal, el *arqueoptérix*, que es intermedio entre unos y otros: reptil por sus dientes, su cola larga, sus dedos libres en los miembros delanteros; ave por sus alas y sus plumas. Puede decirse que las aves son reptiles adaptados al vuelo. A sus *caracteres de reptil* primitivos se superponen, por lo tanto, *caracteres de ave*. Es interesante exponer claramente las particularidades de unos y otros.

Tegumentos y plumas. — La piel de las aves es muy delgada (piel de pollo) y muy seca, como la de los reptiles. Sus únicas glándulas, llamadas *uropigiales*, se encuentran en las proximidades de la cloaca y segregan una materia grasa con la que el ave embadurna sus plumas.

El carácter esencial de las aves es tener *plumas*. Pero tienen también *escamas en las patas*. Hay que distinguir las plumas de las alas o *remeras* (que sirven de remos), las plumas de la cola o *timoneras*



Barbas y bárbulas de una pena de colibrí (*Fot. C. Bille*)

(que sirven para la dirección), las plumas de la espalda o *coberteras* (que sirven para la protección), y las plumas del vientre, que constituyen el *plumón*.

Las remeras y las timoneras son las *penas* o grandes plumas rígidas, que comprenden un eje hueco, el *raquis*, y *barbas* laterales. Éstas, a su vez, tienen una doble fila de *bárbulas*. Las bárbulas de barbas vecinas se enganchan unas a otras, y las aves saben muy bien repararlas, alisándolas con el pico, cuando un accidente las ha agujereado. Las coberteras tienen la misma estructura que las penas, pero son menos rígidas. Las del plumón, imperfectas por su estructura, constituyen, a causa del aire que aprisionan, un aislante perfecto contra los cambios de temperatura.

Las plumas son principalmente de origen epidérmico, como las escamas de los reptiles, pero tienen una papila dérmica que las emparenta con los pelos de los mamíferos.

Tubo digestivo. — Después de los insectos, las aves son las primeras en presentar un tubo digestivo con las partes bien diferenciadas unas de otras y, especialmente, un estómago *plurilocular*. Al esófago, más o menos dilatado en un *buche*, le sigue un estómago químico o ventrículo *succenturiado*, y un estómago masticador o *molleja*, cuya espesa pared muscular suple los dientes desaparecidos. La parte terminal del recto es una cloaca en la que desembocan los conductos genitales y urinarios.

Aparato respiratorio. — La *tráquea* comienza por una *glotis* sin epiglotis y que no tiene laringe. Ésta es reemplazada, en la base de la tráquea, por una estrangulación o *siringa* muy desarrollada en las aves cantoras. Los bronquios están muy ramificados y esparcen el aire en las cavidades de dos *pulmones* esponjosos, que son muy superiores, por consiguiente, a los de los reptiles y los batracios. Sin embargo, no hay aún verdaderos alvéolos. Por otra parte, ciertas ramas bronquiales comunican con *sacos aéreos* suspendidos en los pulmones, se terminan en los músculos, o se ponen en comunicación con la cavidad medular de los huesos *(huesos neumáticos)*. El aire así almacenado asegura la respiración durante el vuelo, cuando la caja torácica, que sirve de apoyo a los músculos de las alas, está prácticamente inmovilizada. *El diafragma* es incompleto.

Aparato circulatorio. — El corazón de las aves se diferencia del de los cocodrilos por supresión del cayado aórtico izquierdo, que parte del ventrículo derecho y contiene sangre impura. El cayado subsistente es el derecho. Lleva a los órganos sangre pura y oxigenada procedente del ventrículo izquierdo. La circulación es, por tanto, perfecta y, unida a la activa respiración debida a los sacos aéreos, asegura a las aves una temperatura constante superior incluso a la de los mamíferos (43°-45° C). Es ésta una gran superioridad de las aves respecto a los reptiles.

Órganos genitourinarios. — En este aspecto, por el contrario, las aves no han dejado de parecerse a los reptiles. Sus riñones son *metanefros* con uréteres definitivos. Los *testículos* del macho utilizan como espermiductos los uréteres primitivos o *canales de Wolff*. El *ovario único* de las hembras, situado en el lado ziquierdo, tiene por oviducto el *canal de Muller* del mismo lado.

Si se examina el ovario de una gallina ponedora, se ve que se parece a un racimo cuyos granos u *óvulos* son de tamaños diferentes. Cada óvulo está rodeado de una membrana, muy vascularizada, que le suministra materiales nutritivos. De este modo, el óvulo engorda y se transforma en la futura *yema* del huevo.

Cuando está maduro, se rasga la membrana siguiendo una *línea blanca* en la que no existen vasos sanguíneos, por lo que se evita la hemorragia. El óvulo se interna entonces en la trompa ciliada que forma el comienzo del oviducto, que es donde se produce la fecundación. Los espermatozoides, depositados por el macho a la entrada de la cloaca de la hembra, ascienden hasta ese lugar.

Durante su descenso helicoidal en el interior del oviducto, el huevo se rodea de albúmina, que forma la *clara* con sus cordones espirales o *chalazas*. Un poco más abajo se deposita el *cascarón*.

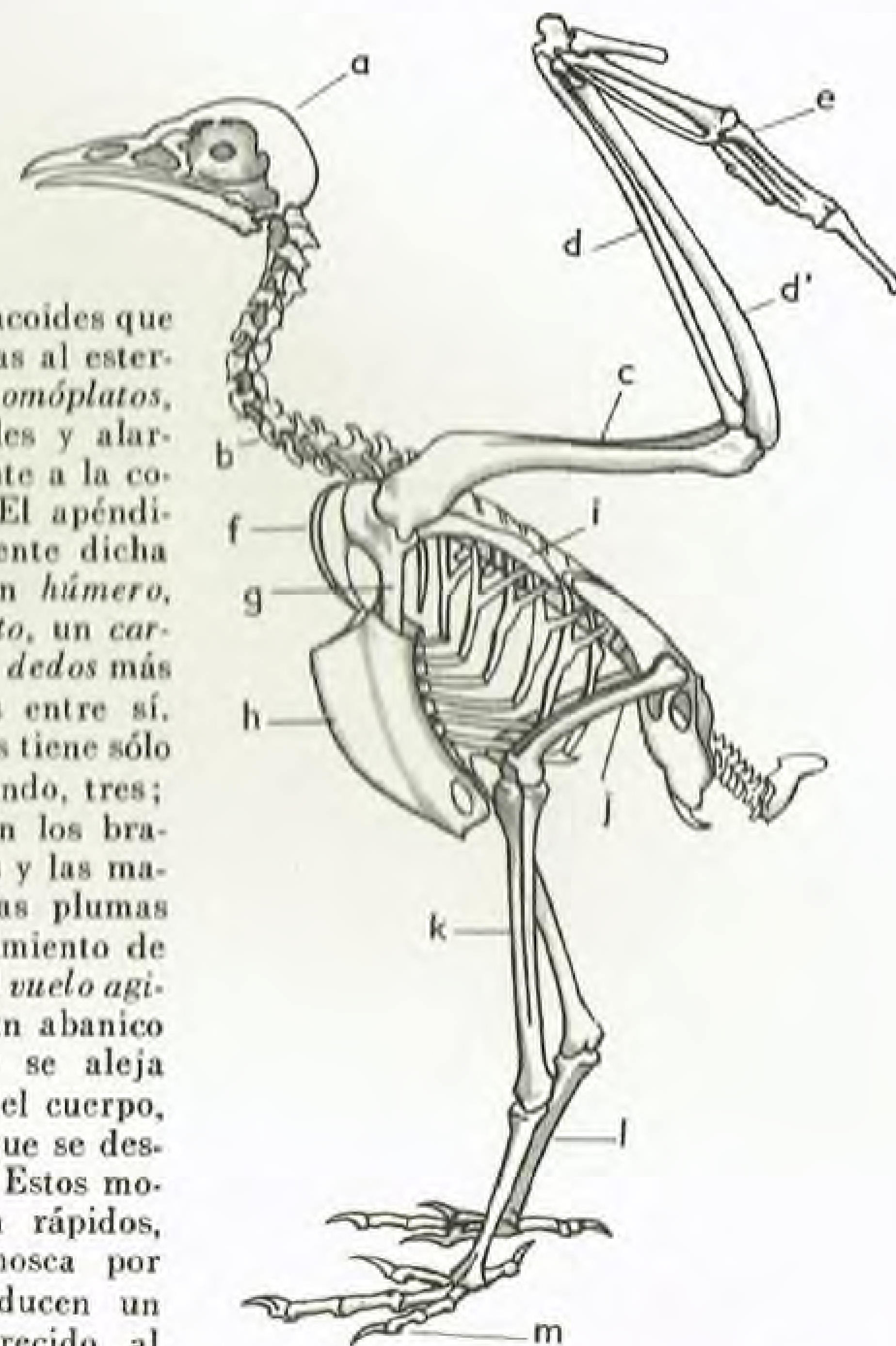
El huevo, en el momento de la puesta, comprende las partes siguientes: 1°, la *cáscara*, calcárea, porosa y permeable a los gases; 2°, dos *membranas conquíferas*, que se separan una de otra en el polo mayor del huevo para formar la cámara de aire; 3°, la *clara* o albúmina, que es una reserva azoada; 4°, la *yema* o vitelo, que es una reserva grasa, fosforada y rica en hierro. Se trata, pues, de un huevo *telolecito*. La célula propiamente dicha, conjunto del protoplasma y el núcleo fecundado, es el *germen* o *galladura*, que ocupa un polo de la yema.

Un parecido extraordinario entre las aves y los reptiles consiste en el hecho de que excretan sus residuos azoados no bajo forma de amoníaco o de urea, como los vertebrados acuáticos (peces y batracios) y vivíparos (mamíferos), sino bajo forma de *ácido úrico*. Este quimismo particular parece depender de las condiciones de vida del embrión en el interior del huevo (caja cerrada), donde cualquier otro producto de excreción determinaría, por su solubilidad, una intoxicación rápidamente mortal. La orina de las aves y de los reptiles es notable, además, por su consistencia pastosa. Mezclada con los excrementos, constituye el *fimo*, del que procede el *guano*.

El plumaje, con sus mudas periódicas, es otro de los medios de que disponen las aves para la evacuación de sus residuos. Se comprende, por tanto, que los machos, más intoxicados que las hembras, tengan un plumaje más desarrollado y brillante (colores metálicos). Las hembras se desintoxican por medio de la puesta. Por ello, si se quita el ovario a una gallina, adquiere el plumaje del gallo. Inversamente, si se injerta un nuevo ovario a una gallina castrada, ésta recupera los atributos exteriores de su sexo.

Esqueleto. — Éste se halla completamente determinado por la transformación de los miembros anteriores en órganos de vuelo:

1° *Esqueleto de las alas.* La cintura escapular, extremadamente extensa y resistente, comprende un ancho *esternón*, sobre el cual se levanta verticalmente una *quilla*, que sirve de inserción a los músculos pectorales; un par de *clavículas* soldadas entre sí, que forman la *horquilla;* un par de coracoides que unen las espaldillas al esternón; un par de *omóplatos*, en forma de sables y alargados paralelamente a la columna vertebral. El apéndice o ala propiamente dicha se compone de un *húmero*, un *radio*, un *cúbito*, un *carpo* reducido y tres *dedos* más o menos soldados entre sí. El primero de éstos tiene sólo un hueso; el segundo, tres; el tercero, dos. En los brazos, los antebrazos y las manos se insertan las plumas remeras. Los movimiento de las alas, durante el *vuelo agitado*, son los de un abanico que se acerca y se aleja alternativamente del cuerpo, al mismo tiempo que se despliega o se cierra. Estos movimientos son tan rápidos, en los pájaros mosca por ejemplo, que producen un zumbido muy parecido al típico de los insectos. Las aves buenas veleras practican también el *vuelo planeado*, durante el cual las alas permanecen casi inmóviles. Hay aves en que las alas se han hecho aletas (pájaros bobos y pingüinos), y otras en las que están sencillamente atrofiadas (avestruz, ápterix). Incluso se conocen aves fósiles *(dinornis)* que carecían en absoluto de alas;



Esqueleto de un ave: *a*, cráneo; *b*, columna vertebral; *c*, húmero; *d*, radio; *d'*, cúbito; *e*, metacarpo; *f*, clavícula; *g*, coracoides; *h*, esternón; *i*, omóplato; *j*, fémur; *k*, tibia; *l*, hueso formado por la unión del tarso y el metatarso; *m*, dedos

2° *Caja torácica.* Para dar apoyo a los músculos de vuelo, es menester una caja torácica flexible y resistente a la vez. Las *vértebras dorsales* se anquilosan por soldadura de sus apófisis espinosas y transversas. Las *costillas* están formadas por un segmento laterodorsal y otro lateroventral articulados. Del primero se destaca una *apófisis uncinúlea* (del lat. *uncus*, gancho) que se apoya en la costilla siguiente;

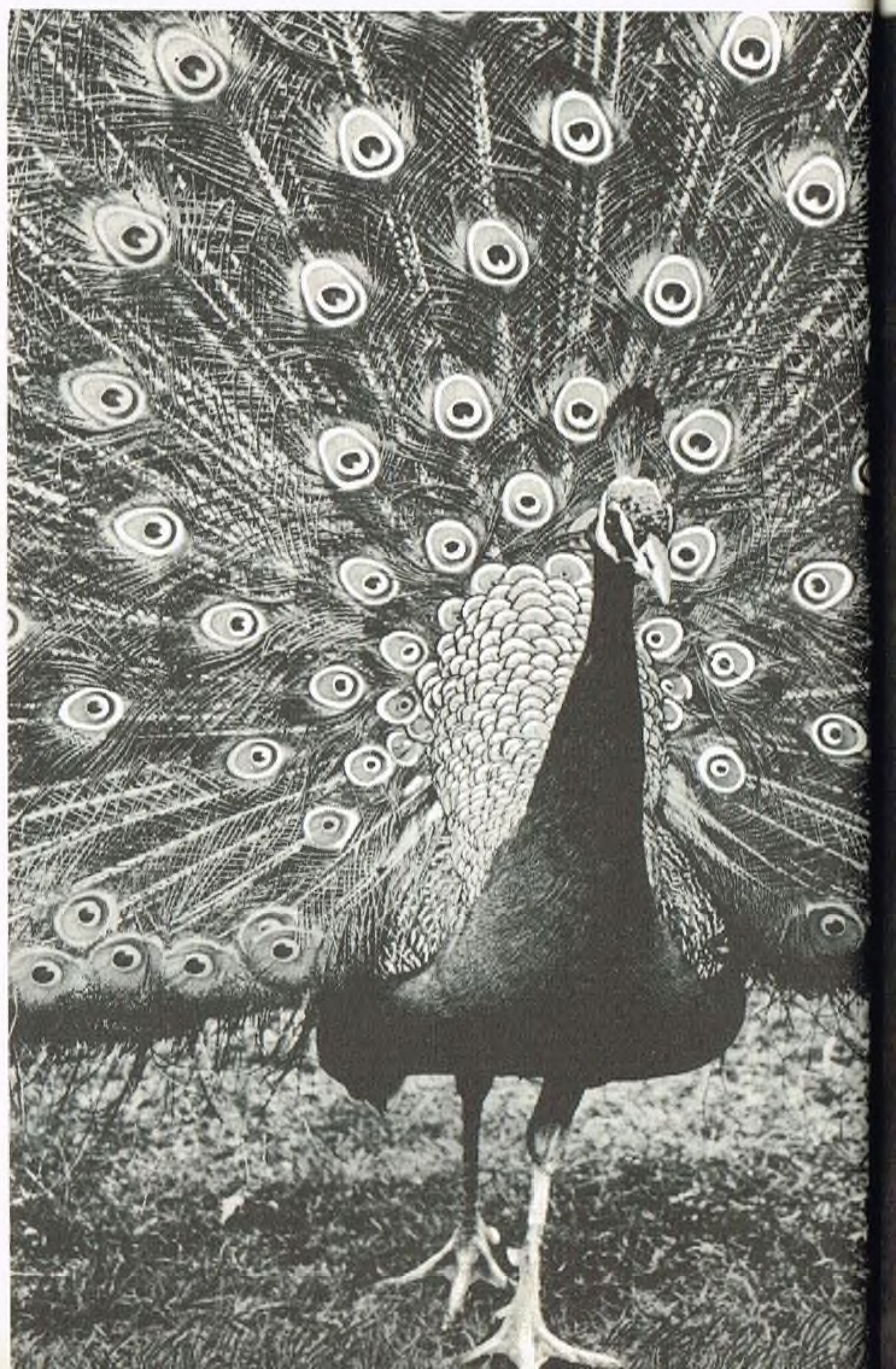
3° *Esqueleto de las patas.* Las aves son necesariamente bípedas, lo cual determina una estructura particular de sus miembros inferiores. La *pelvis*, que soporta todo el peso del cuerpo, se alarga hasta englobar un número más o menos grande de vértebras lumbares y dorsales. Los *fémures* se disponen horizontalmente para llevar las rodillas a la vertical del centro de gravedad. Las *tibias*, soldadas a los *peronés*, se alargan para compensar el acortamiento resultante de la horizontalidad de los fémures. Además, una parte del tarso y la totalidad del metatarso, se sueldan, en el embrión, en un *tarsometatarso* que adquiere gran longitud. Los talones no llegan, pues, al suelo y sólo los *dedos* sirven para la marcha. En otros términos, las aves son *digitígradas*. Generalmente tienen cuatro dedos, de los cuales tres hacia adelante y uno hacia atrás. Las aves corredoras (avestruces), sólo tienen dos;

4° *Esqueleto de la cabeza y del cuello.* El *cráneo* es notable por la soldadura y detención precoz del desarrollo de sus piezas. Como en los reptiles, un *cóndilo único* lo articula al atlas. Los hiomandibulares, que forman las columnitas de los oídos, y el hueso hiodes son, con las mandíbulas, los únicos vestigios del esqueleto visceral. El cuello es generalmente largo y muy móvil. Comprende quince vértebras. Con sus movimientos, contribuye a mantener el equilibrio durante el vuelo.

Sistema nervioso y órganos sensoriales. — El *cerebro* y sobre todo el *cerebelo* constituyen un progreso comparados con los de los reptiles. Los *oídos* comprenden una parte interna con caracol y órgano de Corti, una parte media con columnita y una parte externa reducida a un rudimento de conducto auditivo. En este aspecto, se conservan los caracteres de los reptiles. Lo mismo ocurre con los ojos, cuyos caracteres más salientes son los siguientes: forma ovoide; esclerótica reforzada por un *anillo de placas óseas; cristalino esférico;* resalte en forma de *peine* en la coroides. Se cree que este órgano alimenta el cuerpo vítreo, protege la retina contra una luz demasiado viva y permite al ave apreciar la distancia de los objetos. Otro detalle importante es que las aves diurnas sólo tienen células retinianas cónicas, mientras que las aves nocturnas tienen células de bastoncillo y de púrpura retiniana. Estas particularidades son muy discutidas. Lo único cierto es que las aves tienen una agudeza visual superior a la del hombre.

Arriba, pareja de faisanes; *abajo, a la izquierda*, pareja de aves del paraíso; *a la derecha*, pavo real *(Fot. Larousse y Agencia Rapho)*








El macho luce comúnmente formas y colores más hermosos que los de la hembra
Arriba, ciervos macho y hembra; *abajo,* pareja de leones (*Fot. Reichler y Aginter*)




Desarrollo. — Como el huevo de las aves es *telolecito* (rico en reservas nutritivas), tiene un desarrollo *parcial*. Sólo se divide la galladura. Muy pronto se convierte en un *disco germinativo* de aspecto resquebrajado. Este disco está formado por una capa de células, luego de dos, y después de tres, que constituyen el *ectodermo*, el *mesodermo* y el *endodermo*. Mientras que el *embrión* se desarrolla en el polo superior, las membranas embrionarias forman alrededor de él y de la yema *anexos embrionarios* en número de tres:

1° El *saco vitelino* o *vesícula umbilical*, análogo al mismo órgano de los peces;

2° La *alantoides*, en comunicación también con el intestino, y que corresponde a la vejiga urinaria de las ranas. Extendida bajo la cáscara, desempeña una función respiratoria;

3° El *amnios*, saco lleno de líquido que rodea al embrión y le sirve de masa protectora.

Los tres anexos embrionarios se unen al embrión por el *cordón umbilical*.

El huevo de gallina es un material excelente para el estudio del desarrollo de los vertebrados. Vemos particularmente formarse el sistema nervioso a expensas de un canal dorsal; las hendiduras branquiales efímeras, equivalentes a las de los peces; los segmentos musculares y las vértebras metamerizadas; el corazón, de donde parten los vasos principales, etc.

La duración del desarrollo es proporcional a la estatura del ave: 13 días el pinzón, 21 la gallina y 45 el avestruz.

Clasificación de las aves. — Hay que distinguir las **arqueornitas** o aves con dientes, y las **neornitas**, que se dividen en **rátidas** o aves de pico, pero con alas atrofiadas, y **carinadas** o aves de pico, con quilla y alas generalmente bien desarrolladas.

Las *arqueornitas* comprenden solamente los géneros extinguidos *archaeopterix* y *archaeornis*.

Las *rátidas*, grupo que estaba mucho más desarrollado en el Terciario y el Cuaternario que en la época actual, tienen alas atrofiadas o nulas. Su esternón no tiene quilla. Sus plumas parecen pelo. Los *avestruces* de África, los *ñandúes* de América, los *emúes* de Australia y los *casuarios* de Nueva Guinea son notables por su gran estatura y sus patas de dos o tres dedos. Son aves adaptadas a la carrera. Un avestruz puede tener tres metros de altura y un peso de 80 kilogramos. La hembra pone unos veinte huevos, cada uno de los cuales equivale a 24 de gallina. En contraste con estos gigantes, los *ápterix* o *kiwis* de Nueva Zelandia no pasan de la altura de una gallina.

Las *carinadas* forman un conjunto muy homogéneo que se divide, bastante arbitrariamente, según la forma del pico y de las patas, en siete órdenes, que bastará enumerar: *rapaces* o aves *de rapiña* (águila, búho); *trepadoras* (pico, loro); *colúmbidas* o palomas; *gallináceas* (gallo, perdiz); *zancudas* (garza); *palmípedas* (pato, gaviota, pingüino); *pájaros* (cuervo, gorrión, colibrí).

Migraciones de las aves. — Muchas aves pasan el verano en los países del Norte y el invierno en los del Sur. Una región intermedia, como Francia, recibe, pues, en verano aves que vienen de África (golondrinas y alondras), y en invierno las que vienen de Escandinavia (gansos y patos salvajes). Las *migraciones de partida* se efectúan en general en bandadas. Todas las aves de la misma especie dejan a la vez el mismo país. Las *migraciones de retorno* se efectúan, por el contrario, por pequeños grupos, y preceden de poco a la nidificación y la puesta. Las rutas de migración evitan las grandes extensiones marinas. Sin embargo, no son absolutamente fijas y dependen de las condiciones climáticas. Denotan, en todo caso, una extraordinaria resistencia por parte de animales que pueden ser tan pequeños como el petirrojo o el pinzón. Su *instinto gregario y su instinto de orientación* son igualmente notables.

Nidificación. — Algunas aves, como el avestruz, ponen sus huevos en tierra y los abandonan al calor solar. Las demás nidifican. El nido del águila es una área o superficie rocosa cubierta de ramaje. Algo menos rudimentarios son los nidos de las gaviotas, las cigüeñas, los mirlos, etc. Las golondrinas hacen su nido, de mampostería, en los rincones de los aleros de las casas viejas. Los picos cavan el suyo en los troncos de los árboles carcomidos. La curruca costurera reúne hojas que cose realmente por medio de fibras vegetales. En los matorrales se encuentran los nidos de musgo de los pinzones y de los paros. La perdiz y la codorniz anidan en el suelo. El nido de los cisnes salvajes es una balsa flotante. Hay pájaros, como los republicanos, que tienen sus nidos agrupados bajo una techumbre común construida con paja en la copa de un árbol. Por su parte, los cuclillos, que son perezosos, ponen en los nidos ajenos.

Algunas aves características de América. — Entre las rapaces características de América figuran: 1°, el *cóndor*, que vive como soberano en las alturas de los Andes. Sus plumas son negro azuladas y su collarín blanco. Su cabeza y cuello están desnudos. No ataca a los animales vivos, a menos que le obligue el hambre. Devora sobre todo los músculos e intestinos de la presa, y también los huesos, ya que su esófago y su garganta son muy amplios y sus jugos gástricos muy activos. Su envergadura es de tres metros, y esto le permite recorrer grandes extensiones andinas, lo que hace siempre volando en bandadas; 2°, el *buitre real*, que se encuentra en América Central y América del Sur (Brasil), donde se le llama, respectivamente, *rey de zopilote* y *urubú rey*. Su plumaje es espléndido y de varios colores, el collarín gris y el pico rojo; 3°, el *zonchiche*, el más común de los buitres americanos, que se caracteriza por un moco o apéndice membranoso de color rojo vivo sobre la cabeza; 4°, el *gallinazo*, llamado *zopilote* en Centroamérica, *urubú* en el Brasil y *jote* en Chile. Su plumaje es negro y sin adornos, sus patas, fuertes y se alimenta de toda clase de carroña y mariscos muertos arrojados por el mar; 5°, el *águila*, el ave más fuerte de toda América Central y del Sur, llamada *arpía*, conocida desde tiempos remotos. Su mandíbula superior tiene los bordes prominentes a manera de dientes, de gran utilidad para despedazar la presa. En la cabeza tiene un moño de plumas que le presta una severa belleza. Sus plumas son muy apreciadas por los indios; 6°, el *urubitinga*, que habita en las orillas de los ríos de las selvas de América del Sur. Tiene un penacho en la cabeza; 7°, el *chimachima*, halcón que desde el Brasil a la Patagonia habita en los pantanos y llanuras y es muy conocido por su costumbre de posarse sobre las reses para picotear las garrapatas y otros parásitos; 8°, el *carancho* o *caracará*, abundante en las pampas y lugares pantanosos. Debido a sus poderosas alas, de más de un metro de envergadura, recorre sin descanso las vastas llanuras en busca de su presa, cuyo cráneo destroza con el pico. Sus patas están adaptadas a la marcha, tienen largos tarsos y garras poco encorvadas. Su mandíbula superior cubre la inferior por todos lados, y corta como unas tijeras. Su grito es ronco y desagradable, y para lanzarlo echa la cabeza a la espalda. Es un ave sumamente rapaz, que asola los corrales e incluso arrebata al cazador la pieza que ha matado.

Las trepadoras más características sur y centroamericanas son: 1°, el *tijó* o *aní garrapatero*, que abunda en todas las praderas y limpia al ganado de sus parásitos; 2°, el *pico carpintero*, ave arborícola que taladra los troncos con su fuerte pico, duro como el hierro, para cazar gusanos e insectos, que atrapa con su lengua viscosa, provista de ganchitos en la punta (para taladrar la madera, el pico carpintero se sujeta con sus fuertes uñas encorvadas y se apoya en los cañones y barbas de las plumas caudales, que son muy duras); 3°, el *tucán*, que es el ave más típica de América del Sur y Central. Su pico monstruoso es cónico, comprimido lateralmente, corvo, y le sirve de arma de combate. Habita en los bosques vírgenes y se alimenta de frutas, pequeñas aves y mamíferos (murciélagos). Su carne y su plumaje le hacen objeto de activa caza; 4°, el *quetzal*, la más hermosa y apreciada de las trepadoras. En Guatemala tiene un valor simbólico en su escudo y su caza está prohibida. Su cabeza está adornada de un penacho y su magnífica cola colgante, de 60 a 80 centímetros, le traiciona a veces asomando por el hueco del árbol en que hace su nido. Su plumaje es de color esmeralda metálico, y su pico delgado está aplastado lateralmente en la punta. Habita en las selvas montañosas de América Central;



Colibrí (*Fot. Atlas Photo*)

5°, el *guacamayo*, que se distingue por su gran tamaño, su pico enorme y su cola, muy prolongada. Su plumaje muestra maravillosos coloridos y contrastes. Entre los guacamayos se destacan el *ararauna*, azul en la parte superior y con el vientre anaranjado, y el *aracanga*, cuyo cuerpo entero es escarlata y las alas por encima azules; 6°, el *periquito*, que tiene una cola muy larga, a pesar de que su cuerpo mide sólo de 12 a 15 centímetros de longitud.

Entre las gallináceas americanas tenemos. 1°, el *pavo*, que vive desde el norte y el este de los Estados Unidos hasta los bosques montañosos de México y es descendiente del pavo mexicano; hoy se encuentra domesticado en toda América y Europa; 2°, el *hocán* o *mitú*, que habita en todas las selvas de América Central y del Sur. Su pico es alto, largo y fuerte, con una prominencia córnea redonda y de color amarillo en la parte superior. Es arborícola y baja raramente al suelo; 3°, el *guan*, llamado *chachalaca* por los indios, que habita en México, los Estados Unidos y Colombia; 4°, la *gallina de monte*, muy apreciada por su carne, que se encuentra en todos los bosques montañosos del continente americano; 5°, el *hoatzín*, de plumaje verde brillante con franjas amarillas y copete del mismo color, propio de América del Sur. El mal olor y mal sabor de su carne le defienden de sus enemigos; construye su nido en ramas colgantes sobre los ríos y las lagunas.

Las zancudas están representadas en América por: 1°, la *garza blanca*, de plumaje blanco brillante, pico amarillo obscuro y patas grises. En la base de las alas tiene finas y bellísimas plumas, que se utilizan como adorno; 2°, el *coco*, uno de los más voraces cazadores de peces; 3°, el

sabacú, habitante de Centro y Sudamérica, que difiere de las garzas por su pico, especie de cuchara invertida, terminada en gancho; 4º, la *platalea*, cuyo pico parece una cuchara; 5º, el *maguarí*, muy parecido a la cigüeña, que suele anidar en las torres y casas altas; 6º, el *ibídido*, que habita en la desembocadura de los ríos, y es de mediano tamaño, patas largas y dedos anchos, lo que le facilita su andar en aguas poco profundas. Su pico tiene pliegues en toda la longitud de la parte superior; 7º, la *jacana*, zancuda palustre común de toda América del Sur tropical, donde llega hasta el Paraguay y la Argentina. Elegante, esbelta y ligera, de miembros sumamente delgados, puede posarse en las grandes hojas acuáticas. Sus dedos son extraordinariamente largos; su plumaje, vistoso y brillante, se confunde con el de las flores acuáticas de su medio, preservándola así de sus enemigos; 8º. el *agamí*, grulla silvestre que vive en grandes bandadas en los bosques altos y espesos. Su voz es muy potente en caso de alarma, y su instinto vigilante hace que los indios la empleen como guardián de sus corrales. Sigue a su amo como un perro; 9º, la *cariama* o *sariá*, de un monótono color gris, con plumas tiesas en la frente. Su aptitud para el vuelo ha desaparecido, pero en la carrera es difícilmente alcanzada por el caballo. Como el agamí, es domesticable y ejerce su autoridad sobre las demás aves del corral en que se halle.

Entre las palmípedas que pueblan el continente americano figuran, además del *pelícano*, la *fragata* y el *cuervo marino*: 1º, el *anhinga*, la más característica de Centro y Sudamérica, cuya configuración es muy especial; su cuerpo es largo y el cuello muy prolongado y delgado. El pico, también muy largo, es recto y puntiagudo como un puñal, con los bordes en forma de serrucho, lo que constituye un arma temible; 2º, la *quiulla* o *gaviota andina*; 3º, el *pico tijera*, cuyo pico es muy particular. La parte inferior sobresale largamente de la superior, que es alta y comprimida; su cola es ahorquillada. Habita en las regiones tropicales; 4º, el *cisne*, de cuello negro y gran belleza, que vive en estado salvaje desde Buenos Aires hasta las islas Falkand.

Entre la inmensa variedad de pájaros americanos (más de cuatrocientas especies), sólo citaremos los colibríes o pájaros mosca, que se encuentran por todo el continente, especialmente en la zona tropical, excepto en los lugares donde no hay flores. Su tamaño varía entre el de un vencejo y el de un abejorro. Su vuelo es extraordinariamente rápido y apenas lo es menos cuando liban sin posarse. Sus órganos de vuelo son capaces de realizar algo único entre las aves: volar hacia atrás. Las plumas de las alas, insertas en los huesos prolongados de los brazos, son delgadas, largas y curvadas hacia atrás, y, su plumaje, de gran dureza y resistencia. Su esqueleto es de una solidez notable, pues debe resistir el trabajo del vuelo vibratorio, que les permite quedar suspendidos en el aire. Su lengua es bífida y pegajosa, por lo que al tiempo que liban el néctar capturan los pequeños coleópteros que ingieren, abundantes en las flores. Sus patas son muy débiles y frágiles, aptas sólo para posarse en las ramillas, pero no para la marcha. Estas avecillas tienen gran importancia en la fecundación de las flores, pues su pico y lengua penetran en las inflorescencias y órganos vitales, y así trasladan el polen de flor a flor en sus incesantes vuelos en busca de alimento. Puede afirmarse que existe una compenetración entre los colibríes y las flores.

Entre los colibríes más conocidos se encuentra, en los Andes chilenos y argentinos, así como en Bolivia, el *colibrí de Safo*, cuya larga cola está ampliamente ahorquillada. Pero el más corriente y popular es el llamado *picaflor*, de pico recto y algo corto, cola reducida y plumaje de un verde metálico.

Clase de los mamíferos

Los **mamíferos** *son vertebrados aéreos, cuadrúpedos, cuya piel, rica en glándulas, está cubierta de pelo. Tienen dientes insertos en alvéolos, labios carnosos, un galillo y una epiglotis, una laringe, un diafragma completo y pulmones con alvéolos. Su corazón tiene cuatro cavidades y el callado aórtico está encorvado a la izquierda. Sus riñones son metanefros. Su cerebro y su cerebelo están bien desarrollados. Sus oídos tienen tres huesecillos y un pabellón auditivo. Desde el punto de vista del desarrollo son amniotas y alantoideos y sus crías son amamantadas con la secreción de las mamas. En el aspecto fisiológico son homeotermos.*

Como el hombre, tipo de los mamíferos, es objeto de una parte especial de esta obra, sólo expondremos aquí, muy sucintamente, los caracteres generales del grupo.

Tegumentos y pelo. — La *piel* es espesa (cuero, grasa), y está cubierta de *producciones córneas*. Entre éstas, el *pelo* es la más característica, pero existen también las *uñas*, las *garras*, los *cascos*, los *cuernos*, las *púas*, las *barbas* o *ballenas* de la ballena, las *escamas* del pangolín, el *caparazón* del tatú, etcétera. La piel es también muy rica en glándulas de dos clases: glándulas *sudoríparas*, que segregan el sudor, y glándulas *sebáceas*, anexas a los pelos, que segregan substancias grasas.

Esqueleto. — Las *vértebras* son biplanas y están articuladas por discos intervertebrales. Hay casi siempre siete vértebras cervicales, tanto en el largo cuello de la jirafa como en el corto de la ballena. Las dos primeras son el *atlas* y el *axis*. Las vértebras dorsales tienen una larga apófisis espinosa que sirve de inserción al ligamento cervical que sostiene el cráneo. Se diferencian de las lumbares por sus *costillas*, bien desarrolladas, que se articulan: 1º, sobre el cuerpo; 2º, sobre las apófisis transversas. El número total de vértebras dorsolumbares es característico de cada grupo. La pelvis está articulada solamente con las vértebras sacras. Las caudales son de número variable y forman el *cóccix* en el hombre.

El *cráneo* se caracteriza por su proceso de osificación lenta y el pequeño número de sus huesos. Los centros de osificación, correspondientes a los numerosos huesos craneanos de los peces, se sueldan con los más próximos. De este modo el esfenoides resulta de la fusión de catorce centros.

La *historia* del temporal es *particularmente* instructiva. Este hueso comprende en efecto partes craneanas (peñasco, escama), y partes del esqueleto visceral (huesecillos).


Proporciones comparadas entre el esqueleto del hombre y el del gorila

Patas. — Están formadas según el tipo clásico que hemos estudiado a propósito de los batracios. Sin embargo, faltan generalmente los coracoides o, más exactamente, constituyen las *apófisis coracoides* de los omóplatos. Las clavículas desaparecen a su vez en los mamíferos corredores. Primitivamente, los miembros tienen cinco dedos y descansan en el suelo con todo el pie. Éste es el tipo andador o *plantígrado*, conservado en el hombre, los monos, el oso, etc. Por adaptación a la carrera, los miembros se levantan y se apoyan sólo sobre los dedos *(digitígrados)* o sobre la punta de los dedos *(unguligrados)*. Al propio tiempo, el número de dedos se reduce. Hay unguligrados o ungulados de cinco dedos (elefante), de cuatro dedos (cerdo), de tres dedos (rinoceronte), de dos dedos (rumiantes) y de un dedo (caballo). En otros mamíferos, los miembros se adaptan al vuelo (murciélago), a la natación (ballena), al salto (canguro), a la excavación (topo), etc.

Dientes. — Están localizados sobre las mandíbulas, en las que forman una sola fila continua o discontinua, e insertos en *alvéolos*: comprenden, por consiguiente, una *raíz* rematada por una *corona*. Los dientes pueden ser todos iguales *(homodontos)* o diferentes unos de otros según el lugar que ocupan y la función que desempeñan *(heterodontos)*. Se distinguen, en el límite superior de diferenciación: *incisivos*, *caninos*, *premolares* y *molares*. Las dos últimas clases proceden, según una teoría reciente, de dientes multituberculados, es decir, con gran numero de salientes redondeados o tubérculos sobre la corona.

Generalmente, hay dos denticiones sucesivas, pero una de ellas puede abortar. La dentadura de leche aborta en el tatú, la definitiva aborta en el delfín, y las dos abortan cuando el animal se encuentra finalmente desprovisto de dientes, como en el caso de la ballena.

Veremos más adelante cómo la dentadura y la fórmula dental se modifican según los regímenes alimenticios.

Vísceras. — El **tubo digestivo** tiene de notable los *labios* y la *lengua* carnosos; el *paladar*, prolongado por el *velo del paladar* y un *galillo* que obtura las fosas nasales durante la deglución; los *carrillos musculosos*; las *glándulas salivales*, que forman un collar alrededor de la cavidad bucal; el *estómago*, más o menos diferenciado; el intestino, que comprende un *intestino delgado* y un *intestino grueso* con *ciego* más o menos desarrollado; el *hígado* y el *páncreas* voluminoso. El páncreas, glándula salival del abdomen, es la principal glándula digestiva. Los mamíferos no tienen cloaca. Un tabique muscular separa el ano de los órganos genitourinarios.

El **aparato respiratorio** comprende una *glotis*, a la que se superpone una *epiglotis*; una *laringe* con cartílago tiroides (nuez o bocado de Adán); una *tráquea*, mantenida abierta por anillos cartilaginosos; dos *pulmones* envueltos en una *pleura* y divididos en una multitud de *alvéolos*, en los que terminan las últimas ramificaciones de los bronquios; un *diafragma* completo que separa el tórax del vientre.

El **corazón** tiene cuatro cavidades y el único cayado aórtico se encorva a la izquierda. La circulación perfecta, unida a la respiración activa, permite a los mamíferos mantener constante su temperatura (36-40º C). Son, en consecuecia, *homeotermos*. Sus glóbulos rojos o *hematíes* son circulares, bicóncavos y están desprovistos de núcleo, lo que los opone a los hematíes elípticos, biconvexos y con núcleo de los demás vertebrados.

Los **riñones** son *metanefros* de uréteres definitivos y generalmente en forma de alubia. Los *uréteres* desembocan en una *vejiga* de donde parte la *uretra*. En los machos, los *testículos*, generalmente alojados en una *bolsa* o *escroto*, tienen un *espermiducto* (uréter primitivo, *canal de Wolff*) que forma primero un conglomerado o *epidídimo* y termina después en la uretra. Este canal excreta, pues, a la vez, la orina y la esperma. Rodeado de *cuerpos cavernosos*, este tejido esponjoso eréctil bajo la afluencia de la sangre constituye el *pene* o *verga*, que sirve para la cópula. En las hembras, los *ovarios* tienen conductos u *oviductos* completamente independientes de los órganos urinarios. Cada oviducto comienza por una *trompa ciliada* y termina en un abultamiento o *útero*, el cual se prolonga a su vez por una *vagina* u órgano de acoplamiento. En general, las dos vaginas y los dos úteros se fusionan. El útero, que es todavía doble en la coneja y bicorne en la perra, se transforma en simple y globuloso en la mujer.

Sistema nervioso y órganos sensoriales. — El **encéfalo** está muy perfeccionado en todas sus partes. Predominan el *cerebro* y el

cerebelo. Hay que distinguir los mamíferos que tienen el cerebro liso, y los que lo tienen con circunvoluciones más o menos numerosas. Al *trígono* se superpone el *cuerpo calloso,* que une los dos hemisferios. Los tubérculos bigéminos de otros vertebrados se subdividen y se hacen *tubérculos cuadrigéminos.* El cerebelo presenta un *vermis* medio encuadrado por dos hemisferios cerebelosos. Tanto las células piramidales del cerebro, como las células de Purkinje del cerebelo, adquieren progresivamente un alto grado de complicación.

Los **oídos** se perfeccionan en su *caracol,* que describe de dos a cuatro vueltas de espiral; en su *órgano de Corti;* en su *cadena de huesecillos,* cuyo origen hemos visto; en su *pabellón auditivo,* cada vez más importante y que recoge y orienta los sonidos. Las **fosas nasales** se completan con *senos* y *cornetes.* Los **ojos** tienen *párpados* muy móviles y un aparato lacrimal.

Mamas y lactación. — Un carácter esencial de los mamíferos es la posesión de *glándulas mamarias* más o menos agrupadas en *mamas.* Estas glándulas proceden de las glándulas sebáceas. Su secreción o *leche* es bastante semejante al sebo por su riqueza en cuerpos grasos. La leche es en realidad una emulsión de grasa *(crema)* en una solución de proteínas *(caseína, lactoalbúmina),* azúcar *(lactosa)* y sales minerales *(fosfatos).* Su composición centesimal varía con las diferentes especies de mamíferos. Así, la leche de oveja es muy grasa, la de burra muy azucarada y la de perra muy rica en materias nitrogenadas. La leche de vaca, una de las mejor equilibradas, contiene 4 por 100 de crema, 4 por 100 de caseína y 4 por 100 de lactosa. Los animales de países fríos (renos) o de mares fríos (ballenas) tienen una leche extremadamente cremosa para subvenir a las necesidades térmicas de las crías. La rapidez de crecimiento de éstas es proporcional a la riqueza de la leche en proteínas. Ejemplos: los gazapos doblan de peso en seis días, los cachorros de perro en nueve, los niños en ciento ochenta, pues las leches que ingieren contienen, respectivamente, 10 por 100, 7 por 100 y 1/5 por 100 de caseína.

Mamíferos inferiores. — En la base con los reptiles se sitúan dos subclases extremadamente interesantes por sus características primitivas:

1° Los **monotremas,** mamíferos emparentados con los reptiles por sus *patas* cortas e insertas lateralmente, por sus *coracoides* bien desarrollados, por su *cloaca* y sobre todo por su *oviparidad.* Son mamíferos ovíparos. De los huevos, puestos en tierra, salen crías muy débiles, que la madre nutre con su leche. Las mamas, poco desarrolladas, no tienen pezones y están constituidas por glándulas dispersas cuya secreción láctea corre por los pelos ventrales de la madre.

A los monotremas pertenecen exclusivamente el *equidno* y el *ornitorrinco* de Australia y Tasmania. El primero tiene un pico puntiagudo y el cuerpo erizado de púas. El segundo tiene un pico de pato y el cuerpo cubierto de verdadero pelo. El primero es terrestre, y el segundo acuático.

2° Los **marsupiales,** mamíferos superiores a los precedentes por su *viviparidad.* El huevo queda adherido al útero materno durante algunos días antes de romperse. A pesar de ello, la cría viene al mundo en un estado de extrema debilidad: diminuto, ciego y casi sin formar, la madre lo introduce en una *bolsa marsupial* colocada bajo su vientre, donde se encuentran las mamas. Puede decirse en este caso que hay una gestación *intrauterina* y otra *extrauterina.*

Los marsupiales son también superiores a los monotremas por sus patas normales, la reducción de los coracoides y la separación de los orificios anal y genitourinarios por un perineo.

Los marsupiales, extendidos en otros tiempos por toda la superficie del globo, están hoy circunscritos a América del Sur y Australia. Únicos mamíferos salvajes de este último continente, se han repartido los diversos dominios. Los *canguros* son hervíboros y saltadores; los *falangeros* son frugíferos y trepadores; los *wombats* son una especie de roedores; los *dasiuros* son zorros arborícolas; los *tilacinos* corresponden a los lobos de Europa; los *mirmecobios* son insectívoros, como la zarigüeya de América del Sur; los *notorictos* se parecen a los topos por sus costumbres zapadoras, su ceguera y sus patas delanteras adecuadísimas para cavar.

La **zarigüeya,** mamífero exclusivo del Nuevo Continente, se extiende desde el Brasil hasta los Estados Unidos y también se encuentra en países templados de Sudamérica. Su nombre cambia según los países: *tlacuache* en México y Guatemala; *comadreja* en Chile y Argentina; *zorro* en Panamá; *muca* en el Perú, etc.

Entre los afines de la zarigüeya figuran: el *opossum* de los Estados Unidos, cuya piel es valiosa; la *marmosa,* que se extiende desde México al Brasil, etc.

Mamíferos superiores o placentarios. — A la inversa del huevo de los reptiles, las aves y los monotremas, el de los placentarios es muy pequeño (alrededor de 1/10 mm) y está casi desprovisto de vitelo. Se le considera como un huevo telolecito que hubiera perdido sus reservas nutritivas y se le da, por esta razón, el nombre de huevo *metalecito.*

Fecundado a la altura de la trompa ciliada del oviducto, este huevo sufre primero, como todo huevo sin vitelo, una segmentación total e igual. Pero ya desde la mórula de 16 ó 32 células se produce una diferenciación. Las células periféricas, de multiplicación muy rápida, constituyen una envoltura, que muy pronto es grande, alrededor de una masa de células centrales. Éstas corresponden al disco germinativo de las aves y forman relieve en una cavidad llena de líquido, que corresponde a un saco vitelino.

Mientras que la masa celular central forma el embrión y sus anexos, el huevo se fija en la pared del útero materno. Su envoltura primitiva, espesada y dilatada *(corión),* envuelta por la *alantoides,* envía raíces vasculares *(vellosidades)* al interior de la pared uterina. Ésta reacciona por vellosidades inversas. El conjunto es una *placenta* u órgano de unión y de cambios entre la madre y el embrión. Éste se llama en este caso *feto* y vive parasitariamente durante un período más o menos largo de *gestación.* Por la placenta, verdadero filtro, el feto respira, se alimenta y excreta sus residuos.

Según la distribución de las vellosidades, se distinguen placentas *difusas* o de vellosidades dispersas (caballo); placentas *cotiledóneas* o de vellosidades en ramo (rumiantes); placentas *zonales* cuyas vellosidades forman una cintura periférica (gato), y placentas *discoideas* cuyas vellosidades están agrupadas en forma de casquete polar (hombre).

El feto está suspendido de la placenta por un *cordón umbilical* y sumergido en un líquido albuminoso. Esta existencia semiacuática explica que expulse sus residuos nitrogenados no bajo forma de ácido úrico, como las aves y los reptiles, sino bajo forma de urea, como los peces y los batracios.

La *gestación* es de duración variable según las especies: un mes en la coneja, dos en la perra, cinco en la oveja, nueve en la mujer, doce en la burra, veinte en la elefanta. A su término se produce el *parto.* La bolsa que rodea al feto se rompe, y el líquido sale; luego, el feto es evacuado mediante contracciones del útero y la placenta es expulsada a su vez. Hay especies *uníparas,* que tienen un solo hijo a la vez, y especies *multíparas* (gata, perra, cerda), que tienen siempre varios. Esta diferencia depende del número de huevos que pueden adherirse simultáneamente a la pared uterina.

En todos los casos el hijo viene al mundo al final de su desarrollo. En esto se diferencian los placentarios de los marsupiales.

Estudiemos ahora los diferentes órdenes de placentarios.

Primates. — Los *primates* son los hombres y los simios. A caracteres muy primitivos (miembros plantígrados y de cinco dedos, dentadura completa y régimen omnívoro), unen caracteres de alta especialización (manos de pulgar oponible y gran desarrollo del cerebro). Puede añadirse a todo esto que tienen un útero simple y una placenta discoidea.

Este orden comprende tres subórdenes:

1° Los **lemúridos** que, diseminados en otros tiempos por toda la tierra, están localizados hoy en Madagascar *(maki, indri)* y la India *(lori, tarsio).* Son animales arborícolas, nocturnos, de pelaje espeso y ojos enormes. Por muchos de sus caracteres, se aproximan a los insectívoros; por otros (cerebro muy grande), se les considera próximos de los antepasados de la especie humana;

2° Los **monos,** que se distinguen de los lemúridos por su cara aplastada y desnuda, sus dedos con uñas, sus ojos pequeños, etc. Los monos del Nuevo Continente *(sapajú, tití, ateles)* tienen 36 dientes, las fosas nasales separadas y la cola generalmente prensil. Los monos del Antiguo Continente *(macaco, zambo, mandril, magoto)* tienen, por el contrario 32 dientes, las fosas nasales más juntas y la cola no prensil. Se agrupa con ellos a los antropoides *(gorila, orangután, gibón, chimpancé),* que son los más próximos al hombre por la ausencia de cola y la estación en parte vertical;

3° Los **hombres,** que se enlazan directamente con los monos por toda su organización. Sus caracteres propios son la piel desnuda; la estación vertical permanente, que las curvaturas del raquis hacen posible; el acortamiento de los miembros anteriores, que se especializan en la prensión; la hipertrofia del cerebro, que llega a pesar 1 500 g en lugar de 400, que es el máximum en los monos; el gran desarrollo de la laringe, que hace posible el uso de la palabra y el intercambio de ideas complejas; Han existido diversas especies humanas, desde el pitecántropo de Java hasta el hombre actual *(Homo sapiens),* pasando por el hombre de Heidelberg y el de Neandertal.

Insectívoros. — Estos mamíferos son muy primitivos por sus miembros plantígrados de cinco dedos, su dentadura completa, su cerebro relativamente poco desarrollado, etc. Descienden en línea recta de los pequeños mamíferos del período triásico. Se alimentan únicamente de insectos, tienen *incisivos* y *caninos* puntiagudos, y *molares* erizados de puntas, propias para romper los caparazones quitinosos. Su pequeño tamaño está en relación con el de sus presas. Faltos de alimento en invierno, se adormecen y pasan al estado de vida latente *(hibernación).* Sus costumbres les convierten en animales eminentemente útiles.

Los principales representantes en Europa son: el *erizo,* con el lomo cubierto de púas; el *topo,* al que la vida subterránea ha vuelto ciego (sus patas delanteras, ensanchadas en palas, tienen un dedo suplementario; su pelo es corto, su hocico puntiagudo y todo su cuerpo está adaptado a la circulación por galerías estrechas); el *musgaño,* que es uno de los mamíferos más pequeños.

En América del Sur no existen representantes de este orden. Los raros ejemplares que hay se encuentran en América Central y Septentrional. El *topo americano* abunda en las montañas de California y México. El *condiluro* de los mismos lugares tiene en la nariz una cresta hecha de lóbulos táctiles. Las escasas especies de *musgaños* de América tropical, que viven en los cultivos, son del tamaño de ratones y de forma semejante, a excepción del hocico, que es muy afilado. El *almiquí* de Cuba habita en las montañas de Cuba y Haití. Se caracteriza por su aguda nariz y sus enormes garras, muy apropiadas para la excavación.

Quirópteros. — Los *quirópteros* (del griego *kheir,* mano, y *apteron,* ala) son insectívoros adaptados al vuelo. Comúnmente se les llama murciélagos a causa de la desnudez de sus membranas alares. Éstas están tendidas entre cuatro dedos muy alargados. Sólo el pulgar es corto y sirve para la suspensión del animal. Se ve que hay una gran diferencia entre las alas de los murciélagos, verdaderas membranas de manos gigantes, y las alas de las aves, que son plumas insertas en miembros de dedos atrofiados.

Los murciélagos vuelan, o más bien, revolotean, en el crepúsculo. Su vuelo es rápido, pero zigzagueante. Sus ojos son pequeños. En cambio, tienen una extraordinaria riqueza en órganos táctiles: enormes pabellones auditivos, apéndices nasales foliáceos, membranas alares, etc.

En invierno se suspenden, por sus patas posteriores, del techo de una gruta o de la viga de un campanario o de un hangar, y se duermen hasta la vuelta del buen tiempo.

Por ser insectívoros, los *murciélagos son animales útiles*. Hay que poner aparte, sin embargo, los *paniques frugívoros* de Australia y Malasia, así como los *vampiros* de América del Sur, que se nutren chupando la sangre de los mamíferos e incluso a veces de la de los hombres dormidos.

Entre las especies americanas existe en el Brasil una que tiene las membranas voladoras blancas.

Carnívoros. — Representados, en los comienzos de la Era terciaria, por formas primitivas o *creodontes*, los *carnívoros* se especializaron pronto por la adaptación a un régimen cárneo más o menos estricto.



Cráneo de carnívoro

1º *Dentadura*. Como en los animales precedentes, la dentadura es completa, es decir, compuesta de incisivos, caninos y molares. Los *incisivos* son cortantes. Los *caninos* sobresalen mucho de los demás dientes y constituyen *ganchos* temibles. Entre los molares, se destaca uno en cada mandíbula, de gran robustez. Se le llama *carnicero*. Se trata del último premolar superior y del primer molar inferior. En lugar de ser plano y triturador, está formado por dos o tres láminas cortantes que funcionan como cizallas. Todos los premolares, llamados *precarniceros*, que preceden a los carniceros, son igualmente cortantes. Todos los molares, llamados *postcarniceros*, que siguen a los carniceros, son por el contrario trituradores. Pero, bien desarrollados en los tipos menos carnívoros (oso), comienzan a atenuarse o a desaparecer en los tipos medios (perro, tejón, hiena) y se atrofian casi por completo en los más carniceros (gato, tigre). De ello resulta un número de dientes decreciente (42 en el oso, 30 en el gato) y una fórmula dental gradualmente simplificada;

2º *Caracteres craneanos*. La disminución del número de dientes tiene por consecuencia un acortamiento progresivo del hocico. Al mismo tiempo, los arcos cigomáticos se separan cada vez más del cráneo para dar paso a enormes músculos masticadores. De ello resulta la forma globulosa de la cabeza de los felinos;

3º *Patas*. Las carnívoros son *plantígrados* (oso) o *digitígrados* (perro, gato), según están más o menos adaptados a la carrera. Además, los más carniceros tienen las *uñas retráctiles* que, recogidas cuando el animal reposa, y escondidas en la piel, se conservan aceradas para las necesidades del ataque. Un gato, por ejemplo, puede esconder las uñas, cosa imposible para un perro;

4º *Otras adaptaciones*. Los carnívoros tienen sentidos perfeccionados (oído, olfato, visión nocturna), una gran agilidad y un instinto particular para la caza, etc.

Pinnípedos. — Los *pinnípedos* son carnívoros acuáticos, con patas transformadas en *aletas* por desarrollo de una membrana entre los dedos, que permanecen no obstante visibles y se terminan en uñas. Los miembros posteriores, dirigidos hacia atrás, forman con la cola corta una especie de aleta caudal. El cuerpo, por detrás, está recogido como el de los peces. El pelaje es corto, pero tupido. La dentadura es la de los carnívoros.

Los principales pinnípedos son las *otarias* (del griego *ous, ôtos*, oído), así llamadas porque sólo ellas han conservado el pabellón auditivo; las *morsas*, que son notables por sus enormes caninos superiores, prolongados en defensas, y las *focas*, que no se distinguen por nada. Todos estos animales son originarios de los mares fríos. Habitan en las costas bajas y los estuarios, y vienen a tierra para reposar o reproducirse.

Roedores. — Los *roedores* son omnívoros o frugívoros cuyos alimentos (raíces, granos, frutos) son roídos por los movimientos de atrás hacia delante, y viceversa, de la mandíbula. Los *incisivos*, generalmente en número de dos, en cada mandíbula, tienen una longitud enorme. Los caninos no existen y la dentadura, por tanto, es incompleta. Los *molares*, como los incisivos, tienen un crecimiento constante, y funcionan como escofinas.

Los roedores son, en general, animales muy vivos y muy prolíficos, siempre perniciosos por las devastaciones que producen.

Entre los roedores del continente americano figuran: 1º, el *agutí*, que causa grandes destrozos en las plantaciones. Su dentadura es una de las más destructoras entre las de los roedores. Su pelaje rojizo, amarillento y negruzco, se adapta al color general del lugar en que habita. Es tímido, y muy prolífico. Vive en profundas madrigueras con varias salidas, en las cercanías de los ríos y poblaciones. Sentado sobre sus cuartos traseros, se sirve de las patas delanteras como de manos para llevarse los alimentos a la boca; 2º, el *paca*, propio de la América del Sur, parecido a un lechón. Se domestica fácilmente y su carne es muy apreciada; 3º, la *chinchilla*, ya muy apreciada por los incas, que fabricaban tejidos con su pelo sedoso. Habita en las montañas rocosas y áridas de Chile, Bolivia y el Perú. Su cabeza es grande y sus orejas anchas y redondas. En las altitudes chilenas vive una chinchilla, la *chinchilla lanosa*, algo más pequeña y de pelaje abundante. Su piel se cotiza más que la de la otra; 4º, la *vizcacha*, de cabeza voluminosa y bigotes largos y duros, que vive en el Perú, Chile y Argentina; 5º, el *capibara* o *carpincho*, el mayor de todos los roedores, abundante en toda América del Sur, desde el Orinoco hasta el Plata, y desde el Atlántico hasta los Andes. Por su aspecto y pelo recuerda al cerdo común. Es muy grueso y pesado. Su cuello es corto, su cabeza alargada. Tiene membranas natatorias entre los dedos de las patas traseras; sus orejas son pequeñas y carece de cola; 6º, el *mara* o *liebre de Patagonia*, que habita principalmente en esta región y en otras al norte de la Argentina. Sus patas traseras son desmesuradas con relación a las delanteras, por lo que recuerda en su carrera al canguro. Sus ojos son grandes. Su piel y su carne son muy apreciadas por el indio y el gaucho; 7º, el *cuy* o *conejillo de Indias* o *cobayo*, cuyo país de origen es probablemente el Perú, donde vive aún una especie salvaje, de la que provienen las diferentes razas, cuyos pelajes varían según el gusto del criador. El del salvaje es gris; 8º el *coendú*, puerco espín solitario y nocturno, que habita en los bosques espesos de México, Estados Unidos, América Central, las Guayanas y el Brasil. Sus púas, débilmente insertas en la piel, se desprenden con facilidad. Con su cola, algo larga, se defiende dando fuertes golpes. Es trepador y arborícola; 9º, el *coipo*, que se encuentra desde el Brasil hasta Patagonia y cuyas características son una cola redonda y desnuda, como la de las ratas, y una ancha membrana natatoria entre los dedos de las patas traseras. Su piel, conocida con el nombre de *castor del Plata*, y fraudulentamente bajo el de *piel de nutria*, es muy estimada; 10, el *degú*, abundante en todas las provincias del centro de Chile; 11, la *taltuza* o *tuza*, que se extienden desde el Canadá hasta América del Sur y causa daños considerables en las plantaciones. Está completamente adaptada a la vida subterránea. Su cuerpo es cilíndrico, su cuello corto y su cabeza ancha y robusta; 12, el *asapan*, ardilla voladora de los Estados Unidos y México; 13, el *chipmunk*, ardilla terrestre que anida en los huecos de troncos viejos o en madrigueras. Su piel, de bellos colores, está rayada longitudinalmente; 14, el *perro de las praderas*, de México, así llamado porque su grito recuerda el ladrido del perro. Habita en las llanuras, en grandes colonias.

Proboscidios. — Estos mamíferos terrestres se caracterizan a primera vista por su *gran tamaño* (su peso llega a 5 000 kilogramos y su altura pasa de tres metros) y por su *trompa (proboscis)* larga y móvil, formada por la nariz y el labio superior. Sus patas, verdaderas columnas, son *unguligradas* y se posan en el suelo sobre cinco pezuñas. La dentadura es también muy característica: *incisivos* localizados en la mandíbula superior y que constituyen dos *defensas* curvas que puede pesar cada una 100 kilogramos; *molares* grandes como adoquines y cuya cubierta de desgaste o molino presenta pliegues transversales de esmalte. Por esta conformación y por la ausencia de caninos, los proboscidios tienen cierta semejanza con los roedores.

Los únicos *proboscidios* actuales son el *elefante de África* y el *elefante de Asia*. Han sido precedidos, en los tiempos cuaternarios, por otras numerosas especies: primero, por grandes elefantes, como el *mamut* y el *elefante antiguo*; después, por *mastodontes* fáciles de conocer por sus cuatro defensas y sus molares erizados de tubérculos; finalmente, por formas de pequeña talla, como los *meriterios*, que apenas eran proboscidios. Se pasa fácilmente de unos a otros. En particular, los dientes con tubérculos de los mastodontes han dado, por fusión de sus tubérculos en relieves transversales y por desgaste de éstos, los dientes con pliegues de esmalte de los elefantes. Parientes cercanos de éstos han sido también los *dinoterios*, cuyas defensas, situadas en la mandíbula inferior, estaban encorvadas hacia abajo.

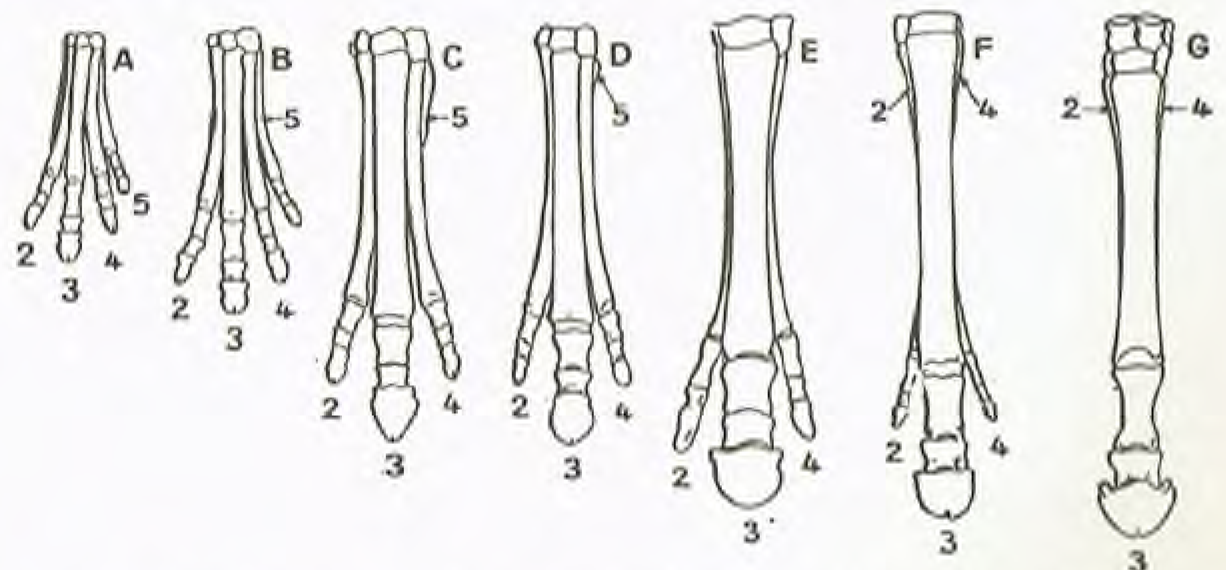
Perisodáctilos. — Los proboscidios, por sus miembros ungulígrados terminados en pezuñas, conducen a los verdaderos *ungulados*, que se dividen en *perisodáctilos* y *artiodáctilos*, según el número impar o par de dedos que posean en cada una de sus patas.

Los perisodáctilos (del griego *perissos*, impar) se reducen actualmente a los tres géneros siguientes:

1º Los **tapires** de la India y el Brasil, que tienen cuatro dedos en las patas delanteras y tres en las traseras;

2º Los **rinocerontes** de África y Malasia, que tienen tres dedos en cada pata y uno o dos cuernos nasales;

3º Los **caballos** y sus congéneres, los *asnos* y las *cebras*, que sólo tienen un dedo en cada pata. Este carácter notable es el resultado de una larga evolución, de la que se han encontrado todas las etapas en estado fósil. Partiendo del primitivo caballo con cinco dedos, cuyo dedo medio (dedo 3) predomina, se ven atrofiarse, y después desaparecer, los dedos



Transformaciones sucesivas de las patas del caballo

1, 5, 2 y 4. El *anchitherium* es un caballo de tres dedos posados sobre el suelo. El *hipparion* es un caballo de tres dedos, de los cuales sólo uno toca el suelo. En el caballo actual, los dedos laterales 2 y 4 están reducidos a *estiletes* situados detrás y a los lados de la *caña* o metatarso

del dedo 3. Puede suceder que en caballos monstruosos se prolonguen los estiletes por pequeñas falanges y pequeñas pezuñas, lo que no deja de ser un atavismo.

Al mismo tiempo que se opera la evolución de sus patas (adaptación a la carrera), el caballo aumenta de talla y sus molares, al principio tuberculados, adquieren una cubierta de desgaste con pliegues de esmalte (adaptación al régimen herbívoro). El caballo actual tiene la dentadura siguiente: *incisivos* formando una lámina cortante en cada mandíbula; *caninos* atrofiados y de tardía aparición (sólo en los machos); *molares* con pliegues de esmalte que envuelven islotes de marfil y rodeados de cemento.

Artiodáctilos. — Los *artiodáctilos* (del griego *artios*, par) son los ungulados de cuatro o dos dedos. Se les divide, según su régimen y la constitución de su estómago, en dos subórdenes:

1º Los **porcinos,** que son omnívoros o herbívoros, pero tienen una dentadura completa y un estómago impropio para rumiar: *hipopótamos* anfibios de África, *puercos* y *jabalíes* de Europa, *pécaris* de América del Sur, etc.;

2º Los **rumiantes,** que son exclusivamente hervíboros y tienen una dentadura incompleta. Generalmente no tienen *incisivos* ni *caninos* en la mandíbula superior. Los dientes correspondientes inferiores, están, por el contrario, bien desarrollados y constituyen una lámina cortante que se opone a la encía superior endurecida y permite al animal, si no cortar, por lo menos arrancar la hierba. Los *molares*, como los del caballo, tienen una cubierta de desgaste con pliegues de esmalte. Éstos rodean islotes de marfil y están envueltos en cemento. Normalmente, estos dientes crecen de manera continua y se agrandan en la base a medida que se usan por arriba debido a la masticación.



Ciervo (*Fot. Rödle*)

Otro carácter de los rumiantes es su *estómago plurilocular*, que comprende una cavidad de reserva *(panza y bonete)* en la que los alimentos se acumulan rápidamente; una cavidad muscular *(libro u omaso)* y una cavidad glandular *(cuajar)*, en la que son digeridos después de la *rumia*.

Los rumiantes se caracterizan, en fin, por sus patas de dos dedos *(pata hendida)*: son los dedos 3 y 4, que subsisten y terminan en dos pezuñas. Sus metacarpianos o sus metatarsianos se sueldan en una *caña* que no tiene el mismo origen que el hueso del mismo nombre en el caballo. Algunas veces subsisten los dedos laterales 2 y 5 (ciervo y cabrito).

Los rumiantes se dividen en tres grupos:

1º *Rumiantes de cuernos huecos*, cuyos cuernos son estuches que cubren dos protuberancias del hueso frontal. A este grupo pertenecen los *toros*, los *búfalos*, los *bisontes*, los *carneros*, las *cabras*, los *antílopes*, las *gacelas*, etc.;



Cráneo de cabra que muestra, a la izquierda, el soporte óseo del cuerno

2º *Rumiantes de cuernos macizos*, cuyos cuernos son salientes óseos ramificados y cubiertos sólo por la piel. Estos cuernos, que son generalmente propios de los machos, caen y se reproducen cada año. Estos rumiantes son los *ciervos*, los *gamos*, los *cabritos*, los *renos* y los *alces*. Las *jirafas*, incluidas en el mismo grupo, tienen cuernos pequeños y permanentes;

3º *Rumiantes sin cuernos*, pero que, en compensación, tienen caninos superiores, desarrollados a veces como defensas: *almizcleros* y, sobre todo, *camellos*, *dromedarios*, *vicuñas* y *guanacos*, con sus dos razas domésticas, *llamas* y *alpacas*. Todos estos camélidos están notablemente adaptados a la vida en los parajes áridos y desérticos (orificios nasales que pueden cerrarse herméticamente, pies ensanchados en una sola pezuña, reservas de agua en la panza y a veces reservas de grasa en las gibas dorsales).

La *llama* es sin duda el más genuino y útil representante de los camélidos americanos. Su tamaño, constitución y fuerza le permiten acarrear cargas, durante largas jornadas, por lugares casi intransitables para el caballo y la mula. Su carne, leche, grasa, piel y lana han sido siempre de gran utilidad para el indio del Perú. Su frugalidad es enorme y resiste la sed con simples plantas jugosas. Sus sentidos del olfato y del oído son muy finos. Sus ojos, grandes y vivos, descubren fácilmente, desde las alturas andinas, al jaguar y otros enemigos. Tiene los labios hendidos y muy móviles, y los ojos protegidos por las órbitas contra la reverberación de las regiones rocosas. Suele defenderse escupiendo a la cara del adversario, con infalible habilidad, todas las mucosidades de su boca.

La *alpaca*, más pequeña que la llama, se asemeja más al carnero, pero tiene el cuello más largo que éste. Su pelo es largo y muy suave, por lo que el indio, desde tiempos remotos, lo ha empleado para fabricar artísticos tejidos de uso corriente.

La llama y la alpaca descienden seguramente de otra especie, el *guanaco*, que es el mayor mamífero de América del Sur. Abunda en la región meridional de los Andes, pero se extiende por toda la cordillera. Escasea en las comarcas pobladas a causa de su incesante caza.

La *vicuña* se diferencia de la alpaca por su pelo, que es más corto, pero de extraordinaria finura, y por su tamaño, que es mayor. Como sus pezuñas son delicadas y sensibles, no sube jamás a las cumbres pedregosas. Habita, por tal razón, en los terrenos blandos y de hierba.

Sirenios. — Los *sirenios* son mamíferos acuáticos, pisciformes, casi desprovistos de pelo y cuyos miembros anteriores se han convertido en *aletas*. De sus miembros posteriores sólo queda un rudimento pélvico. Tienen una dentadura de leche completa, pero la definitiva carece de caninos. Sus once molares están algo atrofiados, y en el lugar de los incisivos, así como en la lengua y la garganta, se encuentran placas córneas que les sirven para masticar las hojas y tallos blandos de que se alimentan. Su régimen es, pues, hervíboro. Sus mamas son pectorales.

Los únicos representantes actuales de los sirenios son el *dugongo*, del océano Índico, y el *manatí* o *vaca marina*, que habita en las costas atlánticas americanas, desde el Brasil septentrional hasta la Florida y las Antillas, especialmente en las desemboraduras de los grandes ríos. Animales pesados y desairados, que miden de dos a tres metros y pesan varias centenas de kilogramos, suben con frecuencia a la superficie para respirar y pueden cerrar herméticamente sus orificios nasales mediante pliegues elásticos de la piel. La hembra es unípara y cuida con esmero su cría.

Cetáceos. — En éstos, la adaptación a la vida acuática es más completa: *a*) el cuerpo entero es pisciforme; *b*) los miembros anteriores son *aletas*, que sirven de estabilizadores y cuyos dedos, completamente disimulados, tienen varias falanges; *c*) los miembros posteriores han desaparecido, así como la pelvis, de la que quedan vagos vestigios; *d*) el extremo del cuerpo posee una *aleta caudal* análoga a la de los peces, pero dispuesta horizontalmente, que es a la vez hélice y timón; *e*) existe muchas veces una *aleta dorsal*; *f*) la piel, que no tiene pelos ni glándulas, está en cambio cubierta por una espesa capa de *grasa* que protege al animal contra el frío; *g*) las *narices* se abren en lo alto de la cabeza y arrojan vapor de agua que, al condensarse al contacto con el aire, parece un surtidor. A estos caracteres se añaden otros que deben ser considerados como una degeneración: persistencia de la dentadura de leche y atrofia de la definitiva; dientes iguales, pero reemplazados a veces por producciones córneas, barbas o ballenas; deformación del cráneo por depresión de los frontales y los parietales, etc. Los cetáceos se diferencian además de los sirenios por sus mamas inguinales. Se les divide en dos subórdenes:

1º **Odontocetos** o cetáceos con dientes. Estos dientes son numerosos en las dos mandíbulas en los *delfines* y las *marsopas*, están localizados en la inferior en los *cachalotes*, y reducidos a muy pocos en las *orcas* e incluso a uno solo, si bien muy largo, en los *narvales*. Todos estos animales, salvo los cachalotes, no pasan de tres metros de longitud y

se nutren de peces o de cefalópodos. Los cachalotes tienen una enorme giba frontal formada por la acumulación de una materia grasa, llamada "blanco de ballena" o espermaceti, utilizada en perfumería. Su intestino contiene concreciones de ámbar gris, substancia muy rica en ácido benzoico, y muy buscada igualmente en perfumería;

2° **Mistacocetos** o cetáceos con barbas o ballenas. Los dientes no existen jamás, salvo en estado de gérmenes, y están reemplazados por varios centenares de láminas córneas o ballenas, dispuestas en el borde de la mandíbula superior. Estas barbas pueden alcanzar cinco metros de longitud en una ballena de 25 metros y constituyen un filtro para el plancton de que se nutre el animal. Una ballena de 100 000 kilos suministra unos 3 000 kilos de barbas o "ballenas" industriales y 40 000 de grasa, de la cual se extraen 30 000 kilos de aceite. El ballenato pesa 5 000 kilos al nacer y mide seis metros.

Hay que distinguir la *ballena franca* o *común*, que no tiene aleta dorsal, y el *ballenóptero* o *rorcual*, que sí la tiene. Los dos animales viven en los mares fríos y están en vías de desaparición a causa de la encarnizada caza de que son objeto.

Entre los afines de la ballena que frecuentan los mares de las Antillas y del sur del continente americano figuran el *yubarta*, de unos 15 metros de largo, tronco menos extenso, con una amplia joroba en la parte posterior del lomo y aletas pectorales muy largas, y la *inia* o *bufeo*, que puebla principalmente el Orinoco y el Amazonas y sus grandes afluentes.

Desdentados. — Este último grupo de mamíferos es notable por sus caracteres hoy en degeneración. Estuvo muy extendido en el Cuaternario de América del Sur (*megaterio* y *gliptodonte*), y es aún en esta región donde conserva su genuina representación con el *perezoso*, que, suspendido siempre de las ramas por sus largas garras en forma de gancho, se desplaza con desesperante lentitud; el *tatú*, de caparazón hecho de placas móviles, y el *oso hormiguero*, que, gracias a su larga lengua viscosa, se alimenta de hormigas. En el África austral está representado por el *pangolín*, cuyo cuerpo está cubierto de escamas, y el *oricterópo*, cuyas costumbres son las mismas que las del oso hormiguero.

Tienen degenerados su dentadura y sus miembros. Los oricterópos conservan dos denticiones, mientras que los demás desdentados no tienen más que la definitiva. Los oricterópos, los tatúes y los perezosos tienen todos los dientes iguales y muy sencillos. Los pangolines y los hormigueros carecen de dentadura. Del mismo modo, los dedos pasan de cinco a dos, sin que pueda invocarse otra causa de ello que un desequilibrio de todo el organismo.

El *perezoso*, que es uno de los más típicos animales del Nuevo Mundo, habita en los bosques más obscuros e impenetrables, colgado de las ramas, de las que desciende raramente. Puede permanecer días y semanas sin alimentarse, debido a su falta de necesidades. Su cuello largo y de extraordinaria flexibilidad le permite girar en todos sentidos para vigilar los peligros que puedan acecharle. Sus ojos están rodeados de anillos negros que les dan aún mayor expresión. Entre su pelo viven abundantes algas, que dan un tono verdoso a su pelaje. Su dentadura es rudimentaria y se compone de cinco molares cilíndricos en cada fila, sin esmalte ni raíces. La hembra es unípara.

El *tatú*, *cachicamo* o *armadillo* habita, desde el Paraguay hasta el sur de los Estados Unidos, en las regiones arenosas y los linderos de los bosques. Como su régimen esencial de alimentación son las hormigas, hace su cueva en las proximidades de los hormigueros. Gracias a sus potentes garras, puede escarbar con rapidez. Su coraza consta de placas ordenadas en fajas, que permiten la articulación del cuerpo. Sus dientes son numerosos, pero muy débiles e inútiles para la defensa. Algunas especies pueden arrollarse en forma de bolas.

El *oso hormiguero*, llamado también *yurumí*, mide dos metros, de los cuales uno es de cola, la más larga del reino animal. Sus garras delanteras están comprimidas como las del águila y son excelentes instrumentos para abrir los hormigueros, en los que introduce su larguísima lengua vermiforme y pegajosa, que retrae a la boca cuando está cubierta de hormigas. Este órgano es único en el mundo animal. De su dentadura no queda ningún vestigio, por haber desaparecido la función trituradora. Su olfato y oído están muy desarrollados. La hembra lleva al hijuelo en la espalda. Su carne y piel es aprovechada por los indios.

El *tamandúa*, *caguaré* u *oso colmenero* es del mismo género que el oso hormiguero, pero con cuatro dedos en las patas delanteras y cola prensil. No sólo vive en el suelo, sino también en los árboles, por los que trepa con la lentitud del perezoso. Alcanza un metro de largo.

El *serafín de platanar* se parece mucho al perezoso, pero su tamaño es el de una ardilla. Su pelaje es dorado y su cola prensil.

Evolución de los seres vivientes

Estabilidad y transformismo: Recuerdo de la noción de especie. Estabilidad. Transformismo. — **Pruebas de la evolución:** Pruebas paleontológicas. Pruebas anatómicas. Pruebas embriológicas. Pruebas geográficas. — **Mecanismo de la evolución:** Acción del medio. Mutación. Selección. Herencia de los caracteres adquiridos

Estabilidad y transformismo

Recuerdo de la noción de la especie. — Se recuerda que la *especie* es el conjunto de animales o vegetales que, nacidos unos de otros o de padres comunes, están unidos entre sí por los lazos de la herencia y se parecen como hermanos y hermanas.

Las especies son verdaderas unidades sistemáticas, cuyo conjunto, dividido en géneros, familias, órdenes, clases y tipos, contituye los reinos animal y vegetal.

Estabilidad. — Para la mayor parte de los naturalistas antiguos existían tantas especies cuantas fueron creadas al principio. La zoología y la botánica sólo consisten en describir bien las especies y clasificarlas, más o menos artificialmente, como se clasifican objetos cualesquiera. Por haber establecido el máximum de orden en esta clasificación, y sobre todo por haber inventado la nomenclatura binominal (nombre del género y de la especie), goza de justa reputación el naturalista sueco **Linneo** (1707-1778). Más tarde, el francés **Cuvier** (1769-1832) suministró a la concepción de la estabilidad de las especies el apoyo de su alta autoridad. Pero, estudiando los fósiles, en los que comprobó a cada paso apariciones y desapariciones de especies, modificó la concepción simplista del principio corrigiéndola por la de las *revoluciones del globo*. Según él, la fauna y la flora se han renovado varias veces: ha habido varias creaciones y varias destrucciones sucesivas de animales y vegetales.

Transformismo. — La teoría de las revoluciones del globo no podía ser más que una solución provisional del problema de los fósiles. El estudio cada vez más minucioso de éstos debía conducir fatalmente ya a multiplicar hasta el infinito los actos creadores, ya a admitir resueltamente que las especies, lejos de ser estables, son variables y se derivan unas de otras por *transformación*.

En efecto, la fauna y la flora se han modificado gradualmente en el curso de los tiempos geológicos. El mundo viviente actual es el resultado de una larga *evolución*. A la definición primera de la especie (agrupamiento estable) debe ser preferida ésta: "La especie es el conjunto de los individuos que no están diferenciados aún para cesar de tener descendientes comunes".

En otros términos, el mundo fósil "puede ser estudiado como un individuo en sus diferentes edades; seguimos su desarrollo a través de las fases de su existencia que llamamos edades geológicas".

Grandes nombres jalonan la historia del transformismo, desde **Buffon** (1707-1788), que enunció por primera vez ideas en este sentido, hasta los biólogos actuales, todos transformistas, pasando por los verdaderos fundadores de la doctrina: el ilustre francés **Lamarck** (1744-1829) y el no menos célebre inglés **Darwin** (1809-1882). Pero a pesar de que Darwin nació cuando Lamarck, ya viejo y versado en la ciencia, publicaba su inmortal *Filosofía zoológica*, no se conoció a éste sino mucho tiempo después que a Darwin. Fue necesaria una especie de resurrección para restituirle el prestigio que su genio merece.

Pruebas de la evolución

El *transformismo* o *doctrina de la evolución* se apoya hoy sobre innumerables pruebas obtenidas de la paleontología, la anatomía comparada, la embriología y la distribución geográfica de los seres vivientes.

Pruebas paleontológicas. — Si pudiéramos reconstituir todas las especies desaparecidas y compararlas con las actuales, se vería que forman una sola e inmensa familia. Incluso los pocos fósiles que ha sido posible descubrir en las capas del suelo suministran sólidos argumentos al transformismo, es decir, los más directos y convincentes.

1° El *orden de aparición* de las especies animales y vegetales no es un orden cualquiera. Los tipos más simples han precedido siempre a los más complejos. Así, los invertebrados aparecieron antes que los vertebrados. Entre éstos, ha habido sucesivamente peces, batracios, reptiles, aves y mamíferos. El hombre ha sido el último en venir al globo. En el mundo vegetal, las criptógamas son las primeras aparecidas; las fanerógamas vinieron después; entre ellas, las gimnospermas han precedido a las angiospermas. La evolución ha sido progresiva;

2° En cada grupo existen *formas primitivas* o *ancestrales*. Así, los carnívoros del Mioceno han tenido por antepasados a los creodontes del Eoceno. El hombre actual ha sido precedido por hombres prehistóricos infinitamente menos evolucionados que él en todos los aspectos;

3° Existen con frecuencia *formas intermedias* fósiles entre los grupos actuales. El caso más notable es el del arqueoptérix del Jurásico superior: reptil por sus dientes, sus dedos y su cola; ave por sus alas y sus plumas. Del mismo modo, las pteridospermas del Carbonífero son verdaderos "helechos con granos", marcando la transición de las criptógamas vasculares a las gimnospermas;



Evolución de las paludinas (Mioceno de Eslavonia, Yugoslavia). Cuanto más recientes son las conchas, más adornos tienen (Según Boule y Piveteau, *les Fossiles*, Masson, ed.)

4° En ciertos grupos en que los fósiles abundan, es posible seguir la evolución paso a paso. De este modo se conoce toda la serie de los *antepasados americanos del caballo*. En este caso la evolución es triple: *a*) la talla aumenta progresivamente; *b*) las patas se adaptan a la carrera por disminución del número de sus dedos; *c*) los dientes se adaptan al régimen herbívoro por transformación de sus tubérculos en pliegues de esmalte. Los *antepasados del elefante* son también muy bien conocidos.

Pruebas anatómicas. — La anatomía comparada, base de la clasificación, suministra también numerosos argumentos en favor del transformismo;

1° **Etienne Geoffroy Saint-Hilaire** (1772-1844) insistió hace tiempo sobre la *unidad de plan de composición* de los seres vivientes. La arquitectura es la misma en cada grupo. Los órganos pueden modificarse, atrofiarse, desaparecer, pero jamás unos substituyen a los otros; sus conexiones o relaciones no cambian: prueba de que los animales de cada grupo tienen un origen común;

2° Existen aún *formas de transición* entre ciertos grupos zoológicos. Los dipnoos, que tienen a la vez branquias y pulmones, son intermedios entre los peces y los batracios. Los monotremas son reptiles por sus coracoides, su cloaca y sus huevos, pero mamíferos por sus pelos, su leche y muchos otros caracteres;

3° La mayor parte de los animales tienen *órganos rudimentarios* e inútiles, cuya existencia no puede explicarse más que por *atavismo* o *recuerdo ancestral*. Tales son, en el hombre, el sistema piloso, las muelas del juicio, que están en vías de desaparición y faltan en el 10 por 100 de los habitantes de las grandes ciudades, el apéndice del intestino grueso, la apófisis coracoide de los omóplatos, etc. Las patas de los caballos tienen dos estiletes que representan dos dedos desaparecidos. Son vestigios de su antepasado el hiparión. Algunos caballos monstruosos tienen además, en la punta de los estiletes, falanges y pequeñas pezuñas;

4° Los animales y los vegetales actuales pueden a veces ser divididos en *series* en las que todo ocurre como si se derivasen unos de otros. Así, el lagarto tiene patas bien desarrolladas, el sepedón las tiene muy pequeñas, el lución las tiene subcutáneas, la boa y el pitón conservan aún algunos rudimentos en las proximidades de la cloaca, y en las demás serpientes no existen. Otra serie comprende el cerdo de cuatro dedos; el ciervo y el cabrito, que tienen dos dedos medios robustos y dos laterales más débiles, y el toro, que sólo tiene dos dedos. Entre las plantas, citemos el paso del protalo voluminoso y hermafrodita de los helechos al grano de polen y al saco embrionario de las angiospermas.

Pruebas embriológicas. — **Serres** (1786-1868) enunció la siguiente ley: "La embriología es la repetición de la anatomía comparada". Desarrollada después por los alemanes **Fritz Muller** (1821-1897) y **Haeckel** (1834-1919), esta ley de *recapitulación*, también conocida bajo el nombre de *ley de patrogonia*, ha adquirido su pleno sentido. Un animal dado reviste sucesivamente, en el curso de su desarrollo, pero por supuesto resumidas, las diversas formas por las cuales ha pasado su especie en el curso de la evolución. En otros términos: el desarrollo individual u *ontogenia* (del griego *ôn, ontos*, ser) es una recapitulación sucinta del desarrollo específico o *filogenia* (del griego *phulê*, raza). He aquí algunos ejemplos:

1° La rana es acuática y branquiada antes de ser aérea y pulmonada. Sus fases sucesivas de branquias externas, de branquias internas, de pulmones y sin cola, están aún representadas, en la naturaleza actual, por cuatro grupos de batracios;

2° Los cayados aórticos y las arterias pulmonar y cutánea de una rana se derivan de los arcos aórticos del renacuajo, los cuales, a su vez, son análogos a los de un pez;

3° Los embriones de los vertebrados aéreos poseen, en determinado momento, hendiduras branquiales esbozadas;

4° El hueso hioides, los huesecillos del oído y una parte del temporal de los mamíferos se forman a expensas de arcos cartilaginosos que recuerdan los arcos branquiales de los peces;

5° Los tuniceros, animales estables y muy simples, tienen una larva nadadora emparentada con la del anfioxo por su cuerda y su sistema nervioso dorsal. Asimismo, la sacculina, parásito de los cangrejos, tiene una larva nauplio que demuestra su parentesco con los cirrípedos. Estos dos ejemplos son particularmente interesantes para mostrar que la evolución, generalmente progresiva, puede ser también *regresiva*.

Pruebas geográficas. — Ciertos hechos en la distribución geográfica de los seres vivientes constituyen también pruebas de la evolución:

1° Australia posee como mamíferos salvajes únicamente los marsupiales, es decir, tipos inferiores, que existen desde el Secundario. En cambio, carece de mamíferos más evolucionados. Esto se explica por la historia geológica: Australia estaba unida al resto del mundo durante la Era secundaria y se ha separado de él en el Terciario. Así, separada de los centros de origen de los mamíferos superiores, ha conservado sólo sus marsupiales, que, sin temor a concurrencia alguna, se han desarrollado y diversificado abundantemente;

2° Del mismo modo, la fauna de Madagascar es muy diferente y más arcaica que la de África. Se encuentran en Madagascar lemúridos en abundancia, pero no simios. Ello se debe a que la gran isla se separó del continente después de la aparición de los lemúridos y antes de la de los simios;

3° Las especies insulares son generalmente un poco diferentes de las especies continentales. Descendientes de éstas por inmigración (aves e insectos buenos voladores, antiguas comunicaciones terrestres), se han diferenciado poco a poco a causa de su aislamiento.

La evolución está, en suma, ampliamente probada, y sobre ella no hay hoy la menor duda. Tenemos, escribe Cuenot, "muy importantes y múltiples razones para creer en el transformismo".

Mecanismo de la evolución

Pero, si se está de acuerdo sobre el hecho de la evolución, se discute mucho sobre su mecanismo y sobre las causas que la han producido. Examinemos cuáles han podido ser *los factores de la evolución*.

Acción del medio. — Los seres vivientes son plásticos y maleables bajo la acción del medio que los rodea. Pueden darse múltiples ejemplos:

1° **Bonnier** (1853-1922) fue el iniciador en Francia de lo que llamó muy juiciosamente la *morfología experimental*. Sometiendo plantas a los diversos efectos de la luz, el calor, la humedad, los alimentos, etc., las vio modificarse en diferentes sentidos. Una planta de llanura cultivada en montaña adquiere órganos subterráneos extraordinariamente desarrollados y ricos en substancias de reserva; inversamente, su tallo se reduce y sus hojas, dispuestas en forma de círculo en la superficie del suelo, se hacen peludas y muy verdes. Sus flores son de color vivo y perfume violento. El análisis de estos caracteres adquiridos muestra que son debidos al clima de montaña;

2° Los medios aéreo, acuático y subterráneo tienen una influencia considerable sobre la estructura de las plantas. Sabemos que la sagitaria tiene hojas cinteadas dentro del agua, coraiformes en la superficie del agua y sagitales fuera del agua. Cultivada en mucha agua, todas sus hojas se vuelven cinteadas. Cultivada, por el contrario, en poca agua, todas sus hojas se vuelven sagitales. Los tallos normalmente aéreos a los que se fuerza a ser subterráneos adquieren los caracteres de los rizomas: aumento del corcho, desaparición de los tejidos de consistencia y de la clorofila, acumulación de reservas, etc. Las plantas espinosas pierden sus espinas cuando se las cultiva en una atmósfera húmeda. Nutriendo rábanos con azúcar, su raíz y su tallo se hipertrofian y acumulan granos de almidón en lugar de sacarosa;

3° No son diferentes estos fenómenos en los animales. Las gallinas alimentadas durante varias generaciones con carne cruda tienen un pico y uñas extraordinariamente desarrollados (caracteres de las rapaces). Orugas o crisálidas de la misma especie, sometidas a diferentes condiciones de temperatura, producen mariposas diferentemente coloreadas. En 1881, las robinias, llamadas impropiamente "acacias", fueron invadidas por una oruga de especie nueva. Ciertos experimentos no tardaron en mostrar que se trataba de la cochinilla del duraznero transformada por la nueva savia que ingería;

4° Animales de origen diferente, viviendo en un mismo medio, llegan a parecerse. Esto es lo que se llama la *convergencia de caracteres*. El mejor ejemplo es el de los vertebrados acuáticos, que tienen la misma forma y la misma disposición de aletas, aunque unos sean peces, otros reptiles (ictiosauros de la Era secundaria) y otros, en fin, mamíferos (delfines, marsopas). La *vida flotante* o pelágica confiere a todos los seres un parecido extraordinario: cuerpo transparente, órganos de flotación, etc. Igual sucede en cuanto a la *vida fija*. Hemos visto en zoología que los celentéreos, los equinodermos y los briozoos tienen, debido a ella, una simetría radiada que les hace parecerse a los vegetales. Los moluscos bivalvos y los braquiópodos convergen en otro sentido. No haremos más que recordar, por último, la influencia del *parasitismo:* adquisición de órganos picadores, chupadores y de fijación; complejidad de los órganos genitales y del ciclo evolutivo; reducción extrema de otros órganos.



Cardillos: P, de llanos; M, de monte

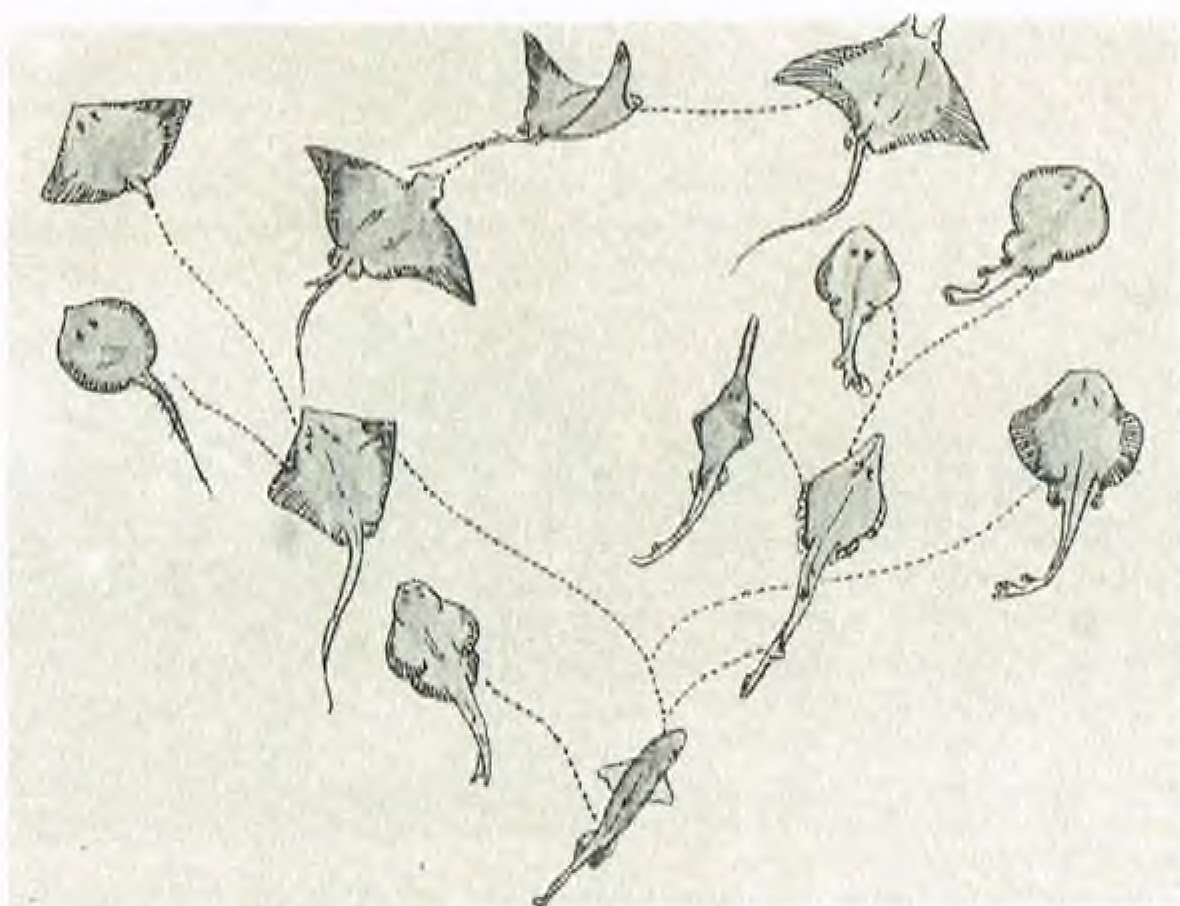
La acción del medio se manifiesta por la *adaptación al medio*. Pero, sin duda, se ha exagerado este nuevo concepto. Un ser que vive en ciertas condiciones está evidentemente organizado para no padecer en ellas. ¿Quiere decir esto que ofrece una adaptación perfecta a sus condiciones de existencia, como creyeron, de una manera ilusoria, Bernardin de Saint-Pierre y sus discípulos? A las *armonías* de la naturaleza, pueden oponerse, en realidad, muchas *desarmonías*. Admitamos como principio que caracteres indiferentes o poco nocivos pueden coexistir, en un mismo ser, con caracteres verdaderamente útiles. La adaptación al medio es siempre parcial.

Hechas estas reservas, hay que reconocer que la acción del medio y la adaptación al medio son innegables. Lamarck les ha hecho representar el principal papel en la evolución. He aquí cómo comprende el encadenamiento de los fenómenos. El ser recibe del medio exterior *excitaciones*, que se manifiestan en él por *sensaciones* y *sentimientos*. Siente *necesidades*, que trata de satisfacer. Para lograrlo adquiere ciertos *hábitos*, que tienen por efecto la modificación de la forma de sus órganos. Ejemplos: el empleo frecuente y duradero de un órgano lo fortifica y perfecciona; su uso limitado lo debilita y acaba por hacerlo desaparecer. Si un animal se hace subterráneo, sus ojos se atrofian al dejar de servirle; si se hace acuático, sus miembros, al golpear el agua, se transforman en aletas.


Mutaciones producidos sobre una planta (De Vries)

Por atrayente que aparezca, el *lamarckismo* tiene sus puntos débiles. Se le puede reprochar sobre todo el hacer intervenir factores psicológicos, que quedan forzosamente en lo vago y no son base para verificación alguna.

Los biólogos actuales tienen más bien tendencia a hacer intervenir, como intermediarios entre el medio y los órganos, factores fisicoquímicos. Cambiando de medio, un ser cambia de *metabolismo:* sus alimentos no son ya los mismos; sus humores, sus hormonas, sus vitaminas, sus diastasas, todos esos imponderables, cuyo papel es inmenso, sufren modificaciones que acarrean las de los órganos. La *química condiciona* la morfología. Por otra parte, los órganos no pueden variar independientemente unos de otros. Existe *correlación* entre sus funcionamientos, como ya había entrevisto Cuvier. El desarrollo de uno puede ocasionar la atrofia de otro, por una especie de *compensación*, de la cual se observan constantemente los efectos.


Evolución de seláceos hipótremos en el curso de periodos geológicos

Mutación. — Antiguamente sólo se creía en *variaciones* lentas, continuas, de pequeña amplitud, sucediéndose unas a otras en el transcurso de las generaciones. "La naturaleza no da saltos", decíase. Ahora bien, se ha demostrado, siguiendo al holandés **De Vries** (1848-1935), que influencias externas o internas pueden perturbar a las especies hasta el punto de hacerlas variar bruscamente. *Variaciones bruscas* o *mutaciones* han sido así comprobadas en los más diversos vegetales. Una especie de onagro ha engendrado, de pronto, varias especies nuevas coexistentes con la principal e inmediatamente fijadas por la herencia. Especies nuevas de trigo, de maíz, etc., han sido obtenidas provocando artificialmente, por mutación o traumatismo, un desequilibrio en la especie de origen. De igual modo, una pequeña *mosca del vinagre*, la *drosófila*, ha engendrado cientos de mutantes bajo la acción de los rayos X o del radio.

Selección. — En general, los seres vivientes se reproducen de manera excesiva y entran, por consiguiente, en lucha por la posesión de los medios de existencia. En esta *lucha por la vida* o, como se dice también, en esta *competencia vital*, los individuos más fuertes, más hábiles, mejor armados, vencen y transmiten a sus descendientes los caracteres que han asegurado su supremacía. Toda particularidad ventajosa, cualquiera que sea su origen (variación lenta o brusca), tiene la posibilidad de subsistir y de amplificarse en el transcurso de las generaciones. Se trata de una *selección natural*, análoga a la *selección artificial* que practican los ganaderos, los agricultores y los horticultores. Puede también haber *selección sexual*, en el sentido de que los machos más fuertes o más hermosos, elegidos por las hembras con exclusión de los machos menos favorecidos, transmiten sus ventajas a los descendientes.

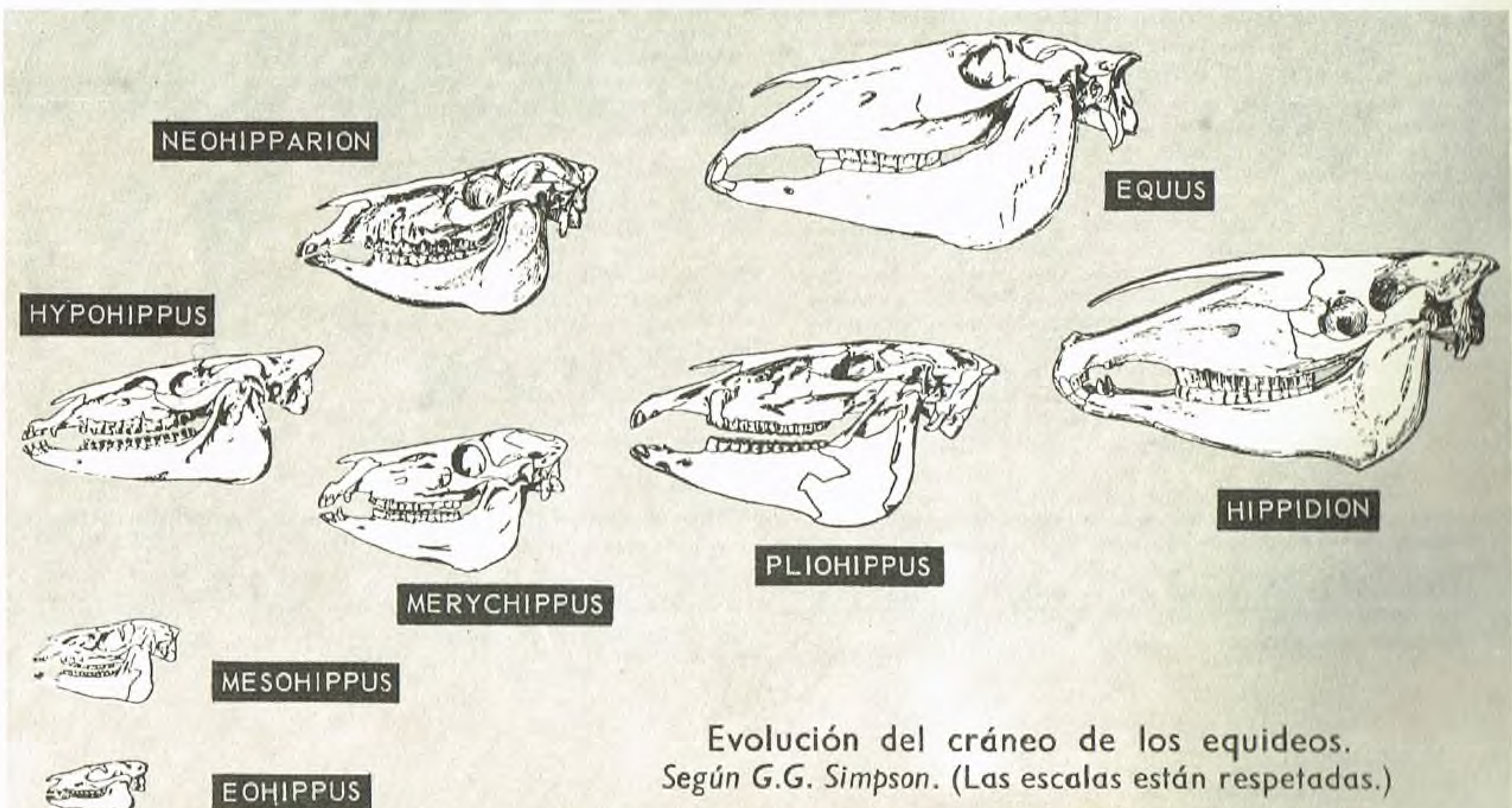
Tal es el principal fundamento del *darwinismo* o teoría debida a Darwin. No hay que oponerlo al lamarckismo o al mutacionismo, sino más bien conciliarlo con lo que hemos dicho sobre la acción del medio y de las mutaciones. Sin crear por sí misma variaciones, la selección conserva unas, elimina otras y orienta la evolución. Desempeña el papel de un filtro.

Herencia de los caracteres adquiridos. — El biólogo alemán **Weismann** (1834-1914) ha insistido mucho sobre la separación del *soma* y el *germen*. Lo que llama soma es el conjunto de las células de un ser viviente, a excepción de sus células reproductoras, que constituyen el germen. Para él, el soma y el germen son completamente distintos. Las variaciones del primero no influyen en absoluto en el segundo. Dicho de otro modo, los caracteres adquiridos por un ser bajo la influencia del medio no se transmiten hereditariamente y carecen de valor evolutivo. Esta teoría es, pues, la ruina del lamarckismo.

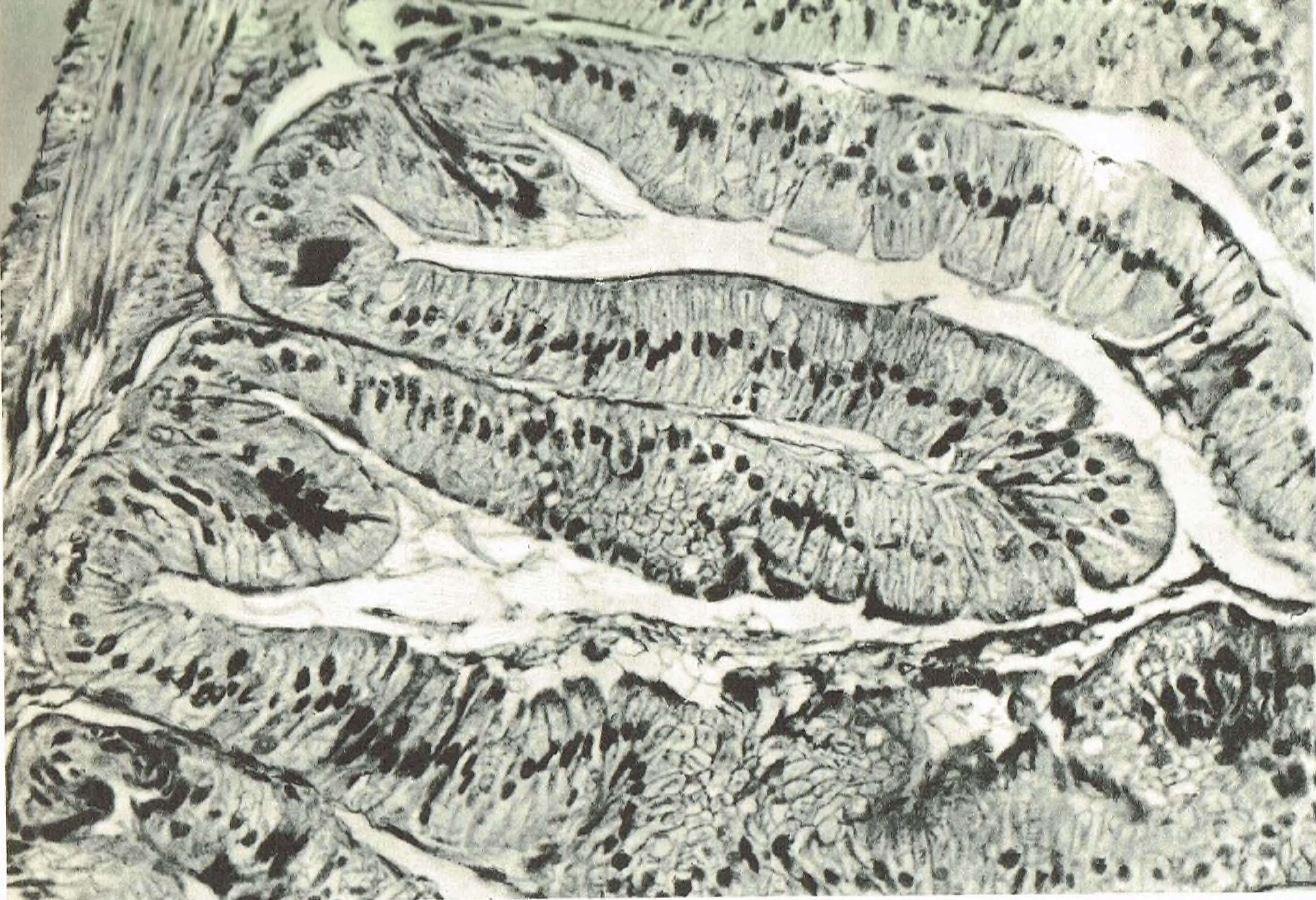
En realidad, a pesar de las innumerables investigaciones experimentales, no existe en este momento ningún hecho cierto en favor de la herencia de los caracteres adquiridos. Sólo se transmiten las variaciones suficientemente profundas para influir a la vez sobre el soma y sobre el germen. Es necesario que todo el metabolismo del ser sea modificado, como ocurre, por ejemplo, cuando se someten moscas del vinagre a la acción de los rayos X. Volvemos así a la *teoría química de la evolución*.

Si las mutaciones son inmediatamente hereditarias, ello es porque no hacen sino manifestar, de un modo visible, una alteración previa del *medio interior*.

León Bertin



Evolución del cráneo de los equideos.
Según G.G. Simpson. (Las escalas están respetadas.)



Vellosidades intestinales (*Microfot. L. Poilpot*)

Anatomía humana

La **anatomía** (del griego *ana*, a través, y *tome*, corte, sección) es la ciencia que tiene por objeto la descripción de la estructura del cuerpo y las relaciones de los distintos órganos entre sí.

La *anatomía descriptiva*, cuyo principal medio de investigación es la *disección*, estudia cada órgano e indica su situación exacta, su forma, etc.

La anatomía descriptiva comprende la *osteología*, estudio de los huesos y del esqueleto; la *artrología*, de las articulaciones; la *sindesmología*, de los ligamentos; la *miología*, de los músculos; la *angiología*, de los vasos; la *neurología*, de los nervios; y la *esplacnología*, que trata de las vísceras.

Situación de los órganos en el cuerpo

En la **cabeza** se encuentran el cerebro, el cerebelo, el bulbo raquídeo, los órganos de los sentidos y la primera parte del aparato digestivo.

En el **tronco**, la columna vertebral, la medula espinal; por otra parte, en la caja torácica, la tráquea, el esófago, los pulmones, el corazón; y, por debajo del diafragma, el estómago, el bazo, el hígado, el páncreas, el intestino, los riñones y la vejiga.

Las **extremidades**, formadas por huesos y adheridas al tronco, son puestas en movimiento por los músculos, tejidos que tienen la propiedad de poderse contraer.

Las funciones

La vida es el resultado de una serie de operaciones coordinadas que se designan con el nombre de *funciones*. Éstas pueden dividirse en tres grupos:

Las **funciones de relación,** que nos vinculan con nuestros semejantes y con el medio exterior, son: la locomoción, la sensibilidad y la fonación;

Las **funciones de nutrición,** que sirven para la conservación del individuo, son: la digestión, la circulación, la respiración y las excreciones;

Las **funciones de reproducción,** que son muy importantes, aseguran la conservación de la especie.

Funciones de relación

Esqueleto: Tejido óseo. Desarrollo de los huesos. — *Los huesos del cuerpo humano:* Cabeza. Tronco. Extremidades. — **Articulaciones.** — **Sistema muscular:** Elasticidad. Poder electromotor. Contractilidad. Análisis de una contracción. Mecanismo de los movimientos. Nutrición de los músculos. — **Sistema nervioso:** *Descripción del encéfalo:* Bulbo raquídeo. Cerebelo. Hemisferios cerebrales: Estructura de los hemisferios. Funciones de los hemisferios cerebrales. Percepción. Motricidad. Localizaciones cerebrales. Centros sensoriales. Localizaciones motoras. — *Sistema nervioso simpático.* — **Órganos de los sentidos:** La piel y el tacto. Estructura de la piel. La lengua. La nariz. El oído. El ojo. Formación de las imágenes. Anomalías de la visión. — **Laringe y fonación**

Esqueleto

El esqueleto del hombre comprende 211 piezas óseas, así repartidas:

Cráneo	8
Cara	14
Hueso hioides	1
Columna vertebral ... ... (si se admiten cinco huesos en el sacro y cuatro en el cóccix.)	33
Costillas y esternón	25
Miembros superiores	64
Miembros inferiores ... ... (contando los huesos iliacos como tres huesos.)	66
	211

Según su forma, los huesos pueden clasificarse en tres grupos:

1° Los *huesos largos*, que tienen una medula, una epífisis en cada extremidad y una parte alargada intermedia, la diáfisis;

2° Los *huesos planos*, como por ejemplo los del cráneo;

3° Los *huesos cortos*, como los del carpo y las vértebras.

Las eminencias que presentan estos huesos se llaman *apófisis*. En el interior de los huesos largos se encuentra la *medula*, sustancia blanda, grasa, amarillenta, roja en los niños, formada por una red conjuntiva con elementos sanguíneos: mieloblastos, mielocitos, hematíes, nucleados, etc.

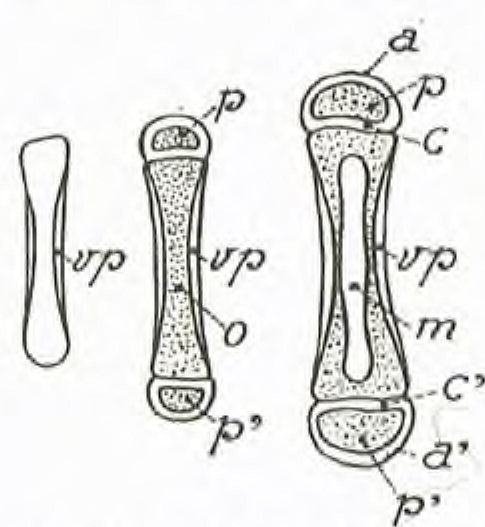
El cuerpo del hueso está formado por un tejido compacto, hecho de laminillas; el tejido de las epífisis es, por el contrario, esponjoso, y sus cavidades están rellenas de medula roja. La envoltura exterior del hueso, el periostio, es de naturaleza conjuntiva. Sobre las epífisis hay un cartílago menos duro, formado de *condrina* con un tres por ciento de sales calcáreas, que facilita los movimientos.

Tejido óseo. — En el corte transversal de un hueso pueden verse pequeños conductos, llamados *canales de Havers*, de cien a doscientas micras de diámetro, que en los huesos largos son paralelos y se comunican *(anastomosis)*. A estos canales llegan los nervios y vasos del periostio. A su alrededor están dispuestas concéntricamente laminillas que presentan manchas negras, que son en realidad diminutas cavidades llamadas *corpúsculos óseos*. En cada corpúsculo se encuentra una célula ósea u *osteoblasto*, que segrega la osteína y las sales calcáreas componentes del tejido óseo.



Corte (aumentado) de una laminilla ósea (*Fot. L. Poilpot*)

Es posible aislar la osteína dejando macerar un hueso, en frío, en ácido clorhídrico diluido. La osteína conserva la forma del hueso, pero éste se vuelve flexible mientras continúa húmedo. Las materias calcáreas se separan si se calcina el hueso al aire. La ceniza de hueso obtenida sirve para la fabricación de crisoles porosos. Si la calcinación se hace en vaso cerrado, se obtiene el producto llamado *negro animal*, de gran poder absorbente. Hirviendo la osteína se separa la gelatina o cola de hueso, que constituye la tercera parte de la composición ósea. Los otros dos tercios están compuestos de sales en la siguiente proporción: fosfato tribásico de calcio (80 %); carbonato de calcio (14 %); fluoruro de calcio, que aumenta con la edad (4 %); fosfato de magnesio (2 %). Esas mismas sustancias, en diferentes proporciones, se encuentran en el esmalte y marfil de los dientes.



DESARROLLO DE UN HUESO LARGO: *a*, *a'*, cartílagos articulares; *c*, *c'*, cartílagos de crecimiento; *m*, cavidad medular; *o*, punto de osificación diafisario; *p*, *p'*, puntos de osificación epifisarios; *vp*, periostio

El *periostio*, membrana conjuntiva, fibrosa y elástica, es muy importante porque posee una capa ostiógena capaz de formar tejido óseo mientras vive, lo que permite su utilización en el tratamiento de fracturas y en los injertos óseos. El periostio origina también el crecimiento del hueso en espesor, mediante el depósito de capas óseas sucesivas en la superficie, al mismo tiempo que las capas en contacto con la medula se absorben y la cavidad interior aumenta.

Desarrollo de los huesos. — Durante su formación, los huesos pasan por tres estados: *mucoso*, *cartilaginoso* y óseo propiamente dicho (salvo los huesos del cráneo, la mayor parte de los de la cara, las costillas y las clavículas).

El estado mucoso se caracteriza por el predominio de células conjuntivas provenientes del mesodermo; en el estado cartilaginoso, el hueso adquiere su forma como consecuencia de la formación de cartílagos y condrina. Finalmente, la osificación se produce a partir de diversos núcleos de osificación situados en la *epífisis* y la *diáfisis*. Entre éstas hay una zona que no se osifica definitivamente hasta que el crecimiento del hueso ha terminado.

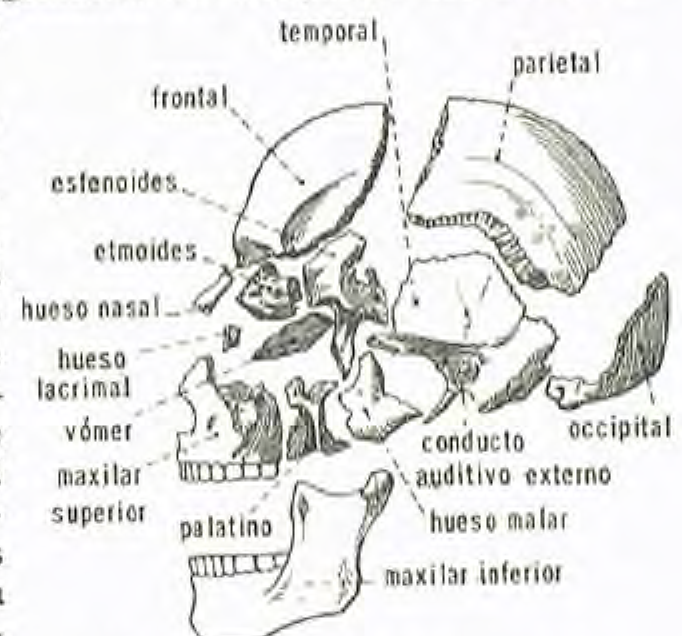
Los huesos del cuerpo humano

Los 211 huesos del hombre se reparten en las tres regiones que comprende el cuerpo: *cabeza*, *tronco* y *extremidades*.

Cabeza. — El esqueleto de la cabeza comprende los ocho huesos del cráneo y los catorce de la cara.

Los huesos del cráneo no están totalmente formados en el momento del nacimiento, y dejan al descubierto, transitoriamente, dos regiones llamadas *fontanelas*: la primera entre el frontal y los parietales, y la segunda entre los parietales y el occipital. Los huesos del cráneo, que presentan en su espesor cavidades denominadas *senos*, son: el *frontal*, formado por la soldadura de dos huesos; los dos *parietales*, muy espesos; el *occipital*, hueso de la nuca que forma un ángulo recto (su parte horizontal, que tiene dos dilataciones —los *cóndilos*—, se apoya sobre la vértebra atlas), y los dos *temporales*, con el *peñasco*. La base del cráneo está formada por el *esfenoides*, situado delante del occipital, y por el *etmoides*, que constituye el esqueleto de la nariz. Por ciertos orificios de la lámina del etmoides pasan los canales del nervio olfatorio.

Entre los catorce huesos de la cara mencionaremos los dos *maxilares* (el inferior es móvil gracias a un cóndilo); los dos *malares* o *pómulos*, que se articulan con la apófisis cigomática del temporal; los dos *palatinos* y los dos *cornetes* inferiores (nariz).



Piezas óseas del cráneo (desarticuladas)

Es sabido que, en los animales, el cráneo está tanto más desarrollado cuanto más alto grado alcanzan las facultades mentales; así, los primates poseen cráneo grande y pequeños maxilares. Para comparar los diferentes cráneos suele tomarse como base el ángulo facial, determinado por el cruce de dos líneas imaginarias: una casi vertical, que pasa por los incisivos superiores y por el punto más saliente de la frente y otra horizontal, que va desde el conducto auditivo hasta esos mismos dientes. La medida de este ángulo en diferentes especies arroja los siguientes resultados (Topinard): hombre blanco: 72°; chimpancé macho: 56°; macaco: 36,5°; elefante: 30,2°; perro: 24,3°; caballo: 24°.

El *hueso hioides*, que no está en contacto con ningún otro, comprende un cuerpo con dos pares de ramas llamadas *astas*. Está situado entre la base de la lengua y la laringe, y sirve de inserción a trece músculos distintos.

Tronco. — La columna vertebral, cuya longitud es de unos 70 centímetros, sostiene la caja torácica y el abdomen, formando, por así decir, el eje del cuerpo. Se extiende desde el agujero occipital hasta el cóccix, y está compuesta de 33 vértebras superpuestas, separadas por discos cartilaginosos elásticos, que permiten la flexión del cuerpo.

Cada vértebra está constituida por una parte anterior *(cuerpo de la vértebra)*, que lleva detrás dos apófisis llamadas *espinosas*. El conjunto articulado de las vértebras forma la espina dorsal o columna vertebral, que tiene a lo largo una cavidad *(agujero vertebral)* donde se aloja la medula espinal. El cuerpo vertebral tiene a los lados dos apófisis llamadas *transversas*, que presentan a su vez en la base otras dos apófisis que se articulan a las demás vértebras adyacentes.

Las 33 vértebras, que no tienen todas la estructura descrita, se reparten en cinco grupos:

1° Siete vértebras cervicales;

2° Doce dorsales, que se articulan con las costillas;

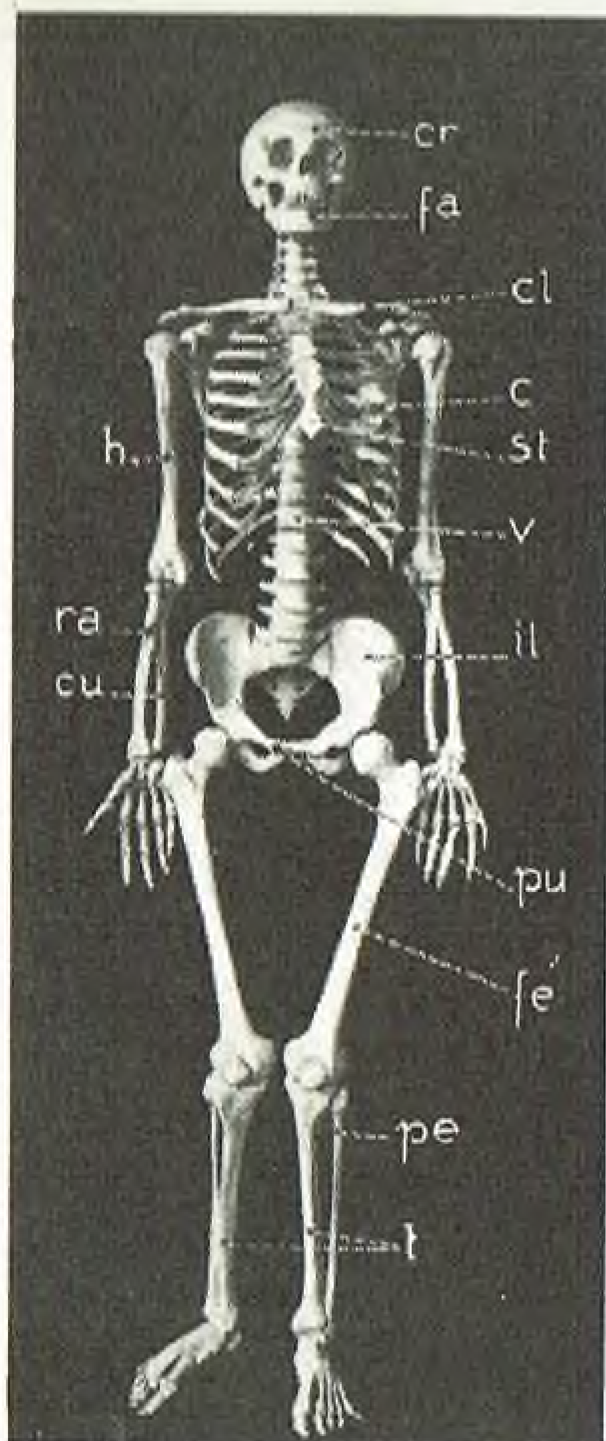
3° Cinco lumbares;

4° Cinco sacras, soldadas a un hueso, el sacro;

5° De cuatro a seis coccígeas, reducidas a su solo cuerpo, sin apófisis, que se sueldan entre sí y forman el *cóccix*.

La primera vértebral cervical, llamada *atlas*, es delgada, sin cuerpo y sin apófisis; la segunda, el *axis*, tiene la apófisis llamada *odontoides*, que pasa a través del agujero del atlas y permite su rotación cuando la cabeza se desplaza lateralmente. En las vértebras dorsales, las apó-

fisis transversas son largas, fuertes y limitan los movimientos de las costillas durante la inspiración. En el sacro se articulan los huesos de la cintura pelviana. La región coccígea es de longitud muy variable en los mamíferos, según la longitud de la cola.



ESQUELETO DEL HOMBRE: *cr*, cráneo; *ca*, cara; *cl*, clavícula; *c*, costillas; *est*, esternón; *v*, vértebra; *il*, hueso iliaco; *pu*, pubis; *fe*, fémur; *pe*, peroné; *t*, tibia; *h*, húmero; *ra*, radio; *cu*, cúbito

Las costillas, en número de doce pares, son arqueadas y se articulan hacia atrás en las vértebras por medio de una cabeza *(capitulum)* que se apoya en el cuerpo de la vértebra, y de un tubérculo que descansa sobre la apófisis transversa; la extremidad anterior de cada costilla está soldada al esternón.

Los siete pares de costillas verdaderas se unen al esternón por medio de un cartílago; los cartílagos de las tres siguientes, llamadas *costillas falsas*, se sueldan en uno solo, y los dos pares más inferiores, que no llegan al esternón, se conocen con el nombre de *costillas flotantes*.

El esternón, colocado en la parte anterior de la caja torácica, está formado por una serie de piezas cuyo número es variable según los mamíferos. Su parte superior *(manubrio)* es ancha cuando hay clavícula.

Extremidades. — Las *extremidades* o *miembros* son cuatro en todos los mamíferos, excepto en los cetáceos y los sirénidos, en los que falta el par posterior. Los dos pares están estructurados sobre el mismo plano y poseen partes homólogas.

La cintura del hombro, o escapular, está formada por dos huesos, el *omóplato* y la *clavícula* (el hueso coracoides se suelda al omóplato y constituye su apófisis coracoides). El omóplato tiene forma de triángulo y su base es paralela a la columna vertebral. Posee una arista llamada *espina del omóplato* y termina en el acromion que, con la apófisis coracoides, forma una cavidad incompleta, la *cavidad glenoidea*, en la que encaja la cabeza del húmero.

El segundo hueso es la clavícula, que tiene forma de *S* y se extiende del acromion al esternón. Existe solamente en aquellos animales que realizan movimientos complicados con las extremidades superiores. La parte móvil de este miembro se compone de *brazo*, *antebrazo*, *muñeca* y *mano*. El hueso del brazo es el *húmero*, cuya cabeza inferior forma una especie de polea en el codo: la *tróclea*.

El antebrazo está sostenido por dos huesos más largos que el húmero: el *cúbito*, situado en el lado interno y que termina en su parte superior en el olécranon, y el *radio*, en el lado externo, que permite a la mano sus movimientos de pronación y supinación. En la flexión del antebrazo, los dos huesos se desplazan juntos. El *carpo*, en la muñeca, está formado por ocho pequeños huesos dispuestos en dos hileras.

La mano está constituida por la *palma* y los *dedos*. La palma tiene como esqueleto cinco huesecillos largos, los *metacarpianos*; los dedos están formados por huesecillos llamados *falanges*; cuatro dedos tienen tres falanges, el pulgar sólo dos. La última falange lleva en los mamíferos la *uña* o *garra*. Músculos especiales permiten al pulgar oponerse a los otros cuatro dedos.

La cintura inferior o pelviana es la *cadera*, cuyo esqueleto está formado por el *hueso iliaco*, compuesto a su vez por tres piezas que se sueldan: *ilión*, *isquión* y *pubis*. Estos huesos iliacos se unen al sacro. Los dos pubis se sueldan por delante y constituyen la *sínfisis pubiana*. En la unión de estos tres huesos, el iliaco posee la *cavidad cotiloidea*, en la cual encaja la cabeza superior del fémur.

La parte móvil del miembro inferior comprende el *muslo*, la *pierna* y el *pie*.

Dentro del muslo se encuentra el *fémur* cuya parte superior, en ángulo recto, forma el cuello y la cabeza del hueso; ésta entra en la cavidad cotiloidea. El fémur posee, en el lado externo, una gruesa apófisis llamada *trocánter mayor*, y del lado interno el *trocánter menor*. La extremidad inferior del fémur tiene dos grandes cóndilos que se articulan con la *tibia* y la *rótula*, y forman la *rodilla*.

La tibia continúa en la pierna la dirección del fémur; su extremidad inferior lleva un ensanchamiento lateral: el *maléolo interno*. El *peroné*, mucho más delgado, no llega hasta el fémur; en su parte inferior se prolonga para formar el *maléolo externo*. En el tobillo, la tibia y los dos maléolos constituyen una verdadera polea en la que se articula un hueso del tarso, el *astrágalo*, de modo que el pie no puede ejecutar más que movimientos de flexión hacia adelante y atrás.

El pie está formado por el *tarso*, compuesto de siete huesos colocados más o menos en dos hileras; el *calcáneo* forma el talón. Comprende, además, el pie cinco metatarsianos, alargados y bastante próximos entre sí; cada dedo tiene tres falanges, excepto el pulgar, que cuenta sólo dos y que no es oponible en el pie del hombre, pero sí en los monos.

El antebrazo se flexiona hacia adelante sobre el brazo, y la pierna hacia atrás, sobre el muslo; estas dos flexiones son de 180°.

Articulaciones

Se llama *articulaciones* a las formas de unión de los huesos entre sí. Son articulaciones inmóviles *(suturas)* aquellas cuya fijeza se obtiene por medio de un encaje dentado, sin ninguna interposición (huesos del cráneo).

Se denominan *sínfisis*, o articulaciones semimóviles, cuando los huesos están separados por un disco cartilaginoso compacto que permite un ligero desplazamiento (vértebras, huesos del pubis). Las articulaciones móviles, dobles o diartrosis, como las de la cadera, codo y rodilla, son más complicadas. En ellas, las dos epífisis en contacto están cubiertas por un cartílago y protegidas por una cápsula fibrosa.

Sistema muscular

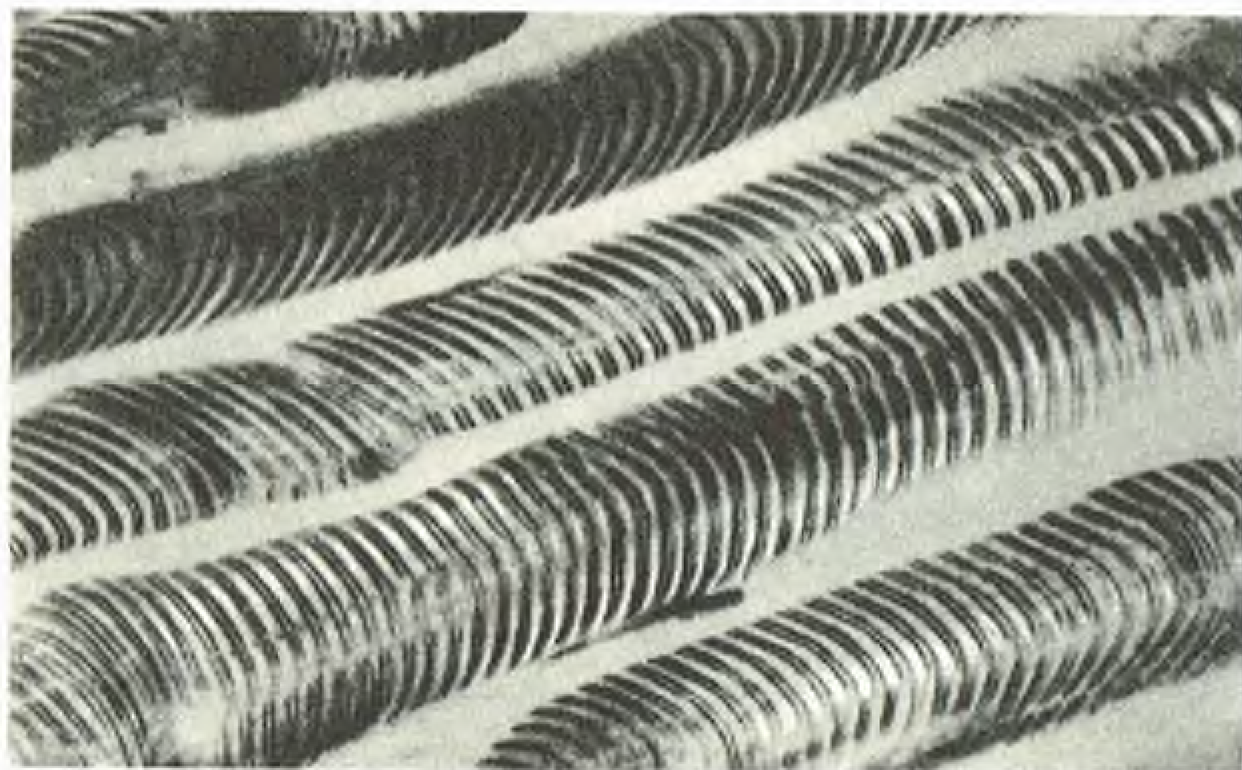
Los *músculos* son, por su contractilidad, los órganos activos del movimiento. Hay músculos lisos, pálidos, de contracción lenta e involuntaria, y músculos rojos, estriados, de contracción brusca y voluntaria. Los primeros están formados por fibras musculares lisas, alargadas (de 60 a 200 micras), adelgazadas en los extremos: son los músculos propios de la vida vegetativa.

Los músculos estriados son en general *fusiformes* y están fijados por sus extremos a los huesos mediante un tendón elástico muy resistente; esta clase de tendones tiene forma de abanico. Las láminas elásticas, que aseguran su adherencia al hueso, se llaman *aponeurosis de inserción*. Los músculos, circulares u orbiculares alrededor de los párpados y de la boca, tienen forma de anillo cuando cierran algunos orificios *(esfínteres)*.

Las fibras que constituyen los músculos estriados provienen del mesodermo y tienen tres o cuatro centímetros de longitud.

Entre los numerosos músculos del cuerpo humano citaremos:

En la *cabeza:* el frontal, los dos orbiculares, los dos maseteros; en el *tronco:* el pectoral mayor, el trapecio, el gran dorsal, los intercostales, el diafragma; en los *miembros superiores:* el bíceps, el tríceps braquial, los extensores y los flexores de los dedos; en los *miembros inferiores:* los tres glúteos, el bíceps crural y su antagónico, el tríceps



Corte transversal de un músculo estriado (*Microfot. L. Poilnot*)

crural, el sartorio, los dos gemelos (pantorrilla), que se insertan en el calcáneo mediante el tendón de Aquiles, y los músculos de las falanges. En total se cuentan 60 músculos en la cabeza, 190 en el tronco y 200 en los cuatro miembros.

Las propiedades de los músculos son: elasticidad, poder electromotor y contractilidad.

Elasticidad. — El músculo es elástico, es decir, se alarga bajo la influencia de una tracción; de todos modos, su alargamiento no es proporcional a la fuerza tensora.

Poder electromotor. — En el músculo se originan débiles corrientes que provienen de su energía química, que se transforma en energía eléctrica.

Contractilidad. — La *contractilidad* es la propiedad que posee el músculo de acortarse bajo la influencia de la voluntad o de una excitación artificial: golpe, ácido, electricidad, etc. Durante la contracción, atributo del tejido muscular, el volumen del músculo no cambia, como se demuestra excitando eléctricamente un músculo de rana colocado en un recipiente lleno de agua: el nivel del líquido no varía.

Análisis de una contracción. — El miograma gráfico de una contracción muscular muestra que ésta no comienza hasta después de que se ha interrumpido la corriente eléctrica que la produjo; hay, pues, un corto período de excitación latente, de una duración de un sesentaavo de segundo, seguido por un intervalo de energía creciente, y luego por otro de energía decreciente. Cuando las excitaciones se si-

guen, el músculo se fatiga; el diagrama muestra que la curva se eleva menos y que la recuperación del estado inicial del músculo es más lenta. Cuando las excitaciones se repiten en número de treinta por segundo, la curva del monograma es ondulada: es el caso del tétanos fisiológico o de los calambres del tétanos natural.

Las corrientes industriales de alta tensión, continuas o alternas, tienen sobre los músculos un efecto fulminante *(electrocución)*.

Mecanismo de los movimientos. — Los huesos son los órganos pasivos de los movimientos; los músculos estriados, unidos a los primeros por los tendones, son los órganos activos. Los huesos son barras rígidas que actúan como palancas: presentan siempre un punto de apoyo, una resistencia y un punto de aplicación de una fuerza. Todas las articulaciones pertenecen a una u otra de las tres clases de palancas definidas por la mecánica.

El centro de gravedad del cuerpo humano se encuentra situado en medio de la última vértebra lumbar; para mantener su equilibrio en pie es necesario que la vertical de ese centro de gravedad permanezca dentro del polígono de sustentación limitado por los dos pies.

Nutrición de los músculos. — Los músculos utilizan en primer lugar los sacáridos, lo que explica la rápida acción del azúcar sobre los deportistas y las personas fatigadas. Oxidan luego los alimentos grasos, pero sólo cuando las reservas de azúcar comienzan a disminuir. Durante el reposo, el glucógeno se acumula en el músculo, pero es consumido, oxidado en las contracciones, formándose ácido carbónico, ácido láctico y vapor de agua.

El calor muscular es consecuencia de fenómenos químicos: el músculo se calienta y su energía se transforma en trabajo. La nutrición de un músculo depende del sistema nervioso; cuando se secciona su nervio propio, el músculo se atrofia.

En todos los animales se establece con la muerte, en los músculos, un estado de dureza especial que se denomina *rigidez cadavérica*. Interviene generalmente, en los mamíferos, cuatro horas después de la muerte. Pero puede surgir inmediatamente en los animales agotados o muy cansados. Esta rigidez, que se produce mucho antes que el enfriamiento completo del cuerpo, es debida a la coagulación de la miosina por el ácido láctico. La rigidez desaparece cuando la putrefacción comienza y el medio se hace alcalino.

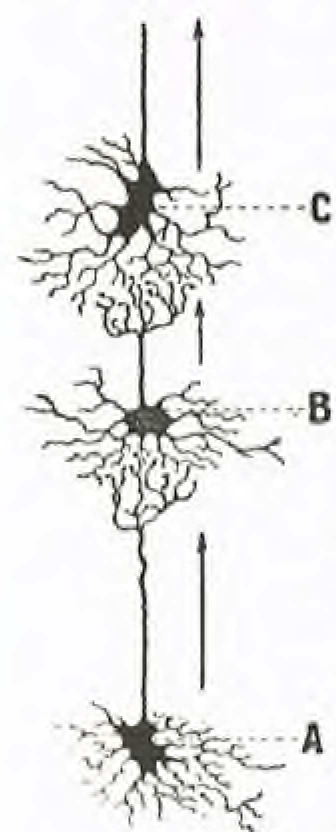
Sistema nervioso

El *sistema nervioso* consta de dos subsistemas: el *central* y el *periférico* (centros y nervios). Los centros, que se originan a expensas del ectodermo del embrión, se hallan en la columna vertebral y en el cráneo; los nervios que salen de ellos los ponen en comunicación con todos los órganos periféricos.

El elemento fundamental del sistema nervioso es la *neurona*, unidad que comprende una célula y una fibra. Las células, unipolares, bipolares o multipolares con dendritas, entran en la constitución de los centros, y las fibras, con mielina o sin ella, forman los nervios.

Los centros aparecen ya en el embrión. El sistema nervioso primitivo es un tubo dilatado en el que aparecen primero tres vesículas (luego cinco), de donde se derivarán todas las partes constitutivas de los centros del adulto.

La *medula espinal*, que proviene de la parte posterior del tubo neural, tiene la forma de un cordón de alrededor de cincuenta centímetros, dilatado al nivel de los brazos y de la región lumbar, y marcado por dos surcos, uno posterior profundo y el otro anterior menos excavado. La medula, como el cerebelo, está rodeada por las tres membranas llamadas meninges: *duramadre, aracnoides* y *piamadre*.



ASOCIACIÓN NEURONAL: A. Primera neurona; B. Neurona intermediaria; C. Segunda neurona. Las transmisiones se hacen a través de las dendritas

De la medula parten dos raíces nerviosas que forman los nervios raquídeos; éstas unen la medula a los músculos periféricos. La raíz posterior posee una dilatación llamada *ganglio espinal* (Magendie demostró que su función es la de conducir a los centros el influjo nervioso periférico, o sea el sensitivo). La raíz anterior conduce las excitaciones de los centros a los músculos *(influjo motriz)*.

La medula es el centro nervioso de los movimientos reflejos inconscientes, es decir, realizados sin intervención de la voluntad (movimientos de la vida vegetativa como los de la digestión, respiración, circulación, secreciones glandulares).

Hay 31 pares de nervios raquídeos:

Los ocho primeros *(cervicales)* constituyen el nervio frénico, que mueve el diafragma, y los nervios braquiales *(brazos)*;

Los doce pares siguientes *(dorsales)* llevan el influjo nervioso a los espacios intercostales;

Los cinco posteriores *(lumbares)* llegan hasta los riñones y el muslo;

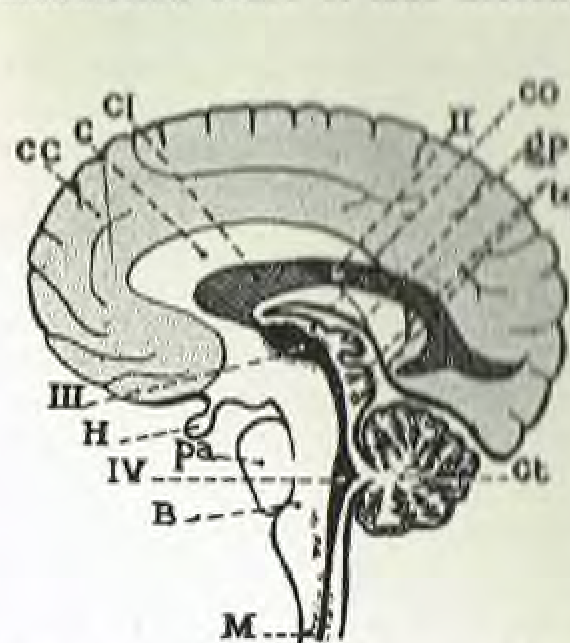
Los seis últimos (cinco *sacros* y un *coccígeo)* forman los nervios ciáticos y los glúteos.

Todos estos nervios se comunican con los nervios del simpático a través de un nervio corto llamado *ramo comunicante*.

La porción anterior del tubo neutral se flexiona al nivel de la cuarta y quinta vesícula, sobre el bulbo; las cinco vesículas se engrosan y diferencian para formar todo el encéfalo y los ventrículos.

Descripción del encéfalo

Bulbo raquídeo. — El *bulbo*, llamado también *medula oblongada* porque está formado por los mismos cordones de la medula, pero separados y dispuestos diferentemente (entrecruzados), pesa diez gramos y tiene tres centímetros en su parte más ancha. Está cubierto por el cerebelo y se ensancha para formar el cuarto ventrículo. El entrecruzamiento de los cordones en forma de aspa nos permite explicar por qué, por ejemplo, las lesiones del hemisferio cerebral izquierdo se manifiestan sobre el lado derecho del cuerpo.



LOS VENTRÍCULOS (II, III, IV) Y EL CONDUCTO AXIAL: B. Bulbo; C. Cuerpo calloso; CC. Circunvolución entre los dos hemisferios; Cl. *Septum lucidum*; CO. Tálamo óptico; *Ct*. Cerebelo; *gp*. Glándula pineal; H. Hipófisis; M. Médula espinal; *pa*. protuberencia anular; *tq*. tubérculos cuadrigéminos

La *sustancia gris* forma sobre el suelo del cuarto ventrículo diversos cúmulos o núcleos que deciden de todos los reflejos inconscientes.

El primero de estos cúmulos fue descubierto, cerca de la base del cuarto ventrículo, por el ilustre Flourens, que lo llamó *nudo vital* (había observado que incluso la más leve lesión de ese centro provoca el cese de la respiración y por tanto la muerte instantánea). En el nudo vital nacen los dos *nervios neumogástricos*, que rigen el funcionamiento de los aparatos digestivo, respiratorio y circulatorio.

Se encuentra también en el bulbo un centro albuminúrico, otro glucosúrico, otro poliúrico, otro salival, etcétera.

Cerebelo. — El *cerebelo*, que pesa 140 gramos, comunica con la región anterior del encéfalo mediante los pedúnculos cerebelosos anteriores, y con el bulbo por los pedúnculos cerebelosos posteriores. Está formado por tres partes, dos lóbulos laterales y una parte media o *vermis*. El centro está constituido por substancia blanca, que presenta arborizaciones *(árbol de la vida)*, y substancia gris (en la periferia). El cerebelo es el centro de coordinación de los movimientos destinados a mantener el equilibrio del cuerpo, y gobierna la tonicidad de los músculos.

Los tubérculos cuadrigéminos, situados delante del bulbo, están vinculados a la visión; la extirpación de los cuatro tubérculos produce la ceguera total; la extirpación de dos del mismo lado destruye sólo la visión de una mitad de cada ojo, debido al entrecruzamiento parcial de las fibras en el quiasma.

La función de la epífisis o *glándula* pineal, colocada delante de los tubérculos cuadrigéminos, es poco conocida; Descartes la consideraba el asiento del alma; se pensó después que era el resto de un ojo frontal o tercer ojo, cuya existencia se supuso durante mucho tiempo en los vertebrados primitivos.

Los tálamos ópticos, vinculados entre sí mediante una pequeña banda transversal gris, limitan el tercer ventrículo por sus lados; cada uno de ellos encierra cuatro núcleos de sustancia gris: el centro auditivo, el centro de la sensibilidad general, el centro óptico y el centro olfatorio. Las impresiones llegadas de la periferia *(sensoriales)* se dirigen a estos centros para sufrir allí una reelaboración, un reforzamiento, antes de llegar a la corteza gris, donde son percibidas.

Los cuerpos estriados, ubicados delante de los tálamos ópticos, desempeñan con respecto a las excitaciones motoras o centrífugas el mismo papel que los tálamos ópticos con relación a las impresiones centrípetas o sensoriales.

Si los centros de substancia gris son destruidos por un tumor, el sujeto deja de percibir las impresiones sensoriales. La destrucción de los cuerpos estriados determina la parálisis total de todos los músculos; la destrucción de un solo cuerpo estriado lleva consigo la parálisis de los músculos del lado opuesto a la lesión *(hemiplejía)*.

Hemisferios cerebrales. — Los dos *hemisferios cerebrales* forman la masa más voluminosa del encéfalo, llamada corrientemente **cerebro.** Cubren el cerebelo y se extienden hasta el hueso frontal. Están separados por un surco anteroposterior, llamado *cisura mediana* o *interhemisférica*, limitada en su fondo por el cuerpo calloso.

Cada hemisferio está surcado por una cavidad irregular llamada *ventrículo lateral*, que comunica con el tercer ventrículo por los *agujeros de Monro*.

Las tres meninges *(duramadre, piamadre* y *aracnoides)* cubren toda la superficie de los hemisferios, y forman un repliegue, llamado *hoz del cerebro*, que desciende a la cisura mediana. Debajo de las meninges, la superficie de los hemisferios presenta trece repliegues contorneados llamados *circunvoluciones*. Los tres primeros delimitan en cada hemisferio cuatro regiones que forman los lóbulos del cerebro. Éstos son:

1° El *lóbulo frontal*, que forma la región anterior del hemisferio (llega hasta la *cisura de Rolando)*. Su superficie está dividida por medio de surcos, en cuatro circunvoluciones: F_1, F_2, F_3, F_4;

2° El *lóbulo parietal*, limitado delante por la cisura de Rolando, y por el lóbulo occipital detrás, presenta tres circunvoluciones;

3° El *lóbulo temporal*, que está al nivel del hueso temporal y por debajo de la *cisura de Silvio*, presenta tres circunvoluciones paralelas;

4° El *lóbulo occipital*, con sus tres circunvoluciones, ocupa la parte posterior y cubre el cerebelo.

Estructura de los hemisferios. — Están éstos formados por una capa superficial de substancia gris, llamada *corteza cerebral*, y una masa central gruesa de substancia blanca.

La corteza está compuesta de neuronas, de forma variable, y de pequeñas y grandes células piramidales. Se admite que las primeras constituyen el centro de la sensibilidad, en tanto que las segundas elaboran, al parecer, las incitaciones motoras. Sus dendritas forman la delgada capa superficial de la corteza.

Los nervios craneales son doce: tres son sensitivos, cinco motores y cuatro mixtos. Los dos primeros pares se desprenden del cerebro propiamente dicho, los diez restantes del tronco cerebral. Éstos son:

(I) El *nervio olfativo*, nervio del olfato, que parte del bulbo olfatorio (sensitivo);

(II) El *óptico*, nervio de la visión, formado por dos cordones que se entrecruzan (sensitivo);

(III) El *motor ocular común*, que inerva cuatro músculos del ojo (motor);

(IV) El *patético*, que inerva el músculo oblicuo mayor del ojo (motor);

(V) El *trigémino*, responsable de la sensibilidad general de la cara, fosas nasales, boca, y que inerva también los músculos masticadores (mixto);

(VI) El *motor ocular externo*, que inerva el músculo recto externo del ojo (motor);

(VII) El *facial*, que inerva los músculos de la cara y el cráneo (párpados, labios, etc.) y rige la sensación del gusto (mixto);

(VIII) El *auditivo*, nervio de la audición, y también de la sensibilidad a la gravedad y a la aceleración (sensitivo);

(IX) El *glosofaringeo*, que contribuye a la inervación de los músculos de la faringe y de la lengua y a la sensibilidad gustativa (mixto);

(X) El *neumogástrico*, que inerva tres grandes aparatos: respiratorio, circulatorio y digestivo, y es también sensitivo (mixto);

(XI) El *espinal*, que inerva los músculos del cuello y participa en la respiración y la fonación (motor);

(XII) El *hipogloso mayor*, que inerva los músculos de la lengua (motor).

Funciones de los hemisferios cerebrales. — Los hemisferios cerebrales son las partes fundamentales del sistema nervioso; pesan alrededor de 1 200 gramos (el peso total del encéfalo es apenas de 1 390). Experiencias y observaciones realizadas sobre diferentes vertebrados han demostrado que en la substancia gris residen la sensibilidad, la motricidad, la inteligencia y la memoria, que desaparecen cuando falta dicha substancia.

Percepción. — Las excitaciones periféricas llegan a través de los nervios sensitivos hasta los tálamos ópticos, donde impresionan el centro gris correspondiente: olfatorio, óptico, etc. El influjo nervioso sufre allí modificaciones y se dirige luego, por las fibras radiadas, a pequeñas células piramidales situadas en un área especial de la corteza cerebral. Este influjo se transforma entonces en sensación mediante un mecanismo íntimo que no conocemos y que depende de la propia energía de la célula.

Ciertas ideas abstractas parecen formarse espontáneamente en el cerebro; se trata probablemente de la reaparición de sensaciones antiguas conservadas.

Motricidad. — A través de las dendritas de las células, este movimiento se dirige a las grandes células motoras, donde interviene una primera elaboración y transformación, convertida a su vez en movimiento centrifugo hacia los cuerpos estriados, que se dirige luego a los músculos por intermedio de las raíces motoras de los nervios raquídeos del lado opuesto.

Localizaciones cerebrales. — Centros sensoriales. — Las facultades intelectuales no están repartidas uniformemente en la superficie de los hemisferios. A fines del siglo XVIII, Gall tuvo la idea de investigar los puntos especiales de localización de las distintas facultades. Gall admitía que las protuberancias del cráneo debían ser producidas por el desarrollo más o menos grande de las circunvoluciones de los hemisferios y dividió así la superficie del cráneo en compartimientos correspondientes a las diversas facultades. Ese sistema fue desechado más tarde. Flourens, en 1840, inició un nuevo camino: mostró que la extirpación de los dos hemisferios de una paloma aniquilan su sensibilidad, voluntad, inteligencia y memoria; el animal sigue una luz, mas sin verla. Pero los reflejos digestivos, circulatorios y respiratorios, que son coordinados por el bulbo, se mantienen, y el animal puede deglutir el grano que se coloca en su boca.

Una observación realizada por Broca en 1841 marcó el punto de partida de todos los conocimientos positivos existentes sobre localizaciones cerebrales: Broca pudo hacer la autopsia de una mujer afásica, es decir, que había perdido la memoria de los movimientos necesarios para la articulación de la palabra *(memoria motriz verbal)*, y observó en su cerebro un reblandecimiento de la tercera circunvolución frontal izquierda.

El centro de la memoria auditiva de las palabras o sordera verbal está situado en la primera circunvolución temporal izquierda: las personas que tienen afectado ese centro oyen los sonidos, pero son incapaces de comprender su sentido.

La memoria visual de las palabras se asienta en la circunvolución parietal inferior; las personas afectadas de ceguera verbal ven las palabras escritas, pero no las comprenden.

La localización de la memoria de los movimientos de la escritura no se conoce con exactitud. Cuando esa memoria se pierde dejan de recordarse los movimientos necesarios para trazar las letras *(agrafia)*.

Localizaciones motoras. — Se ha podido demostrar que, excitando ciertos puntos de la corteza de diversos cerebros de monos, se obtenía siempre el mismo movimiento. Así ha sido posible localizar el centro de los movimientos de la cara y la lengua en la tercera circunvolución frontal; el de los brazos y las piernas en la frontal ascendente, etc.

La anatomía comparada muestra que el desarrollo de los hemisferios está en relación con la inteligencia; sin embargo, en el hombre, el aumento de peso no es proporcional al de su estatura, sino más débil; por el contrario, la masa encefálica es proporcional a la circunferencia de la cabeza. En los europeos, el peso del encéfalo llega a 1 390 gramos (1 250 en las mujeres).

Ciertos genios excepcionales han tenido encéfalos cuyo peso sobrepasaba la media: así, Byron tenía un encéfalo de 2 238 gramos; Cromwell, de 2 235; Cuvier, de 1 836.

No obstante, para una apreciación más exacta del grado de inteligencia cerebral hay que tener en cuenta la calidad de las células, la circulación sanguínea, la gimnasia funcional (es decir, la capacidad de esfuerzo de la substancia cerebral) y la edad: la eficacia máxima se alcanza, en el hombre, de los treinta a los cuarenta años.

La disminución, incluso leve, de la circulación de sangre en los capilares de los hemisferios cerebrales da lugar a los desfallecimientos, síncopes y vértigos. Durante la actividad cerebral se activa la circulación y la temperatura aumenta 1/20 de grado. Por otra parte, es necesario que los detritus azoados se eliminen rápidamente. Así, cuando el sistema nervioso permanece en vigilia durante mucho tiempo, puede sobrevenir la fatiga: el cerebro reposa mediante una circulación más lenta. Las dendritas de las células se acortan, y al perder su contacto con las otras células se produce una suspensión de la actividad nerviosa, lo que conduce al descanso reparador de las funciones de relación (cerebro, músculos, órganos de los sentidos).

Se admite que durante el sueño existe una anemia del cerebro; el niño debe dormir largo tiempo, alrededor de catorce horas, entre los tres y los seis años. La duración del sueño es, generalmente, muy restringida en los hombres de gran actividad cerebral. Así Humboldt, Mirabeau, Schiller, se contentaban con dos o tres horas de sueño; Kant y Balzac, con cuatro horas.

Sistema nervioso simpático

Se comprende bajo este nombre el conjunto de nervios que, independientes de la voluntad, regulan o aceleran mediante reflejos inconscientes todos los movimientos o secreciones necesarios a la vida vegetativa. Bajo el nombre de *parasimpático* se agrupa el sistema de nervios que moderan el funcionamiento de esos mismos órganos de la vida vegetativa:

1º Los dos *nervios neumogástricos*, que se dirigen al estómago, a los pulmones y al corazón;

2º La *cuerda del tímpano*, rama del nervio facial que termina en las glándulas salivales;

3º Las *terminaciones de la medula espinal*, que llegan al recto y a la vejiga.

El *simpático* propiamente dicho se compone de dos filetes longitudinales que se extienden a lo largo de la columna vertebral, a derecha y a izquierda, y atraviesan veintitrés pares de pequeños ganglios relacionados con la medula espinal. Esos ganglios emiten terminaciones que llegan a las vísceras, formadas en su mayoría por fibras sin mielina:

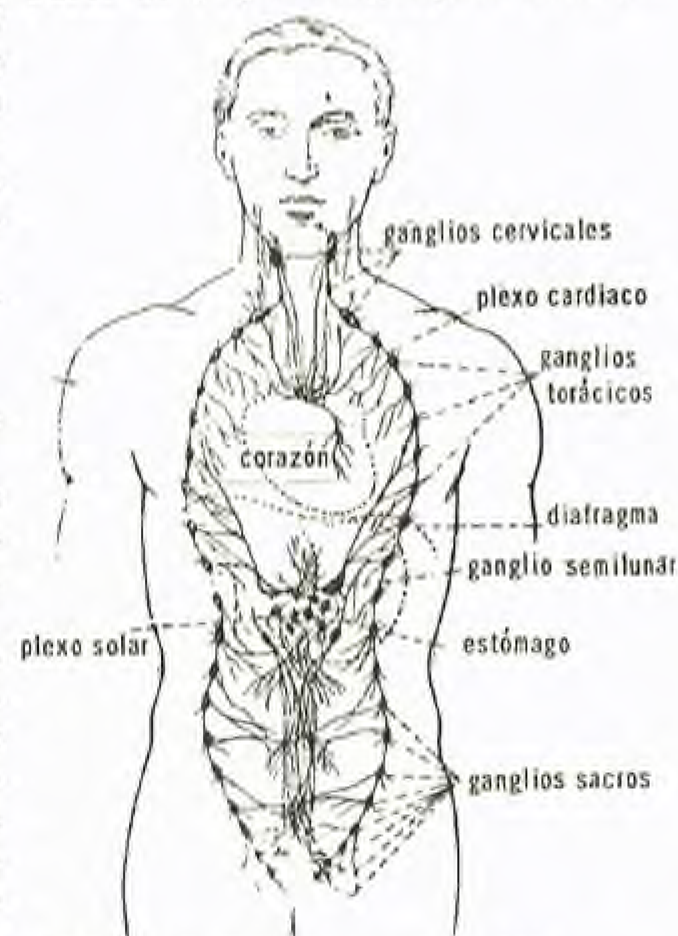
Tres pares se dirigen a los ganglios nerviosos aceleradores intracardiacos;

Doce pares, a los plexos semilunar y solar;

Cuatro al plexo mesentérico;

Cuatro al plexo iliaco, que regula la vejiga.

Esos nervios se llaman *nervios vagos* porque conducen al cerebro impresiones poco netas y mal localizadas.



Sistema nervioso simpático

Los nervios motores de los pequeños vasos y capilares están involucrados en ese sistema. Bajo la impresión de frío, la sangre afluye a la superficie del cuerpo en menor cantidad, puesto que los vasos se contraen; bajo la influencia del calor, los vasos se dilatan y la cantidad de sangre aumenta. Los vasomotores, nervios de doble acción, pueden producir constricción o dilatación según la necesidad funcional. Gracias, precisamente, al antagonismo de estas dos fuerzas los pequeños vasos conservan su diámetro normal.

El corazón está también sometido a la doble acción de nervios moderadores y de nervios aceleradores. Los dos neumogástricos se comunican a través de una terminación con el *ganglio de Luwig*, situado en el tabique interauricular, para moderar los latidos, en tanto que diez ramales simpáticos se dirigen a otros dos ganglios y tienden a acelerar los movimientos del corazón. De este antagonismo resulta el ritmo normal del corazón (si se seccionan los dos neumogástricos, el número de latidos aumenta rápidamente y se duplica).

Órganos de los sentidos

Los órganos que nos ponen en relación con el mundo exterior y nos permiten determinar sus propiedades son: el órgano del *tacto*, que es la piel; el del *gusto*, o sea la lengua; el del *olfato*, la nariz; el del *oído* (audición), la oreja; y el de la *vista* (visión), el ojo.

La piel y el tacto. — La piel tiene tres funciones principales:

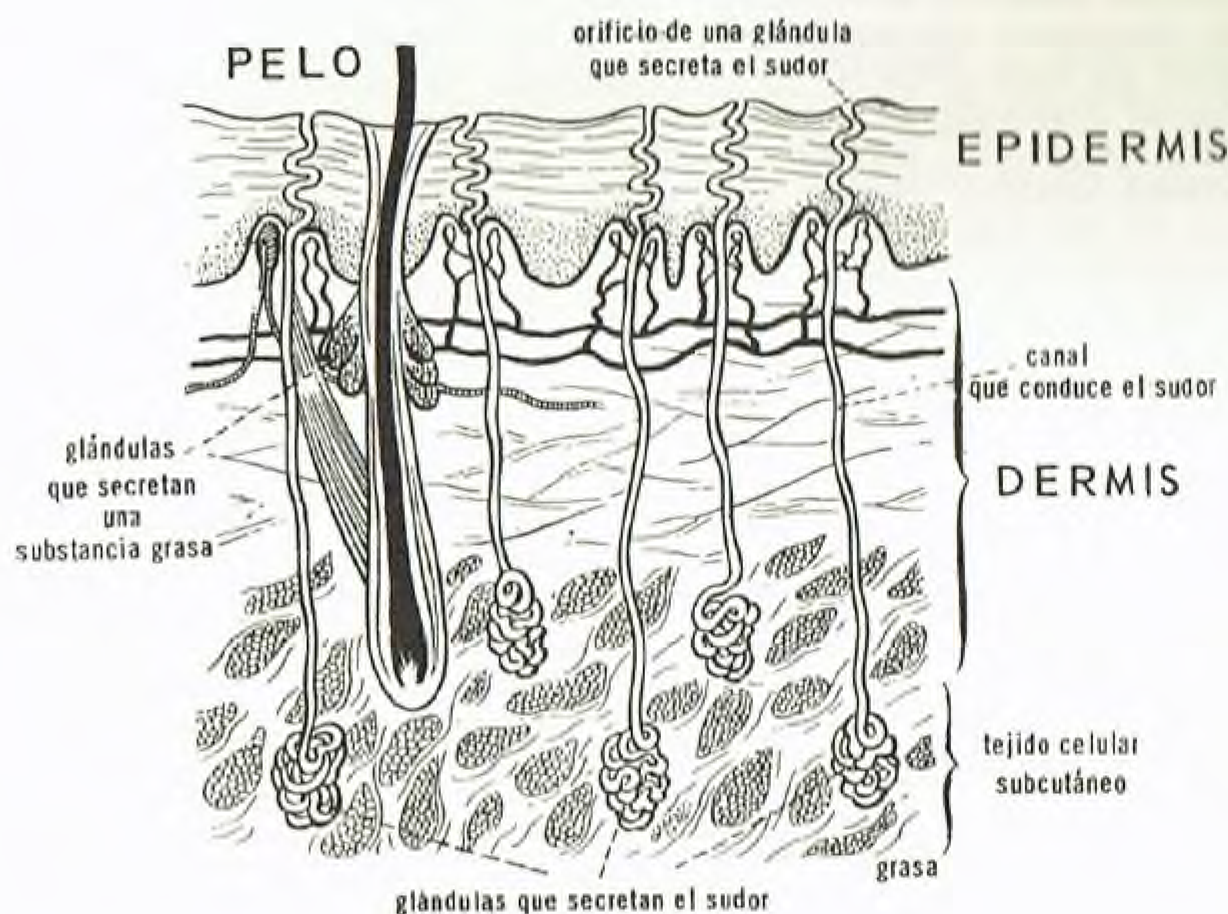
1ª Es la membrana que limita el cuerpo y protege todos los órganos subyacentes;

2ª Mediante sus glándulas sudoríparas cumple una función excretora;

3ª Es principalmente un órgano sensorial.

Estructura de la piel. — Está constituida por la epidermis y la dermis.

La *epidermis* está formada por dos capas: el estrato profundo *(cuerpo mucoso de Mapighi)*, que se halla en contacto con la dermis, es la capa viva, generadora de células en su cara externa. Las células se aplanan y mueren al impregnarse de una substancia córnea llamada *queratina*, y se desprenden en forma de *películas* o *escamas epidérmicas*.



Estructura de la piel

La *dermis* presenta en su superficie papilas moldeadas por la epidermis. Está constituida por tejido conjuntivo, vasos, músculos y nervios. La capa más profunda, o *hipodermis*, es conjuntiva y contiene las raíces de los pelos, las glándulas sudoríparas y las células grasas *(panículo adiposo)*.

Primera función: La epidermis protege el cuerpo; produce los pelos, el vello.

Segunda función: Los dos o tres millones de glándulas sudoríparas (500 por cm²) desembocan al exterior por los poros; su extremidad inferior se arrolla sobre sí misma y segrega el sudor, que tiene una composición semejante a la de la orina.

Tercera función: En las papilas dérmicas se encuentran los *corpúsculos de Meissner*, formados por una cápsula delgada de láminas concéntricas; en el panículo adiposo subcutáneo están, en la parte superior, los *corpúsculos de Ruffini*, de forma alargada (2 mm), compuestos de una fina cápsula y un huso de fibras conjuntivas; los *corpúsculos de Pacini* o *de Vater*, cuya longitud es de uno a cinco milímetros y tienen una cubierta gruesa que encierra una masa central granulosa con numerosos núcleos, y, por último, los *corpúsculos de Golgi-Mazzoni*, semejantes a los precedentes, pero mucho más pequeños.

La influencia de estos corpúsculos es muy compleja: los corpúsculos de Meissner son, al parecer, los de la sensibilidad en los *contactos suaves*, mientras que los de Vater-Pacini son los de las *presiones más fuertes*. La agudeza de la sensibilidad térmica varía según las regiones; parece también ser cierto que los receptores de la *sensibilidad al frío* son los corpúsculos de Golgi-Mazzoni, pero se poseen pocas referencias en lo concerniente a la recepción de las *excitaciones calóricas*. Señalemos también que existen *puntos de dolor* cuya excitación no produce ninguna sensación táctil o térmica.

La lengua. — La *lengua*, residencia del sentido del gusto, es un órgano muscular estriado rodeado por una mucosa en la que se encuentran papilas filiformes, coroliformes o hemisféricas, fungiformes y caliciformes que encierran terminaciones nerviosas especiales aptas para el gusto y el tacto.

La masa muscular de la lengua está formada por 17 músculos: el más voluminoso es el *geniogloso*, cuya acción principal consiste en descender la lengua hasta el suelo de la boca; el *hipogloso* hace bajar la lengua; el *transverso* la estrecha y la alarga; por último, el *lingual* el *faringoloso* y el *palatogloso* la retraen hacia atrás; el *amigdaloso* la levanta en su base; el *lingual inferior* baja y retrae la punta de la lengua y la retira hacia atrás; el *estilogloso* la levanta hacia atrás; *superior*, único músculo impar, la acorta y la baja.

Las papilas filiformes y coroliformes son táctiles; las gustativas, que son las fungiformes y caliciformes, están localizadas en la *V* lingual.



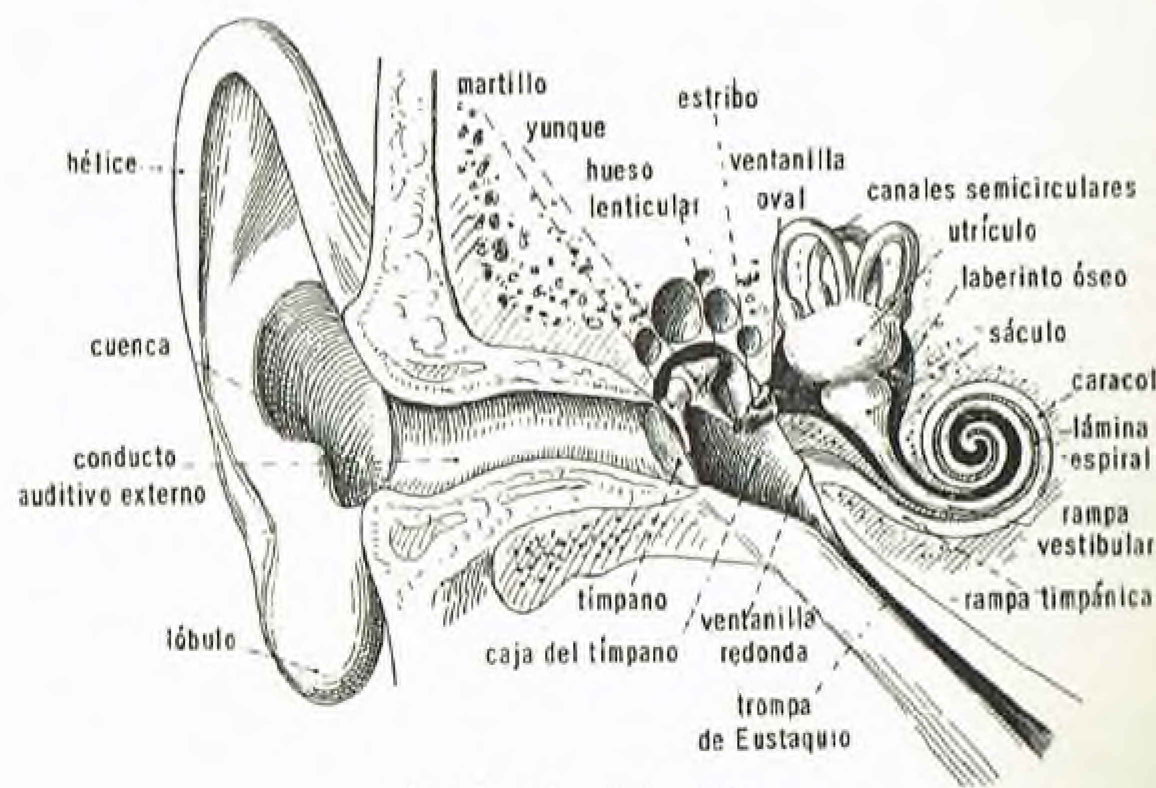
Papila gustativa (lengua de vaca) [*Microfot. C. Bille*]

Estas papilas, excitadas por las sustancias disueltas en la saliva, nos informan sobre su sabor.

La nariz. — Las dos *fosas nasales* reciben las impresiones olfativas. Están separadas por la lámina perpendicular del *etmoides*, el *vómer*, y se abren en la faringe; comunican además con el oído medio por la trompa de Eustaquio. La pared superior de la fosa nasal está formada por la lámina cribosa del etmoides; sus lados constituyen los *cornetes* superiores e inferiores. La cavidad está cubierta en su totalidad por la *mucosa pituitaria*, que contiene células nerviosas sensibles. La parte superior de la mucosa, amarillenta, es muy sensible; su parte inferior, rojiza, es muy rica en vasos sanguíneos cuya función es la de calentar y humedecer el aire de la inspiración.

Para excitar las terminaciones nerviosas es necesario que las partículas odoríferas se hallen en suspensión en la corriente de aire inspirado, y también que no haya mucosidades que cubran los bastoncillos terminales de las células olfativas.

El oído. — En el hombre está formado por: 1º el *oído externo*, que comprende el pabellón y el conducto externo; 2º el *oído medio*, llamado *caja del tímpano*, formado por la base externa *(tímpano)* y por la base interna, unidas por una cadena de tres huesecillos *(martillo, yunque y estribo)*. El oído medio comunica con la faringe a través de la *trompa de Eustaquio*; 3º el *oído interno*, constituido por una serie de cavidades



Anatomía del oído

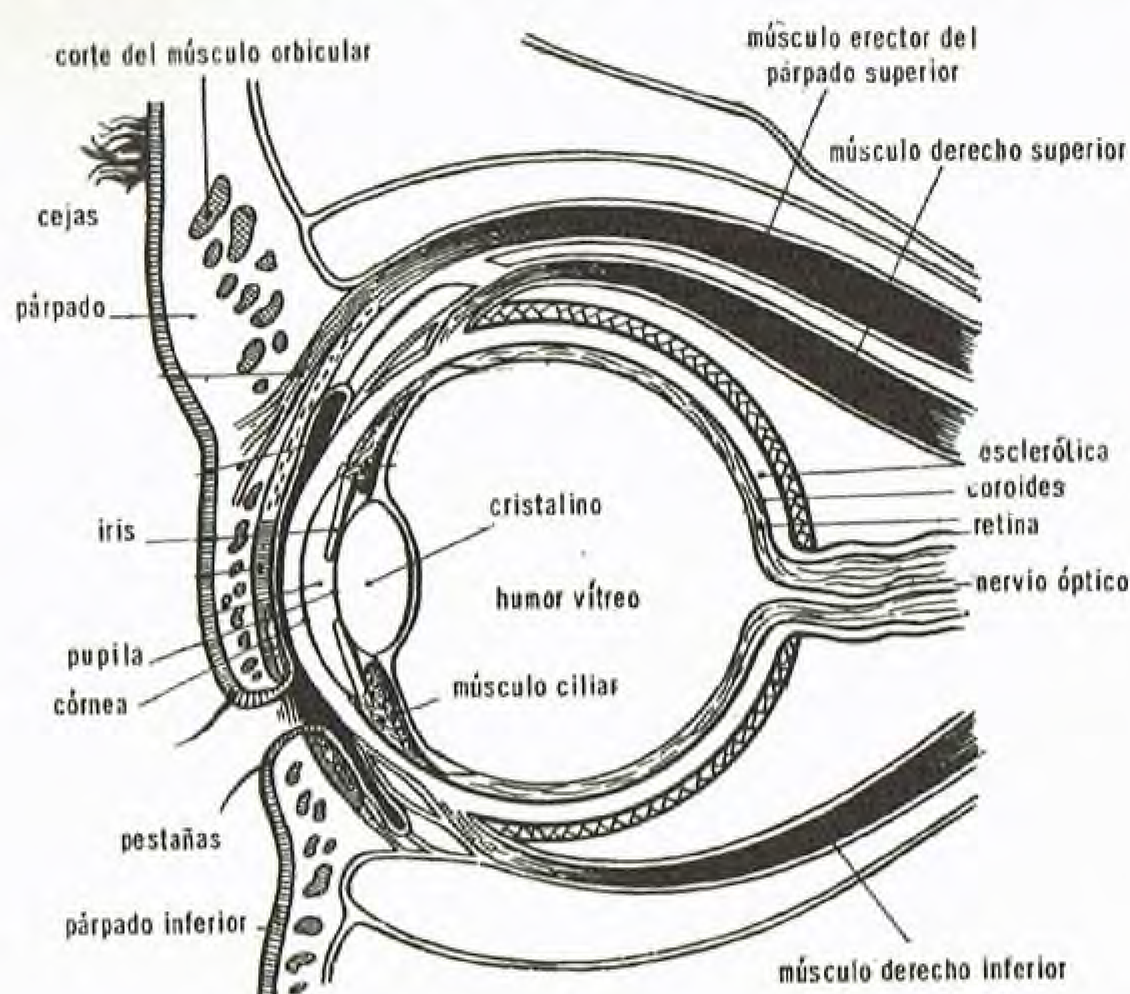
óseas *(laberinto)*, comprende el *vestíbulo*, el *utrículo* y el *sáculo*, y una cavidad central que comunica con los canales semicirculares y con la caja del tímpano por la *ventana oval*. En el laberinto se encuentra el *caracol*.

Los canales semicirculares, orientados según los tres planos del espacio, son los órganos del equilibrio; el caracol, con la membrana basilar y los *órganos de Corti*, nos permite percibir los sonidos. El sonido, producido por las vibraciones de los cuerpos, llega a la membrana del tímpano y es transmitido por la cadena de huesecillos a la ventana oval y a las terminaciones nerviosas de la rampa coclear, y luego, a través del nervio acústico, al cerebro.

Para que un sonido sea perceptible es necesario que esté comprendido entre un mínimo de 15 vibraciones dobles por segundo *(sonidos graves)* y un máximo de 38 000 *(sonidos sobreagudos)*.

El ojo. — Los dos *ojos* están situados en el rostro, a cada lado del plano vertical de simetría. Pueden distinguirse en el ojo los órganos anexos y el globo ocular.

Los *órganos anexos* son: los órganos de protección (órbitas, párpados, pestañas y cejas), los órganos del movimiento (cuatro músculos



Corte del ojo

rectos y dos oblicuos) y los órganos de secreción (las glándulas lagrimales y las carúnculas, situadas en el ángulo interno del ojo). Al lado se encuentran los dos puntos lagrimales, orificios que permiten a la secreción de las glándulas lagrimales desaguar en el meato inferior de la nariz.

El *globo ocular*, formado por tres membranas concéntricas y medios transparentes, está ubicado en el tercio anterior de la órbita y comunica con el encéfalo por el nervio óptico.

La membrana más externa del globo ocular es la *esclerótica*. Ésta es blanca y cartilaginosa, y aumenta en la parte anterior su convexidad para formar la córnea, que es transparente; la segunda membrana, la *coroides*, vascular y negra gracias a la presencia de granulaciones pigmentarias muy pequeñas (1 micra), constituye una verdadera cámara oscura (salvo en los albinos, en los que es rosa, y en diversos mamíferos). La coroides se engrosa hacia adelante, para formar los cuerpos ciliares en los que se halla el iris, que está atravesado por un agujero, la *pupila*, capaz de regular la entrada de los rayos luminosos al dilatar o estrechar su orificio mediante la acción de fibras lisas radiales y circulares.

La tercera membrana es la retina, que es muy delgada, sobre todo en la parte anterior. Está formada por la expansión de las fibras del *nervio óptico*, cuya extremidad termina en los conos y los bastoncitos, células que están puestas en contacto con el pigmento de la coroides. El lugar por donde entra el nervio óptico está desprovisto de terminaciones nerviosas; este punto es, pues, ciego *(mancha de Mariotte)*. En la extremidad del eje óptico del ojo se encuentra una depresión, la *mancha amarilla*, que con su centro, el *foco*, provisto de numerosas terminaciones nerviosas, constituye el lugar en que las imágenes se forman con mayor nitidez. En la estructura de la retina, muy complicada, se distinguen un gran número de capas; señalaremos sólo la constituida por las células bipolares que, a través de numerosas arborizaciones, se ponen en contacto con las grandes células multipolares, cuyos cilindros ejes se reunirán para constituir el nervio óptico.

Los medios transparentes o refringentes del ojo son la *córnea transparente*, la *cámara anterior* (que contiene el humor acuoso), el *cristalino* y el *humor vítreo*, envuelto por la membrana hialoides. El *cristalino*, cuya cara anterior es menos convexa, está situado detrás del *iris*. Tiene nueve milímetros de diámetro y de cuatro a seis de espesor en su parte media. Está sostenido por un ligamento suspensor formado de fibras elásticas transparentes.

Formación de las imágenes. — Los medios que citamos refractan los rayos luminosos; los *índices de refracción* son de 1,339 para la córnea y el cuerpo o humor vítreo, de 1,40 a 1,45 (en el centro) para el cristalino, y de 1,337 para el humor acuoso. La imagen que se forma sobre la retina es real, invertida y más pequeña que el objeto. Puede comprobarse mirando por detrás de un ojo de buey al que han sido raspadas la esclerótica y la coroides.

Aunque las imágenes de la retina son invertidas, vemos los objetos al derecho porque no referimos nuestras impresiones a la imagen, sino a la extremidad del rayo visual, al objeto mismo.

Para que las imágenes sean netas es necesario que se formen sobre la retina, sean cuales fueren las distancias a que se hallen los diversos objetos. Es necesario, pues, que el ojo pueda acomodarse a la distancia, es decir, que sea capaz de aumentar la refringencia de sus medios transparentes, lo que se obtiene mediante el aumento de la curvatura del cristalino. Por otra parte, el pigmento de la coroides aumenta la nitidez de la imagen mediante la absorción de todos los rayos difundidos.

La duración de las impresiones luminosas varía del 1/50 a 1/20 de segundo, tiempo necesario para la descomposición de la púrpura retiniana.'

Por su conformación, el ojo humano sólo puede percibir los rayos situados entre los infrarrojos, de gran longitud de onda (450 millones de vibraciones por segundo), y los rayos ultravioleta, de pequeña longitud de onda (14 millones por segundo). El *daltonismo* es una aberración provocada por la falta de terminaciones nerviosas sensibles al rojo; el ojo sólo percibe entonces el color complementario, el verde. Existen también "ciegos" para el color amarillo. La visión binocular nos da dos imágenes, complementarias, que nos permiten apreciar el relieve de los objetos.

Anomalías de la visión. — El ojo que hemos descrito es el llamado normal o *emétrope*; los otros son los llamados *amétropes*. Las anomalías más frecuentes son la miopía, la hipermetropía, la presbicia, el astigmatismo y la anisometropía.

En la miopía, las imágenes se forman por delante de la retina; el alargamiento del eje anteroposterior del ojo impide que actúe convenientemente la refringencia de los medios. Se corrige esta anomalía colocando delante del ojo cristales bicóncavos o planocóncavos, cuya refringencia se mide en dioptrías.

La *hipermetropía* es la anomalía contraria: la imagen se forma por detrás de la retina. Se corrige con cristales biconvexos.

La *presbicia* es la vista típica de los ancianos: la acomodación se hace mal, debido principalmente a la pérdida de la elasticidad del cristalino.

En el *astigmatismo*, la cara anterior del ojo, o la del cristalino, no posee una curvatura regular. Se corrige la visión en estos casos con cristales cilíndricos tallados siguiendo el eje o el contorno del cilindro.

En el *estrabismo*, las contracciones de los músculos oculares se hallan mal asociadas para coordinar la dirección de los dos ejes visuales; se remedia este defecto cortando algunas fibras al músculo más fuerte. El estrabismo puede ser *convergente* o *divergente*.

Laringe y fonación

La *laringe*, órgano de la *fonación*, está constituida por la parte superior de la tráquea, que posee una disposición especial para la producción de sonidos: cartílagos donde se insertan los músculos que forman las *cuerdas vocales*, los cuales limitan una hendidura triangular alargada, la *glotis*, que puede ser obturada por la *epiglotis*. Las cuerdas vocales inferiores pueden vibrar bajo la influencia de una corriente espiratoria: están formadas por un largo músculo colocado bajo la mucosa, que posee un ligamento para impedirle que se pliegue. Una cavidad llamada *ventrículo de la laringe* sirve de caja de resonancia.

La glotis puede alargarse o retraerse gracias a los músculos dilatadores y constrictores y emitir sonidos de alturas, intensidades y timbres variables.

El sonido articulado está formado por la asociación de vocales y consonantes. El sonido laríngeo es inarticulado, pero se modifica a su paso por las cavidades faríngeas y bucales y por las fosas nasales.

Funciones de nutrición

Los alimentos: Alimentos completos. Alimentos incompletos. Alimentación mixta. — **Descripción y funciones del aparato digestivo:** La boca, la faringe y el esófago. El estómago. El páncreas. Los intestinos. Absorción intestinal de las substancias digeridas. — **Descripción y funciones del aparato respiratorio:** Conductos aeríferos. Fenómenos mecánicos. Fenómenos químicos. — **Descripción del aparato circulatorio:** La sangre. El corazón. Sistema arterial. Arterias principales. Sistema venoso. Linfa. Circulación de la sangre en el corazón. — **Órganos de excreción:** Aparato urinario: Estructura del riñón. Composición de la orina. Formación de la orina. — **El hígado.** — **Calor animal:** Utilización del calor. Aparato de regulación térmica

Las funciones de nutrición son las que concurren a la conservación del individuo:

1° La **digestión,** que modifica los alimentos a fin de darles una composición química que les permita ser absorbidos y asimilados por las células vivas;

2° La **circulación,** que distribuye esas substancias por todo el organismo;

3° La **respiración,** que consiste en la absorción del oxígeno necesario para la producción de calor y la eliminación del gas carbónico residual;

4° La **excreción,** consistente en la eliminación de las substancias producidas por la actividad intracelular que son desechadas por el organismo;

5° La **calorificación** o producción de calor.

Los alimentos

Los *alimentos* son las materias reconstituyentes del cuerpo. Bajo la acción de los jugos digestivos sufren diversas modificaciones químicas que les dan una forma asimilable por el organismo.

Los alimentos se dividen en *completos* e *incompletos*.

Alimentos completos. — Son sólo dos: la leche y los huevos.

La *leche* encierra todas las substancias necesarias para la nutrición: hidrato de carbono *(lactosa)*, 52 por 1 000; grasa *(manteca)*, 40 por 1 000; proteína *(caseína)*, 30 por 1 000, y sales de calcio, de fósforo, de sodio, de magnesio y de hierro, y agua. La leche es el sustento exclusivo de los mamíferos jóvenes, hasta que pueden tomar otros alimentos.

Los *huevos*, segundo alimento completo, contienen un hidrato de carbono, grasas, una substancia albuminoidea y sales alcalinas (en la *clara*), y algo de fosfatos y sales de hierro (en la *yema*). No obstante, su baja proporción de agua impide utilizar los huevos como alimento único y exclusivo.

Alimentos incompletos. — Se clasifican generalmente en cinco categorías, según su composición química:

1º Los *albuminoides*, o alimentos azoados, proteicos o cuaternarios (constituidos por cuatro elementos principales, C, H, O, N). Estos alimentos son: la albúmina, la caseína de la leche, la musculina o miosina, la gelatina, la legumina de las plantas, abundante en las leguminosas bajo la forma de aleurona, y el gluten del trigo.

Todas esas substancias, muy complejas, son asimilables únicamente después de haber sido modificadas por los jugos digestivos, es decir, convertidas en leucina, tirosina o glicocola, que son aminoácidos de composición más simple;

2º Los *alimentos hidrocarbonados*, o *hidratos de carbono*, que contienen el carbono combinado con dos moléculas de agua, es decir, los feculentos y los azúcares, cuya fórmula general es $C_n(H_2O)_m$.

Los feculentos son los almidones, abundantes en muchos granos (judías, lentejas, arroz, etc.). El pan contiene un 60% de almidón; el arroz, 75%.

Los azúcares, muy numerosos en el reino vegetal, son: la sacarosa, $C_{12}O_{11}H_{22}$, azúcar de remolacha o de caña, que da en el tubo digestivo una molécula de glucosa y una de levulosa; la glucosa, que se encuentra en casi todas las frutas, sobre todo en la uva; la levulosa, que tiene la misma fórmula que la glucosa; la lactosa, una sacarosa que es el azúcar de la leche de los mamíferos.

Todos estos azúcares dan en definitiva glucosa o levulosa, las únicas asimilables por los tejidos;

3º Los *alimentos grasos* o *grasas*, que se encuentran en los granos oleaginosos (aceite); en ciertos frutos (aceitunas); en los huevos (lecitinas); en el hígado; en la leche (manteca); en los granos de cacao (manteca de cacao), etc. Las grasas naturales son cuerpos neutros que proceden de la combinación de tres moléculas de un ácido graso con la glicerina, con eliminación de tres moléculas de agua. Los ácidos más frecuentes son el ácido esteárico ($C_{18}H_{36}O_2$) en la grasa de oveja, el ácido oleico ($C_{18}H_{34}O_2$) en los aceites y el ácido palmítico ($C_{18}H_{32}O_2$) en la margarina.

Los alimentos grasos son emulsionados en el organismo, es decir, transformados en finas gotitas que permanecen en suspensión por la esteapsina del jugo pancreático, y en jabones, o sea desdoblados en glicerina y una sal del ácido graso;

4º Las *sales minerales*, que constituyen también alimentos, son las sales de calcio, de sodio, de potasio y de hierro; el yodo, el magnesio y el manganeso.

Las sales calcáreas nos son suministradas sobre todo por las legumbres, la leche y el agua. Esas sales son las que forman la parte más sólida del esqueleto (huesos y dientes) bajo la forma de fosfatos, carbonatos y fluoruros de calcio. En el período de crecimiento son muy necesarias. Cuando no hay asimilación de sales calcáreas, el esqueleto permanece blando, débil, y los huesos son flexibles o elásticos. Si la proporción de calcio es baja, el peso del cuerpo conduce a una malformación de las epífisis: ciertos huesos, por ejemplo los de las piernas, se curvan. Por lo tanto, es necesario aumentar la ingestión de fosfatos de calcio y de sodio durante la edad juvenil para prevenir el raquitismo.

Las sales de sodio (cloruro, sulfato, carbonato y fosfato) ejercen un papel importante en el organismo, sobre todo la primera; nuestra sangre y los líquidos orgánicos encierran más del seis por ciento de ese cloruro. Además es necesario para el organismo recuperar lo perdido cada día por las excreciones (14 a 15%).

El hierro, necesario para la hemoglobina de la sangre, se encuentra en la yema de huevo; el yodo, en las zanahorias, los espárragos y el pescado; los demás minerales se hallan sobre todo en combinación con las materias albuminoideas.

Todas esas sales forman, más o menos, el cuatro por ciento del peso del cuerpo.

5º Las *bebidas* son: el agua, las infusiones y los compuestos alcohólicos.

El agua constituye aproximadamente las cuatro quintas partes de nuestro cuerpo; sirve de vehículo y de solvente a la mayoría de las substancias, y repara las pérdidas debidas a la excreción y a la transpiración cutánea y pulmonar. El cuerpo humano necesita alrededor de tres litros por día.

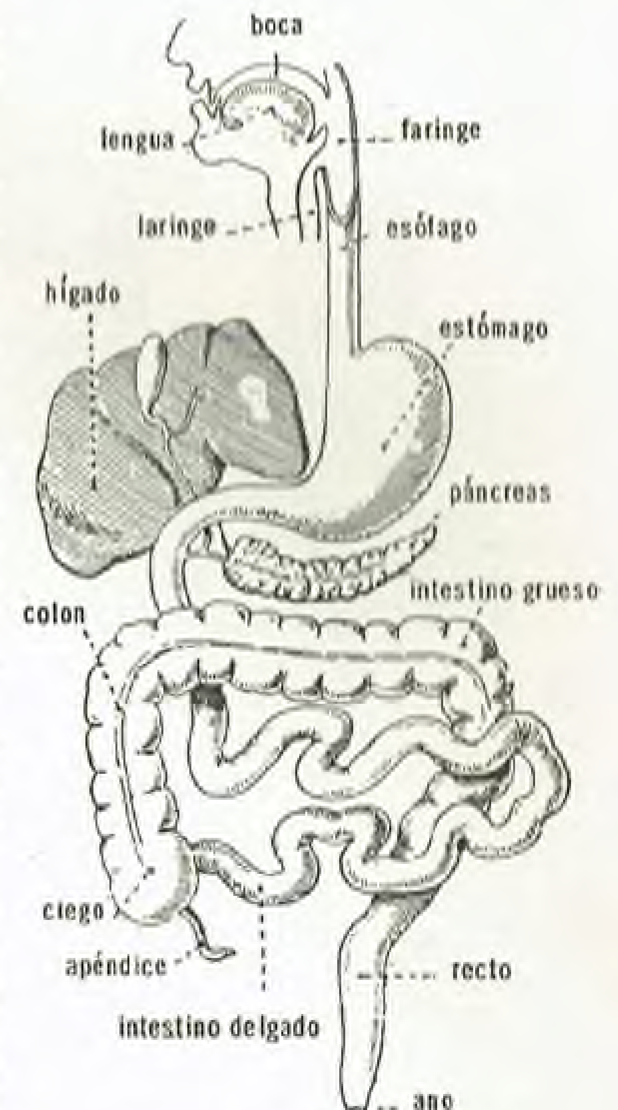
Las bebidas fermentadas o alcohólicas de baja graduación son beneficiosas: son estimulantes por su alcohol y nutritivas por las substancias que encierran en disolución (vino, cerveza o sidra, que es la más diurética). Si la proporción de alcohol es alta, una parte se acumula en el hígado o en la substancia nerviosa, y provoca el alcoholismo.

Las infusiones, el café y el té principalmente, son estimulantes debido a la cafeína y a la teobromina que contienen, pero como producen una mayor actividad conducen a un desgaste más rápido de los órganos, que consumen sus reservas.

Alimentación mixta. — Como el cuerpo humano está formado por trece elementos simples, es necesario que la alimentación sea mixta, es decir, que las diversas categorías de alimentos sean ingeridas en una proporción tal que las pérdidas puedan ser reparadas. Un adulto pierde cada día 20 gramos de ázoe, 310 de carbono, 30 de sales y de dos a tres litros de agua. La ración reparadora, pues, deberá constar de tres veces y media más de hidratos de carbono que de azoados, y de la mitad menos de substancias grasas que de azoadas. La ración alimenticia varía con la edad y con el estado de reposo o de actividad; el trabajo muscular consume más substancias grasas e hidratos de carbono. Hay que tener en cuenta, además, la digestibilidad de los alimentos y las vitaminas, que existen sobre todo en las zanahorias, los tomates, las envolturas de los granos y las frutas frescas, tales como los limones y las naranjas.

Descripción y funciones del aparato digestivo

El *aparato digestivo*, que se compone de la *boca*, la *faringe*, el *esófago*, el *estómago*, el *intestino* y los *órganos secretores* anexos, se encuentra en la *caja torácica* y en la *cavidad abdominal*; en ésta, los órganos se hallan envueltos en todos sus pliegues por una membrana serosa llamada *peritoneo*, cuyas dos hojas son lubricadas por el líquido peritoneal; el peritoneo tiene delante un gran repliegue o *epiplón* que se llena de grasa en los casos de obesidad; la porción que envuelve el intestino se llama *mesenterio*.



Aparato digestivo (esquema)

La boca, la faringe y el esófago. — La *boca* es el orificio superior del tubo digestivo; está tapizada por la mucosa bucal, que se espesa alrededor de los dientes para formar las *encías*.

Los *dientes* son los órganos de la masticación y están implantados en los alvéolos de los maxilares. Un diente está constituido por la *corona*, en el exterior, la *raíz*, incluida en el alvéolo y tapizada por el periostio alveolodentario, y el *cuello*, rodeado por la encía.

La corona tiene forma variable. Según sus funciones, se dividen los dientes en *incisivos*, *caninos* y *molares*. Los incisivos, en número de veinte, constituyen los dientes de leche. Desaparecen antes de los diez años y son reemplazados por los dientes definitivos, a los que se agregan doce grandes molares. Se representa esta dentición por la fórmula dentaria siguiente: *i* 2/2, *c* 1/1, *pm* 2/2, *m* 3/3. El molar que aparece el último se llama *muela del juicio*.

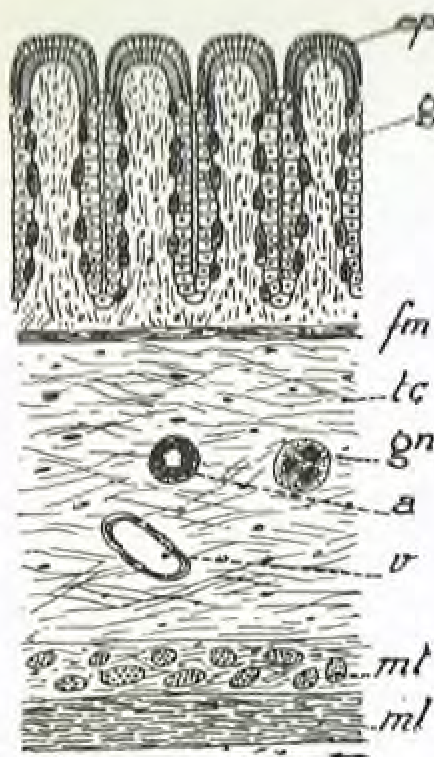
En el corte longitudinal de un diente pueden verse los diversos tejidos que lo constituyen: la *cutícula* (protectora), el *esmalte*, formado por pequeños prismas, el *marfil*, la *pulpa dentaria* y, alrededor de la raíz del tejido óseo, el *cemento*. El *marfil* o *dentina* está constituido en un 70% por sales calcáreas: fosfatos, carbonato y fluoruro; y también, en menos cantidad, por fosfato de magnesio.

En la boca se encuentran seis pequeños conglomerados glandulares *(arracimadas)*, que constituyen los tres pares de glándulas salivales: las dos submaxilares, las dos sublinguales y las dos parótidas, situadas por debajo y delante del conducto auditivo (su canal excretor se abre frente al segundo molar superior).

La secreción de esas glándulas es la *saliva*, formada por agua, diversas sales y un fermento, llamado *ptialina* o *amilasa*, que transforma el almidón crudo en azúcar de maltosa. La saliva interviene en la digestión de los alimentos y facilita la deglución.

Los alimentos deglutidos pasan a la *faringe*, después al *esófago* (la epiglotis y la úvula se oponen a su desviación por la glotis), y entran luego en el estómago por una válvula: el *cardias*.

El estómago. — El *estómago*, que tiene la forma de una gaita, se halla situado debajo del diafragma, a la izquierda; su tuberosidad mayor está cerca del cardias, y la menor, del píloro. Sus paredes se componen de tres túnicas: la media es muscular, y la interna, que es conjuntiva, está tapizada por un epitelio dotado de numerosas glándulas que segregan pepsinas, cuajo y ácido clorhídrico. La excitación producida por la entrada de los alimentos en el estómago provoca la secreción de esas glándulas. El cuajo del jugo gástrico actúa sobre la caseína de la



CORTE DE LA PARED GÁSTRICA: *a*, arteriola; *ep*, epitelio; *fm*, fibras musculares; *gl*, glándulas gástricas; *gn*, ganglio nervioso; *ml*, *mt*, fibras musculares longitudinales y transversales; *tc*, tejido conjuntivo; *v*, vénula

leche, y las pepsinas sobre las diversas substancias azoadas para transformarlas en peptonas o albuminosas y en aminoácidos. Se pueden verificar estas actividades *in vitro* por medio de jugo gástrico recogido gracias a una fístula gástrica. Las pepsinas son capaces de transformar hasta cerca de dos mil veces su peso de materias azoadas.

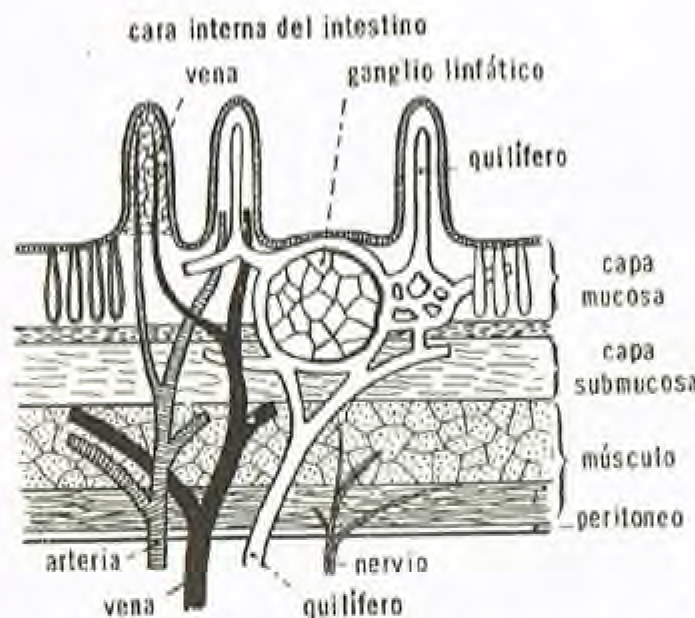
Todos los alimentos azoados no son transformados totalmente en el estómago. Después de su desmenuzamiento, los alimentos, que constituyen ahora el *quimo*, atraviesan el píloro y entran en el duodeno, donde sufren la acción del jugo pancreático.

El páncreas. — El *páncreas* es una glándula delgada alargada y situada por detrás del estómago, en contacto con el bazo a la izquierda y con el duodeno a la derecha. Su canal excretor, llamado *conducto de Wirsung*, se abre en la *ampolla de Vater* del duodeno, al lado del orificio del colédoco. Del conducto de Wirsung parte un canal accesorio que desemboca dos centímetros más arriba en el duodeno.

La estructura del páncreas es semejante a la de las glándulas salivales, pero posee además islotes celulares que segregan *insulina*, que pasa directamente a la sangre.

Las diastasas contenidas en el jugo pancreático son: una amilasa y una maltasa, que continúan la acción de las glándulas salivales; la tripsina, que actúa sobre los alimentos azoados, pero en medio alcalino; una lipasa o esterasa, que divide las grasas en finas gotitas para formar una emulsión, y una saponina, que descompone las grasas en glicerina y ácidos grasos, que se combinan a su vez con el sodio y forman jabones.

Esas reacciones se realizan en presencia de la *bilis hepática*, o sea en medio neutro o alcalino. Se ve entonces que el jugo pancreático ataca todos los alimentos todavía no digeridos, salvo las sacarosas.



Corte esquemático de la pared del intestino

Los intestinos. — El *intestino* mide alrededor de diez metros de longitud en el hombre; es más largo en los herbívoros que en los carnívoros u omnívoros (30 m en el buey; 30 en la oveja; seis en el león). Se divide en dos partes: el *intestino delgado* (de siete a ocho m) y el *intestino grueso* (1,50 m).

El intestino delgado es un largo tubo de tres centímetros de diámetro, replegado sobre sí mismo y sostenido por el mesenterio. Se divide en tres regiones o partes:

El *duodeno*, de alrededor de 12 centímetros de longitud;

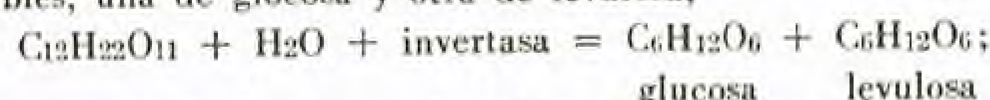
El *yeyuno*, que comprende el conglomerado de asas;

El *íleon*, que desemboca en el intestino grueso.

La superficie interna del intestino presenta numerosos repliegues o válvulas conniventes y asperezas muy finas (1 mm), o vellosidades intestinales (1 000 por cm²). Sus paredes están formadas por tres túnicas: la externa, que depende del mesenterio; la media, muscular y formada por dos capas de fibras longitudinales y transversales que provocan los movimientos peristálticos y el deslizamiento de los excrementos, y la membrana interna, mucosa tapizada por un epitelio cilíndrico. Las glándulas que segregan el jugo intestinal son las acinosas del duodeno y otras tubulares en el yeyuno y el íleon.

El jugo intestinal actúa sobre todos los alimentos.

Para la *digestión de los azúcares*, hay tres fermentos: uno para la maltosa *(maltasa)*, que la desdobla en glucosa; la *invertasa*, fermento o enzima que actúa sobre la sacarosa y la desdobla en dos moléculas asimilables, una de glocosa y otra de levulosa,



$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O + \text{invertasa} = \underset{\text{glucosa}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{levulosa}}{C_6H_{12}O_6};$$

y finalmente la *lactasa*, que desdobla la lactosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$, fija el agua y da dos moléculas de glucosa.

La *digestión de las grasas* se realiza por acción de una lipasa que las saponifica. La *digestión de los albuminoides* se hace gracias a la *erepsina*, que ataca las albuminosas y las desdobla en aminoácidos: leucina, tirosina, etc.

A estas acciones hay que agregar las provocadas por la presencia de bacterias provenientes del agua que se bebe o de la acción del *Bacilus amylobacter* sobre la celulosa, y también otros procesos, productores de numerosos gases: gas de los pantanos, amoniaco, ácido sulfhídrico.

Las substancias que salen del estómago pasan al duodeno por *ondas sucesivas* y constituyen el quimo, compuesto de todo lo que ha sido digerido (glucosa, aminoácidos), de grasas emulsionadas o saponificadas, de residuos no digeribles como el *almidón crudo* y el *tejido elástico*, y de substancias que han escapado a la acción de los jugos digestivos. Varias de esas substancias serán absorbidas en el intestino delgado, en tanto que los residuos descenderán hacia la extremidad del tubo digestivo, en un tiempo más o menos largo, mediante las contracciones peristálticas.

Absorción intestinal de las substancias digeridas. — Las vellosidades que tapizan la cara interna del intestino delgado son los órganos de la absorción. Suman éstas varios millones (tienen 1 mm de diámetro) y están constituidas por un relieve conjuntivo cubierto de un epitelio cilíndrico. En su interior se encuentran fibras musculares, así como una arteriola y una vénula que se capilarizan alrededor de un vaso quilífero central. Los quilíferos están unidos entre sí.

El *quilo*, parte del quimo de actividad osmótica que baña las vellosidades, se compone de linfa y de grasa emulsionada. Las grasas atraviesan el epitelio y llegan al canal quilífero. De los vasos quilíferos, el quilo pasa por el conducto torácico a la vena subclavia izquierda, donde se mezcla con la sangre. La bilis determina en el intestino la contracción de las fibras musculares de las paredes donde están fijadas las vellosidades.

Descripción y funciones del aparato respiratorio

La *respiración* es la función mediante la cual absorbemos el oxígeno del aire y expelemos el gas carbónico y el vapor de agua residuales. Todos los animales respiran; se distinguen las respiraciones *cutáneas, branquial, traqueal* y *pulmonar* (como es la del hombre).

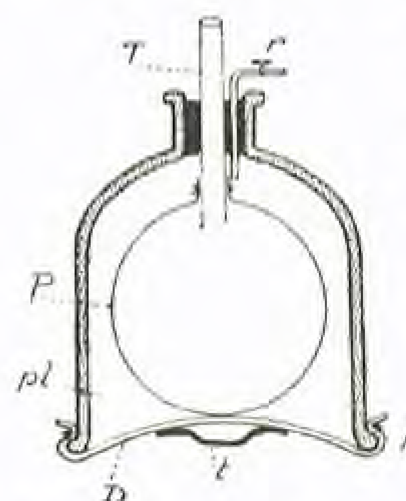
Los dos *pulmones* se encuentran en la caja torácica, a cada lado del corazón, y se hallan en comunicación con el exterior por los *bronquios* y la *tráquea*. Los pulmones están constituidos por unos 1 800 millones de vejiguillas, los alvéolos pulmonares, cuyo conjunto forma una superficie de 200 m². Son de forma cónica, descansan sobre el diafragma, y el derecho es un poco más voluminoso que el izquierdo. Los pulmones están envueltos en una membrana serosa, la *pleura;* la primera hoja de ésta se aplica sobre los pulmones, y la segunda sobre la pared torácica.

Conductos aeríferos. — El primero es la *tráquea*, que se abre en la faringe por la glotis, la cual es obturada por la epiglotis durante la deglución. La tráquea, que tiene dos centímetros de diámetro y 12 de longitud, está situada delante del esófago. Sus paredes encierran de 16 a 20 anillos cartilaginosos tapizados por un epitelio vibrátil. La tráquea se divide en dos bronquios que penetran en cada uno de los pulmones; los bronquios están subdivididos a su vez en *bronquiolos* que van a abrirse cada uno en un lobulillo pulmonar *(alvéolo)* de paredes delgadas, elásticas y muy vascularizadas, que constituyen la superficie respiratoria. La sangre reducida *(negra)* llega por las arteriolas pulmonares y sale, oxigenada *(roja)*, por las vénulas pulmonares, que se reúnen en cuatro venas que desembocan en la aurícula izquierda.

La función respiratoria comprende, primero, fenómenos mecánicos que regulan la entrada y salida del aire; y en segundo lugar, fenómenos fisicoquímicos consistentes en la absorción del oxígeno con desprendimiento simultáneo de anhídrido carbónico (CO_2).

Fenómenos mecánicos. — Estos fenómenos comprenden dos fases: la entrada del aire o *inspiración*, que es activa, y la salida del aire o *espiración*, que se hace pasivamente.

En la inspiración, el diafragma aplana su curvatura, hace presión sobre las vísceras y echa hacia adelante la pared abdominal; al mismo tiempo, por conducto de la pleura; ejerce una tracción por la base sobre los pulmones y provoca así su aumento de volumen. Los músculos elevadores de las costillas *(escalenos, serrato menor, intercostales)*, levantan las costillas y elevan la pared torácica, o sea la pleura y los pulmones. Lateralmente, por la acción de los músculos intercostales externos, los pulmones se agrandan también. Penetra así medio litro de aire en cada movimiento inspiratorio y unos 16 por minuto; la capacidad de los pulmones es aproximadamente de tres litros.



MECANISMO DE LA ENTRADA DEL AIRE EN LOS PULMONES: D. Diafragma; P. Pulmón; *pl*. cavidad pleural; T. Tráquea; *f*, ligadura; *g*. grifo; *l*. lazo

La espiración, que sucede a la inspiración, se hace, como se ha dicho, pasivamente; todos los músculos recuperan su posición inicial y expulsan de este modo aproximadamente medio litro de aire al exterior. En la inspiración forzada, los músculos pectorales intervienen, lo que hace que la cantidad de aire introducido pueda alcanzar hasta cuatro o cinco litros.

La cantidad de aire que pasa diariamente por los pulmones es de alrededor de 10 m³ (0,5 × 16 × 60 × 24 horas = 11 520 litros).

Fenómenos químicos. — Los fenómenos químicos de la respiración consisten en absorción de oxígeno y expulsión de anhídrido carbónico y vapor de agua.

El aire inspirado, que contiene 21% de oxígeno, sale con sólo 16%; pero, inversamente, la proporción de CO_2, que era de 0,04 litros, pasa a cuatro, es decir, aumenta 100 veces. Además, expulsamos más de 400 gramos de vapor de agua al día.

La absorción se realiza fácilmente gracias a la enorme superficie tapizada por la sangre en los alvéolos, que es de 75 m², y al escaso espesor de un glóbulo rojo. El oxígeno se combina con la hemoglobina y forma la oxihemoglobina, que cede su oxígeno para la combustión de los azúcares y las grasas.

El CO_2, que se produce en todas las células, se disuelve en el plasma, se combina con las sales y la hemoglobina, y es expulsado al exterior durante la espiración. Como puede verse, la respiración verdadera se hace, en todo organismo vivo, en las células, que es donde se forma el anhídrido carbónico por oxidación de los azúcares y de las grasas. Estas acciones reflejas se realizan bajo la dependencia de un centro nervioso situado en el suelo del cuarto ventrículo del bulbo, que es el llamado centro respiratorio *(nudo vital)*.

Descripción del aparato circulatorio

El aparato circulatorio es el conjunto de vasos que distribuyen la **sangre** por el cuerpo; la circulación es el movimiento de la sangre por todo el organismo. El aparato circulatorio está formado por:

1º El *corazón*, órgano central de la circulación y propulsor de la sangre;

2º Las *arterias*, conductos que parten del corazón;

3º Las *venas*, que vuelven la sangre al corazón, y los *capilares*, finos canales que comunican las arterias y las venas.

La sangre. — El cuerpo humano adulto encierra de cinco a seis litros de sangre, lo que representa, más o menos, una quinta parte y media del peso del cuerpo. La sangre viva es un líquido *(plasma)* en el cual se mueven glóbulos rojos y glóbulos blancos.

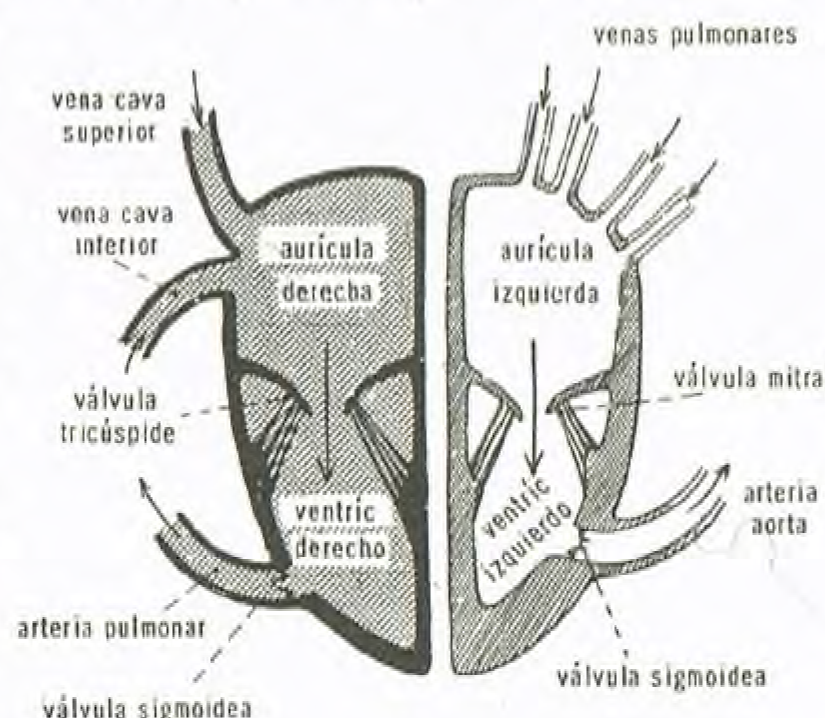
Los *glóbulos rojos* o *hematíes*, que carecen de núcleo, tienen la forma de discos bicóncavos de siete micras de diámetro y dos de espesor (parte media). Hay unos cinco millones por mm^3. Su protoplasma está impregnado de *hemoglobina*, substancia albuminoidea que da la coloración roja al glóbulo. El hematíes transporta el oxígeno por todo el organismo, gracias a su oxihemoglobina, que forma con el óxido de carbono una combinación estable. Su combinación con el CO_2 es la carbohemoglobina, substancia poco estable que se destruye en parte al pasar por los pulmones para dejar el CO_2 en libertad.

Los glóbulos rojos se forman a expensas de los leucocitos (células embrionarias), que pierden sus núcleos y se cargan de hemoglobina en la medula roja de los huesos y en el bazo. Su vida es bastante corta (sólo algunas semanas), pues se destruyen en el hígado y el bazo.

Los *glóbulos blancos* o *leucocitos* son células sin membrana y con uno o dos núcleos. Son menos numerosos que los hematíes (7 500 por mm^3; uno por cada 800 glóbulos rojos). Son células que se desplazan (atraviesan las paredes de los vasos) y poseen seudópodos capaces de destruir ciertos microbios. Este poder fagocítico va asociado a la secreción de antitoxinas. Hoy está demostrado que los leucocitos segregan también substancias que tienen la propiedad de destruir glóbulos sanguíneos pertenecientes a otros mamíferos de distinta especie; tales substancias son las *alexinas*. En consecuencia una transfusión de sangre sólo puede hacerse de hombre a hombre.

El plasma se coagula expuesto al aire como consecuencia de la combinación del fibrinógeno con las sales de sodio: la fibrina formada retiene los glóbulos. Se constituye así una masa sólida roja, o coágulo, y un líquido amarillo: el *suero*. La sangre encierra gases: su oxígeno proviene de la respiración, su gas carbónico es producido por la oxidación de las grasas y los azúcares, y contiene, además, un poco de nitrógeno y de argón.

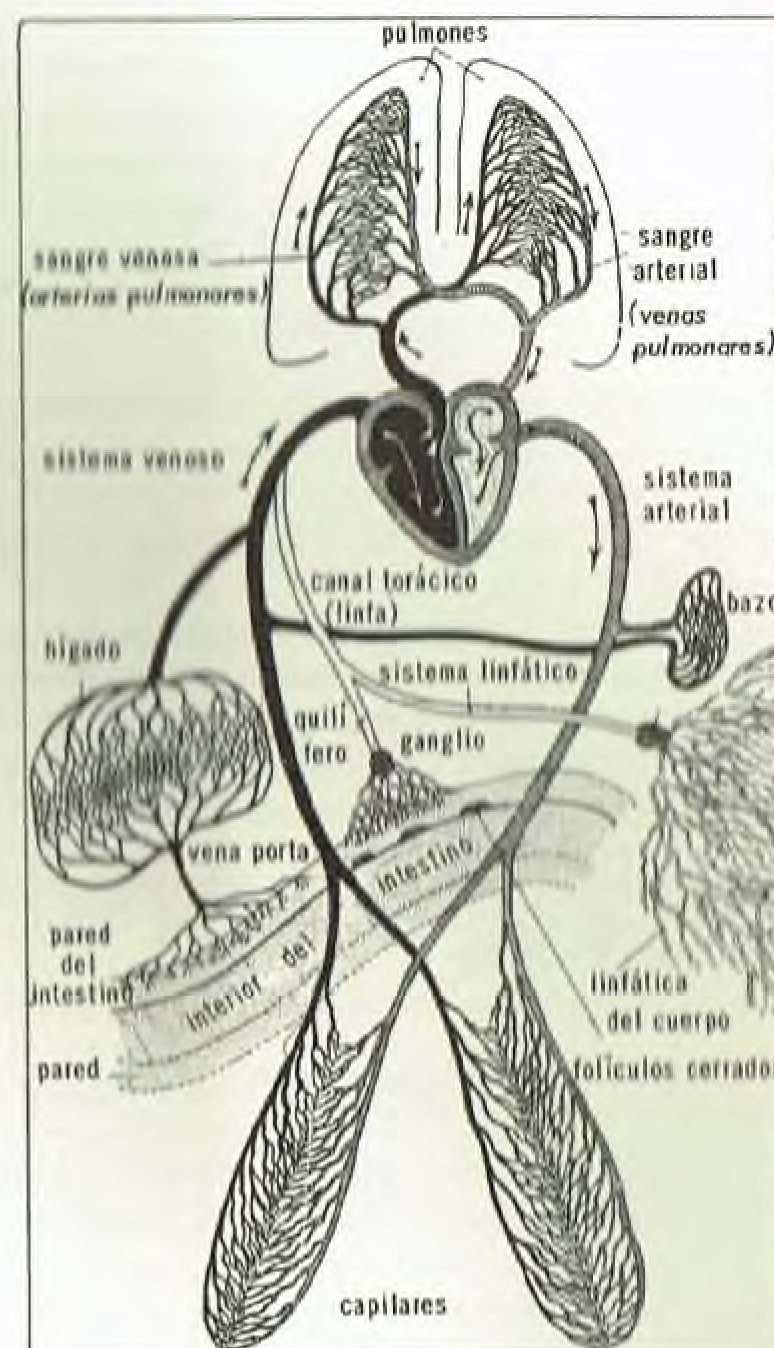
El corazón. — El *corazón*, situado entre los dos pulmones, tiene la forma de un cono cuyo vértice, dirigido hacia abajo e inclinado a la izquierda, se encuentra a la altura de la quinta y sexta costillas. Su peso es de 280 gramos, y mide 10 centímetros de longitud, y otro tanto en su mayor anchura. En un corte longitudinal puede verse que el corazón presenta cuatro cavidades: *dos aurículas* y *dos ventrículos*. Cada aurícula se abre al ventrículo correspondiente por un orificio auriculoventricular guarnecido por láminas elásticas triangulares, que se unen por prolongaciones tendinosas a las columnas musculares de los ventrículos. En el lado derecho, este orificio es la válvula *tricúspide*; en el izquierdo, la *mitral* o *bicúspide*.



Corte esquemático del corazón

Las paredes de las aurículas son delgadas en tanto que las de los ventrículos, son más gruesas, sobre todo las del izquierdo. Están éstas formadas por tres capas distintas: la exterior, el *pericardio*, es serosa y se compone de dos hojas entre las cuales se encuentra un líquido viscoso, *líquido pericárdico*, que facilita los movimientos cardiacos. La capa media o *miocardio* consta de fibras estriadas que se anastomosan entre sí con un núcleo central en cada uno de los segmentos. Estas fibras no están sometidas a la acción de la voluntad. Se considera el corazón como un músculo hueco porque sus fibras fundamentales, que parten de un surco auriculoventricular, se dirigen oblicuamente hasta la cara interna del otro ventrículo para terminar en las columnas carnosas.

La capa interna de todas las cavidades o *endocardio* es una membrana muy delgada, con un epitelio que se continúa en los vasos.



Esquema de la circulación de la sangre

Sistema arterial. — El *sistema arterial* constituye el conjunto de vasos que parten de los ventrículos. Está lleno de sangre roja oxigenada, con excepción de las arterias pulmonares, que transportan sangre negra o venosa.

Las *arterias* son conductos de color amarillo pálido, muy elásticos, cuyas paredes están formadas por tres túnicas: la *externa*, conjuntiva, con numerosos capilares nutricios; la *media*, gruesa y formada sobre todo por fibras elásticas, con algunas fibras musculares, y la *interna*, un endotelio, continuación del endocardio.

En las arteriolas, el tejido muscular aumenta de volumen a medida que esos vasos se alejan del corazón.

La pared de los capilares, que poseen un diámetro de cinco a diez micras, se reduce al endotelio.

Arterias principales. — La *aorta* parte del ventrículo izquierdo, asciende por entre las dos aurículas y se curva hacia la izquierda para volver a descender por detrás del corazón. Está ocluida a su salida por las *válvulas sigmoideas*, de donde nacen las dos arterias *coronarias* (nutricias del corazón). Surge de ella, a la derecha, el *tronco braquiocefálico*, luego la *carótida izquierda* y la *subclavia izquierda*, que se dirige al brazo, donde se encuentran la *arteria radial*, la *cubital*, la de la *arcada pulmonar* y las *arterias digitales*.

De la aorta descendente surgen a continuación los diez pares de arterias *intercostales* y las *diafragmáticas*. El *tronco celiaco* (arterias *gástrica, hepática* y *esplénica)* parte de la aorta debajo del diafragma. Se encuentran a continuación la arteria *mesentérica superior*, que se dirige al intestino delgado y grueso, las dos arterias *renales*, la *mesentérica inferior*, que se dirige al colon y al recto, y finalmente, las dos *ilíacas*, que van a la vejiga y a los miembros inferiores (arterias femorales, de la tibia, del peroné y la de la arcada plantar).

Sistema venoso. — Las *venas*, satélites de las arterias, llevan en su interior válvulas para impedir el retorno o marcha hacia atrás de la sangre. Las venas forman dos sistemas: el *superficial*, que se extiende por todo el cuerpo, y el *profundo*, que se abre en las aurículas.

Podemos distinguir entre las venas:

1º La gran *vena coronaria* (paredes del corazón);

2º El sistema de la *vena cava superior* (cabeza y miembros superiores);

3º El sistema de la *vena cava inferior* (miembros inferiores, riñones, venas suprahepáticas);

4º El sistema de los *ácigos* (ácigos mayor y menor, y las intercostales);

5º El sistema de la *porta* (venas intestinales, gástricas, esplénicas y pancreáticas)

Linfa. — La *linfa*, compuesta de plasma y glóbulos blancos, entre los que predominan los linfocitos, impregna todos los tejidos, debido a lo cual constituye el verdadero medio interior del cuerpo (más de la mitad de su peso). Está formada por la secreción de las paredes de los capilares y por la exudación del plasma de los vasos sanguíneos como consecuencia de la presión. La linfa contiene menos albúmina que la sangre, y menos oxígeno, pero su proporción de anhídrido carbónico es igual a la de la sangre venosa. Todos los órganos están provistos de un sistema de capilares linfáticos, que es de mayor extensión que el constituido por los capilares sanguíneos. Los capilares linfáticos forman vasos que llevan su contenido al corazón. Los principales son dos: la gran vena linfática derecha, que avena toda la linfa proveniente de la parte derecha y superior del cuerpo, y que desemboca en la vena cava superior, y el conducto torácico, que recibe la linfa procedente del intestino y de la *cisterna de Pecquet* (desemboca en la vena cava superior, cerca de la yugular izquierda). Los vasos linfáticos son difíciles de ver porque tienen las paredes muy delgadas, pero se perciben muy bien los vasos quilíferos cuando están repletos de gotitas de grasa. Poseen además

válvulas sacciformes y atraviesan en su trayecto ganglios repletos de glóbulos blancos.

La linfa nutre los diversos tejidos y está encargada de defender el organismo contra los agentes infecciosos. Realiza la distribución de grasas, azúcares y albúmina a los tejidos, y transporta los desechos (CO_2 y urea) a la corriente sanguínea. Además, por intermedio de la fagocitosis y de la secreción de antitoxinas, la linfa lucha también contra las invasiones de gérmenes patógenos.

Circulación de la sangre en el corazón. — El corazón se contrae para impulsar la corriente sanguínea por el cuerpo y se dilata luego para volver a llenarse de sangre; estos movimientos son la *sístole* y la *diástole*. Las contracciones se producen a una media de 120 veces por minuto en el niño y de 70 en el adulto. Durante la sístole ventricular se perciben el choque de la punta y los dos ruidos cardiacos. Esas contracciones se han estudiado por medio del *cardiógrafo*. La onda sanguínea, lanzada bruscamente en la aorta, produce su dilatación; ésta, al propagarse, constituye las pulsaciones arteriales, o sea el *pulso*, que puede notarse en la muñeca y en la sien. La circulación en las venas se hace mediante el empuje de la sangre de los capilares *(vis a tergo)* y la aspiración de las aurículas, ayudados por las válvulas de que están provistas las venas.

Órganos de excreción

La *excreción* es el resultado de los fenómenos de asimilación y desasimilación que tienen lugar en el protoplasma vivo.

La *asimilación* es el acto por el cual la materia viva selecciona los materiales nutritivos, los incorpora y los transforma en substancia viva. Esta formación continua de protoplasma se acompaña de una destrucción correlativa de materias vivas, lo que constituye la *desasimilación* o excreción.

Las substancias de excreción, es decir, que deberán ser expulsadas al exterior, son: 1° los elementos de la bilis, expulsados por el hígado; 2° la orina y el sudor, excretados por los riñones y las glándulas sudoríparas; 3° el gas carbónico, desechado por los pulmones en el aire espirado.

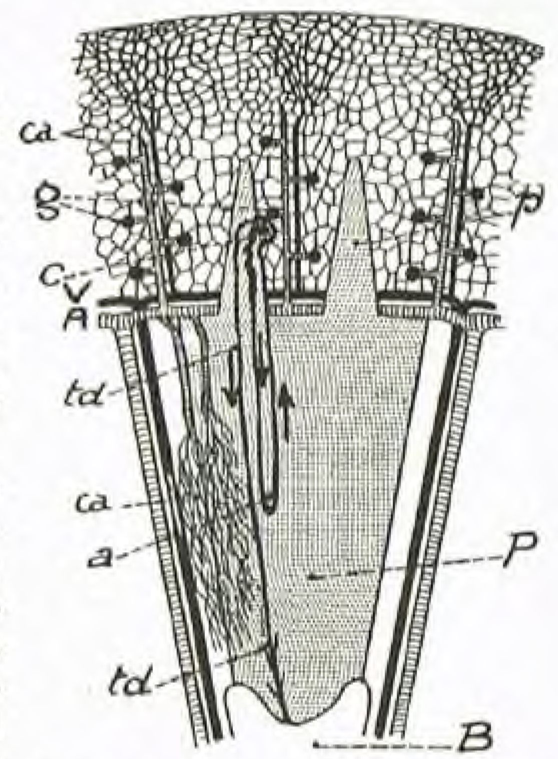
Aparato urinario. — El *aparato urinario*, situado en el abdomen, se compone principalmente de los dos *riñones*, colocados al nivel de las vértebras lumbares a cada lado de la columna vertebral y detrás del peritoneo. Los riñones tienen color rojizo, pesan 160 gramos y miden 10 centímetros de longitud, cinco de ancho y dos de espesor. Su extremidad superior tiene adheridas las cápsulas suprarrenales y su borde interno está excavado; del hilio parte el *canal excretor* o *uréter*, que tiene alrededor de 25 centímetros de longitud y va a desembocar oblicuamente en la *vejiga*. Ésta, situada por delante del *recto*, es de paredes elásticas y musculares, tapizadas en su interior por un músculo que les asegura su impermeabilidad. El canal que parte de la vejiga es la *uretra*, que está provista de un esfínter.

APARATO URINARIO: A, aorta; Ab, sección de los músculos de la pared abdominal; Ar, arteria renal; Ci, cresta iliaca; Cs, cápsula suprarrenal; R, riñón; Re, recto; U, uréter; U', nacimiento de la uretra; V, vejiga; Vc, vena cava inferior; Vi, arteria y vena iliacas; Vr, vena renal

Estructura del riñón. — En un corte longitudinal del riñón puede verse que la membrana conjuntiva externa, o cápsula, encierra dos capas: la capa *cortical* y la *medular*.

La primera está formada por gran número de pequeños elementos relacionados con una pequeña arteria: los *corpúsculos de Malpighi*; la segunda, por tubos dispuestos en grupos de 15 a 20, que forman la llamada *pirámide de Malpighi*. Los tubos se abren en el vértice de la pirámide y la orina cae así en la *pelvis* para ser excretada por los uréteres y la vejiga. Estos tubos uriníferos comienzan en la zona cortical en una ampolla que abraza el glomérulo vascular: la *cápsula de Bowmann*. El tubo se continúa por una porción ondulada que pronto desciende a la zona medular para remontar y desembocar en un *tubo de Bellini* de las pirámides. Esta parte, que es mucho más ancha que la porción descendente, posee un endotelio excretor de protoplasma estriado.

Las dos gruesas arterias renales se desprenden de la aorta descendente. Entran en el riñón por el hilio renal y suben entre las pirámides para llegar a la *arteria arciforme*, cuyas arteriolas radiales se introducen en la *cápsula de Bowmann*, donde forman un amasijo vascular arterial (el todo costituye un *corpúsculo de Malpighi*). De cada glomérulo parte una vénula que se capilariza sobre los tubos uriníferos y que contiene sangre a una presión bastante fuerte. Las prolongaciones se reúnen en la vena arciforme para formar la *vena renal*.



CORTE DE UNA PIRÁMIDE MEDULAR Y DE LA SUBSTANCIA CORTICAL: A, arterias; *a*, asa del tubo urinífero; B, pelvis; *c*, tubo contorneado; *ca*, capilares; *g*, corpúsculo; *P*, pirámide; *p*, pequeña pirámide de la substancia cortical; *td*, tubo colector; V, venas

Composición de la orina. — La orina es tóxica debido a las sales de potasio y materias colorantes que contiene; pero lo es diez veces menos que la bilis. Se encuentra en la orina agua (950 por 1 000), cloruros, sulfatos, fosfatos de sodio, de potasio y de magnesio (20 gr), urea (20 gr), ácido úrico (0,5 gr), en estado de uratos de sodio y calcio, y urobilina.

La *urea* y el *ácido úrico* son productos de desecho de las materias albuminoideas; substancias que se desdoblan en aminoácidos, leucina, tirosina y glicocola, y que luego, bajo la influencia de un fermento del hígado, dan NH_3 y carbonato de amonio $[CO^3(NH_4)_2]$, el cual produce urea $[CO(NH_2)_2]$ al perder dos moléculas de agua.

Cuando hay exceso de ácido úrico, éste se deposita en forma de agujillas en los cartílagos articulares y da lugar a la enfermedad llamada *gota*.

La orina es ácida en el hombre y los carnívoros, y alcalina en los herbívoros. Su composición varía con el régimen alimenticio y el estado de salud. En los animales ovíparos es a veces casi sólida.

Los constituyentes de la orina no se forman en los riñones, sino en otros órganos del cuerpo. En la orina pueden encontrarse productos anormales tales como la *glucosa*, que produce la diabetes o glucosuria; la *albúmina*, que indica una lesión de las paredes de los tubos uriníferos, y *cálculos uriníferos*, formados por ácido úrico, urato y fosfato amónico magnésico (enfermedad de la piedra).

Formación de la orina. — La orina se forma en dos etapas: primeramente se produce una filtración de agua y sales por el glomérulo a causa de la presión sanguínea (14 mm). Todo lo que eleva la presión sanguínea (calor, alimentos, bebidas calientes), aumenta, pues, la cantidad de orina.

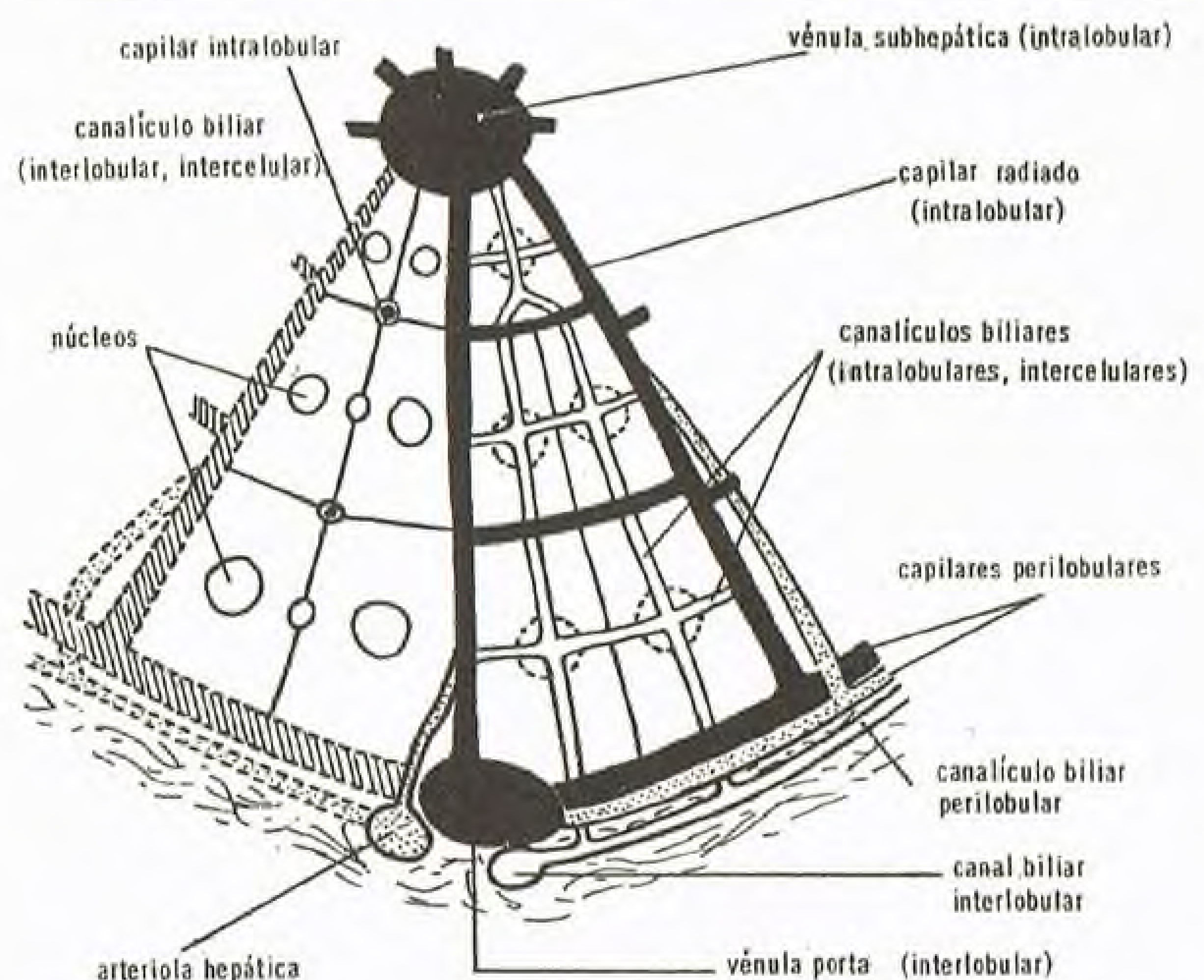
En segundo lugar se produce la extracción de urea y ácido úrico de la sangre por el epitelio de los túbulos.

El hígado

El *hígado* es una gran glándula de color rojo obscuro colocada bajo el diafragma, a la derecha. Pesa de uno y medio a dos kilogramos, y todavía más cuando está repleta de sangre. Su cara superior es convexa y la inferior tiene cuatro surcos que forman una especie de *H*, y en los cuales se sitúan la *vesícula biliar*, la *arteria hepática* y la *vena porta*. Estos surcos dividen la masa hepática en cuatro lóbulos: *derecho*, *izquierdo*, *cuadrado* y *lóbulo de Spiegel*. La sangre sale de ellos por las tres venas suprahepáticas, que van a la vena cava inferior. Los conductos hepáticos reciben la bilis, que se vierte en la *vesícula biliar* por el *canal cístico* y en la *ampolla de Vater* por el *colédoco*.

La delgada membrana conjuntiva que envuelve el hígado penetra en su masa y la divide en pequeñas granulaciones del tamaño de un grano de mijo *(lobulillos hepáticos)*, en cuya periferia se encuentra una arteriola hepática. Una pequeña vena lleva la sangre a la vena cava inferior. Las células que constituyen la masa del lobulillo tienen uno o dos núcleos y granulaciones de grasa, glucógeno y bilis.

El hígado es un órgano digestivo que favorece la absorción de las grasas y guarda en reserva el almidón animal o glucógeno; es también



Segmento del corte transversal de un lóbulo hepático

un órgano antitóxico que destruye en el tubo digestivo las toxinas de las bacterias e incluso ciertos venenos; destruye los glóbulos rojos caducos, retiene su hierro, y produce, a partir de las materias azoadas, urea, que será eliminada por los riñones.

El hígado elimina alrededor de un kilogramo de bilis por día; ésta es de color amarillo oro, pero después se transforma en rojiza y verdosa. Encierra aproximadamente 150 gramos de substancias sólidas por cada 1 000: glicocolato y taurocolato de sodio, colesterina. Ésta, poco soluble, se aglomera a veces en los canales o la vesícula en concreciones de uno a dos centímetros, las cuales provocan los cólicos hepáticos.

La bilis provoca la contracción de las vellosidades intestinales, impide la putrefacción de los alimentos, y facilita la caída de las células epiteliales y su sustitución por células jóvenes. Mediante el taurocolato de sodio, la bilis provee al vello del azufre indispensable para su vida.

Gracias al glucógeno que almacena, el hígado puede enviar a los músculos la cantidad que éstos necesitan para el trabajo muscular (la sangre no encierra más que 1,5 gr de glicógeno por litro).

Calor animal

Nuestro cuerpo produce constantemente *calor:* a pesar del calor irradiado, y de las demás causas de pérdidas, su temperatura permanece constante. El calor se debe principalmente a las oxidaciones y otras reacciones químicas. La temperatura del cuerpo humano es de 37,5 grados centígrados, con oscilaciones de algunas décimas. La temperatura superior a los 38° C se llama *fiebre*. En las aves, la temperatura alcanza 44° C. Los mamíferos y las aves son llamados animales de sangre caliente, y de temperatura constante u *homeotermos*.

Todos los demás animales, reptiles, batracios, peces e invertebrados producen mucho menos calor; su temperatura sobrepasa en sólo medio grado la del medio ambiente. Su resistencia al frío es mucho mayor. Estos animales son llamados de sangre fría o de temperatura variable.

Pueden medirse las temperaturas por medio del termómetro clínico, pero sólo con una aproximación de 1/10 de grado. Con las agujillas termoeléctricas se ha podido determinar hasta 1/4 000 de grado, y con el *bolómetro de Langley* un 1/7 000. Se ha podido así establecer la topografía térmica del cuerpo: la temperatura tiene su máximo en el hígado (38° C) y en la aurícula derecha (38,8° C).

Los azúcares, grasas y peptonas, alimentos que se oxidan con desprendimiento de calor, reciben el nombre de *termógenos*.

Los alimentos azoados producen poco calor en sus sucesivas transformaciones.

Un adulto, en reposo, produce de 2 600 a 2 700 grandes calorías; trabajando, puede alcanzar 3 800. Durante el sueño, el calor producido es mínimo (36 grandes calorías por hora).

Utilización del calor. — Este calor es empleado para templar los alimentos ingeridos (2,6%), el aire inspirado (2,6%), así como para compensar el enfriamiento producido por la evaporación pulmonar y cutánea (14,7%); el resto (80%), se pierde por irradiación o es transformado en trabajo por los músculos.

Aparato de regulación térmica. — La reacción inconsciente de defensa contra el frío comienza por un aumento en la absorción de oxígeno, lo que produce una mayor formación de anhídrido carbónico y de calor. Al mismo tiempo, los vasoconstrictores reducen la circulación cutánea.

La reacción inconsciente contra el calor tiene lugar al disminuir la cantidad del oxígeno y de los alimentos necesarios, y el aumento de la secreción de las glándulas sudoríparas (enfriamiento por evaporación del sudor). El hombre puede resistir un calor seco de 115° C durante un cuarto de hora.

A. MENEGAUX

Glándulas de secreción interna

Generalidades. Observaciones preliminares. — **Glándulas de secreción interna mixtas:** Hígado. Páncreas. Duodeno. — **Glándulas endocrinas puras:** Hipófisis: Lóbulo anterior. Lóbulo intermedioposterior. Glándulas suprarrenales: Parte corticosuprarrenal. Parte medulosuprarrenal. Glándulas paratiroides. Glándula tiroides: Funciones de la glándula tiroides. Interrelación con las otras glándulas. Glándulas genitales: Endocrinología del aparato genital masculino. Caracteres sexuales secundarios. Endocrinología del aparato genital femenino. Diagnóstico del embarazo. Inversión del sexo de las hormonas. Acción de la luz sobre el funcionamiento de los órganos genitales

Generalidades. — La noción de *glándulas de secreción interna*, introducida en la ciencia hacia 1850, se debe a Claude Bernard. Se sabía que el hígado posee una secreción externa, la bilis, que se vierte en el intestino delgado por el colédoco. Pero Claude Bernard demostró que el hígado elaboraba en sus células otra substancia (glucógeno) que puede transformarse en glucosa, y pasar de los capilares de la glándula a las venas suprahepáticas, y por tanto a la circulación. Así, pues, el hígado es una *glándula mixta* que posee, a la vez, una secreción externa y otra interna.

Hay otras glándulas (tiroides, paratiroides, suprarrenales, hipófisis, etcétera) que no presentan ningún canal excretor: el producto que elaboran lo vierten directamente en la sangre. Son las verdaderas *glándulas cerradas* o *glándulas de secreción interna*.

Estas glándulas han adquirido desde hace algunos años gran importancia desde el triple punto de vista fisiológico, clínico y terapéutico.

Constituyen, junto con el sistema nervioso, un modo de relación entre las diversas células de los tejidos. Las *hormonas* que segregan influyen sobre aquellos órganos que poseen una sensibilidad electiva para ellas. Su déficit o insuficiencia pueden acarrear transtornos muy graves; a veces de orden psíquico. De este modo, las hormonas sexuales confieren al varón un comportamiento psíquico muy distinto del de la hembra.

Muchas de estas hormonas han sido ya aisladas, y se ha podido también hacer la síntesis de gran número de ellas. La terapéutica, naturalmente, ha aprovechado estos productos rápidamente; pero con gran prudencia.

En efecto, existe un hecho muy grave que puede producirse cuando, queriendo suplir el déficit de una glándula de secreción interna, se inyecta al enfermo la hormona que ella segrega; sin duda, se obtiene momentáneamente una mejoría; pero en cuanto cesan las inyecciones, el enfermo empeora. En efecto, la secreción de una de sus glándulas *es frenada por su propia hormona.*

Observaciones preliminares. — Como sólo nos referiremos a los aspectos fundamentales de este tema, no trataremos, pues, la biología de los órganos siguientes:

1° El *timo*, que, desarrollado en los jóvenes, sufre una cierta regresión, e incluso puede atrofiarse en los adultos. Es un órgano linfoide, situado en la base del cuello, que parece proveer al organismo de nucleoproteínas. No se ha podido aislar ninguna hormona proveniente de este órgano;

2° La *epífisis*, que, situada en la parte superior del cerebro, es un pequeño órgano cónico *(glándula pineal)* que tiene al parecer una acción opuesta a la de la hipófisis;

3° El *bazo*, órgano linfoide, verdadero cementerio de los glóbulos rojos desgastados, que elabora también glóbulos rojos jóvenes y constituye principalmente un almacén para estas células. La acción del bazo no parece ser muy importante: su extirpación no altera la salud del individuo, y es posible privar de este órgano a sucesivas generaciones de animales sin perturbar su desarrollo y su salud.

Glándulas de secreción interna mixtas

Hígado. — El hígado tiene una doble función: segrega la bilis en el intestino *(líquido digestivo)*, y elabora el glucógeno por medio de los materiales de que le provee la digestión *(azúcares, grasas, prótidos)*. El glucógeno vuelve luego a la sangre por las venas suprahepáticas, en tal proporción que mantiene a un nivel constante el azúcar de la sangre *(glucemia general)*.

Esta *función glucogénica* del hígado, descubierta por Claude Bernard, fue la primera secreción interna conocida. El ilustre fisiólogo consideró las secreciones internas como de naturaleza nutritiva. Sin embargo, la cuestión ha evolucionado considerablemente desde esa época (1850). Por ejemplo, se sabe hoy que es la misma célula del hígado la que elabora las dos secreciones, *exocrina* y *endocrina*, y que no ocurre lo mismo en el páncreas.

Páncreas. — Esta glándula, situada en la concavidad del duodeno, detrás del estómago, encierra dos grupos de células distintas:

1° Las células de tipo secretorio común, ordenadas alrededor de canalículos, segregan el *jugo pancreático:* jugo digestivo muy importante.

que, en colaboración con la bilis y el jugo intestinal, actúa en el duodeno sobre los prótidos, las grasas y los azúcares;

2° Los *islotes de Langerhans*, formados por células especiales con granulaciones protoplasmáticas, que vuelcan su secreción, la *insulina*, substancia proteica sulfurada, en los capilares sanguíneos.

La insulina posee funciones de importancia especial. Contribuye de manera poderosa a regular la concentración de glucosa en la sangre a través de un mecanismo complicado, provoca también la fijación de glucógeno en el hígado *(glucogenopexia)* y produce luego la descarga glucémica. El exceso de azúcar en la sangre frena la secreción de insulina.

La insulina desempeña un papel muy importante en el tratamiento de la diabetes: su combinación una vez cristalizada con el cinc —la más utilizada— produce un efecto más eficaz y prolongado *(insulina retardada)*.

En psiquiatría se utiliza también la insulina a fin de producir un déficit de azúcar *(hipoglucemia)*, que determina un coma temporal, beneficioso para ciertos enfermos mentales.

Duodeno. — La porción inicial del intestino delgado segrega el *jugo intestinal* o *entérico*, que coopera en la digestión con la bilis y el jugo pancreático *(secreción externa)*. El duodeno posee también una secreción interna: en efecto, cuando los alimentos impregnados por el jugo gástrico ácido franquean el píloro, excitan la pared del duodeno, que segrega entonces una substancia particular, la *secretina*, que pasa a la sangre y provoca la secreción del páncreas.

La secretina provoca, además, la secreción de la bilis y del jugo entérico. Se sabe que existe una verdadera *colaboración* de estos tres jugos, que se complementan para operar la digestión de los tres componentes de los alimentos: proteínas, hidratos de carbono y grasas.

Glándulas endocrinas puras

Hipófisis. — Es una pequeña glándula que tiene en el hombre el tamaño de un hueso de cereza; cuelga de la parte inferior del cerebro, unida a él por el tallo pituitario, y está incluida en una cavidad ósea: la *silla turca* del hueso esfenoides.

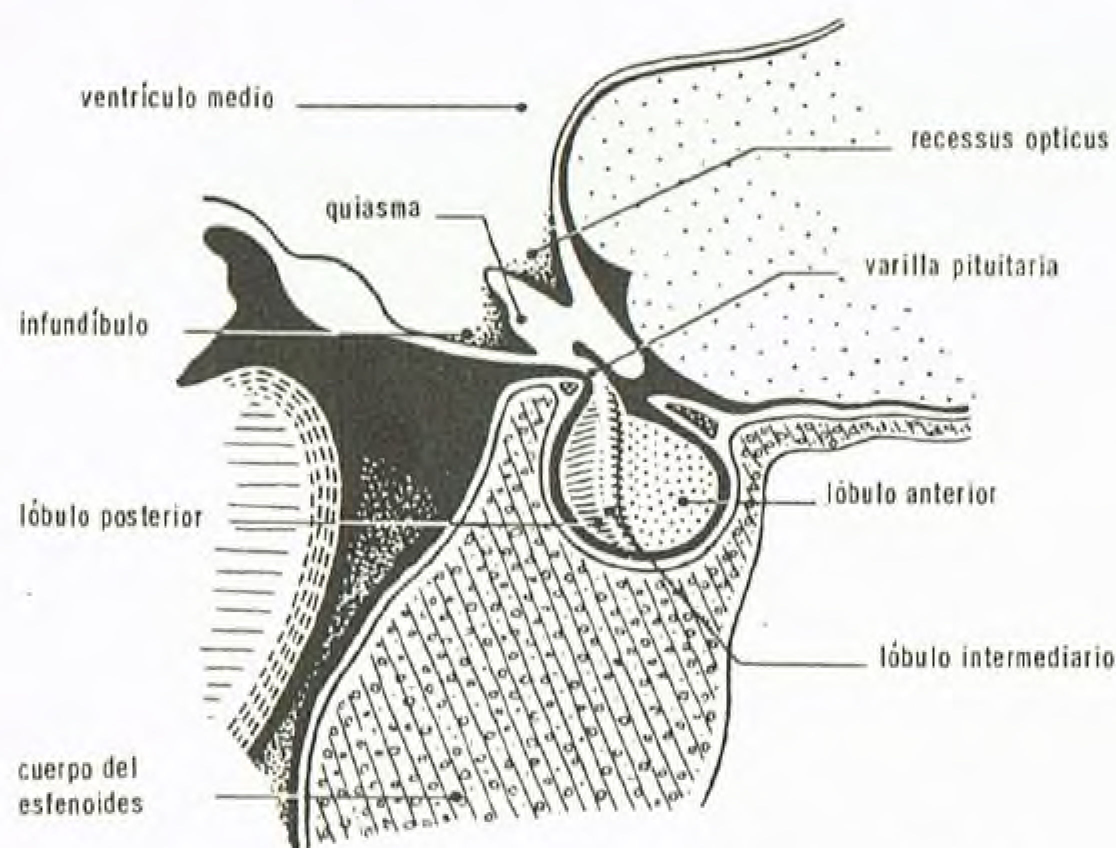
Recientes trabajos han demostrado que este pequeño órgano desempeña funciones importantísimas desde el punto de vista fisiológico, y por ello ha sido llamado *cerebro endocrino, llave maestra del sistema endocrino*, etc.

Cuando se examina este órgano en cortes microscópicos se comprueba que está formada por tres partes: 1° el lóbulo anterior; 2° el intermedio; 3° el posterior.

Lóbulo anterior. — Sus funciones son muy importantes: este lóbulo influye sobre casi todas las glándulas endocrinas. Las hormonas que vierte en la corriente sanguínea se dividen en tres grupos:

a) La hormona del *crecimiento* (somatotrofina), que actúa sobre los cartílagos de conjunción de los huesos largos. En altas dosis produce el *gigantismo;*

b) Las hormonas *metabólicas*, que intervienen en el metabolismo de los azúcares (glúcidos), de las grasas (lípidos) y de las substancias azoadas (prótidos), metabolismo en relación estrecha con el crecimiento;



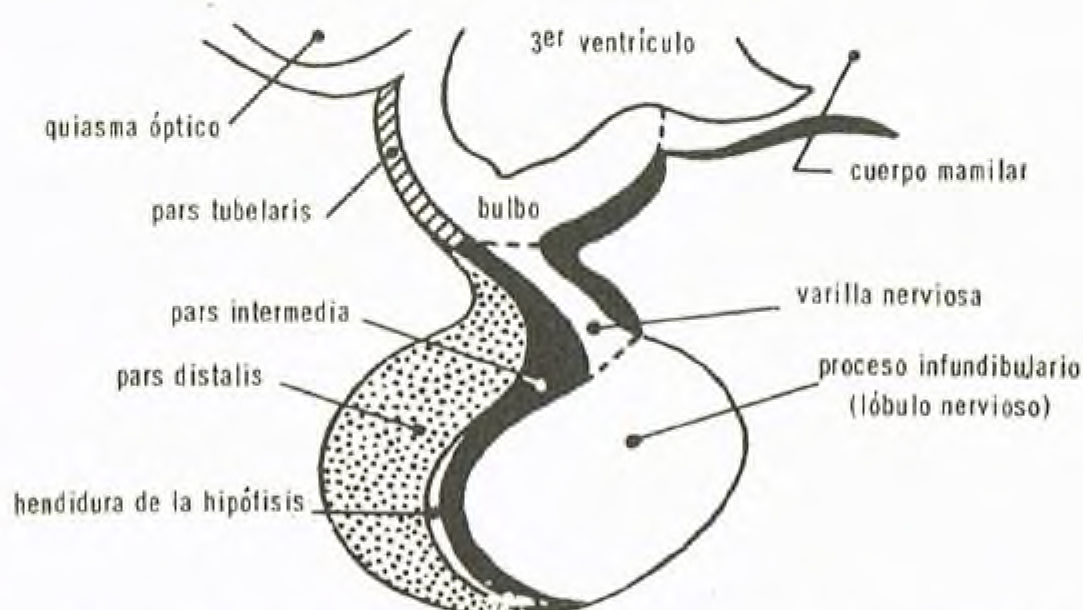
Sección sagital de la hipófisis (esquema tomado de Rouvière)

c) Las *estimulinas endocrinas*, entre las cuales podemos distinguir:

la *tirotrofina*, que exalta la secreción del tiroides y puede provocar, cuando se produce en exceso, el bocio exoftálmico;

las *gonadotrofinas (A y B)*, que actúan sobre los órganos genitales del macho *(espermatogénesis)* y sobre el aparato genital de la mujer (secreciones *folicular* y *luteínica*);

la *corticotrofina*, o A.C.T.H. *(adreno-corticotrofico-hormona)*, que gobierna la formación de las corticoesteroides de la glándula suprarrenal.



Hipófisis de macaco (según Simonnet y Sainton)

Por último, se atribuyen al lóbulo anterior de la hipófisis acciones sobre el sueño y la regulación térmica.

Lóbulo intermedioposterior. — Reunimos estos dos lóbulos, aunque de origen embriológico diferente, porque su acción fisiológica no puede ser separada. Su influjo, que es, evidentemente, menos extenso que el de la anterohipófisis *(lóbulo anterior)*, produce dos acciones principales:

1° Contrae el músculo liso del útero, con lo que desempeña un importante papel en el parto;

2° Tiene igualmente bastante importancia en lo que se refiere a la eliminación del agua. Su extirpación o alteración patológica acarrea la diabetes insípida (eliminación exagerada de agua sin aparición de azúcar en la orina).

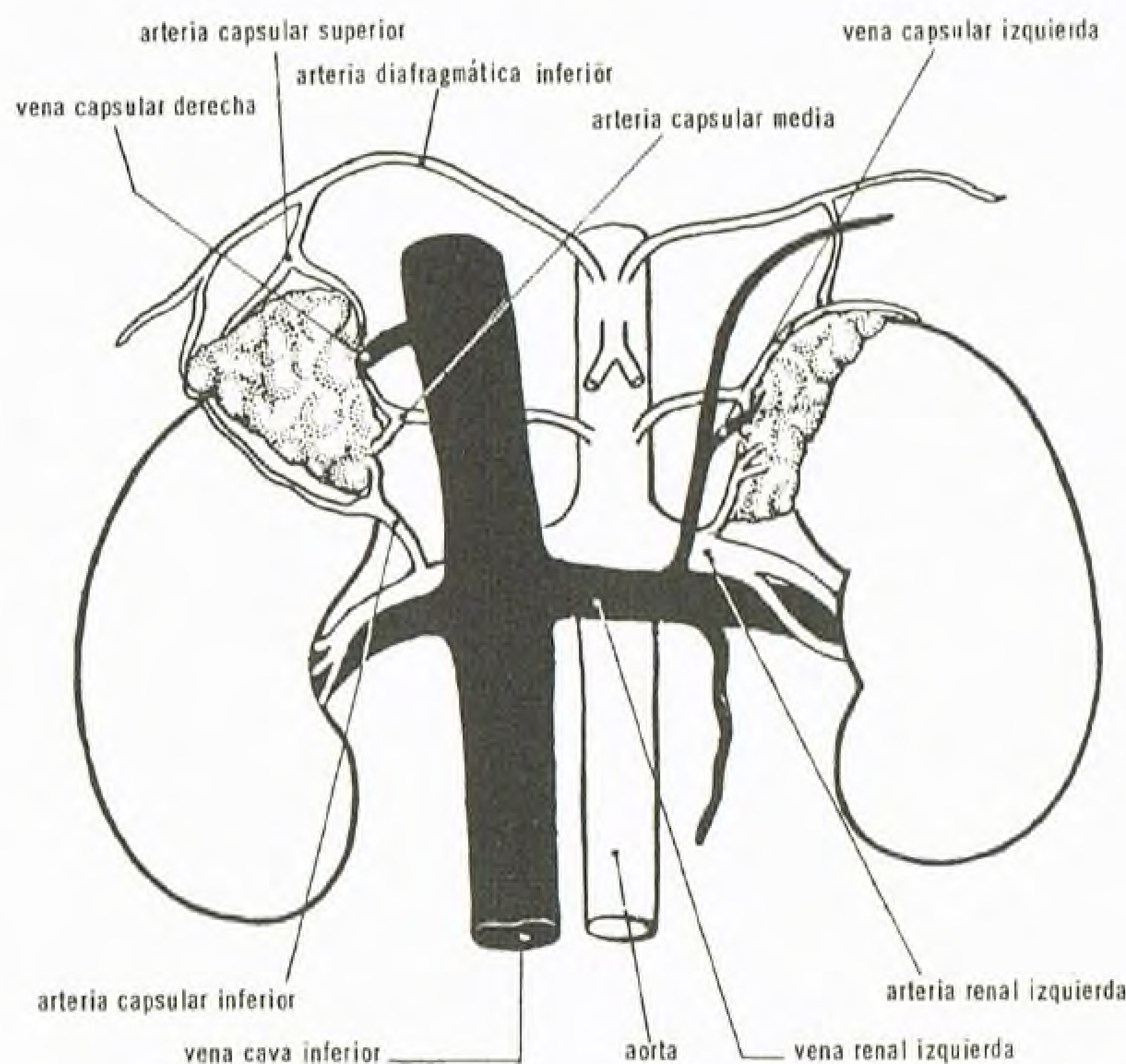
Glándulas suprarrenales. — Se trata de pequeñas glándulas que coronan el polo superior del riñón. Son conocidas desde 1543 (Eustaquio), pero su papel fisiológico sólo ha sido estudiado a partir de 1853, cuando Addison describió la enfermedad que lleva su nombre.

Estas glándulas comprenden dos partes distintas, la *cortical* y la *medular*, que tienen estructuras histológicas muy diferentes e incluso orígenes distintos. En los peces se mantienen separadas, correspondiendo los *cuerpos interrenales* a la parte cortical, y derivan del epitelio celómico. Sus funciones son también muy diferentes.

Parte corticosuprarrenal. — Es la parte más importante de estas glándulas. Su alteración produce el *sindrome de Addison*, caracterizado por una coloración oscura de los tegumentos *(melanodermia)*, hipotensión, astenia, hipotermia, y finalmente por un debilitamiento de las defensas del organismo frente a las infecciones.

La extirpación total de las glándulas suprarrenales acarrea rápidamente la muerte. Una extirpación parcial que deje subsistir la parte cortical es, sin embargo, posible.

Hormonas. — Stewart y Rogoff aislaron en 1927 la *cortina*, cuya síntesis fue realizada en 1934 por Kendall. Más tarde, los químicos han



Cápsulas o glándulas suprarrenales: emplazamiento y vascularización

llegado a separar en la cortina veintiocho cuerpos químicamente definidos. Citemos algunos de los más importantes que los fisiólogos distinguen:

1° Una hormona que produce la transformación de los prótidos en azúcares y activa el catabolismo (utilización de las reservas nutritivas);

2º La hormona *androgenoproteica*, que interviene en la formación de reservas de proteínas y también en la esfera sexual;

3º La *desoxicorticosterona*, que interviene en el metabolismo del agua y de las sales.

Correlación de la corticosuprarrenal. — La corticotrofina (A.C.T.H.) anterohipofisaria actúa sobre la hormona que gobierna el metabolismo de los prótidos y de los glúcidos. La hormona luteinizante de la hipófisis influye sobre la hormona androgenoproteica.

Parte medulosuprarrenal. — La función fundamental de esta glándula es la secreción de *adrenalina*, que desempeña un papel muy importante en el organismo. En 1856, Vulpian observó la coloración verde que producía el percloruro de hierro aplicado sobre la medula suprarrenal.

Embriológicamente, la medula suprarrenal proviene del tubo nervioso primario del feto, que formará luego la medula espinal; tiene, pues, el mismo origen que los ganglios del sistema nervioso simpático. Este origen explica que el nervio esplácnico mayor rija la secreción de adrenalina.

Adrenalina. — Es la primera hormona que fue aislada: Takamin y Aldrich la obtuvieron cristalizada en 1901. Provoca una vasoconstricción de las arterias (las arterias coronarias constituyen una excepción), de la que resulta una hipertensión generalizada.

La adrenalina produce la erección del vello, una cierta disminución del ritmo cardiaco, la inhibición del peristaltismo intestinal, y también la transformación en el hígado del glucógeno en glucosa.

Existe una adrenalina fisiológica; la glándula suprarrenal segrega constantemente la cantidad de adrenalina necesaria para mantener el *tono* conveniente de las arterias. Los tumores de esta glándula producen un síndrome de hipertensión paroxística.

Si se extirpa una glándula suprarrenal, la que queda se hipertrofia. Si se extirpa la segunda cápsula bastante tiempo después, el animal sobrevive a veces: en efecto, en la región carotídea existe el *órgano de Zuckerkandl*, que segrega adrenalina.

Glándulas paratiroides.

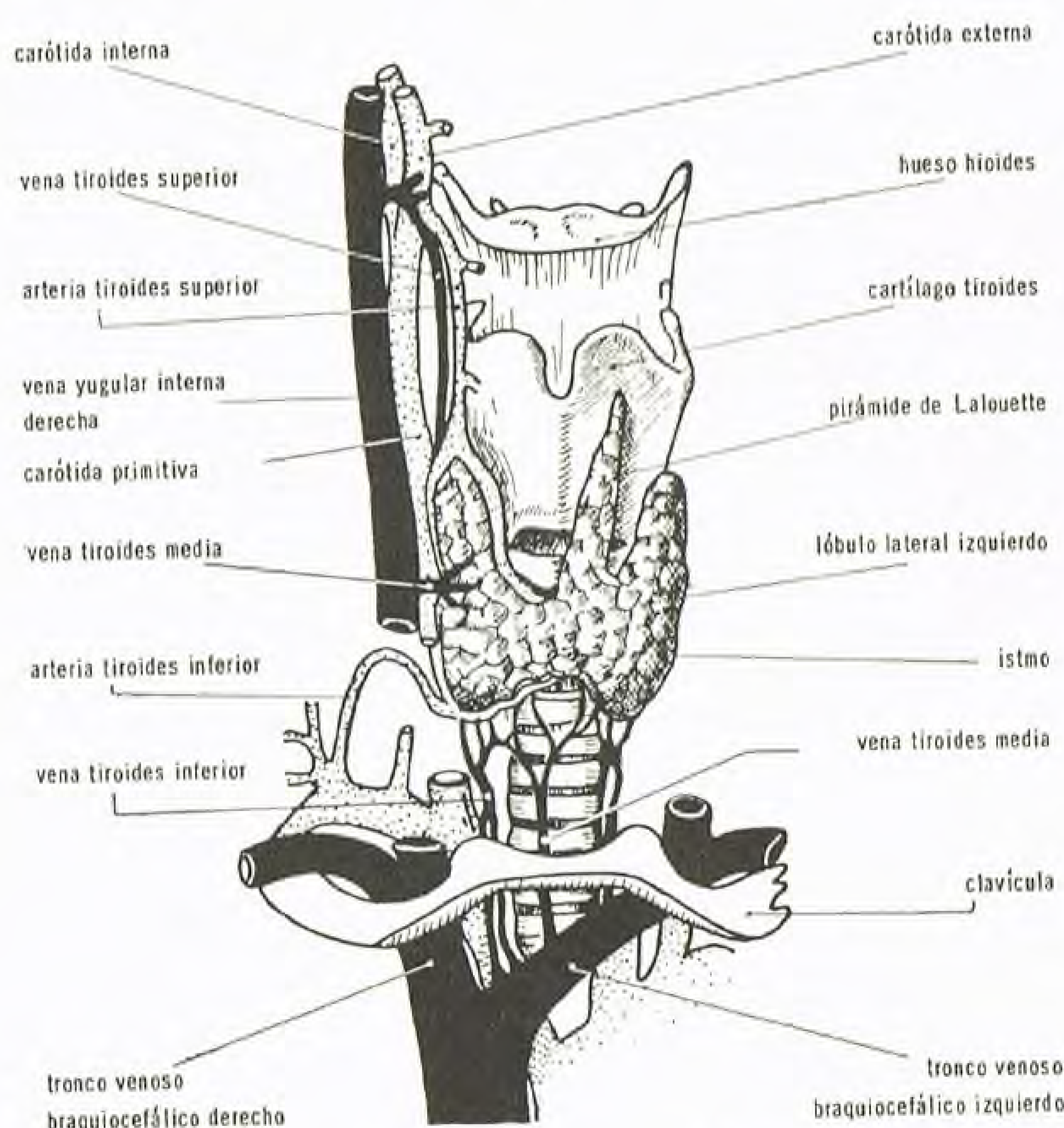
— Estas glándulas, ignoradas durante mucho tiempo por estar incluidas en el parénquima de la tiroides, fueron descubiertas por Sandström en 1880. En el hombre son cuatro y pesan en total 0,12 gramos. Su gran importancia funcional contrasta con su exigüidad.

La extirpación total de las paratiroides produce una baja de calcio sanguíneo, una elevación de la proporción de fósforo y crisis de *tetania*, accidentes que indican la intervención de las paratiroides en el metabolismo del calcio. Los síntomas observados en la enfermedad de Recklinghausen confirman este hecho: consisten en un aumento de las sales de calcio en la sangre y en la formación de nódulos calcáreos en el sistema reticuloendotelial.

En 1923, Collip descubrió la *parathormona*, substancia de índole proteica, pero serán necesarias nuevas investigaciones para precisar su constitución. Además de su acción sobre el metabolismo del calcio, la parathormona cataliza al parecer la formación de la creatina, que desempeña un importante papel en la contracción muscular.

Desde que se han utilizado en la investigación cuerpos radiactivos, se sabe que los huesos del esqueleto están en constante transformación, lo que permite suponer una importancia todavía mayor de las glándulas paratiroides.

La anterohipófisis ejerce su acción sobre las paratiroides. Por otra parte, según una regla bastante general, puede afirmarse que la hipocalcemia estimula la paratiroides, en tanto que la hipercalcemia frena su secreción.



El cuerpo tiroides y su vascularización

Glándula tiroides.

— Es un órgano bilobulado, en forma de dos pequeños escudos, colocados delante de la laringe y de la tráquea. En el hombre pesa de 25 a 50 gramos. Nace de un saliente de la pared ventral de la faringe. Histológicamente está constituido por vesículas o folículos, los cuales envuelven una cavidad que encierra una substancia coloide rodeada de células. Estos folículos son de dos clases:

1º Los *grandes folículos*, que pueden llegar a tener 100 micras (visibles por lo tanto a simple vista), están limitados por un epitelio aplanado. Denotan un estado de hipoactividad de la glándula;

2º Los *pequeños folículos* presentan vacuolas dentro de un coloide poco abundante. Están limitados por un epitelio cilíndrico, y son característicos de una gran actividad glandular. El coloide que contiene la hormona tiroidea es elaborado por el epitelio y se almacena en la cavidad vesicular. Más tarde el coloide es excretado por el epitelio hacia los numerosos capilares que rodean los folículos.

Hormona. — Se sabe que contiene yodo. En efecto, la introducción en el organismo de yodo radiactivo ha permitido precisar su fijación en la glándula tiroides. Una serie de trabajos ha conducido al aislamiento del compuesto yodado activo, la *tiroxina*, derivada de la diiodotirosina, cuya síntesis fue realizada en 1927 por Harrington y Barges.

Funciones de la glándula tiroides. — Son de mucha importancia; el mal funcionamiento de esta glándula provoca graves afecciones. En los animales privados de tiroides se produce un grave retraso del desarrollo. La ablación de la glándula detiene en los batracios el proceso de metamorfosis.

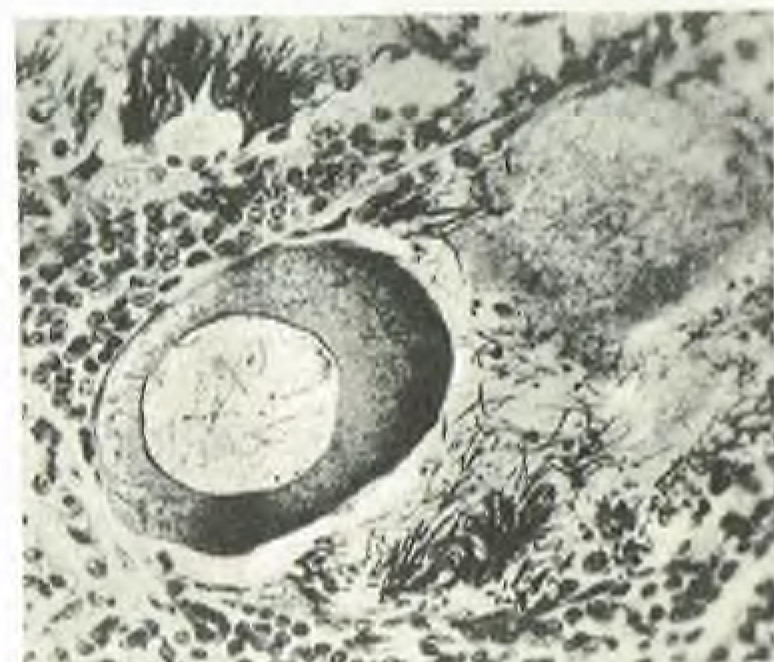
En el hombre, el hipofuncionamiento tiroideo provoca el *mixedema* (enfermedad muy común en Suiza antiguamente, en los valles cuyas aguas no contenían yodo), que se caracteriza por el espesamiento de los tegumentos, debido a infiltraciones edematosas, y por la perturbación del crecimiento, que resulta de lesiones óseas. Los órganos genitales permanecen atrofiados *(infantilismo)*, y se comprueba también un descenso importante del nivel de inteligencia. En esta enfermedad, las oxidaciones están muy perturbadas (disminución del metabolismo basal).

El hiperfuncionamiento del tiroides es producido en el hombre por la hipertrofia de la glándula, que provoca la *enfermedad de Basedow* (1840), caracterizada por irritabilidad, taquicardia (aceleración de los latidos cardiacos), exoftalmía (a veces los párpados no pueden cubrir el globo ocular), y finalmente por un aumento importante de las oxidaciones.

Interrelación con las otras glándulas. — Señalaremos sólo varias de ellas: la *anterohipófisis* segrega la tirotrofina; la tiroides actúa sobre las glándulas sexuales, posiblemente en forma indirecta (como intermediaria de la hipófisis). Existen también interrelaciones entre las glándulas suprarrenales, el páncreas y la tiroides. Por último, se supone que la hormona tiroidea es la que transforma el caroteno en vitamina A.

Glándulas genitales.

— En realidad, las glándulas genitales son glándulas de secreción interna mixtas, que presentan características especiales. Son mixtas porque el testículo segrega, a la vez, espermatozoides *(secreción externa)* y hormonas que condicionan los caracteres sexuales secundarios. Del mismo modo, el ovario elabora los óvulos y otras numerosas y complejas secreciones internas.



Corte de un testículo de sapo que muestra la presencia de óvulos en los canales seminíferos (*Fot. Dr. Elkan*)

Endocrinología del aparato genital masculino. — El *testículo* está formado por dos partes:

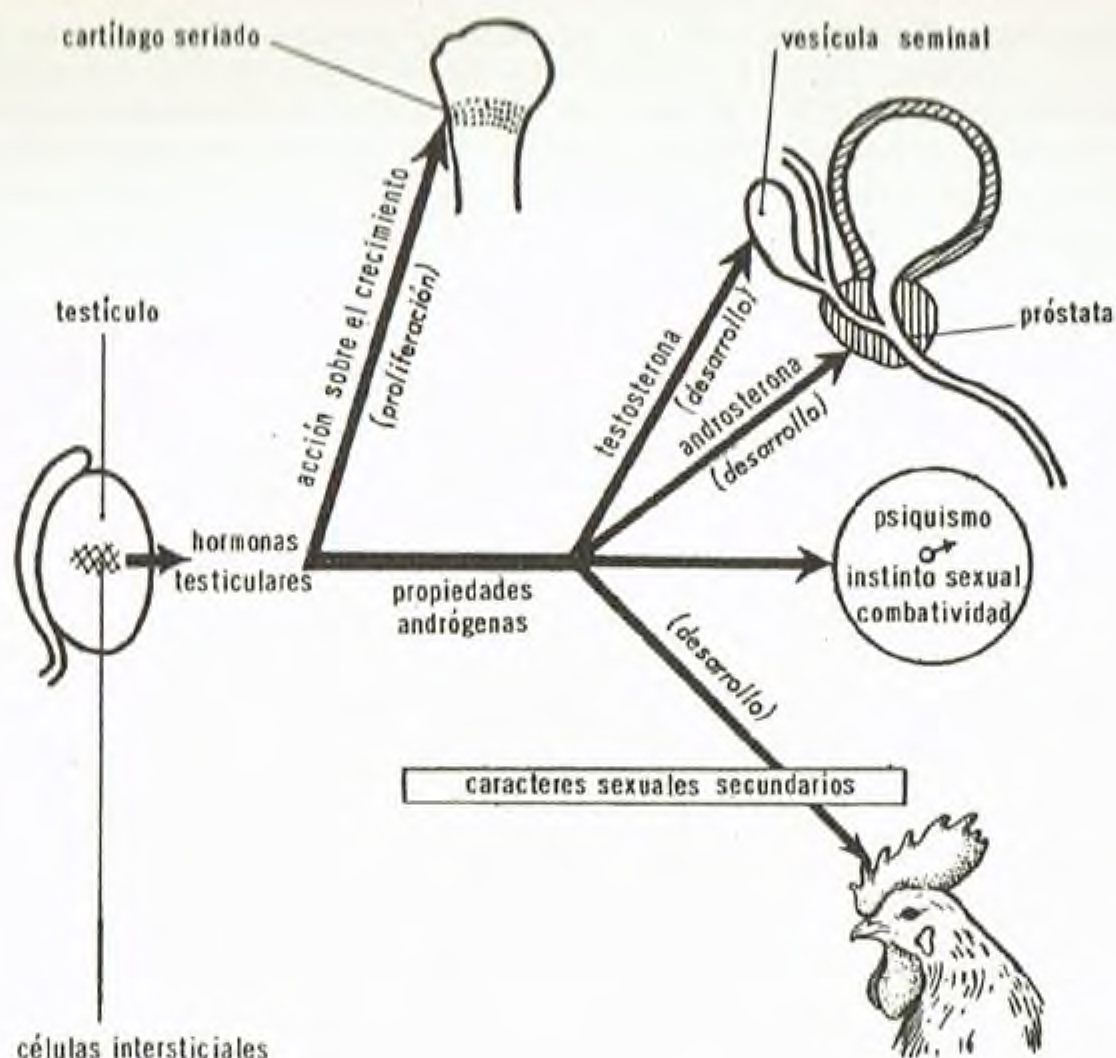
1º Los *tubos seminíferos*, que forman los espermatozoides que intervendrán en la fecundación (formación gobernada por la gonadotrofina A);

2º Las células *intersticiales* o *diastemáticas* (Bouin y Ancel), dependientes también de la hipófisis a través de la gonadotrofina B, que segregan las hormonas particulares del testículo *(androsterona* y *testosterona)*.

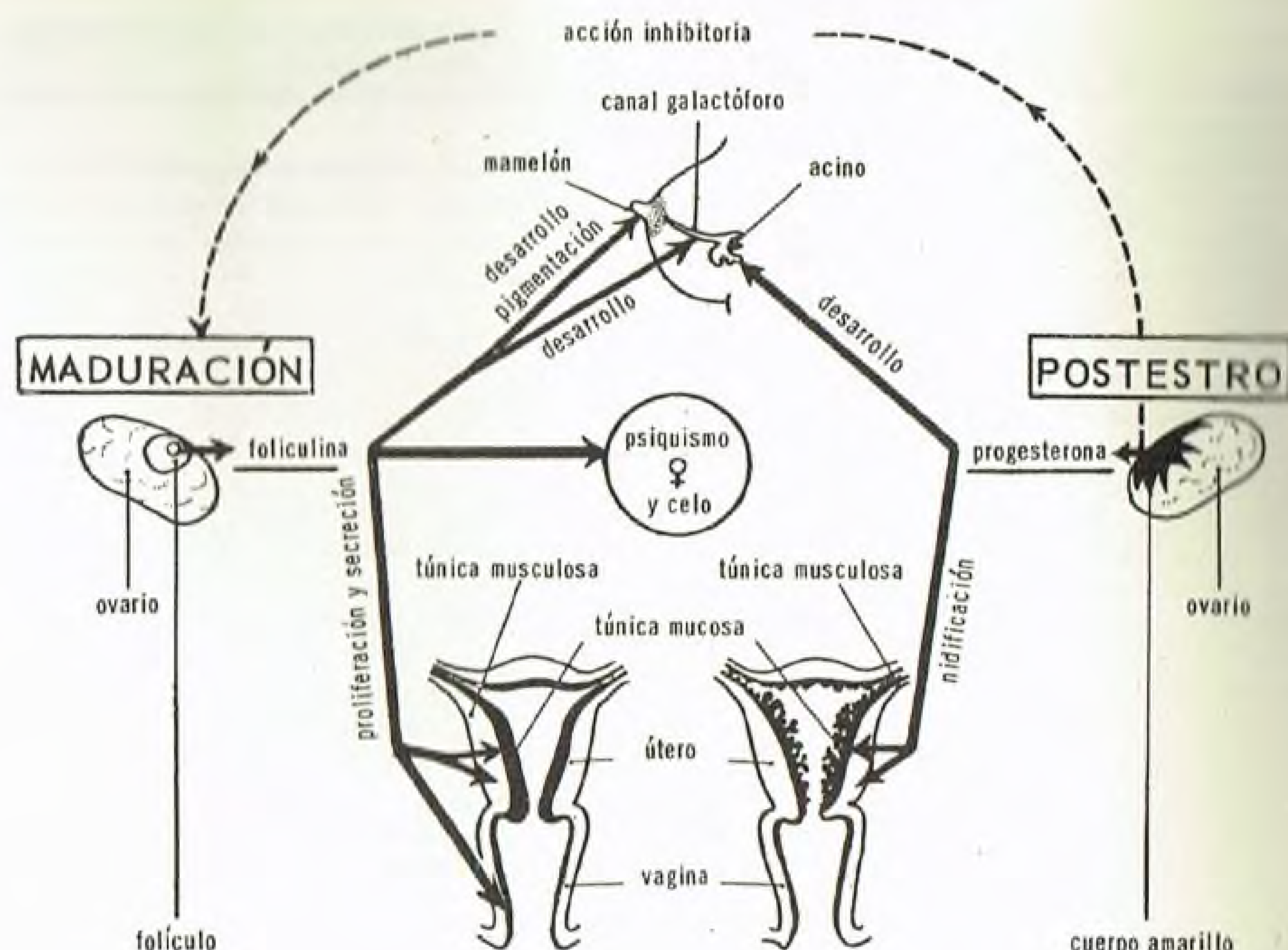
Caracteres sexuales secundarios. — En el momento de la pubertad, los testículos, que continúan desarrollándose, comienzan a verter en la sangre su secreción interna. Se producen entonces importantes modificaciones en las vías genitales: canal deferente, vasículas seminales, epidídimo y órganos genitales externos.

Al mismo tiempo aparecen y se desarrollan los llamados *caracteres sexuales secundarios:* barba y cambio del timbre de la voz en el hombre, aparición de melena en el león, de cuernos en el ciervo, etc. Estas modificaciones son particularmente evidentes en ciertos casos de aves: el gallo, por ejemplo, difiere de la gallina por su plumaje brillante (esclavina, lanceta, plumas de la cola), su canto, su cresta, sus espolones, su porte altivo y violento. Si se practica en él la ablación testicular, el gallo se trasforma en *capón*, deja de cantar, pierde una parte de su plumaje, se atrofia su cresta y es vencido por las gallinas. Si a este capón se le injerta un testículo de gallo, recobra todos los atributos del macho. No queda duda, pues, de que la secreción interna testicular es la que provoca esos caracteres.

Estos resultados espectaculares han inducido a ciertos médicos a intentar rejuvenecer a los ancianos por medio de injertos testiculares o inyecciones de hormonas. Por ahora, desgraciadamente, la leyenda de Fausto es todavía una leyenda.



Acción de las hormonas sexuales masculinas



Acción de las hormonas sexuales femeninas

Endocrinología del aparato genital femenino. — Como el testículo, el *ovario* es una glándula mixta. Forma los *óvulos*, que, fecundados por los espermatozoides, darán lugar al *embrión*.

Cada mes, en la mujer, un *folículo de De Graaf* madura, alcanza de uno a dos centímetros de diámetro y expulsa su óvulo en las trompas alrededor de catorce días después de las últimas reglas. Es el período de "fecundidad máxima" en la mujer.

No debe sorprender que la endocrinología del aparato genital femenino sea mucho más compleja que la del masculino; en efecto, el femenino comprende la *formación* del óvulo por el *ovario;* la de la *placenta* en los animales superiores; la *gestación;* el *parto*, y finalmente, en los mamíferos, la *lactancia*. De esas funciones sólo expondremos los hechos esenciales.

Ovario. — Elabora el *folículo de De Graaf*, que encierra el *óvulo* (la hipófisis interviene en este acto por mediación de las *gonadotrofinas).* El folículo segrega la *foliculina*, que está acumulada en el líquido folicular.

Después de la expulsión del óvulo, el folículo se transforma en *cuerpo amarillo* (que es transitorio si no hay fecundación y permanente si ésta se ha producido), el cual segrega una hormona particular, la *progestina* o *progesterona*, que prepara la mucosa uterina para la nidación del huevo (existe sólo en los mamíferos placentarios).

Nidación del huevo. — Está favorecida por la *progesterona* segregada por el ovario; su acción ha sido preparada por la *foliculina.*

Placenta. — Elabora *foliculina*, algo de *progesterona* y *hormonas gonadotropas.*

Gestación. — Desde Galeno se sabe que "el estado de gravidez está gobernado por el sistema hipófisis-cuerpo amarillo-placenta".

Feto. — El feto segrega también hormonas incluso dentro del útero: insulina, glucosa.

Parto. — La posterohipófisis segrega una hormona que excita las contracciones uterinas. Se pensaba, pues, que desempeñaba un papel importante en el parto. Actualmente, no obstante, se ha revisado esta opinión y se cree que son las hormonas del ovario las que intervienen: la *foliculina* excitando las contracciones, y la *progesterona* inhibiéndolas.

Lactancia. — En el momento de la pubertad, la glándula mamaria de la hembra, hasta entonces en reposo, se desarrolla bajo el influjo de una *hormona anterohipofisaria* y de la *foliculina.*

Hacia el momento del parto, dos hormonas entran en juego: una hipofisaria, la *prolactina*, y otra corticosuprarrenal, la *cortilactina.*

Para que la secreción láctea persista, es necesario que intervenga una excitación mecánica, la *succión* del pezón por el recién nacido, que provoca un acto reflejo.

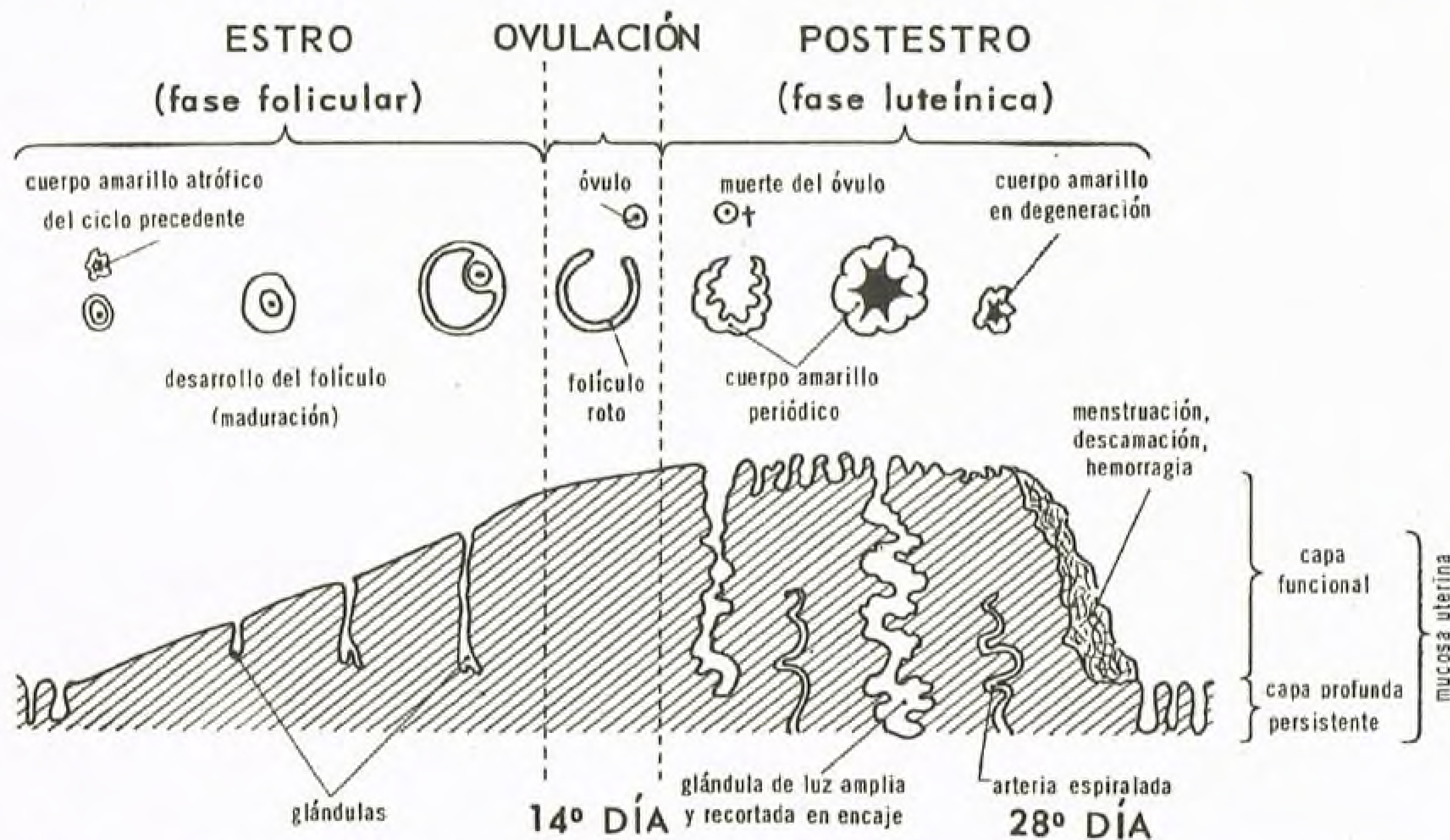
Diagnóstico del embarazo. — Se utilizan numerosos métodos. Uno de los mejores es el de Friedman.

El método se basa en el hecho que cuando el huevo nida en la pared del útero, ciertas hormonas pasan en abundancia a la sangre. Se inyectan entonces 2 cm^3 de orina de la mujer, cuyo embarazo desee diagnosticarse, en la vena de la oreja de una coneja *impúber;* 36 horas después de la inyección, se comprueba si el ovario de la coneja presenta unos importantes folículos obscuros del tamaño de un grano de mijo. Si la mujer no está embarazada, estos folículos no existen.

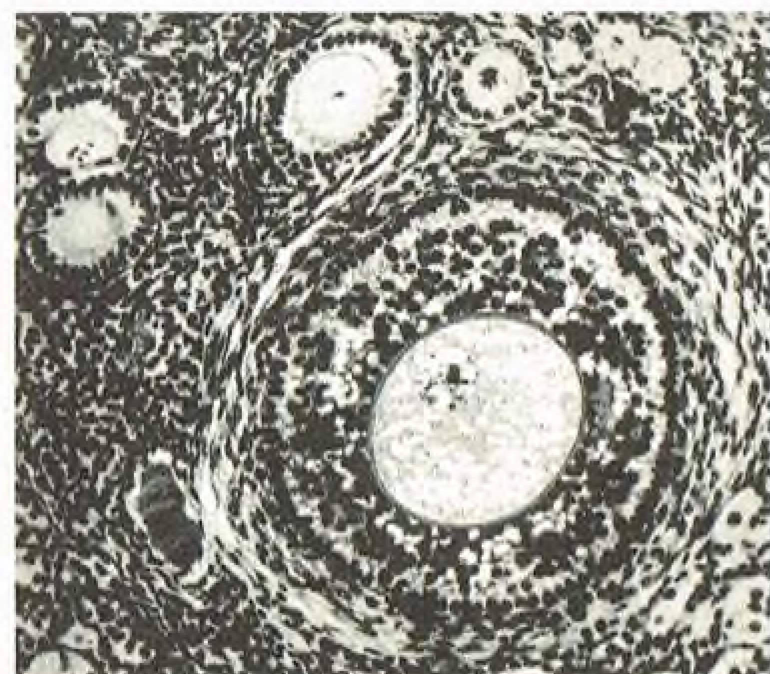
Inversión del sexo por las hormonas. — Es sabido que el sexo queda determinado en el momento de la fecundación. En los mamíferos, y en particular en el hombre, no hay más que una especie de óvulos producidos por la mujer, pero existen en cambio dos clases de espermatozoides que difieren por su estructura cromosómica: unos, uniéndose al óvulo, dan al desarrollarse machos, y los otros hembras. El sexo está, pues, determinado *genéticamente.* Sin embargo, se ha podido modificar el sexo actuando sobre un embrión joven.

Acción de la luz sobre el funcionamiento de los órganos genitales. — Está demostrado que la hipófisis puede ser excitada por la luz, por intermedio del ojo. Así, por ejemplo, queda explicado que las mujeres esquimales no tengan menstruaciones durante la larga noche polar.

Paul PORTIER



Esquema del ciclo menstrual. Evolución del folículo ovárico y de la mucosa uterina en la especie humana en los casos en que no se produce la fecundación del óvulo (período menstrual normal)



Corte de un folículo ovárico en un ovario de coneja (*Fot. L. Poilpot*)

índice alfabético

A

B

C

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE ALFABÉTICO

Impreso en los talleres gráficos de Sebastián de
Amorrortu e Hijos. Luca 2223, Buenos Aires.
IMPRESO EN LA ARGENTINA (*Printed in Argentine*)
Queda hecho el depósito que marca la ley Nº 11.723
Primera edición - B-14-7-73 - 7500 - 209765



